Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa - 1

Stopy procentowe i dyskontowe

1. Stopa procentowa (stopa zwrotu, stopa zysku) (Interest Rate).

Niech:

$F(0)$ - kapitał wypożyczony (zainwestowany) w momencie $t = 0$,
$F(T)$ - kapitał zwrócony (odzyskany) w momencie $t = T$,
$F(T) - F(0)$ - zysk za okres $[0, T]$.

Stopa zwrotu:

$$\boxed{i_{[0,T]} = \frac{F(T)-F(0)}{F(0)}}$$

Zatem:

$$F(T) = F(0) + F(0)i_{[0,T]} = F(0)(1 + i_{[0,T]})$$

gdzie:

$F(0)i_{[0,T]}$ - "odsetki" od kapitału

$q_{[0,T]} = (1 + i_{[0,T]})$ - czynnik kumulujący.

Uwagi:

1. *Procent* $=$ stopa procentowa $\times 100\%$.

2. Mając na myśli stopy procentowe na jednostkowe okresy czasu

$[0;1], [1;2], \ldots,$ (najczęściej lata ale równie dobrze mogą to być kwartały, miesiące) nazywać je będziemy umownie stopami rocznymi (kwartalnymi, miesięcznymi).

2. Oprocentowanie:

Załóżmy, że w okresie $[0;N]$ stopy procentowe na jednostkowe okresy czasu są identyczne, tzn.

$i_{[0;1]} = i_{[1;2]} = \ldots = i_{[N-1;N]} = i$;

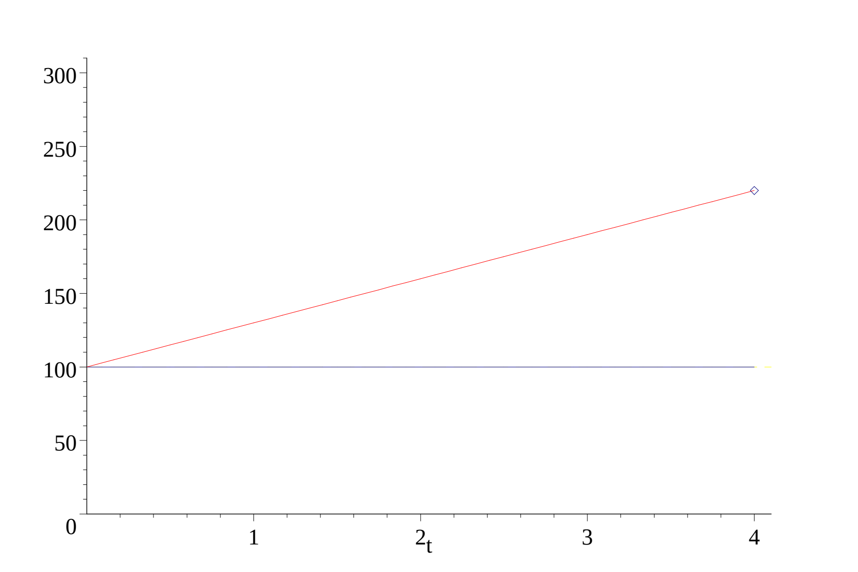
$F(t)$ - wartość kapitału w momencie $t \in [0;N]$,
$\tilde{F}(t)$ - "naliczona" wartość kapitału w momencie t.
$F(N)$ - wartość przyszła (w momencie $t = N$), kapitału (**F**uture **V**alue);
$F(0)$ - wartość obecna (w momencie $t = 0$), kapitału (**P**resent **V**alue);

oprocentowanie proste (kapitalizacja na koniec okresu umownego $[0;N]$, tj. w momencie $t = N$):

$$\tilde{F}(t) = F(0)(1 + it), \quad t \in [0;N],$$

$$F(t) = F(0) \quad t \in [0;N),$$

$$\boxed{\tilde{F}(N) = F(N) = F(0)(1 + iN)}$$



$$\tilde{F}(t) = 100(1 + 0.30t)$$

- ***oprocentowanie składane*** (kapitalizacja odsetek na koniec podokresów $[t_{k-1}, t_k] \subset [0; N]$):

