



# CARTA INFORMATIVA

No. 68  
Noviembre 2013  
Enero 2014

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA



- Richard Wilson: cuarenta años en la UAM
- Regla y compás vs origami
- La ENOAN a casi 24 años
- Manuela Garín Pinillos, a 100 años de su nacimiento

## Escuela de verano MSRI en topología algebraica 2014

30 de junio al 11 de julio de 2014 CIMAT, Guanajuato



Esta escuela es una experiencia altamente formativa para estudiantes de posgrado en topología algebraica, ya que tiene un formato muy interesante. Será en inglés y consistirá en 5 cursos dados por expertos y alrededor de 30 pláticas dadas por los mismos estudiantes de posgrado sobre artículos clásicos y de fundamentos en el área. Además habrá sesiones de problemas y un "job skills workshop". Los cursos serán los siguientes:

Mike Hill (Universidad de Virginia) : Curso por confirmar  
Andrew Blumberg (Universidad de Texas) : Participación por confirmar  
aún Jesús González (CINVESTAV) : Un punto de vista homotópico de la robótica  
Samuel Gitler (CINVESTAV) : Variedades tóricas.

La liga para el registro es el siguiente: <http://goo.gl/7mg87V>

Este link solamente es válido para estudiantes de instituciones mexicanas.

Para cualquier duda o pregunta, me pueden contactar en el email [cantarero@cimat.mx](mailto:cantarero@cimat.mx)

Muchas gracias y saludos, José Cantarero  
CIMAT, Guanajuato

## CLAIO Monterrey 2014 — XVII Latin-Iberian-American Conference on Operations Research

Dates 06 Oct 2014 10 Oct 2014

Location Monterrey, Mexico

### Abstract

We invite members of the ALIO and the worldwide Operational Research community to take part in the CLAIO/CSMIO 2014, to be held in Monterrey, Mexico, October 6-10, 2014. This joint conference consists of the XVII Latin-Iberian-American Conference on Operations Research (CLAIO), the biannual conference organized by the Latin-American Association of Operations Research Societies (ALIO), and the 3rd CSMIO, the annual conference organized by the Mexican Society of Operations Research (SMIO). The academic program will consist of parallel, technical and special sessions, plenary talks and tutorials covering several aspects of OR.

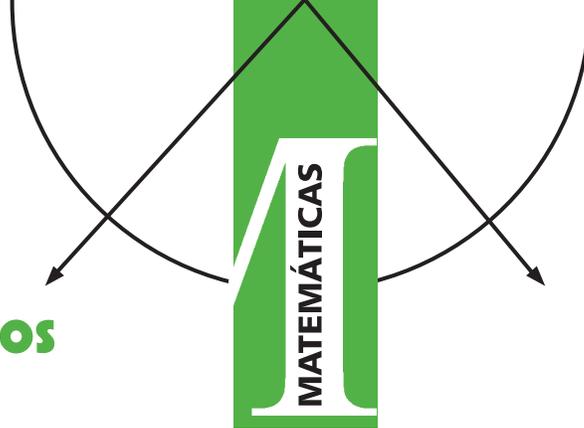
Weblink <http://pisis.fime.uanl.mx/clai02014>



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY®



## Richard Wilson: cuarenta años en la UAM

V.V. Tkachuk  
Departamento de Matemáticas,  
UAM-Iztapalapa  
vova@xanum.uam.mx

**R**ichard Gordon Wilson nació en Liverpool, Inglaterra el día 7 de noviembre de 1944. Aunque era muy chiquito para tener recuerdos de la Segunda Guerra Mundial, sí le tocó vivir las consecuencias de los bombardeos (en Reino Unido, solamente en Londres los bombardeos de Luftwaffe se llevaron más vidas que en Liverpool) y se acuerda muy bien del racionamiento de pan que duró hasta 1948 y de ropa que se suspendió hasta 1949.

En 1965 Richard terminó sus estudios de licenciatura con mención honorífica y empezó a hacer su doctorado en cosmología en la Universidad de Liverpool bajo la dirección del profesor Robert Boyer; sin embargo, en agosto de 1966, estando de viaje, el Dr. Boyer cayó víctima del “francotirador de Austin” que disparó desde la Torre de la Universidad de Texas en Austin matando a 11 personas e hiriendo a otras 38.

Ese trágico evento hizo que Richard se cambiara a la carrera de matemáticas con especialización en topología; terminó su doctorado en 1970 en la Universidad de Texas en Austin. Trabajó un año en la Universidad de Carleton en Ottawa, Canadá y tres años en la Universidad de Puerto Rico, en Mayagüez, para finalmente trasladarse a la Ciudad de México a trabajar en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa a partir de 1974.

No es una tarea fácil resumir los 40 años de vida y obra matemática del Dr. Wilson en el formato de este artículo. Lo primero que salta a la vista es su gran versatilidad y su espíritu interdisciplinario. Es impresionante la lista de las áreas de topología en las cuales publicó resultados fundamentales de importancia internacional. Dicha lista incluye:

- Espacios digitales y sus aplicaciones en computación.
- Espacios ordenables.
- Extensiones y expansiones conexas de espacios.
- Teoría de categorías.
- Espacios bitopológicos.
- Espacios irresolubles.
- Espacios discretamente generados y sus aplicaciones.

- Retículos de topologías.
- Aproximaciones espectrales de espacio topológicos.



En la primera década de su trabajo como matemático independiente publicó una docena de artículos sobre invariantes cardinales, espacios ordenados y teoría de categorías. Entre los resultados principales obtenidos en esa época cabe mencionar su caracterización de realcompacidad en términos de particiones de la unidad (1971). Otro resultado clásico es su teorema con el Dr. Hajek que estipula que cada espacio compacto es un límite inverso de espacios supercompactos (1973).

La década de los ochenta marca para el Dr. Wilson una etapa de trabajo sumamente intenso llevado a cabo tanto de

manera individual como en colaboración con diversos grupos de investigación. En 1981 realizó un estudio conjunto con los investigadores de Praga, Checoslovaquia demostrando que existen espacios radiales no secuenciales de estrechez numerable. Su colaboración con los topólogos de la UNAM resultó en el descubrimiento de condiciones suficientes para que un espacio linealmente ordenado tuviera un orden denso. En esa década el Dr. Wilson también colabora activamente con los grupos de investigación de City College de Nueva York, de la Universidad de Padova, Italia y con la Universidad de Sao Paulo, Brasil.

En los años noventa el Dr. Wilson siguió con una agenda muy amplia de colaboración con varios grupos internacionales de topología. Con los topólogos de Nueva York demostró en 1991 un análogo digital del teorema de Jordan para un espacio digital de tres dimensiones. En 1992 demostró, junto con M. Henriksen, un investigador californiano, que el espacio  $C(X)/P$  es un anillo de valuación para  $X$  si y sólo si lo es para  $\beta X$ . En 1993 publicó un trabajo fundamental con el topólogo canadiense S. Watson demostrando, entre otras cosas, que cualquier espacio métrico no localmente compacto en ninguna parte tiene una extensión conexa de Hausdorff. Como resultado de trabajo conjunto con el grupo de investigación del Área de Topología de la UAM, el Dr. Wilson demostró en 1996 que cada espacio con red numerable no compacto es subconexo.

A partir del 2000 el Dr. Wilson siguió trabajando en expansiones y extensiones conexas, en retículos de topologías y otros temas cultivados no sólo en México sino también en Estados Unidos, Brasil y Europa. Su resultado más destacado de esta época es la solución, junto con los miembros del grupo de topología de su Área y el Dr. I. Juhasz, un matemático húngaro, del Problema 162 de Open Problems in Topology que es la lista de problemas abiertos en topología de mayor prestigio en el mundo.

Sobra decir que todas las publicaciones del Dr. Wilson se dieron en revistas internacionales de alto prestigio, entre ellas *Fundamenta Mathematicae*, *Proceedings of the American Mathematical Society* y *Proceedings of the London Mathematical Society*.

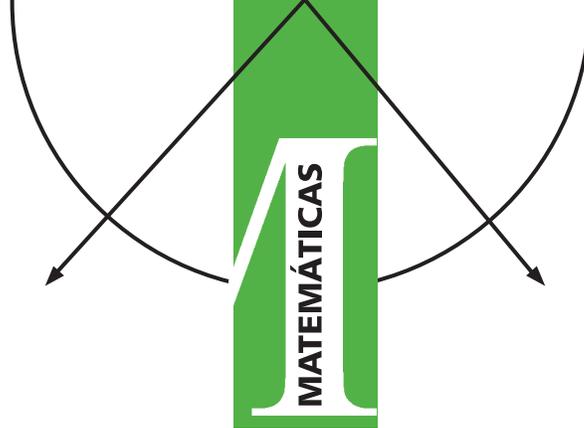
Hoy en día el Dr. Wilson sigue trabajando muy activamente. En el último año obtuvo resultados importantes sobre generabilidad y reflexividad discretas así como sobre propiedades maximales en espacios de Tychonoff. Además, nunca ha descuidado el trabajo con los estudiantes. Aparte de docenas de cursos de todos los niveles tanto en la UAM como en otras universidades, el Dr. Wilson ha dirigido cinco tesis de maestría y cinco de doctorado. Uno de sus ex alumnos de doctorado (dirigido conjuntamente con el Dr. Adalberto García-Máynez) es el Dr. Angel Tamariz Mascarúa que es investigador SNI nivel III, un líder internacional en  $C_p$ -teoría y quien ya tiene sus propios alumnos con doctorado.

Es impresionante también la lista de las actividades académicas y administrativas del Dr. Wilson. Fue Jefe del Área de Topología, Jefe del Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa, es miembro del Comité Editorial del Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana y trabajó en innumerables comisiones tanto de la UAM como del CONACyT y del SNI.

Actualmente, el Dr. Wilson es profesor Distinguido de la UAM e Investigador Emérito del SNI, Nivel III, tiene varios alumnos de posgrado y sigue colaborando con grupos de topólogos de México, Estados Unidos, Brasil y España.

Para concluir, vale la pena mencionar que Richard es una persona de ética intachable y altamente respetado tanto en el Departamento de Matemáticas de la UAM como en cualquier otro ámbito de sus actividades. Unos pequeños detallitos para ilustrar la versatilidad del Dr. Wilson: él toca piano, juega ajedrez y publicó dos libros de investigación sobre las aves de México.

El autor de esta nota, junto con todo el Departamento de Matemáticas, le extendemos al Dr. Wilson las más cordiales felicitaciones por su cumpleaños número setenta y su cuarenta aniversario de trabajo en la UAM.



# Regla y compás vs origami

Alejandro Aguilar-Zavoznik  
 Universidad Autónoma Metropolitana-  
 Azcapotzalco  
 aaz@correo.azc.uam.mx

## 1. Introducción

Contamos con varias herramientas para dibujar un triángulo equilátero. La primera opción es usar una regla graduada y transportador, sin embargo, ésta es una opción poco precisa, especialmente si la longitud de los lados no es un número entero de milímetros, por ejemplo  $71.73 \text{ mm}$ . Las construcciones que presentaremos a continuación son mejores en cuanto a su precisión. La primera construcción es usando un juego de escuadras sin graduación. Recordemos que la *escuadra* es la que tiene dos ángulos de  $45^\circ$  y uno de  $90^\circ$  y el *cartabón* es el que tiene tres ángulos distintos, de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ :

1. Trazamos un segmento de línea recta  $\overline{AB}$  cuya longitud sea igual a la de los lados del triángulo que queremos dibujar.
2. Colocamos la escuadra de tal forma que uno de sus lados quede alineado con  $\overline{AB}$ .
3. Emparejamos el lado  $\overline{AB}$  con el borde pequeño del cartabón de tal forma que el vértice de  $60^\circ$  coincida con el punto  $A$  y que dicho lado del cartabón quede sobre el segmento de recta.
4. Trazamos un segmento recto suficientemente grande sobre el lado inclinado del cartabón que empiece en  $A$ .
5. Sin quitar la escuadra, repetimos los pasos 3 y 4 pero ahora sobre  $B$ .
6. Sea el punto  $C$  la intersección de las rectas que encontramos en los pasos 4 y 5.
7. El triángulo  $\triangle ABC$  es equilátero.

