Kapitel 9

Integration

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Berechnung:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel: Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

$$\begin{array}{lll} \text{Vermuten:} & F(x) & = x\,(\ln(x) - 1) \\ \text{Verifizieren:} & F'(x) & = (x\,(\ln(x) - 1)' = \\ & & = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) \\ \text{Aber auch:} & F(x) & = x\,(\ln(x) - 1) + 5 \end{array}$$

Stammfunktion

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\boxed{\int f(x)\,dx + c}$$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine *„Kochrezepte"* (sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann).

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

E.g., die Stammfunktion von $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Grundintegrale

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen**:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	c
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Integrationsverfahren

- **Summenregel**

$$\boxed{\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx}$$

- **Partielles Integrieren**

$$\boxed{\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\,dx}$$

- **Substitution**

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x)\,dx$

Beispiel – Summenregel

Stammfunktion von $f(x) = 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5$.

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5\,dx \\
&= 4\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 5\int dx \\
&= 4\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 5x + c \\
&= x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c
\end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \, dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\begin{aligned} f &= x & \Rightarrow \quad f' &= 1 \\ g' &= e^x & \Rightarrow \quad g &= e^x \end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cos(x)$.

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} \, dx = \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} \, dx$$

Partielles Integrieren des zweiten Terms ergibt:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} \, dx &= \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} \, dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) + c \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f lautet daher:

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$$

Beispiel – Substitution

Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} \, dx = \int \exp(z) \, dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x) \, dx = 2x \, dx$$

Integrationsverfahren – Herleitung

Partielles Integrieren erhält man aus der Produktregel für das Differenzieren:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = \int \left(f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\right) \, dx \\ &= \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Substitution folgt aus der Kettenregel:
Sei F eine Stammfunktion von f und $z = g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(z)\, dz = F(z) = F(g(x)) &= \int (F(g(x)))'\, dx \\ = \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx &= \int f(g(x))\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) x^3
(b) $\dfrac{3}{x^2}$
(c) $\sqrt{x^3}$
(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(e) e^{2x}
(f) 2^{3x}
(g) $\dfrac{1}{2x}$
(h) 5
(i) $\sin(\pi x)$
(j) $\cos(2\pi x)$

Lösung 9.1

(a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$;
(f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$; (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$;
(j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$

(b) $x^3 + 7x + \dfrac{6}{x+1}$

(c) $e^x + x^e + e + x$

(d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

(e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

Lösung 9.2

(a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$; (b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6\ln|x+1| + c$;
(c) $e^x + \frac{1}{e+1}x^{e+1} + e\,x + \frac{1}{2}x^2 + c$; (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$;
(e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c$.

Aufgabe 9.3

Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

(a) $f(x) = 2x\,e^x$

(b) $f(x) = x^2\,e^{-x}$

(c) $f(x) = x\,\ln(x)$

(d) $f(x) = x^3\,\ln x$

(e) $f(x) = x\,(\ln(x))^2$

(f) $f(x) = x^2\,\sin(x)$

Lösung 9.3

(a) $2(x-1)e^x + c$; (b) $-(x^2+2x+2)\,e^{-x} + c$;
(c) $\frac{1}{2}\,x^2\,\ln(x) - \frac{1}{4}\,x^2 + c$; (d) $\frac{1}{4}\,x^4\,\ln(x) - \frac{1}{16}\,x^4 + c$;
(e) $\frac{1}{2}\,x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}\,x^2\,\ln(x) + \frac{1}{4}\,x^2 + c$;
(f) $2x\sin(x) + (2-x^2)\cos(x)$.

Aufgabe 9.4

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int x\,e^{x^2}\,dx$

(b) $\int 2\,x\,\sqrt{x^2+6}\,dx$

(c) $\int \frac{x}{3\,x^2+4}\,dx$

(d) $\int x\,\sqrt{x+1}\,dx$

(e) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Aufgabe 9.4 / 2

(f) $\int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx$

(g) $\int \sqrt{x^3+1}\,x^2\,dx$

(h) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$

(i) $\int \frac{x^2-x+1}{x-3}\,dx$

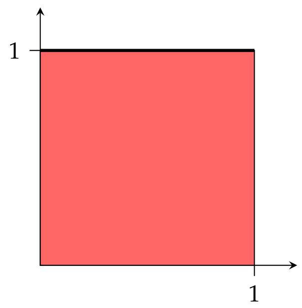
(j) $\int x(x-8)^{\frac{1}{2}}\,dx$

Lösung 9.4

(a) $z = x^2$: $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$; (b) $z = x^2 + 6$:$\frac{2}{3}\left(x^2+6\right)^{\frac{3}{2}} + c$; (c) $z = 3\,x^2 + 4$: $\frac{1}{6}\ln|3x^2+4| + c$;
(d) $z = x + 1$: $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$; (e) $z = \ln(x)$: $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$ (f) $z = \ln(x)$: $\ln|\ln(x)| + c$; (g) $z = x^3 + 1$: $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c$; (h) $z = 5 - x^2$: $-\sqrt{5-x^2} + c$;
(i) $z = x + 3$: $7\ln|x-3| + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; (j) $z = x - 8$: $\frac{2}{5}(x-8)^{5/2} + \frac{16}{3}(x-8)^{3/2} + c$.