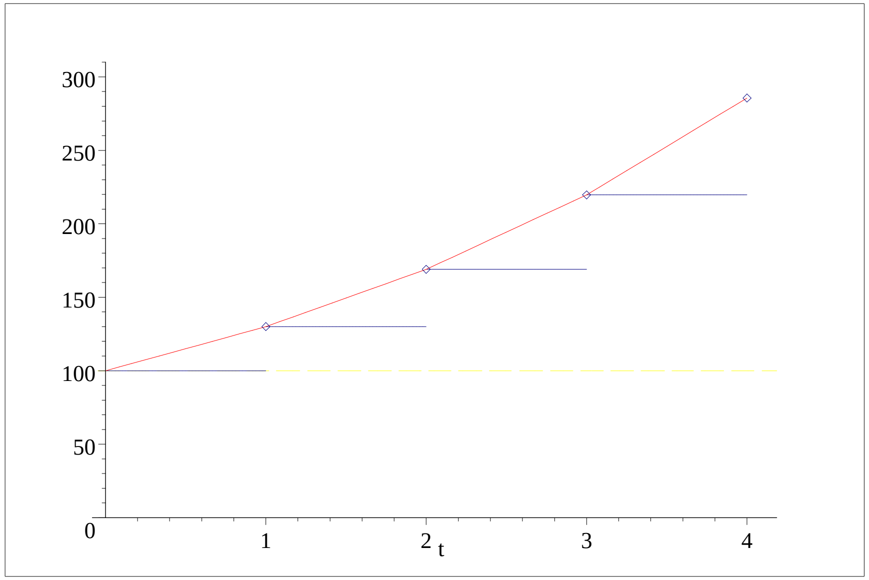
  oprocentowanie składane - kapitalizacja zgodna z okresem stopy i (kapitalizacja odsetek w momentach $t = n = 1, 2, \ldots, N$)

$$F(n) = F(n-1)(1 + i) = F(n-1)q, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$F(n) = F(0)(1 + i)^n = F(0)q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$$\tilde{F}(t) = F(n)(1 + i(t - n)), \quad t \in [n; n+1],$$

$$\boxed{F(N) = F(0)(1 + i)^N}$$



$$F(n) = 100(1 + 0.30)^n, n = 1, 2, 3, 4$$

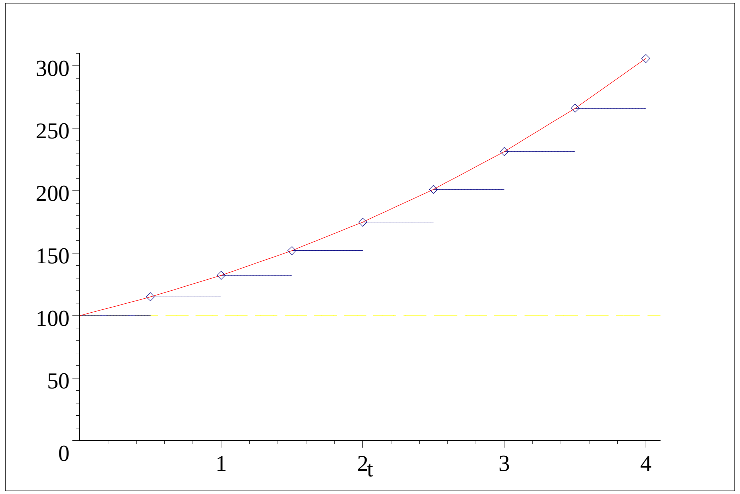
- *oprocentowanie składane - kapitalizacja niezgodna z okresem stopy* i *, z częstością* m (kapitalizacja w momentach $t = \frac{k}{m},\ k = 1, 2, \ldots, mN$):

$$F(\frac{k}{m}) = F(\frac{k-1}{m})(1 + i\frac{1}{m}), \quad k = 1, 2, \ldots, mN,$$

$$F(\frac{k}{m}) = F(0)(1 + i\frac{1}{m})^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, mN,$$

$$\tilde{F}(t) = F(\frac{k}{m})(1 + i(t - \frac{k}{m})), \quad t \in [\frac{k}{m}; \frac{k+1}{m}],$$