En dibujo técnico es común agregar una acción entre los pasos 2 y 3 en donde separamos la escuadra de la línea que dibujamos en 1 para que el trazo sea más limpio.

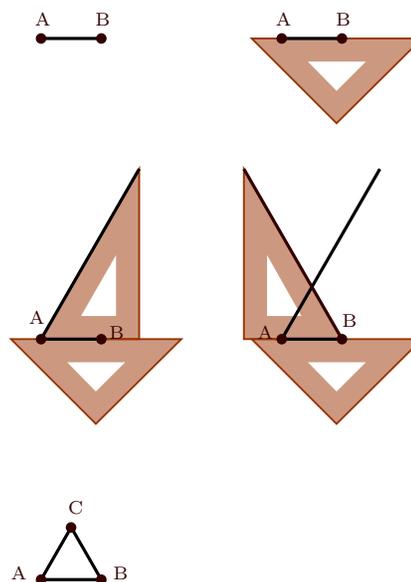


Figura 1: Construcción con escuadras de un triángulo equilátero

Otra opción que tenemos para dibujar un triángulo equilátero es usando una regla sin graduación y un compás:

1. Trazamos un segmento de recta  $\overline{AB}$  cuya longitud es igual a la de las aristas del triángulo equilátero deseado.
2. Abrimos el compás de tal forma que la distancia entre sus puntas sea igual a la longitud  $\overline{AB}$ .
3. Con esta abertura, dibujamos un círculo  $C_1$  con centro en  $A$  y otro con centro en  $B$  denotado  $C_2$ .
4. Existen dos intersecciones entre los círculos. Escogemos una de éstas y la denotamos con  $C$ .
5. El triángulo  $\triangle ABC$  es equilátero.

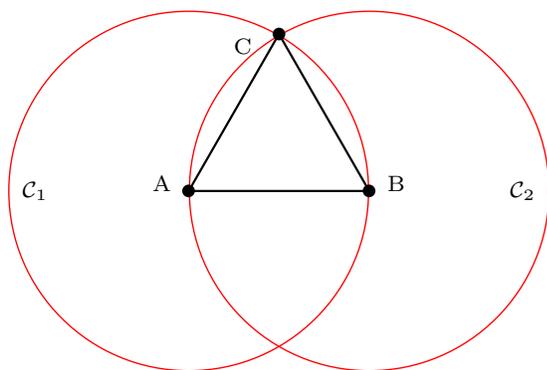


Figura 2: Construcción con regla y compás de un triángulo equilátero

Como vemos, los trazos con regla y compás pueden ser bastante sencillos y muy precisos.

Otra posibilidad con la que contamos es trazar este triángulo usando origami. El origami o papiroflexia es una disciplina tradicional japonesa que consiste en realizar figuras doblando papel, donde no se permite usar ninguna herramienta que no sean las manos y el papel, como por ejemplo, lápiz, pegamento o tijeras. A continuación daremos los dobleces necesarios para esto:

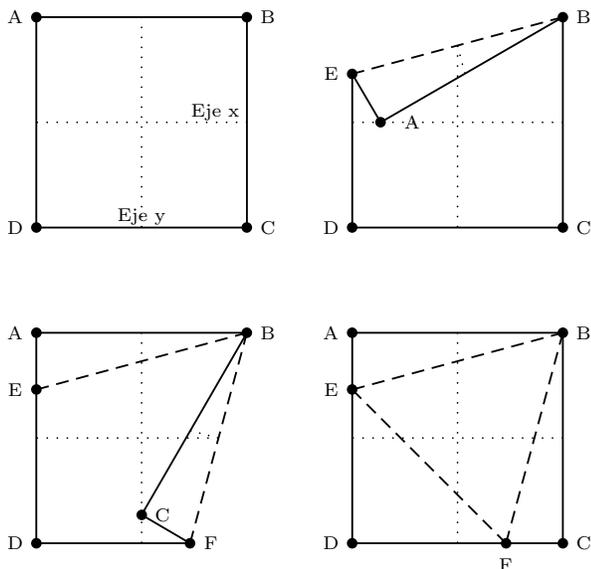


Figura 3: Construcción con origami de un triángulo equilátero

1. Tomemos una hoja de papel cuadrada. Etiquetemos las esquinas con las letras  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  como en la Figura 3.
2. Doblamos el papel a la mitad tanto en el eje horizontal como en el eje vertical de tal forma que la hoja quede dividida en cuatro cuadrados iguales. A dichos ejes los llamaremos eje  $x$  y eje  $y$  respectivamente.

3. Haremos un doblez de tal forma que el pliegue pase por  $B$  y la esquina  $A$  quede sobre el eje  $x$ . Denotemos al punto izquierdo del pliegue con la letra  $E$ .
4. Repetimos el paso 3, pero ahora haciendo coincidir la esquina  $C$  con el eje  $y$ , llamando al punto inferior de este segmento  $F$ .
5. Hacemos un doblez que pase por  $E$  y  $F$ .
6. El triángulo  $\triangle BEF$  es equilátero.

La figura obtenida con este procedimiento es el triángulo equilátero más grande que está contenido en la hoja cuadrada de papel que teníamos originalmente.

El objetivo de este trabajo es comparar las construcciones usando regla y compás con las que podemos hacer con origami desde una perspectiva algebraica. Veremos cómo podemos realizar operaciones usando estas dos herramientas y cuáles son todos los puntos en el plano que podemos encontrar con cada una de éstas. En particular, estudiaremos los siguientes tres problemas planteados por los griegos: la cuadratura del círculo, la duplicación de un cubo y la trisección de un ángulo. La cuadratura del círculo consiste en hallar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Si  $l$  es la longitud de cualquiera de las aristas de un cubo, el problema de duplicar un cubo se resuelve si se encuentra la longitud  $l'$  tal que el cubo con aristas de longitud  $l'$  tiene el doble del volumen del cubo original. Finalmente, trisecar un ángulo es dividirlo en tres partes iguales. Durante varios siglos no se supo si estos tres problemas se podían resolver usando únicamente una regla sin graduación y un compás. A lo largo de este trabajo presentaremos los resultados dados por Pierre Wantzel [26] y Ferdinand von Lindemann [18] para probar que ninguno de los tres problemas se puede resolver con estas herramientas, sin embargo, los problemas de la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo sí se pueden resolver si usamos origami, aunque la cuadratura del círculo sigue siendo insoluble con estas herramientas.

## 2. Construcciones con regla y compás

El estudio de las construcciones con regla y compás comenzó en la antigüedad. El texto más conocido en donde se estudian estos temas es “Los elementos” de Euclides [8], un escrito que a pesar de tener más de dos milenios sigue siendo usado para estudiar geometría.

Diremos que un procedimiento es una construcción con regla y compás si se realiza usando únicamente las siguientes acciones:

1. Dados dos puntos, se puede trazar el segmento de recta que va del primero al segundo.
2. Dados dos puntos, se puede considerar la recta infinita que pasa por ambos, o en términos prácticos, la porción de esta recta que queda sobre la hoja de papel que estamos usando.

3. Dado un punto y un segmento de recta podemos trazar un círculo que tiene como centro el punto dado y cuyo radio es la longitud del segmento de recta.
4. Dadas dos rectas, dos círculos o una recta y un círculo trazados usando las reglas anteriores, podemos marcar los puntos en los que se cortan las figuras, suponiendo que la intersección existe.

Las dos primeras reglas las podemos llevar a la práctica usando una regla sin graduación suficientemente grande, la acción número 3 se obtiene usando un compás. Los primeros tres axiomas de Euclides son equivalentes a estas tres construcciones. Los puntos en el plano obtenidos con la acción 4 los llamaremos *puntos construibles* con regla y compás o simplemente *puntos euclidianos*. Al conjunto de estos puntos lo denotaremos con la letra  $\mathbb{E}$ .

Antes de comenzar con la parte algebraica, veremos algunas construcciones geométricas que podemos realizar usando regla y compás.

## 2.1. El punto medio de un segmento

Supongamos que tenemos un segmento de recta  $\overline{AB}$ . Queremos encontrar el punto que lo divide en dos partes iguales. Lo que debemos hacer es algo parecido a la construcción del triángulo equilátero.

1. Abrimos el compás una longitud  $l$  arbitraria, que debe ser más grande que la mitad de la distancia entre  $A$  y  $B$ ; una opción que siempre funciona es usar la longitud del segmento  $\overline{AB}$ .
2. Trazamos dos círculos, ambos con radio  $l$  y cuyos centros son los puntos  $A$  y  $B$  respectivamente (acción 3).
3. Como elegimos la longitud  $l$  suficientemente grande, existen dos intersecciones entre estos dos círculos. Llamémoslas  $C$  y  $D$  (acción 4).
4. Trazamos el segmento  $\overline{CD}$  (acción 1).
5. La intersección entre  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  es el punto que queremos (acción 4).

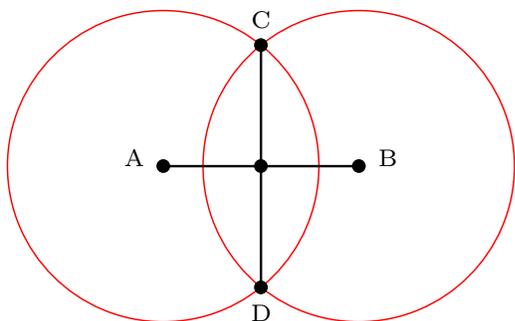


Figura 4: Punto medio de un segmento de recta

Usando geometría analítica podemos verificar que éste efectivamente es el punto medio entre  $A$  y  $B$  como lo haremos a continuación.

Para simplificar las operaciones, supongamos que  $A$  es el origen y que  $B$  está sobre el eje  $x$ , es decir, que sus coordenadas son:  $A(0, 0)$  y  $B(b, 0)$ . La longitud del segmento  $\overline{AB}$  es igual a  $b$ , así que el punto medio entre  $A$  y  $B$  es  $M\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ . Supongamos que hacemos caso a la recomendación al final del paso 1 de la construcción anterior y abrimos el compás de tal forma que la distancia entre sus puntas es  $b$ , así que el radio de los círculos es precisamente este valor. La recta que pasa por  $A$  y  $B$  tiene pendiente  $\frac{0}{b}$ , así que su ecuación es

$$y = 0 \quad (1)$$

y los círculos hallados en el paso 2 son:

$$x^2 + y^2 = b^2 \quad \text{y} \quad (x - b)^2 + y^2 = b^2.$$

Despejando  $y^2$  de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$(x - b)^2 + (b^2 - x^2) = b^2.$$

Con esto tenemos que la coordenada  $x$  de ambas intersecciones es  $\frac{b}{2}$  y sustituyendo en la ecuación del primer círculo:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = b^2,$$

de donde

$$y = \pm \sqrt{\frac{3b^2}{4}}.$$

Por lo tanto, las intersecciones entre los dos círculos son:

$$\left(\frac{b}{2}, \sqrt{\frac{3b^2}{4}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{b}{2}, -\sqrt{\frac{3b^2}{4}}\right).$$

Observemos que la recta que pasa por estos dos puntos es vertical y tiene ecuación

$$x = \frac{b}{2}. \quad (2)$$

La intersección de las rectas indicadas en (1) y (2) es  $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ , que precisamente es el punto medio  $M$  que queremos. A partir de ahora únicamente plantearemos los procedimientos para encontrar las construcciones deseadas, las demostraciones se pueden hacer usando geometría analítica elemental, como en este caso.