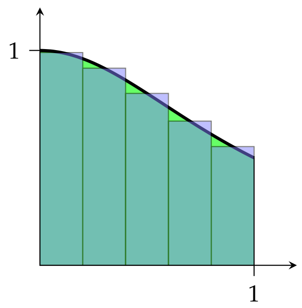
Flächeninhalt

Berechnen Sie die Inhalte der angegebenen Flächen!



$f(x) = 1$

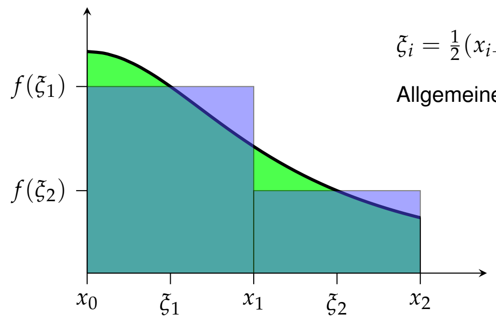
Fläche: $A = 1$



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Approximation
durch Treppenfunktion

Riemann-Summen

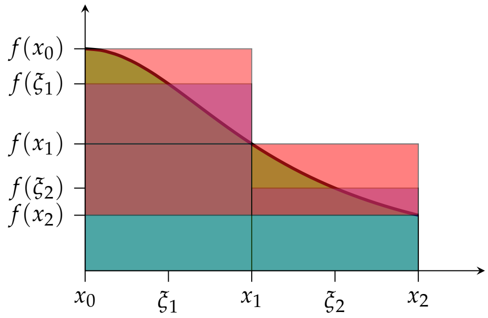


$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Allgemeiner: $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Approximationsfehler



$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \le (f_{\max} - f_{\min})\,(b-a)\,\frac{1}{n} \to 0$$

Annahme: Funktion monoton; $x_0, x_1, \ldots, x_n$ äquidistant

Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summen**

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

eine konvergente Folge bilden, dann heißt deren Grenzwert das **Riemann-Integral** von f. Notation: $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

Alle für uns relevanten Funktionen besitzen ein Riemann-Integral.

Riemann-Integral – Eigenschaften

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{falls } f(x) \le g(x) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion einer *stetigen* Funktion $f(x)$, dann gilt für das bestimmte **Integral**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

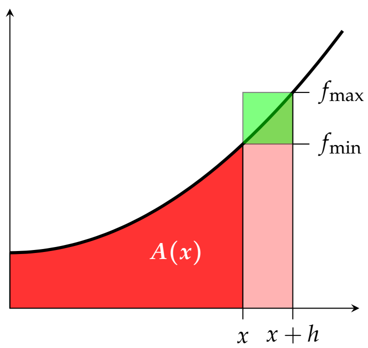
Dieser Satz erlaubt es uns, Integrale einfach mittels Stammfunktionen auszurechnen! (**Bestimmtes Integral**)

Beispiel:
Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz / Beweisidee

Sei $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x-Achse zwischen 0 und x.



$$f_{\min}\cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f_{\max}\cdot h$$

$$f_{\min} \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f_{\max}$$

Grenzübergang $h \to 0$: ($\lim\limits_{h\to 0} f_{\min} = f(x)$)

$$f(x) \le \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \le f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Integrationsverfahren / (2)

- **Summenregel**

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx}$$

- **Partielles Integrieren**

$$\boxed{\int_a^b f\cdot g'\,dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx}$$

- **Substitution**

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz \\ \text{mit } z = g(x) \text{ und } dz = g'(x)\,dx\end{gathered}}$$

Beispiel

Berechne das bestimmte Integral $\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx$.

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z}\,dz =$$

$$z = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{x}\,dx$$

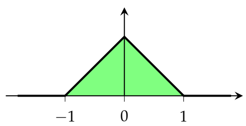
$$= \ln(z)\Big|_1^{\ln(10)} =$$

$$= \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0{,}834$$

Beispiel

Gesucht ist $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \ge 1 \end{cases}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} 0\,dx \\ &= (x + \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{0} + (x - \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{1} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.5

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_1^4 2x^2 - 1\,dx$

(b) $\int_0^2 3e^x\,dx$

(c) $\int_1^4 3x^2 + 4x\,dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{3}\,dx$

(e) $\int_0^1 \frac{3\,x+2}{3\,x^2+4\,x+1}\,dx$

Lösung 9.5

(a) 39; (b) $3\,e^2 - 3 = 19.17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!); (e) $\frac{1}{2}\ln(8) \approx 1{,}0397$.

Aufgabe 9.6

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x\,(x^2+3)^4\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 x\,\sqrt{4-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^2 x\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx$

Aufgabe 9.6 / 2

(f) $\displaystyle\int_0^3 (x-1)^2\,x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x\exp(x)\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^2 x^2\exp(x)\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

Lösung 9.6

(a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}4581$;
(e) $1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1; (h) $2\,e^2 - 2 \approx 12{,}778$;
(i) $\frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \approx 1{,}07061$.

Aufgabe 9.7

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 0{,}2 \\ 0{,}5 & \text{für } 0{,}2 \leq x < 0{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für } 0{,}5 \leq x < 0{,}6 \\ 3{,}5 & \text{für } 0{,}6 \leq x < 0{,}7 \\ -3{,}5 & \text{für } 0{,}7 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lösung 9.7

$\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot (0{,}2 - 0) + 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 0{,}2) + 2{,}5 \cdot (0{,}6 - 0{,}5) + 3{,}5 \cdot (0{,}7 - 0{,}6) + (-3{,}5) \cdot (1 - 0{,}7) = -0{,}1$.