$$\boxed{F(N) = F(0)(1 + i\tfrac{1}{m})^{mN} = F(0)((1 + i\tfrac{1}{m})^m)^N}$$



$$F(\frac{k}{2}) = 100(1 + \frac{0.30}{2})^k, k = 1, \ldots, 8$$

oprocentowanie składane - kapitalizacja ciągła (nieskończenie często, i –ciągła stopa procentowa)

$$\tilde{F}(t) = F(t) = \lim_{m\to\infty} F(0)\left(1 + i\frac{1}{m}\right)^{m\frac{k_m}{m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} F(0)\left(1 + i\frac{1}{m}\right)^{mt} = F(0)\lim_{m\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right)^{it}$$

$$= F(0)e^{it}$$

gdzie $\frac{k_m}{m} \leq t < \frac{k_m+1}{m}$

Stąd (i z tw. o trzech ciągach) gdy $m \to \infty$ to

$$\frac{k_m}{m} \to t$$

gdyż $t - \frac{1}{m} < \frac{k_m}{m} \leq t$

Przykład:

$$100\left(1 + 0.30\frac{1}{12}\right)^{12} = 134.488\,882$$

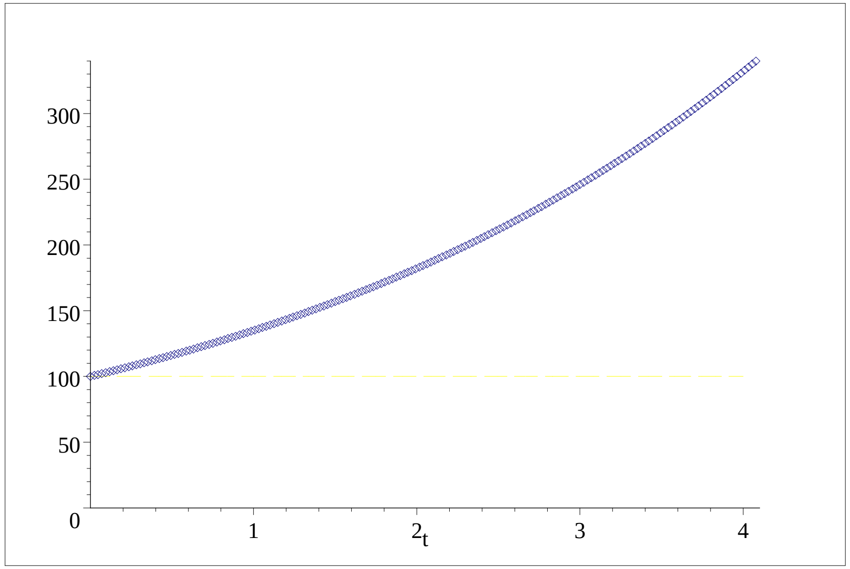
$$100\left(1 + 0.30\frac{1}{365}\right)^{365} = 134.969\,258$$

