



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

MATHEMATICAL MODELS OF LINEAR OSCILLATORS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

DAVID LOVAS

VEDOUČÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **David Lovas**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modely lineárních oscilátorů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problematika související se sestavením a řešením pohybových rovnic mechanických oscilátorů patří mezi základní aplikace diferenciálních rovnic. V závislosti na zvoleném matematickém popisu obdržíme buďto rovnice lineární, jejichž analytické řešení je známo, nebo rovnice nelineární. Mezi aktuálně studovaná témata patří zejména otázky pohybů spřažených oscilátorů a jejich synchronizací.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce by mělo být uvedení přehledu základních modelů lineárních oscilátorů, se zaměřením na jejich sestavení a vyřešení. Dále se předpokládá podrobná diskuze chování vzájemně spřažených oscilátorů, včetně posouzení otázky jejich synchronizací.

Seznam doporučené literatury:

FULFORD, G., FORRESTER, P. a A. JONES. Modelling with Differential and Difference Equations. New York: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0521440691.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce pojednává o matematických modelech lineárních mechanických oscilátorů, které představují jednu ze základních aplikací obyčejných diferenciálních rovnic. Jsou zde vysvětleny harmonické oscilátory, tlumené oscilátory a buzené oscilátory. Dále se práce zabývá skládáním a spřažením oscilátorů, včetně jejich synchronizace.

Summary

This bachelor thesis deals with mathematical models of linear mechanical oscillators, which represent one of basic applications of ordinary differential equations. There are explained harmonic oscillators, damped oscillators and driven oscillators. The thesis discusses also superposition of oscillators and coupling of oscillators, including their synchronization.

Klíčová slova

Mechanický oscilátor, lineární oscilátor, harmonické kmity, tlumené kmity, buzené kmity, skládání kmitů, spřažení oscilátorů, synchronizace

Keywords

Mechanical oscillator, linear oscillator, harmonic oscillations, damped oscillations, driven oscillations, superposition of oscillations, coupling of oscillators, synchronization

LOVAS, D. *Matematické modely lineárních oscilátorů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 56 s. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematické modely lineárních oscilátorů* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

David Lovas

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení, ochotu a čas spojený s mou bakalářskou prací. Dále děkuji mé rodině a přátelům za podporu.

David Lovas

Obsah

1	Úvod	12
2	Typy lineárních oscilátorů	13
2.1	Netlumené kmitání	13
2.2	Tlumené kmitání	15
2.3	Vynucené kmitání	17
2.3.1	Netlumené vynucené kmitání	17
2.3.2	Tlumené vynucené kmitání	20
3	Skládání kmitů	25
3.1	Rovnoběžné kmity	26
3.1.1	Izochronní kmity	26
3.1.2	Anizochronní kmity	29
3.1.3	Harmonická analýza	32
3.2	Kolmé kmity	33
3.2.1	Kolmé izochronní kmity	34
3.2.2	Kolmé anizochronní kmity	35
4	Spřažené oscilátory	37
4.1	Spřažení výchylkou	38
4.1.1	Vychýlení jednoho hmotného bodu	41
4.1.2	Symetrické kmity	41
4.1.3	Antisymetrické kmity	43
4.2	Spřažení první derivací výchylky	44
4.2.1	Synchronizace	47
4.3	Spřažení druhou derivací výchylky	50
5	Závěr	53
6	Seznam použitých zkratk a symbolů	56

1 Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou sestavení pohybových rovnic lineárních mechanických oscilátorů a jejich analýzou. Při ní se zaměříme především na skládání a spřažení oscilátorů a s tím související otázku synchronizace pohybu oscilátorů.

Pojmem oscilátor obecně rozumíme systém schopný konat kmit. Jako kmit uvažujeme pohyb, při kterém těleso nebo hmotný bod opakovaně po dosažení svého rovnovážného stavu tento stav opouští. Během kmitu se periodicky mění hodnoty některých parametrů systému. Mezi tyto parametry patří poloha, rychlost a zrychlení pro oscilátory typu kyvadlo či zatíženou pružinu (pak mluvíme o mechanickém oscilátoru), nebo elektrické napětí a proud pro elektrický obvod, do kterého jsou zařazeny kondenzátor, cívka a rezistor (zde mluvíme o elektrickém oscilátoru).