## 2.2. Rectas paralela y perpendicular que pasan por un punto dado

Un segundo problema: dados una recta  $\ell$  y un punto  $A$ , encontrar una recta paralela (o perpendicular) a  $\ell$  que pase por  $A$ . Primero trazaremos la recta perpendicular. Tenemos que considerar dos casos, el primero cuando el punto no está sobre la recta:

1. Abrimos el compás de tal forma que el círculo que dibujemos con esta herramienta centrado en  $A$  tenga dos intersecciones con la recta  $\ell$  y trazamos dicha circunferencia. Si esto no se cumple, simplemente hay que abrir más el compás.
2. Marcamos las dos intersecciones del círculo con  $\ell$ , etiquetándolas  $B$  y  $C$ .
3. Encontramos  $M$ , el punto medio de  $\overline{BC}$ .
4. La recta  $\ell_2$  que pasa por  $A$  y  $M$  es perpendicular a  $\ell$  y pasa por  $A$ .

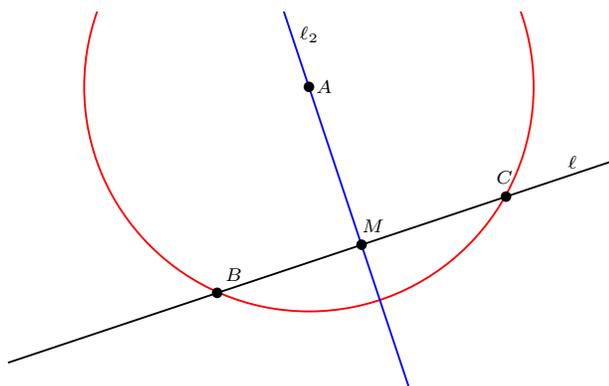


Figura 5: Recta perpendicular que pasa por un punto dado, primer caso.

Ahora, si el punto está sobre la recta, tenemos que modificar algunos pasos. Sean  $\ell$  la recta dada y  $A$  un punto sobre ésta:

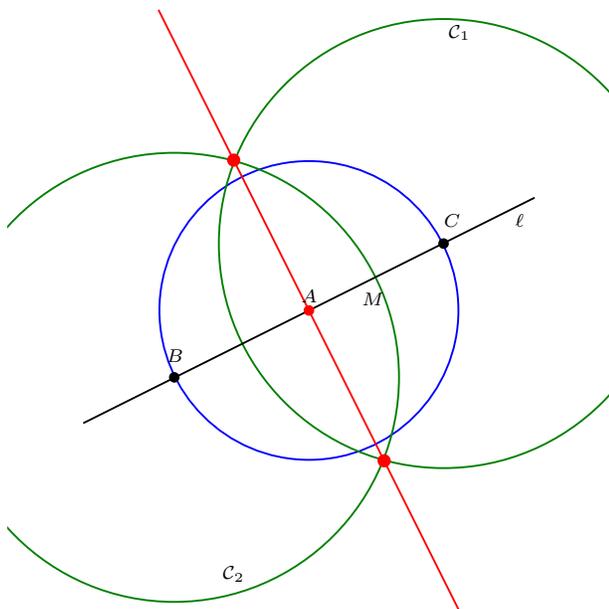


Figura 6: Recta perpendicular que pasa por un punto dado, segundo caso.

1. Trazamos un círculo de radio arbitrario con centro en  $A$ .
2. Llamemos  $B$  y  $C$  a las intersecciones del círculo con  $\ell$ .
3. Trazamos  $C_1$  y  $C_2$ , dos círculos con centro en  $B$  y  $C$  respectivamente y con un mismo radio suficientemente grande para que se corten. Como en otras construcciones, usar la longitud de  $\overline{BC}$  siempre funciona.
4. La recta que pasa por las dos intersecciones de  $C_1$  con  $C_2$  es perpendicular a  $\ell$  y pasa por  $A$ .

Para encontrar la recta paralela a  $\ell$  que pasa por  $A$  realizamos los siguientes pasos:

1. Realizamos el procedimiento anterior para obtener la recta perpendicular  $\ell_2$ .
2. Usamos el procedimiento nuevamente, pero ahora encontrando una recta perpendicular a  $\ell_2$  que pasa por  $A$ .
3. La recta  $\ell_3$  obtenida es paralela a  $\ell$  y pasa por  $A$ .

Para verificar que estos procedimientos son correctos, simplemente hay que usar geometría analítica, como en el caso del punto medio.

### 2.3. Polígonos regulares

Ya vimos cómo construir un triángulo equilátero usando regla y compás, de hecho, desde la escuela primaria nos enseñan a dibujar polígonos regulares usando estas herramientas. Por ejemplo, para dibujar un hexágono utilizamos el hecho de que si el polígono está inscrito en un círculo, el radio del círculo es igual a la longitud de los lados del hexágono. Así, abrimos

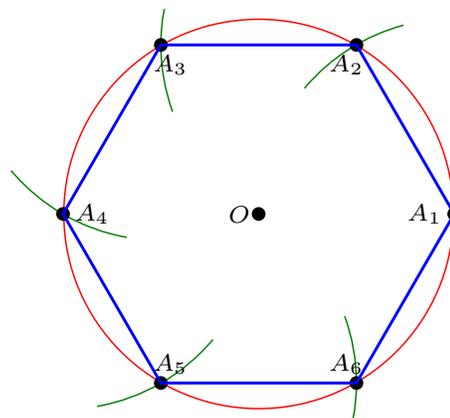


Figura 7: Hexágono regular con regla y compás.

el compás de tal forma que la distancia entre sus puntas sea  $r$ . Dibujamos un círculo con centro en el origen y radio  $r$ . Hacemos una marca  $A_1$  sobre el círculo y usando el compás, hacemos otras cinco marcas,  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ , de tal forma que la distancia entre éstas es  $r$ . Los seis puntos hallados forman un hexágono regular.

También es común que aprendamos a construir cuadrados, pentágonos y octágonos regulares. Sin embargo, no es posible hacer un heptágono usando solamente regla y compás. Se puede dar una aproximación de este último, tan buena que la diferencia entre las longitudes de los lados sea menor que el grosor de las líneas que estamos dibujando, pero si usamos geometría analítica para verificar si el heptágono es regular, vamos a encontrar que hay algunos lados que son un poco más largos o más cortos que el resto. Esto es debido al siguiente teorema en parte probado por Gauss [9] y en parte probado por Wantzel [26]:

**Teorema 1 (Gauss).** *Un polígono regular con  $n$  lados se puede construir usando regla y compás si y solamente si*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_t,$$

donde  $k \geq 0$ ,  $t \geq 0$  son enteros,  $p_1, \dots, p_t$  son primos de Fermat distintos y  $n > 2$  ( $t = 0$  significa que  $n = 2^k$ ).

Un primo de Fermat es un número primo de la forma  $p = 2^{2^u} + 1$ . A la fecha, únicamente se conocen cinco: 3, 5, 17, 257 y 65537, que corresponden a  $u = 0, 1, 2, 3, 4$ . Se cree que únicamente existe un número finito de primos de Fermat, pero esto es algo que no se ha podido demostrar. A pesar de esto, como  $k$  puede ser cualquier entero positivo, existe una infinidad de polígonos regulares que se pueden construir con regla y compás.

### 3. Operaciones algebraicas con regla y compás

Pierre Wantzel, en el siglo XIX, fue el primero en dar con precisión cuáles son los puntos del plano que podemos encontrar con regla y compás [26], recordemos que a este conjunto lo llamamos conjunto de los puntos euclidianos y lo denotamos por  $\mathbb{E}$ . De acuerdo al trabajo de Wantzel [26], no es posible encontrar la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo usando regla y compás. Cuarenta y cinco años después, Ferdinand von Lindemann demostró que  $\pi$  es un número trascendente [18], resultado que, junto con la caracterización de los puntos euclidianos que dio Wantzel, permitió probar que la duplicación del cubo no se puede obtener usando estas herramientas. Vale la pena mencionar que estas tres preguntas estuvieron abiertas desde la época de los griegos. En esta sección describiremos las operaciones algebraicas que podemos realizar con los elementos de  $\mathbb{E}$ .

Como no contamos con una regla graduada, es importante tener una referencia, por esto, para realizar operaciones con regla y compás es necesario tener un segmento de recta cuya longitud consideraremos que es igual a 1, de la misma forma que en los mapas se suele incluir una referencia para saber cuál es la escala que se está usando.

#### 3.1. Suma y resta

La suma y resta con regla y compás son bastante sencillas. Supongamos que tenemos dos segmentos de recta  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ .

Aunque las longitudes son positivas, podemos suponer que estos números son positivos o negativos, asignándoles un signo.

Para hacer estas operaciones trazamos una línea infinita arbitraria y marcamos un punto sobre ésta. Dicha recta la podemos considerar como la recta numérica y el punto es el cero, suponemos que esta recta es horizontal y que los números positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda, como la dibujamos usualmente. Primero colocamos el segmento  $\overline{AB}$  sobre la recta numérica:

1. Trazamos un círculo con centro en el punto cero y cuyo radio es igual a la longitud del segmento  $\overline{AB}$ .
2. Si el número es positivo consideremos la intersección del círculo del paso anterior con la recta numérica que está a la derecha del cero, si es negativo tomamos la intersección izquierda. A esta intersección la llamaremos  $E$ .
3. Trazamos un círculo con centro en  $E$  y con radio igual a la longitud  $\overline{CD}$ .
4. Si estamos sumando un número positivo o restando uno negativo, el punto  $F$  es la intersección del círculo del paso 3 con la recta numérica que se encuentra a la derecha de  $E$ . Si por el contrario, sumamos un número negativo o restamos uno positivo,  $F$  es la intersección que se encuentra a la izquierda de  $E$ .

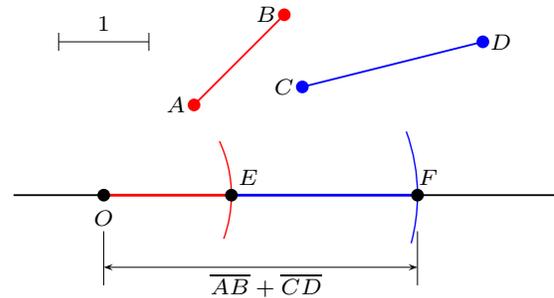


Figura 8: Suma con regla y compás.

5. La suma o resta de estos dos números es la distancia entre el origen y  $F$  con signo positivo si  $F$  está a la derecha de cero o con signo negativo si sucede lo contrario. Usamos la referencia unitaria para conocer el resultado.

En la figura 8, suponemos que ambos números son positivos.

El segmento de recta de longitud 1 que tenemos como referencia nos ayudará a medir la longitud del resultado.