$$100\left(1 + 0.30\frac{1}{365(24)60}\right)^{365(24)60} = 134.985\,869$$

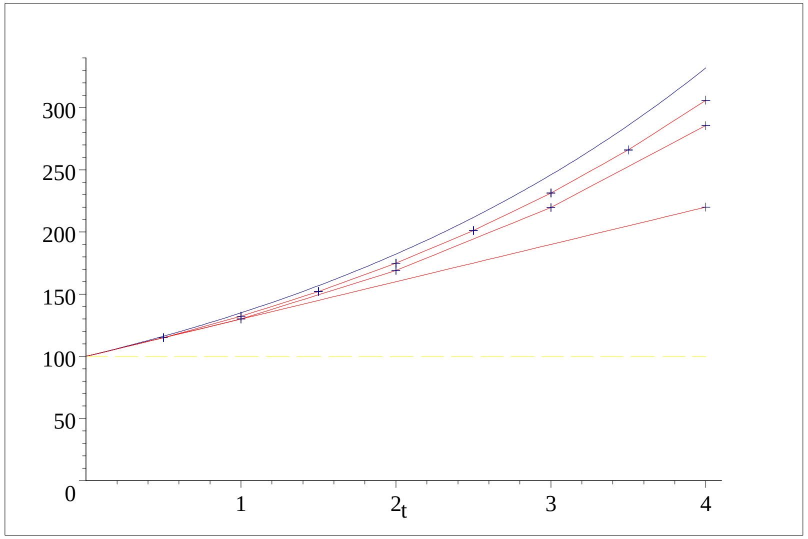
$$100e^{0.30} = 134.985\,881$$

Liczba Eulera

$e \approx 2{,}718281828\ldots, \qquad y = \ln x \iff x = e^y$



$$F(t) = 100e^{0.30t}$$



Stopa nominalna $i = 0.30$, cz ęstości $m =$

Tempo przyrostu kapitału $F'(t)$ oraz *tempo procentowego przyrostu* kapitału $\frac{F'(t)}{F(t)}$ przy nominalnej stopie rocznej i :

w oprocentowaniu prostym:

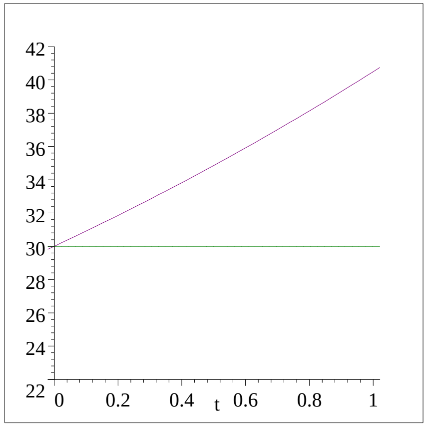
$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \tilde{F}'(t) = F(0)i$$

$$\frac{d\tilde{F}(t)}{\tilde{F}dt} = \frac{\tilde{F}'(t)}{\tilde{F}(t)} = \frac{i}{1+it}$$

w oprocentowaniu ciągłym:

$$F'(t) = F(0)e^{it}i$$

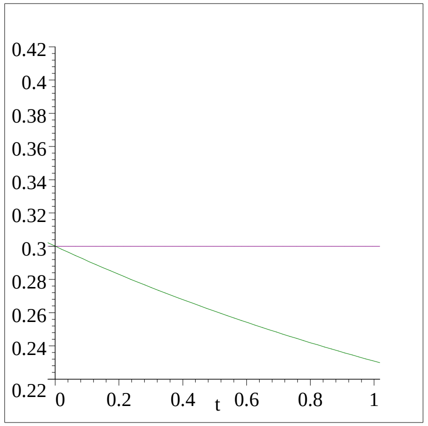
$$\frac{F'(t)}{F(t)} = i$$



$i = 0.30, F(0) = 100;$

$\tilde{F}'(t) = F(0)i$ (zielony);

$F'(t) = F(0)e^{it}i$ (fiolet)



$i = 0.30;$

$\frac{\tilde{F}'(t)}{\tilde{F}(t)} = \frac{i}{1+it}$ (zielony);

$\frac{F'(t)}{F(t)} = i$ (fiolet)

3. Równoważność stóp procentowych

Niech:

i - *nominalna stopa procentowa* na okres jednostkowy **`(Nominal)`**,

m - *częstość* kapitalizacji w okresie jednostkowym, w momentach $t = \frac{k}{m}$, $k = 1, 2, \ldots,$ wg stopy $i\frac{1}{m}$ na każdy z podokresów $[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]$.

Stopa efektywna **`(Effective)`** *równoważna stopie nominalnej* i *przy* *kapitalizacji składanej z częstością* m to taka stopa i_{ef} na okres jednostkowy, że efekt dopisania odsetek wg tej stopy raz po okresie jednostkowym jest taki sam jak efekt dopisywania m razy - co $\frac{1}{m}$ $-ta$ okresu jednostkowego - ze stopą $i_{\frac{1}{m}}$ za każdy podokres $[\frac{k-1}{m}; \frac{k}{m}], k = 1, 2, \ldots m$, tzn.:

$$\boxed{i_{ef} \cong_m i \quad gdy \quad 1 + i_{ef} = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m.}$$

Stąd

$$i_{ef} \cong_m i \;\; gdy \;\; i = m(\sqrt[m]{1 + i_{ef}} - 1)$$

Uwagi.