Matematické modelování již zmíněných nebo podobných fyzikálních úloh je jedno z mnoha využití obyčejných diferenciálních rovnic (ODR). Matematický model sestavíme použitím příslušných fyzikálních zákonů a závislých veličin, které přepíšeme jako derivace jiné veličiny podle nezávisle proměnné. ODR obsahují neznámou funkci nezávislé proměnné a její derivace.

Bakalářská práce bude věnována lineárním mechanickým oscilátorům a jejich matematické analýze. Na začátku se budeme věnovat netlumenému harmonickému kmitání, které je považováno za základní pohyb oscilátorů. Dále uvedeme typy tlumených oscilátorů, které se budou lišit velikostí tlumící síly. Následně zavedeme pojem buzený oscilátor a uvedeme matematický pohled na takzvanou rezonanci, ke které může dojít ve speciálním případě buzení harmonického oscilátoru. Na závěr této kapitoly ukážeme stavy, které mohou nastat, pokud bude lineární oscilátor současně tlumený i buzený.

V dalších kapitolách se budeme zabývat některými operacemi s oscilátory. Při skládání kmitů uvedeme, jak se bude řešení měnit v závislosti na porovnání úhlových frekvencí jednotlivých oscilačních pohybů. Uvedeme, za jakých podmínek bude výsledný kmit harmonický nebo periodický. Řešení bude záviset i na směru jednotlivých složených kmitů, uvedeme příklady a postupy skládání rovnoběžných a kolmých kmitů.

Jako další operaci s oscilátory uvedeme jejich spřažení neboli svázání, tedy případ, kdy pohyb jedné soustavy závisí na pohybu ostatních. Rozebereme tři druhy spřažení a odvodíme rovnice úhlových frekvencí pro obecné tvary i speciální případy. Dále uvedeme odvození a znázornění prvního a druhého základního kmitu. Bude zmíněna i synchronizace pohybu oscilátorů, které docílíme vhodným zavedením spřažení do systému oscilátorů.

2 Typy lineárních oscilátorů

Lineární oscilátor, někdy taky nazývaný harmonický oscilátor, je jeden ze základních matematických modelů propojující matematické a fyzikální disciplíny. V této kapitole se budeme zabývat systémy s jedním stupněm volnosti.

Při vytváření matematického modelu využijeme druhý Newtonův zákon: Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa. Tedy

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Dále využijeme vyjádření rychlosti \vec{v} a zrychlení \vec{a} jako derivaci polohového vektoru \vec{y} podle času t . Konkrétně

$$\vec{v} = \frac{d\vec{y}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{y}}{dt^2},$$

a derivace budeme značit zápisem používaným ve fyzikálních příkladech, tedy

$$\vec{v} = \dot{\vec{y}}, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{y}}.$$

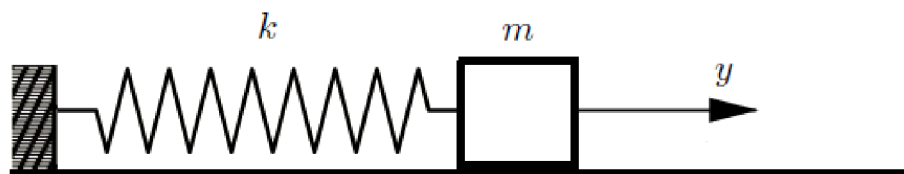
Protože všechny druhy rovnic řešíme v jedné dimenzi, můžeme vektory nahradit skaláry. Ve všech typech budeme uvažovat hmotný bod o hmotnosti m , na který při pohybu působí síly závislé na poloze hmotného bodu y .

U periodických kmitů můžeme určit i periodu T . Ta znázorňuje nejkratší časový úsek, během kterého se hmotný bod dostane zpátky do polohy, ve které perioda pohybu začala. Platí tedy

$$y(t) = y(t + T).$$

Dále můžeme určit frekvenci pohybu f , která vyjadřuje počet kmitů za jednotku času. Frekvence kmitu je určena jako převrácená hodnota periody kmitu, tedy

$$f = \frac{1}{T}.$$



Obrázek 2.1: Schéma mechanického oscilátoru

2.1 Netlumené kmitání

V tomto modelu působí na hmotný bod jen síla F_1 , která je přímo úměrná výchylce hmotného bodu y z rovnovážné polohy $y = 0$. Vzorec pro sestavení síly F_1 je dán zobecněnou formou Hookova zákona [1]

$$F_1 = -ky.$$

2.1 NETLUMENÉ KMITÁNÍ

Znaménko síly značí působení síly F_1 proti směru výchylky. Zanedbáváme veškeré tlumení způsobené třením. Použitím druhého Newtonova zákona sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned} F_{celk} &= F_1 \\ m\ddot{y} &= -ky. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Úpravou a přeznačením dostaneme homogenní LODR2