#### 3.2. Multiplicación y división

Las operaciones de multiplicación y división son un poco más complicadas, pero siempre se pueden hacer. Empecemos por el producto. Vamos a suponer que ambos números son positivos, si esto no se cumple, hacemos las operaciones con los valores absolutos de los números, y usamos la regla de los

signos para, al final, decidir si el resultado es positivo o negativo. Supongamos que queremos multiplicar la longitud del segmento  $\overline{AB}$  por la de  $\overline{CD}$ :

1. Trazamos dos rectas  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , que se corten.
2. Al punto de intersección  $O$  lo consideraremos como el cero en ambas rectas.
3. Sean  $C_1$  el círculo con centro en  $O$  y radio la longitud  $\overline{AB}$  y  $C_2$  el círculo con centro en  $O$  y radio  $\overline{CD}$ .
4. El punto  $E_1$  es la intersección entre  $\ell_1$  y  $C_1$  que se encuentra a la derecha de  $O$  y  $E_2$  es el cruce entre  $\ell_2$  y  $C_2$  de este mismo lado.
5. Usando la referencia, dibujamos un círculo de radio 1 con centro en  $O$ . A la intersección de éste con la recta  $\ell_1$  que se encuentra a la derecha de  $O$  le llamaremos  $F$ .

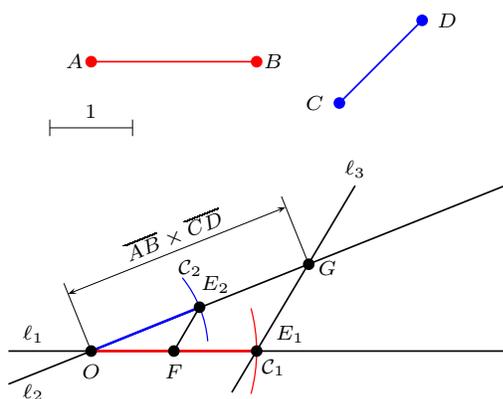


Figura 9: Producto con regla y compás.

6. Trazamos el segmento de recta que va de  $F$  a  $E_2$ .
7. Usando lo que ya estudiamos, trazamos la recta  $\ell_3$ , paralela al segmento  $\overline{FE_2}$  y que pasa por el punto  $E_1$ .
8. Sea  $G$  la intersección entre  $\ell_2$  y  $\ell_3$ .
9. El producto de  $\overline{AB}$  por  $\overline{CD}$  es la longitud del segmento  $\overline{OG}$ .

El lector puede verificar que si  $A = B$ , entonces  $\overline{AA} \times \overline{CD} = \overline{AA}$ .

La división es similar al producto, la diferencia es que en el paso 6, en lugar de tomar el segmento de  $F$  a  $E_2$  tomamos  $\overline{E_1E_2}$  y  $\ell_3$  es la recta paralela a este segmento que pasa por  $F$ . El resultado también es la longitud  $\overline{OG}$ .

En resumen, hemos demostrado que el conjunto  $\mathbb{E}$  es cerrado bajo sumas, restas, productos y divisiones con denominador distinto de cero. En pocas palabras,  $\mathbb{E}$  es un campo que contiene a  $\mathbb{Q}$ , pero ¿exactamente de qué campo estamos hablando? En la siguiente sección responderemos esta pregunta.

### 3.3. Raíz cuadrada

Sea  $\overline{AB}$  un segmento de recta y supongamos, como antes, que contamos con una referencia que nos indica la unidad. La siguiente construcción con regla y compás sirve para encontrar la raíz cuadrada de un segmento de signo positivo:

1. Sea  $O$  el origen.
2. Trazamos una recta que pasa por  $O$  y cualquier otro punto arbitrario. Supongamos que esta recta es horizontal y llamémosla eje  $x$ . El eje  $y$  es la recta perpendicular al eje  $x$  que pasa por el origen. De esta forma tenemos una referencia para hablar del plano cartesiano construido con regla y compás.

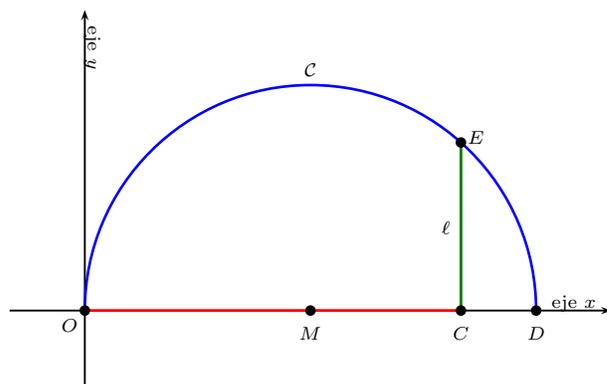


Figura 10: Raíz cuadrada con regla y compás.

3. Sea  $C$  el punto de intersección entre el eje  $x$  y el círculo en  $O$  cuyo radio es igual a la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . Las coordenadas de  $C$  son  $(c, 0)$ , donde  $c$  es la longitud de  $\overline{AB}$ .
4. El punto  $D(c + 1, 0)$  es la intersección del círculo con centro en  $C$  y radio igual al segmento de longitud 1.
5. El punto medio del segmento  $\overline{OD}$  tiene coordenadas  $M\left(\frac{c+1}{2}, 0\right)$ .
6. Tracemos el círculo  $\mathcal{C}$  con centro en  $M$  y radio igual a  $\overline{OM}$ . En realidad podemos trazar únicamente el semicírculo superior.
7. Sea  $\ell$  la línea que pasa por el punto  $C$  y es perpendicular al eje  $x$ .
8. Marcamos el punto  $E$  que es la intersección en el primer cuadrante de  $\mathcal{C}$  con  $\ell$ .
9. La longitud del segmento  $\overline{CE}$  es igual a la raíz cuadrada de  $c$ .

De nuevo, para demostrar que la longitud encontrada es la raíz cuadrada deseada, podemos usar geometría analítica. Las ecuaciones del círculo  $\mathcal{C}$  y la recta  $\ell$  son:

$$\left(x - \frac{c+1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad x = c.$$

Sustituyendo la segunda en la primera obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(c - \frac{c+1}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 \\ y^2 &= \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= c \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas de  $E$  son  $(c, \sqrt{c})$  y la distancia entre  $C$  y  $E$  es  $\sqrt{c}$ .

De esta forma, el conjunto de los puntos euclidianos  $\mathbb{E}$  contiene a los elementos cuyas coordenadas se pueden obtener a partir de los números racionales aplicando las operaciones suma, resta, multiplicación, división (con el denominador distinto de cero) y raíz cuadrada de un número no negativo. Esto incluye la raíz cuarta, la raíz octava y en general la raíz de grado  $2^k$  para cualquier entero  $k > 0$ , pues

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{\sqrt{c}}, \quad \sqrt[8]{c} = \sqrt{\sqrt[4]{c}}, \quad c^{1/(2^{k+1})} = \sqrt{c^{1/(2^k)}}.$$

Además, podemos construir números como:

$$\frac{2 + \sqrt[4]{5^{3/4} - 3^{5/16}}}{\frac{2}{7} - \sqrt{4 + \sqrt{\frac{4}{11}}}}$$

o algunas funciones trigonométricas evaluadas en ciertos valores como

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

El siguiente teorema nos indica que de hecho, los puntos construibles con regla y compás son precisamente los que podemos hacer con estas cinco operaciones.

**Teorema 2 (Wantzel).** *Sea  $A(a_1, a_2)$  un punto en el plano cartesiano.*

1.  $A \in \mathbb{E}$  si y sólo si  $a_1, a_2$  son construibles con regla y compás.
2. Un número real  $c$  es construible con regla y compás si y sólo si se obtiene al aplicar a algunos números racionales las operaciones suma, resta, multiplicación, división con denominador distinto de cero y raíz cuadrada de un número positivo.

El teorema de Wantzel está incluido en casi cualquier libro de teoría de Galois, por ejemplo, en [5], [7], [20] y [23]. Éste se puede utilizar para demostrar que no es posible resolver los tres problemas griegos. Si tenemos un círculo de radio  $r = 1$ , su área es  $\pi$ . No podemos encontrar, usando únicamente regla y compás, un cuadrado cuya área sea  $\pi$  pues esto implica poder dibujar  $\pi$ , que es un número que no se puede expresar usando únicamente las cinco operaciones permitidas ya que es trascendente. Por lo tanto, la cuadratura del círculo es un problema que no se puede resolver usando regla y compás.

Un cubo cuyos lados miden  $1\text{cm}$  tiene volumen  $1\text{cm}^3$ . La duplicación del cubo consiste en poder dibujar con regla y compás la longitud de las aristas de un cubo cuyo volumen es el doble de  $1\text{cm}^3$ , dichas aristas miden  $\sqrt[3]{2}\text{cm}$ , que es un número que no se puede dibujar usando regla y compás. Por lo tanto, la duplicación de un cubo no es soluble con estas herramientas.

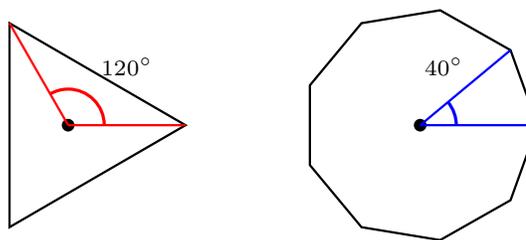


Figura 11: Imposibilidad de trisecar un ángulo.

Finalmente, el teorema de Gauss nos ayuda a ver que no es posible trisecar un ángulo arbitrario usando regla y compás. Consideremos el círculo unitario con centro en el origen. Si tenemos un polígono regular con  $n$  lados inscrito en el círculo, podemos tomar un triángulo cuyos vértices son dos extremos de un lado del polígono y el origen. El ángulo que se forma en el origen mide  $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ . Por el teorema de Gauss, podemos dibujar con regla y compás el polígono regular de 3 lados, pero no podemos hacer el de 9 lados, es decir,  $\frac{360}{3} = 120^\circ$  es un ángulo construible pues es el ángulo que se forma con dos vértices del triángulo y el centro del círculo, mientras que  $\frac{360}{9} = 40^\circ$  no se puede hacer usando regla y compás, pues si este ángulo fuera construible el nonágono también lo sería. Por lo tanto, existen ángulos que no se pueden trisecar.

## 4. Solución geométrica de ecuaciones cuadráticas

De acuerdo al teorema de Wantzel, siempre es posible encontrar la solución de una ecuación cuadrática usando regla y compás. Sea  $f(x) = x^2 - ax + b = 0$  una ecuación cuadrática arbitraria donde  $a$  y  $b$  son reales construibles. Podemos suponer que  $a$  es positivo, si esta condición no se cumple, tomemos  $g(x) = f(-x) = x^2 + ax + b$ . Si  $f(r_1) = f(r_2) = 0$ , entonces  $g(-r_1) = g(-r_2) = 0$ . De esta forma, si  $a$  es negativo, resolvemos la ecuación cuadrática  $g(x)$  que tiene coeficiente negativo en el término de grado uno y si conocemos las soluciones de  $g(x)$  también conocemos las de  $f(x)$ . Supongamos que  $|b| = c^2$ . Como  $b$  es construible,  $c$  también lo es usando el procedimiento para calcular la raíz cuadrada con regla y compás. Estudiaremos dos casos, el primero, si la ecuación es

$$x^2 - ax + c^2 = 0.$$

Si el polinomio tiene raíces reales, éstas son:

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2},$$

donde  $\sqrt{a^2 - 4c^2} \leq a$ , así que ambas son no negativas. Supongamos que tenemos un par de rectas perpendiculares correspondientes a los ejes coordenados y su intersección es el origen.