1. Gdy $m = 1$, (kapitalizacja zgodna), to

$$stopa\ nominalna = stopa\ efektywna$$

$$i = i_{ef}.$$

2. Stopa efektywna i_{ef} równoważna stopie nominalnej δ przy kapitalizacji ciągłej $(m = +\infty)$:

$$i_{ef} \;\; \cong_\infty \;\; \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + i_{ef} = \lim_{m \to \infty} (1 + \delta \frac{1}{m})^m = e^\delta,$$

$$\delta = \lim_{m \to \infty} m(\sqrt[m]{1 + i_{ef}} - 1) = \ln(1 + i_{ef})$$

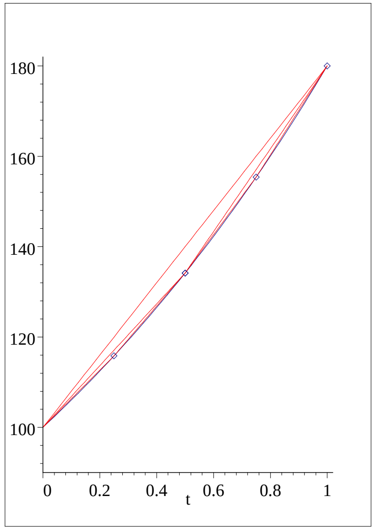
δ - *siła oprocentowania* albo *ciągła stopa procentowa*

$(1 + i_{ef})^t = e^{\delta t}$ - czynnik kumulujący (oprocentowujący) na okres $[0, t]$.

Przykład: Dla $i_{ef} = 0.80$

$i_{nom}^{(m)} \cong i_{ef}$: $\qquad i_{nom}^{(m)} = m(\sqrt[m]{1+i_{ef}} - 1)$,

m	$i_{nom}^{(m)} \cong 0.80$
1	0.80
2	0.6833
4	0.6332
12	0.6024
365	0.5883
365×60	0.587 795
∞	0.587 787



$$F\left(\frac{k}{m}\right) = 100\left(1 + \frac{i_{nom}^{(m)}}{m}\right)^k$$

$$m = 1, 2, 4, \infty$$

4. Dyskontowanie, stopa dyskontowa (**D**iscount **R**ate)

$$\boxed{d_{[0,T]} = \frac{F(T) - F(0)}{F(T)}}$$

$$F(0) = F(T) - F(T)d_{[0,T]} = F(T)(1 - d_{[0,T]})$$

$$F(T) = F(0)\frac{1}{1 - d_{[0,T]}} = F(0) + F(0)\frac{d_{[0,T]}}{1 - d_{[0,T]}}$$

$F(0)d_{[0,T]}$ - ”odsetki z góry” od kapitału $F(0)$

$F(0)\frac{d_{[0,T]}}{1-d_{[0,T]}}$ - odsetki (”z dołu”) od kapitału $F(0)$.

$$1 + d + d^2 + d^3 + \ldots = 1 + \frac{d}{1-d} = \frac{1}{1-d}, \qquad -1 <$$

Załóżmy, że stopa dyskontowa $d_{[n-1,n]} = d$ dla $n = 1, 2, \ldots, N$;

- ***dyskontowanie proste*** $d_{[0,N]} = dN$

$$F(N) = F(0)\frac{1}{1 - dN}$$

stopa procentowa i i stopa dyskontowa d równoważne w momencie $t = N$:

$$F(0)(1 + i_{[0,N]}) = F(N) = F(0)\frac{1}{1 - d_{[0,N]}}$$

$$1 + i_{[0,N]} = \frac{1}{1 - d_{[0,N]}}$$

$$1 + iN = \frac{1}{1 - dN}$$

$$d = \frac{i}{1 + iN}$$

dyskontowanie składane

dyskontowanie składane- kapitalizacja zgodna:

$$F(n-1) = F(n)(1-d)$$
$$F(0) = F(n)(1-d)^n$$
$$F(n) = F(0)\frac{1}{(1-d)^n}, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

dyskontowanie składane- kapitalizacja niezgodna (kapitalizacja w momentach $t = \frac{k}{m}$, $k = 1,2,\ldots,mN$):