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0. \tag{2.2}$$

Konstanty $k > 0$ nazýváme tuhost pružiny a ω_0 úhlová frekvence. Pro vyřešení rovnice (2.2) vytvoříme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Dostáváme dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ a podle [3] i obecné řešení rovnice (2.2) ve tvaru

$$y = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

kde konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ by byly určeny počátečními podmínkami. Dostali jsme tak rovnici v kvadrurním tvaru. Pokud chceme harmonický pohyb znázornit pomocí amplitudy A a fázového posunu φ , zvolíme konstanty ve tvaru

$$C_1 = A \sin(\varphi), \quad C_2 = A \cos(\varphi),$$

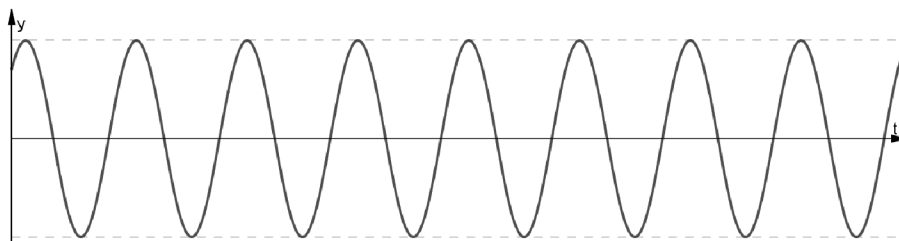
a použitím součtového vzorce pro goniometrické funkce dostaneme řešení rovnice (2.2) ve tvaru

$$y = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{2.3}$$

kde $A \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi$. Nyní konstanty A, φ jsou dány počátečními podmínkami. Perioda kmitu má hodnotu

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Takto vyjádřený pohyb nazýváme vlastní netlumené kmitání a soustavu konající tento pohyb nazveme jako netlumený harmonický oscilátor.



Obrázek 2.2: Obecné znázornění harmonického netlumeného oscilátoru

2.2 Tlumené kmitání

Při vytváření matematického modelu zařadíme kromě výše zmíněné síly F_1 i sílu F_2 , která je přímo úměrná rychlosti hmotného bodu a působí proti směru výchylky, tedy

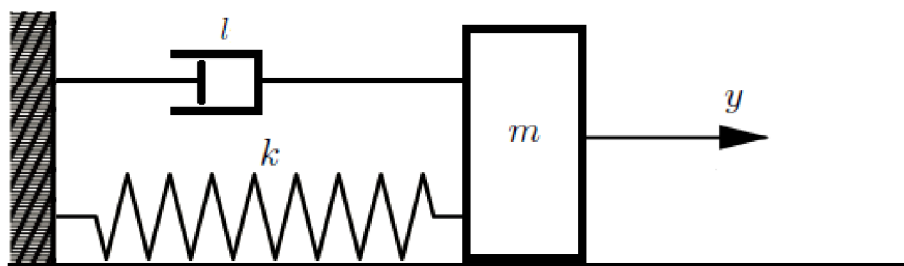
$$F_2 = -l\dot{y}.$$

Tato síla brzdí pohyb hmotného bodu a znázorňuje tření. Konstantu $l > 0$ nazýváme součinitel útlumu a závisí na vlastnostech prostředí a hmotného bodu nebo na druhu vazby (viz obrázek 2.3). Z rovnice (2.1) zařazením síly F_2 dostáváme

$$m\ddot{y} = -ky - l\dot{y}. \quad (2.4)$$

Úpravou a přeznačením opět dostaneme homogenní LODR2

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad b = \frac{l}{2m}. \quad (2.5)$$