1. Dibujemos el círculo de radio  $a$  con centro en el origen y llamemos  $A$  y  $B$  a las intersecciones del círculo con el eje  $x$ .

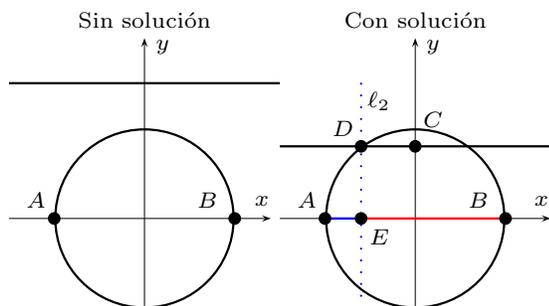


Figura 12: Solución de ecuaciones cuadráticas, primer caso.

2. Sea  $C$  el punto de intersección del círculo de radio  $c$  con centro en el origen y el eje  $y$  que se encuentra entre el primer y el segundo cuadrante.
3. Trazamos la línea  $\ell_1$  perpendicular al eje  $y$  que pasa por  $C$ .
4. Si la recta y el círculo no se cortan, significa que la ecuación cuadrática no tiene solución. En caso contrario, sea  $D$  una de las intersecciones entre  $\ell_1$  y el círculo.
5. Tracemos  $\ell_2$ , perpendicular a  $\ell_1$  que pasa por  $D$  y sea  $E$  la intersección de  $\ell_2$  con el eje  $x$ .
6. Las soluciones son ambas positivas y son iguales a las longitudes de los segmentos  $\overline{AE}$  y  $\overline{BE}$ .

Observemos que si las dos soluciones son iguales, entonces la recta  $\ell_1$  es tangente al círculo; si la recta corta al círculo en dos puntos, las soluciones son distintas y si no hay intersección, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

El segundo caso es:

$$x^2 - ax - c^2 = 0.$$

De nuevo, supongamos que contamos con los ejes  $x$  y  $y$ :

1. Sean  $A$  la intersección del eje  $x$  con el círculo de radio  $a/2$  con centro en el origen y  $B$  la intersección del eje  $y$  con el círculo de radio  $c$ . En ambos casos se toma el lado positivo de los ejes.
2. Encontramos el punto  $C(a/2, c)$  usando los puntos  $A, B$  y rectas perpendiculares.

3. Trazamos el círculo  $\mathcal{C}$  con centro en el origen y radio igual a la longitud del segmento  $\overline{OC}$ .
4. Sean  $D$  y  $E$  las intersecciones de  $\mathcal{C}$  con el eje  $x$ , donde  $D$  es la que tiene coordenada  $x$  negativa y  $E$  la que es positiva.
5. Las soluciones de la ecuación son las longitudes de  $\overline{AD}$  y  $\overline{AE}$ , la primera con signo positivo y la segunda con signo negativo.

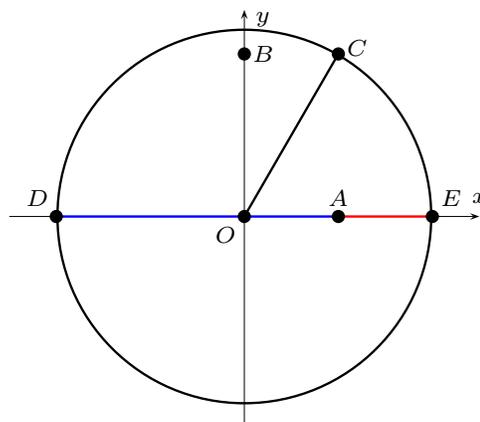


Figura 13: Solución de ecuaciones cuadráticas, segundo caso.

En este caso, el discriminante de la ecuación cuadrática es

$$\Delta = a^2 + 4c^2 > 0,$$

así que la ecuación siempre es soluble. Los signos de las raíces son distintos pues el término independiente de la ecuación es negativo, lo que implica que el producto de las dos soluciones es negativo. La raíz negativa es la que tiene el valor absoluto más pequeño debido a que el signo del coeficiente de  $x$  es negativo.

De esta forma concluimos el estudio de las construcciones con regla y compás. A continuación veremos resultados similares usando origami, lo que, además, es equivalente a hacer construcciones usando regla, compás y adicionalmente permitiendo trazar parábolas, hipérbolas y elipses.

## 5. Construcciones con cónicas

Hasta ahora hemos visto que basta con tener cinco operaciones para dar las coordenadas de todos los puntos que se pueden construir con regla y compás, pero nos podemos preguntar ¿Qué sucede si agregamos una operación más? A partir de ahora, vamos a permitir una sexta: la raíz cúbica. C. Videla demostró el siguiente teorema [25]:

**Teorema 3 (Videla).** *Sea  $A(a_1, a_2)$  un punto en el plano cartesiano y  $\mathbb{O}$  el conjunto de puntos que se pueden encontrar a partir de intersecciones de rectas, círculos, parábolas, hipérbolas y elipses.*

1.  $A \in \mathbb{O}$  si y sólo si  $a_1$  y  $a_2$  se pueden construir usando estas cinco figuras.
2. Un número real  $c$  es construible usando regla, compás y cónicas si y sólo si se obtiene al aplicar las operaciones suma, resta, multiplicación, división entre un número distinto de cero, raíces cuadradas de números positivos y raíces cúbicas, a números racionales.

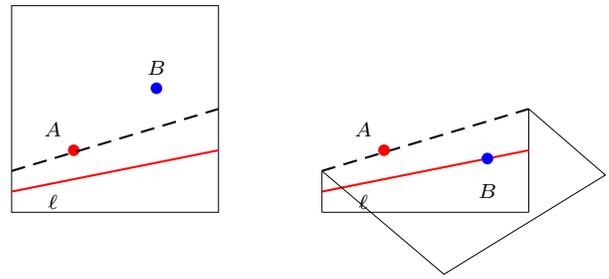


Figura 16: Quinto axioma de Huzita [13].

## 6. Construcciones con origami

Fue R. Alperin [1], inspirado en el resultado de Videla así como en [6], [14], [16], [24] quien encontró que  $\mathbb{O}$  también es el conjunto de puntos que se pueden obtener a partir de los siguientes seis axiomas:

1. Construir una línea que une dos puntos.
2. Encontrar la intersección de dos líneas.
3. Construir la mediatriz de un segmento de recta.
4. Construir la línea que biseca un ángulo dado.
5. Dados dos puntos,  $A, B$  y una línea  $\ell$ , encontrar cuando sea posible la línea que pasa por  $A$  y hace que  $B$  quede sobre  $\ell$  al hacer una reflexión simétrica sobre ella.
6. Dados dos puntos  $A, B$  y dos líneas  $\ell_1, \ell_2$ , encontrar cuando sea posible la línea que hace que  $A$  quede sobre  $\ell_1$  y  $B$  sobre  $\ell_2$  al hacer una reflexión simétrica sobre ella.

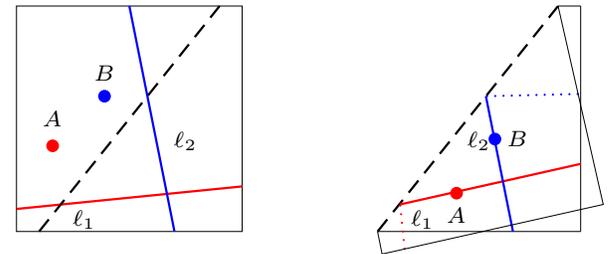


Figura 17: Sexto axioma de Huzita [13].

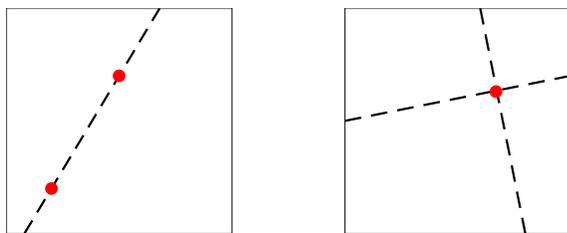


Figura 14: Primero y segundo axiomas de Huzita [13].

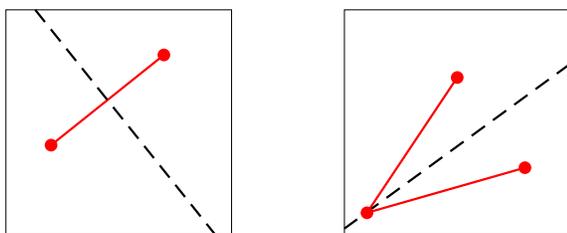


Figura 15: tercer y cuarto axiomas de Huzita [13].

Éstos son conocidos como los axiomas de Huzita [13], aunque Jacques Justin en [15], dándole crédito parcial a Peter Moser,

también los descubrió de forma independiente, incluyendo un séptimo axioma que no necesitamos en nuestra presentación.

Al conjunto  $\mathbb{O}$  lo llamaremos conjunto de *puntos origami*. De esta forma el teorema 3 también describe los puntos que podemos hallar usando los axiomas de Huzita. Para realizar el doblez del quinto axioma, sujetamos la hoja dejando el dedo sobre el punto  $A$  y empezamos a doblar de tal forma que giramos alrededor de  $A$  moviendo el punto  $B$  hasta que coincide con  $\ell$ . En el caso del sexto axioma, colocamos el punto  $A$  sobre  $\ell_1$  y empezamos a desplazarlo a lo largo de la línea hasta que  $B$  quede sobre  $\ell_2$ . No siempre es posible hacer estos dos dobleces. Existen configuraciones de puntos y rectas para los cuales el quinto o el sexto axioma no se pueden hacer, así como en las construcciones con regla y compás la intersección de una recta con un círculo no siempre existe, por esto incluimos las palabras “cuando sea posible”.

Supongamos que tenemos un punto  $A$  y un segmento de recta  $\overline{BC}$ . El siguiente procedimiento nos permite dar un segmento paralelo a  $\overline{BC}$  que empiece en  $A$ . Primero supongamos que  $A$  no está en la línea infinita que pasa por  $B$  y  $C$ .

1. Usando el axioma 1 construimos el triángulo  $\triangle ABC$ .
2. Encontramos la mediatriz de los tres lados del triángulo con el axioma 3.
3. A la intersección de las mediatrices con el lado opuesto a los vértices  $A, B, C$  los llamamos  $A', B', C'$  respectivamente.
4. Usando la mediatriz, encontramos  $D$  que es el punto medio entre  $A$  y  $C'$ .
5. Sean  $\ell_1$  la línea que pasa por  $A'$  y  $C'$  y  $\ell_2$  la que pasa por  $B'$  y  $D$ .



## 6.1. Raíz cúbica

En lugar de detallar cómo se encuentra la raíz cúbica de un número usando origami, vamos a estudiar cómo encontrar una raíz real de

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

con  $a, b, c \in \mathbb{O}$ :

1. Usando rectas perpendiculares construimos los ejes  $x$  y  $y$ .
2. Marcamos los puntos  $A(a, 1)$ ,  $B(c, b)$ ,  $C(-c, 0)$  y  $D(0, -1)$ .
3. Trazamos la recta paralela al eje  $y$  que pasa por el punto  $C$  llamándola  $\ell_1$  y la recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $D$  denotándola  $\ell_2$ , cuyas ecuaciones son  $x = -c$  y  $y = -1$  respectivamente.
4. Usando el axioma 6, encontramos la recta que hace que  $A$  quede sobre  $\ell_2$  y  $B$  quede sobre  $\ell_1$ , etiquetándola como  $\ell_3$ .
5. La pendiente de  $\ell_3$  es una raíz de la ecuación cúbica.