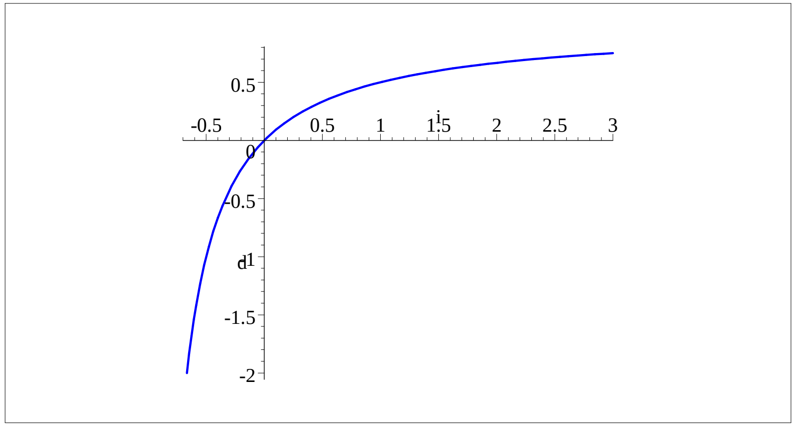
$$F(\frac{k-1}{m}) = F(\frac{k}{m})(1-\frac{d}{m})$$
$$F(0) = F(\frac{1}{m})(1-\frac{d}{m}) = \ldots = F(\frac{k}{m})(1-\frac{d}{m})^k$$
$$F(\frac{k}{m}) = F(0)\frac{1}{(1-\frac{d}{m})^k}, \quad k = 1,2,\ldots,mN,$$

- stopa procentowa i i stopa dyskontowa d równoważne w każdym momencie $t = n$:

$$1 + i = \frac{1}{1-d},$$
$$1 + \frac{\delta}{m} = \frac{1}{1-\frac{d_m}{m}}$$ przy częstości m

$1 - d = \frac{1}{1+i}$, -czynnik dyskontujący na okres $[0,1]$,

$d = \frac{i}{1+i}$



$$d = \frac{i}{1+i}$$

dyskontowanie składane - kapitalizacja ciągła (nieskończenie często)

$$F(0) = \lim_{m\to\infty} F(t)(1 - \frac{d}{m})^{mt} = F(t)e^{-dt}$$

$$F(t) = \lim_{m\to\infty} F(0)\frac{1}{(1-\frac{d}{m})^{mt}} = F(0)e^{dt}$$

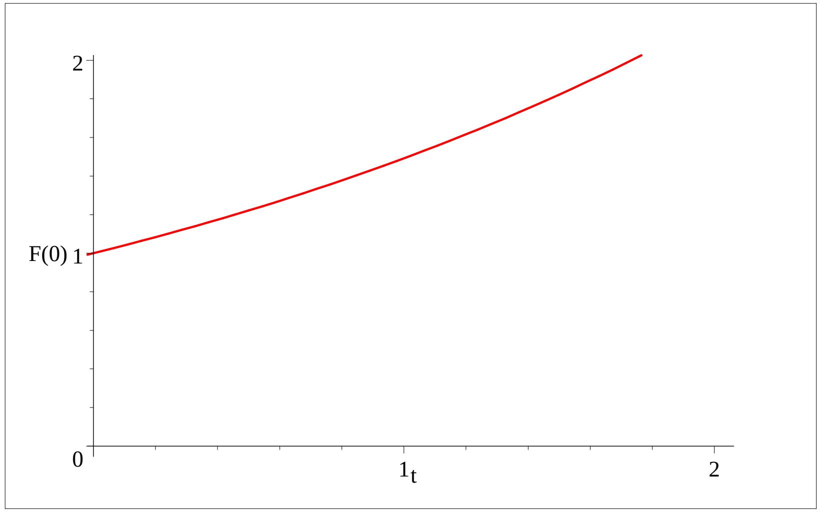
$$F(t) = \lim_{m\to\infty} F(0)(1 + \frac{\delta}{m})^{mt} = F(0)e^{\delta t}$$

Uwaga:

$$i = d = \delta$$

$e^{-\delta t}$ -czynnik dyskontujący na okres $[0,t]$.

-



$$F(t) = F(0) \cdot e^{0.4t}$$