El procedimiento anterior funciona para encontrar la raíz cúbica de  $-c$  tomando  $a = b = 0$  y considerando que la ecuación  $x^3 = -c$  tiene una única raíz real, que es precisamente  $\sqrt[3]{-c}$ . Notemos que la pendiente la podemos medir usando las intersecciones de la recta  $\ell_3$  con los ejes  $x$  y  $y$ .

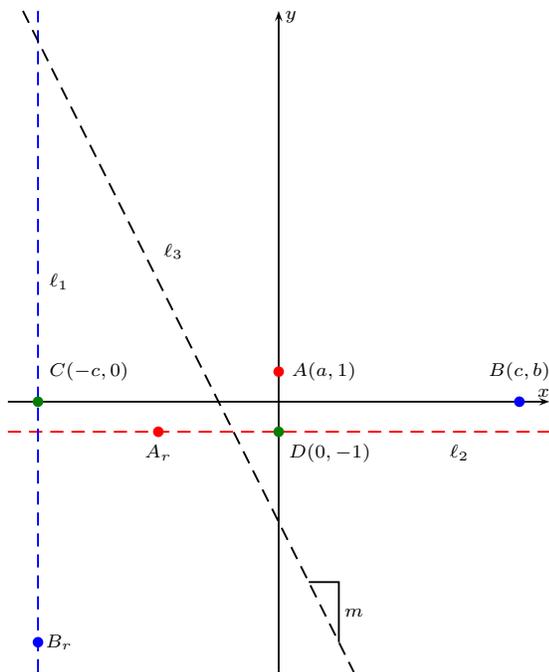


Figura 21: Solución de ecuaciones cúbicas usando origami.

Como ejemplo, en la Figura 21 tenemos el doblez que nos permite encontrar  $\sqrt[3]{-8}$ , es decir, donde los coeficientes de la ecuación cúbica son  $a = b = 0$ ,  $c = 8$ . Los puntos  $A_r$  y  $B_r$  son el reflejo de  $A$  y  $B$  respectivamente después de hacer el doblez. La pendiente  $m = -2$  es la solución de la ecuación.



## 7. Los tres problemas griegos con origami

La cuadratura del círculo tampoco se puede resolver usando origami. Como  $\pi$  es un número trascendente [18], entonces no se puede obtener usando las seis operaciones permitidas.

Por otro lado, la duplicación del cubo sí es soluble. Si la longitud de las aristas del primer cubo mide  $l$ , entonces las aristas del cubo con doble volumen miden  $\sqrt[3]{2}l$ , el cual es un número construible con origami.

Para realizar la trisección de un ángulo usando origami aplicamos el siguiente procedimiento:

1. En una hoja cuadrada de papel marquemos el ángulo que queremos dividir en la esquina inferior izquierda.
2. Doblemos la parte inferior del papel dos veces para marcar dos líneas horizontales de tal forma que la distancia entre el lado inferior del papel y la primera línea sea igual que la distancia entre los dos dobleces. Denotémoslas  $\ell_1$  y  $\ell_2$ .
3. Llamemos  $A$  a la esquina inferior derecha del papel y  $B$  a la intersección del borde izquierdo del papel con  $\ell_2$ .
4. Usando el axioma 6, hagamos el doblez donde  $A$  queda sobre  $\ell_1$  y  $B$  quede sobre la recta que marca el ángulo que queremos trisecar.
5. Sea  $C$  el punto sobre  $\ell_1$  en donde quedó  $A$  después de doblar y  $D$  la intersección de  $\ell_1$  con el doblez del paso anterior.
6. Las rectas  $\overline{AC}$  y  $\overline{AD}$  dividen al ángulo en tres partes iguales.

Por lo anterior, cualquier ángulo construible se puede trisecar usando origami.

## 8. Polígonos regulares usando origami

Así como Gauss encontró los polígonos regulares que se pueden hacer usando regla y compás, Videla dio un resultado análogo para las construcciones con cónicas, el cuál también es válido para las construcciones con origami:

**Teorema 4.** *Un polígono regular con  $n$  lados se puede construir usando origami si y sólo si*

$$n = 2^k 3^r \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_t,$$

en donde  $k, r \geq 0$ ,  $t \geq 0$  son enteros,  $p_1, \dots, p_t$  son primos de Pierpoint distintos y  $n > 2$ .

Los primos de Pierpoint son de la forma  $p = 2^k 3^r + 1$ . Observemos que todos los primos de Fermat también son de Pierpoint. No se sabe cuántos primos del segundo tipo hay, pero, a diferencia de los primeros, se conjetura que hay una

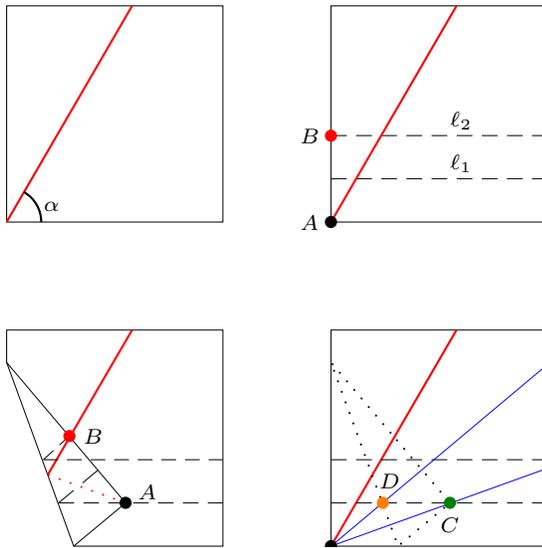


Figura 22: Trisección de un ángulo.

infinidad.

**Agradecimientos.** Agradezco los comentarios del árbitro, pues ayudaron a mejorar la versión final de este trabajo.

## Bibliografía

- [1] Alperin, R. C., A mathematical theory of origami constructions and numbers, *New York J. Math.* **6** (2000), 119–133.
- [2] Alperin, R. C., Página personal de Roger C. Alperin (1998), disponible en [www.math.sjsu.edu/~alperin/](http://www.math.sjsu.edu/~alperin/)
- [3] Alperin, R., Lang, R., One-, two-, and multi-fold origami axioms, *Origami<sup>4</sup>, International Meeting of Origami in Science, Mathematics and Education*. R. Lang, ed., AK Peters, Natick, MA, (2009), 371–393.
- [4] Artículo de la wikipedia en inglés sobre los axiomas de Huzita-Hatori (2003–1024), disponible en [en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori\\_axioms](http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori_axioms)
- [5] Artin, E., *Modern higher algebra, Galois theory*, New York University, 1947.
- [6] Auckley, D., Cleveland, J., Totally real origami and impossible paper folding, *Amer. Math. Monthly*, **102**, (1995), 215–226.
- [7] Cox, D., *Galois theory*, John Wiley & sons, 1989.
- [8] Euclid, The thirteen books of Euclid’s Elements, translated from the text of Heiberg, with introd. and commentary by Sir Thomas L. Heath, vol. 1, 2, 3, Dover Publications, 2nd edition, 1956.
- [9] Gauss C. F., *Disquisitiones Arithmeticae*, traducción al español hecha por H. Barrantes Campos, M. Josephy y A. Ruiz Zúñiga, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Santa Fe de Bogotá, D.C., 1995.
- [10] Hatori, Koshiro, K’s Origami, (2010), disponible en [origami.ousaan.com](http://origami.ousaan.com)
- [11] Hull, T., Página personal de Thom Hull (2013), disponible en [mars.wne.edu/~thull/](http://mars.wne.edu/~thull/)
- [12] Hull, T., Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill, *Amer. Math. Monthly*, **118**, no. 4, (2011), 307–315.
- [13] Huzita, H., The algebra of paper folding, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Humiaki Huzita, ed., (1989), 215–222.
- [14] Johnson, D.A., Paper folding for the mathematics class, *National Council of Teachers of Mathematics*, Washington, 1957.
- [15] Justin, J., Resolution par le pliage de l’équation du troisième degré et applications géométriques *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Humiaki Huzita, ed., (1989), 251–261.
- [16] Klein, F., *Famous problems of elementary mathematics*, Dover, 1957.
- [17] Lang, R. J., Página personal de Robert J. Lang (2004), disponible en [www.langorigami.com/science/science.php](http://www.langorigami.com/science/science.php)
- [18] Lindemann, F., Über die Zahl  $\pi$ , *Math. Ann.*, **20**, no. 2, (1882), 213–225.
- [19] Literka, Construction of roots of quadratic equation with ruler and compass, disponible en [www.literka.addr.com/mathcountry/roots.htm](http://www.literka.addr.com/mathcountry/roots.htm)
- [20] Morandi, P., *Field and Galois theory*, Springer-Verlag, 1996.
- [21] Royo Prieto, J.I., Matemáticas y papiroflexia, *Sigma: Revista de Matemáticas*, **21**, (2002), 175–192.
- [22] Santa Ramírez, Z. M., Jaramillo López, C. M., Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas, *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, **31**, (2010), 338–362.
- [23] Stewart, I., *Galois theory*, Chapman and Hall, 1973.
- [24] Sundara Row, T., Geometric exercises in paper folding, *Open Court*, 1941.
- [25] Videla, C. R., On points constructible from conics, *Mathematical Intelligencer*, **19** (1997), 53–57.
- [26] Wantzel, P. L., Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1** (2), (1837), 366–372.



## La ENOAN a casi 24 años

**Dr. Humberto Madrid de la Vega**  
Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas,  
Universidad Autónoma de Coahuila  
hmadrid@gmail.com

**E**n abril de 2014 se celebrará la XXIV edición de la ENOAN (Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico) en el CIMAT, en Guanajuato, Gto. Sirvan estas notas como una semblanza de la historia de este importante evento.

### Los inicios

En el año de 1991, posiblemente en marzo o abril, nos encontramos en el CIMAT Jesús López Estrada de la Facultad de Ciencias de la UNAM y un servidor trabajando en un proyecto conjunto. Al mismo tiempo, en el mismo CIMAT, se celebraba una Escuela de Sistemas Dinámicos, organizada por Xavier Gómez Mont. A esta última asistía Guillermo López Mayo de la FCFM de la BUAP. Guillermo se mostraba entusiasmado con esa Escuela y nos propuso que organizáramos algo similar con temáticas de Optimización y Análisis Numérico, lo cual tenía sentido pues ya había gente trabajando en Optimización Numérica. En esa época había pocos eventos relacionados con estos temas y los que había eran especializados, la idea de una escuela nos pareció interesante. Por supuesto esta era una tarea complicada. Para empezar no sabíamos la respuesta que podría tener la convocatoria al evento. Necesitábamos recursos, un lugar para realizarla y convencer a otros colegas para que participaran como instructores, conferencistas o ponentes. De forma natural pensamos que la sede podría ser el propio CIMAT, así que hablamos con el entonces director José Ángel Canavati quien nos ofreció las instalaciones y el CIMATEL para el hospedaje. También platicamos con Xavier Gómez Mont quien nos animó y nos ofreció apoyo para becas. Debemos también recordar que en esa época no había Internet, ni correo electrónico, vaya, ni siquiera contábamos con fax.

En 1991, del 7 al 11 de octubre, se realizó la primera edición de la Escuela de Análisis Numérico y Optimización, se ofrecieron 4 cursos (uno de ellos sobre MATLAB, el primero que se ofreció en el país), 3 conferencias y se presentaron 9 trabajos. La asistencia fue de 52 personas provenientes de 17 instituciones (dos de ellas extranjeras). Los contingentes más numerosos fueron de Sonora, Puebla, Coahuila y la UNAM.

El evento fue un éxito. Al final se realizó una sesión de evaluación y se acordó tratar de seguir con la Escuela. La segunda edición se realizó, con éxito creciente, en junio de 1992 en el mismo CIMAT que generosamente nos dio el apoyo necesario, a ella concurren 81 personas de 13 instituciones. En 1993 la Escuela sale del CIMAT y la tercera Escuela se realizó en la Universidad Autónoma de Coahuila, ubicada en Saltillo, en noviembre de 1993, para este evento se contó con apoyo de la SEP y de la Sociedad Matemática Mexicana quien desde entonces ha mantenido el apoyo. La asistencia fue de 80 participantes de 16 instituciones nacionales y 2 extranjeras.

En vista del éxito obtenido se realiza la cuarta edición en junio de 1994, en la BUAP en Puebla. Para esta ocasión el nombre del evento cambia a Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico (ENOAN).

Desde entonces se ha organizado la ENOAN para promover estas áreas a nivel nacional, ayudando a actualizar a los profesores e investigadores de universidades de provincia, así como estimular el interés de los estudiantes, intentando con esto lograr la vinculación de las Matemáticas Aplicadas con la ingeniería, la industria y el sector productivo. En cada ENOAN se ofrecen becas a estudiantes participantes y en ocasiones a profesores, lo cual ha contribuido a tener un público proveniente de diversas instituciones del país. En cada evento, a manera de clausura hay una sesión de evaluación que ha servido para ubicar fallas y corregirlas, también nos ha permitido detectar las inquietudes de los estudiantes. En esta sesión los estudiantes pueden sugerir temas para la siguiente edición. De esta manera se fueron incorporando temáticas afines como, aproximación, cómputo científico, biomatemáticas, estadística y otras más. Puesto que las aplicaciones de las matemáticas se manifiestan en forma de modelos y su implementación computacional, se abarca una gran variedad de áreas de matemáticas. El nombre de Escuela de Análisis Numérico y Optimización se ha conservado por razones históricas, pues fueron las primeras áreas que se abordaron.

## Objetivos

Desde su inicio el objetivo principal del evento ha sido “organizar un encuentro de un carácter más general y abierto, [para] motivar y entusiasmar al mayor número posible de estudiantes, profesores e investigadores y profesionales de las áreas de ciencias e ingeniería del país, en el estudio, la enseñanza e investigación y las aplicaciones del Análisis Numérico y la Optimización” [1].

Más concretamente, se intenta:

- Estimular en los estudiantes el estudio de las matemáticas aplicadas a nivel de licenciatura y posgrado.
- Estimular la investigación.
- Propiciar el intercambio académico entre instituciones de educación superior.
- Propiciar la vinculación interdisciplinaria.
- Propiciar la colaboración con los sectores productivos y de servicios.
- Propiciar y promover la presentación de trabajos de profesores e investigadores en las diferentes áreas de la modelación matemática y computacional.
- Promover la de presentación de trabajos por parte de estudiantes.
- Promover la formación de grupos interdisciplinarios para resolver problemas concretos en los sectores productivos y de servicio.
- Fortalecer los grupos de investigación existentes en las áreas citadas y promover la creación de nuevos grupos de investigación en provincia.
- Promover la vinculación de estudiantes de licenciatura y de posgrado con investigadores y profesores para la realización de trabajos de tesis.

## Actividades

A fin de lograr los objetivos anteriores, se realizan actividades académicas como cursos, conferencias, presentación de trabajos presenciales y en cartel.

Con respecto a los cursos, estos usualmente se dividen como sigue:

- Cursos básicos dirigidos a estudiantes de licenciatura.
- Cursos intermedios para estudiantes de licenciatura.
- Cursos avanzados para estudiantes de licenciatura de últimos semestres, de posgrado e investigadores.

En ocasiones se ofrecen cursos sobre temas relacionados con la computación científica el domingo anterior al evento.

Se ofrecen conferencias plenarias y conferencias por invitación, que por lo general pertenecen a alguna de las siguientes categorías:

- Panorámicas.
- De divulgación y de difusión.
- Sobre aplicaciones a diversas disciplinas.
- Sobre aplicaciones en el sector productivo.

Para ello se invita regularmente a destacados especialistas tanto a nivel nacional como internacional para dictar conferencias. Asimismo se invita a profesionistas del sector productivo para comunicar sus experiencias sobre la aplicación de las matemáticas.

A partir de 2000 la conferencia inaugural lleva el nombre de Diego Bricio en honor al brillante matemático ya fallecido. Esta es dictada por académicos que han contribuido al desarrollo de las matemáticas aplicadas del país.

Otra actividad importante es la presentación de trabajos por solicitud. Por lo general estos son resultados de investigaciones o tesis de licenciatura y posgrado. Se cuenta con dos modalidades, presencial o en cartel. De paso conviene mencionar que se premia al cartel mejor presentado.

En cada edición la institución sede define la temática principal del evento de acuerdo a sus intereses, esto permite la interacción con especialistas afines a los intereses de los académicos de la institución anfitriona. Estas pueden ser áreas generales como lo han sido, por ejemplo, Investigación de Operaciones, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Modelación Matemática y Computacional. O bien sobre temas más específicos como El Agua o la temática de la próxima ENOAN que será Ciencias de la vida: Medicina, Biología y Ecología.

Desde hace varios años, el formato básico de la ENOAN se modificó para darle más relevancia a la temática principal, agrupando las conferencias y ponencias relacionadas con ella en un taller de modelación sobre el tema elegido.

## El premio Mixbaal

Desde 2002 se instituyó el Premio Mixbaal a la mejor tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, dirigido a egresados de carreras de matemáticas y áreas afines. La cantidad y calidad de los trabajos recibidos han ido en constante acenso.

## Actividades paralelas

En 2012 la Red de Modelos Matemáticos y Computacionales de CONACYT realizó en forma concurrente con la ENOAN un Taller de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Así mismo en 2012 y 2013 se realizó el Taller de HP, auspiciado por HP Labs. A estos talleres pudieron asistir libremente los participantes de la ENOAN. En 2013 se ofrecieron, en forma paralela a la ENOAN, cursos especiales sobre temas específicos dirigidos a público de diversas instituciones académicas de la región.

## Financiamiento

La ENOAN no cuenta con recursos propios. Cada año se tienen que conseguir los recursos. El problema principal es conseguir el dinero para las becas de los estudiantes, éstas consisten en el alojamiento y la dispensa del 50 % de la inscripción. En promedio se ofrecen 100 becas en cada año. Los recursos provienen de la institución sede, de la Sociedad Matemática Mexicana, de agencias locales como los consejos estatales de ciencia y tecnología, por mencionar algunos. En los últimos años también se han recibido aportaciones de Cuerpos Académicos que solicitan fondos para esta actividad a PROMEP de la SEP o como parte de proyectos de investigación. También se ha recibido apoyo importante de la Red de Modelos Matemáticos y Computacionales de CONACYT. Otro tipo muy importante de aportaciones son las que proporcionan las instituciones a la que están adscritos los instructores y conferencistas, pues por lo general cubren parte o la totalidad de los gastos de ellos. Recientemente se ha creado la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, A. C (SMCCA) para poder gestionar directamente fondos para la ENOAN ante organismos como SEP y CONACYT.

## Resultados

Como consecuencia de estos eventos se han establecido redes académicas formales e informales entre diferentes instituciones, muchos estudiantes han elaborado sus tesis con diversos investigadores y muchos otros se han animado a iniciar posgrados en matemáticas aplicadas o áreas afines, lo cual contribuye al fortalecimiento de dichos posgrados. Como se puede colegir de esta breve semblanza, en la organización de este evento concurren muchas voluntades de personas que en forma generosa y desinteresada apoyan esta actividad. El éxito del proyecto es de todos y esto nos llena de satisfacción. Esperamos seguir realizando la ENOAN por muchos años. A final de cuentas esta actividad constituye una aportación al desarrollo de las matemáticas en nuestro país.

## Referencias

1. Guerrero G. J., El Proyecto ENOAN. Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico. Carta Informativa de la SMM. No. 15. Nov. 1997.
2. <http://www.enoan.org>

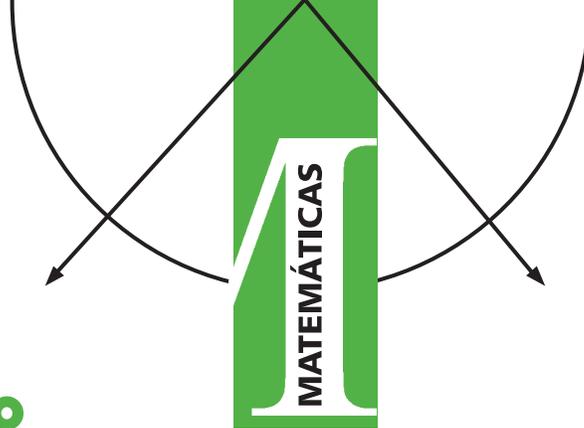
### **Cuarto encuentro iberoamericano de polinomios ortogonales y sus aplicaciones. EIBPOA2014**

Los encuentros iberoamericanos de polinomios ortogonales fueron creados con el ánimo de incentivar la investigación en polinomios ortogonales, específicamente en Latinoamérica, con el apoyo de investigadores reconocidos, principalmente de Europa. Es así que su primera versión se llevó a cabo en el año 2011 en las instalaciones de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, logrando establecer conexiones entre investigadores jóvenes de Latinoamérica. Su segunda versión, en el año 2012, fue realizada en la Universidad de Colima, México, en donde se amplió la participación de investigadores reconocidos en el área. Para el año 2013 se logró realizar la tercera versión en la Universidad de Estadual Paulista, de Sao José do Rio Preto, Brasil, en donde se consolidó el evento, no solo por la participación de importantes investigadores en el área, sino por una mayor participación de estudiantes de maestría y doctorado en matemáticas. Buscando cumplir los objetivos del evento, se decidió realizar la cuarta versión entre el 17 y el 20 de junio de 2014, en Bogotá, nuevamente en las instalaciones de la Universidad Nacional de Colombia.



Universidad Nacional de Colombia  
Av. Carrera 30 No. 45-03 Ciudad Universitaria - Edificio 404  
Bogotá D.C. - Colombia  
<http://www.matematicas.unal.edu.co/newsite/fcweb/index.php?id=179&L=0>





## Manuela Garín Pinillos, a 100 años de su nacimiento

María Emilia Caballero  
IM-UNAM  
marie@matem.unam.mx

**L**a Sociedad Matemática Mexicana desea felicitar cordialmente a nuestra querida colega y decana Manuela Garín Pinillos, quién este primero de enero festejó sus 100 años de vida. Le pedimos a María Emilia Caballero que nos diera un breve esbozo de Manuela como matemática, porque suponemos que muchos de nuestros jóvenes colegas no la han conocido o aún no saben quién es. A continuación lo transcribimos:



Manuela nació en España y al poco tiempo ella y su familia emigraron a Cuba donde vivieron cerca de 15 años. Después, hacia 1933, llegaron a México. Manuela era entonces una joven de 20 años con muchas ganas de estudiar. Tuvo que revalidar estudios y cursar la preparatoria en México. Gracias a esto, en 1937 pudo inscribirse en la Universidad, en la

carrera de matemáticas, cuya sede era en aquel tiempo el Palacio de Minería.

Ahí fue alumna de Alfonso Nápoles Gándara, Marianito Hernández, Nabor Carrillo, Carlos Graef Fernández y Alberto Barajas, entre otros. Su generación, conformada por tres estudiantes, fue la primera que cursó las materias reglamentarias de manera regular y los tres terminaron los cursos en el tiempo previsto. En realidad, estos pioneros formaron un grupo en donde reinaba la amistad, la cordialidad y la alegría por el trabajo.

Durante su vida profesional, Manuela impartió clases en varias preparatorias de la UNAM, realizó trabajos fuera de la Universidad y, en 1944, ella y su esposo Raúl Álvarez fueron invitados a trabajar, por el Ing. Víctor Bravo Ahuja, en el Tecnológico de Monterrey, institución de reciente creación en ese entonces.

Regresaron a México a principios del 51 y poco después Manuela concluye su carrera con una tesis dirigida por Remigio Valdés sobre temas de probabilidad poco conocidos, en ese entonces, en México (procesos de Markov discretos).

Posteriormente, ingresó al Instituto de Geofísica de la UNAM e impartió sus cursos en la Facultad de Ingeniería, de la cual es profesora emérita. Esto se debió en gran parte a su versatilidad, solidez en los conocimientos teóricos así como a su responsabilidad y compromiso con la enseñanza. En esos años, colaboró con la Escuela Normal Superior y también impartió cursos en la Facultad de Ciencias.

Manuela dice que su labor principal fue en el terreno de la enseñanza, sin embargo atendió con gran seriedad su trabajo en el Instituto de Geofísica, desarrollando los modelos geométricos del ecuador magnético en colaboración con Anselmo Chargoy.

Fue fundadora de la Escuela de Altos Estudios de la Universidad de Sonora (UNISON) en los años 60. Esta escuela incluía las carreras de física, matemáticas y letras. De ella han derivado las correspondientes facultades y actualmente la Facultad de Matemáticas de la UNISON es un centro consolidado y cuenta con un amplio reconocimiento. Además, en otras épocas de su vida, apoyó la creación de carreras de matemáticas en otras universidades de provincia.

Para algunas de las jóvenes que emprendimos el estudio

de las matemáticas en la década de los años 60, Manuela fue un ejemplo a seguir y nos permitió afirmar nuestra vocación aun en contra de la visión estrecha de esa época, según la cual las mujeres “no estábamos hechas para esas cosas”.

Las generaciones del 64 al 68 de matemáticas de la Facultad de Ciencias, fueron las primeras en contar con una proporción amplia de mujeres y, actualmente, a nadie sorprende que una chica desee estudiar la carrera de matemáticas.

Gracias Manuela, por haber abierto un camino para las generaciones posteriores a ti. Quienes tenemos el privilegio de estar cerca de ella, sabemos que este esbozo es una mínima parte de lo que es, de lo que representa, y conocemos la gran calidad humana que hay detrás de la matemática brevemente descrita.

Felicitaciones por tus espléndidos 100 años y que nos sigas acompañando muchos más.

## **Primer Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas 2014**

Alrededor del mundo se ha reconocido el problema actual de atraer, retener y habilitar el progreso académico de las mujeres en la ciencia y en particular de la matemática. Este asunto es complejo y está situado en un marco social amplio que involucra múltiples factores, en particular aquel de los roles de género. Es en este contexto que diversos estudios internacionales han identificado que una de las múltiples causas de la baja representación femenina en la ciencia es la carencia de "modelos a seguir".

Por esta razón la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Mexicana ha decidido que una de las maneras de impactar en este problema es la organización de este Primer Encuentro que contará fundamentalmente con conferencias académicas en distintas áreas de las matemáticas impartidas en su mayoría por matemáticas mexicanas con destacada trayectoria académica, de distintas edades y estados de la república, esto tiene como propósito mostrar a los (y las) investigadores(as) jóvenes y estudiantes de posgrado que es posible lograr una carrera exitosa como matemática en el país.



<http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/mujeresmatematicas/>

[mujeresmatematicas2014@smm.org.mx](mailto:mujeresmatematicas2014@smm.org.mx)

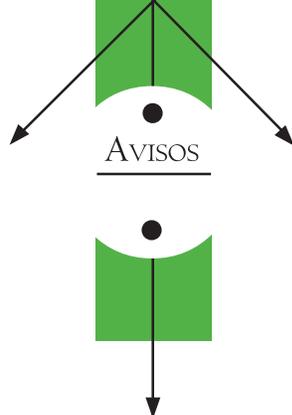
### **Comité Organizador Central**

Gabriela Araujo Pardo - UNAM

Carlos Barrera Rodríguez

Natalia García Colin - UNAM

Rubén Martínez Avendaño - UAEH



## Oportunidades de empleo

Plaza de Profesor de Tiempo Completo con orientación en Probabilidad y Estadística.  
[http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/convocatoria\\_PTC.pdf](http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/convocatoria_PTC.pdf)

CONVOCATORIA PARA OCUPAR UNA PLAZA VACANTE DE TÉCNICO ACADÉMICO ADSCRITO A LA UNIDAD MONTERREY  
[http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/Tecnico\\_academico\\_Cimat\\_Monterrey.pdf](http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/Tecnico_academico_Cimat_Monterrey.pdf)

Convocatoria para plaza posdoctoral en Economía Matemática dentro del área de Matemáticas Básicas  
[http://www.sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/CIMAT\\_Plaza\\_Postdoctoral\\_Economia\\_Matematica.pdf](http://www.sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/CIMAT_Plaza_Postdoctoral_Economia_Matematica.pdf)

Posiciones de Investigador en el Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México  
<http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/Conv-SIJA-Esp.pdf>

Convocatoria para Concurso por Oposición. Universidad Juárez del Estado de Durango  
<http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/noticia.php?strNoticia=109:Convocatoria%20para%20Concurso%20por%20Oposici%C3%B3n>

CARTA INFORMATIVA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA, Número 68, Noviembre 2013 - Enero 2014, es una publicación trimestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, No. Ext. s/n, Col. San Andrés Totoltepec, C.P. 14400, Delegación Tlalpan, Distrito Federal, Tel. 58496709, <http://www.smm.org.mx>, [smm@smm.org.mx](mailto:smm@smm.org.mx). Editor responsable: Lorenzo Héctor Juárez Valencia. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-090614102900-106, ISSN: 2007-7122, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido No. 16036, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX EN TRÁMITE. Impresa por RT Grafismo, S.A. de C.V., 5 de Febrero No. 324H, Col. Obrera, México, D.F. Del. Cuauhtémoc, C.P. 06800, este número se terminó de imprimir el 31 de enero de 2014 con un tiraje de 500 ejemplares.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Matemática Mexicana, A.C.



## CARTA INFORMATIVA

### DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 68,  
Noviembre de 2013 - Enero de 2014

Publicación de la  
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.  
Apartado Postal 70-450,  
04510 México, D. F.  
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19  
[smm@smm.org.mx](mailto:smm@smm.org.mx)

### JUNTA DIRECTIVA

Luis Montejano Peimbert  
*Presidente*

Judith Zubieta García  
*Vicepresidente*

Ricardo A. Cantoral Uriza  
*Secretario General*

Luz de Teresa de Oteyza  
*Secretario de Actas*

Jorge X. Velasco Hernández  
*Tesorero*

Gabriela Araujo Pardo  
*Vocal*

Lorenzo Héctor Juárez Valencia  
*Vocal*

### COMITÉ EDITORIAL Y DE DIFUSIÓN

Lorenzo Héctor Juárez Valencia  
(Coordinador)  
Fernando Galaz Fontes  
Pedro González-Casanova Henríquez  
Víctor Hugo Ibarra Mercado  
Mario Pineda Ruelas  
Carlos E. Valencia Oleta

### EDITOR TÉCNICO

Daniel Espinosa Pérez

### COLABORADORES

Luz María Briseño  
Daniel Espinosa Pérez

### IMPRESIÓN

RT Grafismo, S. A. de C. V.  
Tel. 5740 7190 / Fax 5740 7113  
[rtgrafismo@prodigy.net.mx](mailto:rtgrafismo@prodigy.net.mx)

### PORTADA

Origami

27 de Abril  
al 2 de Mayo  
del 2014  
Guanajuato, Gto.  
México.

# ENOAN 2014 XXIV

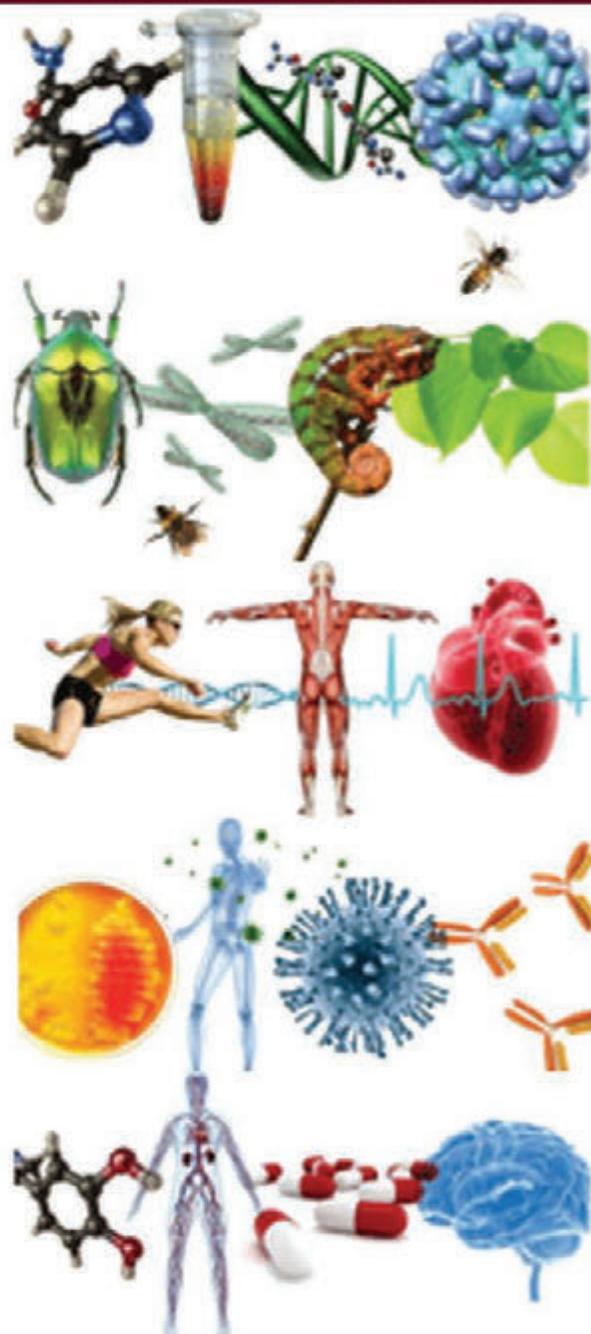


Centro de Investigación  
en Matemáticas, A.C.  
Jalisco, s/n Valenciana CP 36240  
Tel +52(473)7327155  
Fax +52(473)7325749  
Guanajuato, Gto.  
www.cimat.mx

## ESCUELA NACIONAL DE OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

### CIENCIAS DE LA VIDA: MEDICINA, BIOLOGÍA Y ECOLOGÍA.

- Cursos
- Presentación de trabajos
  - Cómputo científico
  - Análisis numérico
    - Optimización
    - Modelación
    - Aproximación



INFORMES: [www.enoan.org](http://www.enoan.org)



SOCIEDAD  
MATEMÁTICA  
MEXICANA

Red de Modelos Matemáticos  
y Computacionales