Obrázek 2.3: Schéma tlumeného mechanického oscilátoru

Tím jsme dostali diferenciální rovnici vlastního tlumeného kmitání. Pro vyřešení rovnice sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Z této rovnice dostaneme dva kořeny $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$. Podle hodnot koeficientů b, ω_0^2 můžeme dostat tři různé typy rovnic:

1. $b > \omega_0$

Z charakteristické rovnice dostaneme dva různé záporné kořeny λ_1, λ_2 . Dostaneme tak obecné řešení rovnice (2.5) ve tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.6)$$

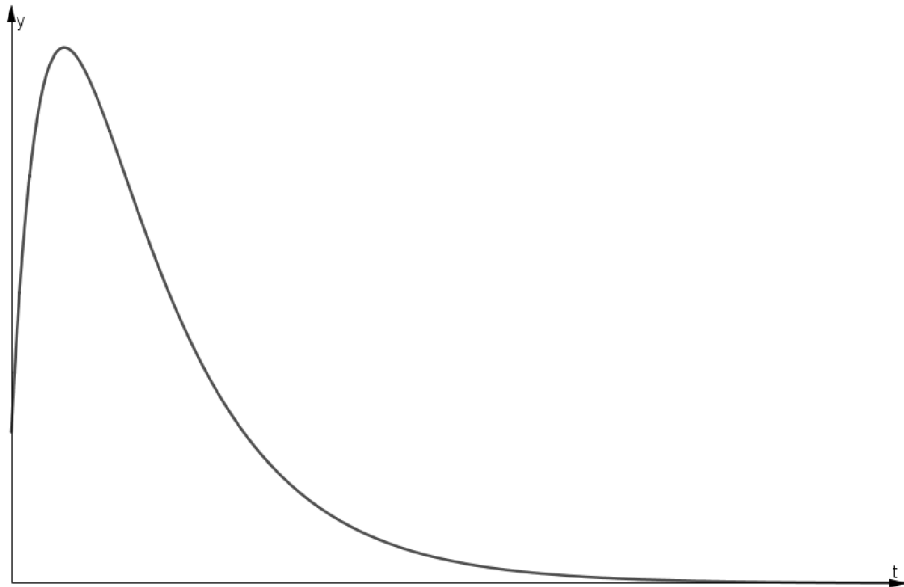
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Tento druh pohybu nazýváme nadkritické tlumení. Z důvodu velkého tlumení (tření) nenastane periodický pohyb. Výchylka se blíží k nulové hodnotě asymptoticky, oscilátor se tedy dostane do rovnovážné polohy teoreticky v nekonečnu.

2. $b = \omega_0$

Jelikož při řešení charakteristické rovnice dostaneme diskriminant $D = 0$, získáme tak jeden dvojnásobný záporný kořen $\lambda_{1,2} = -b$. Můžeme tedy sestavit obecné řešení rovnice (2.5)

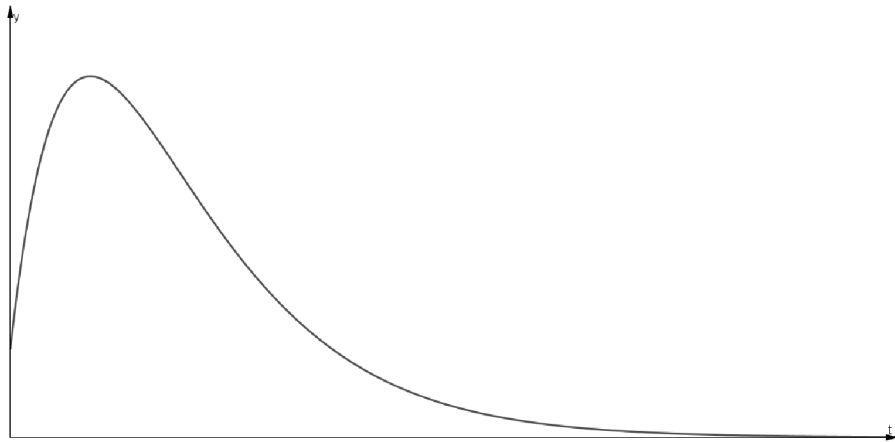
$$y = e^{-bt}(C_1 t + C_2), \quad (2.7)$$

2.2 TLUMENÉ KMITÁNÍ



Obrázek 2.4: Obecné znázornění harmonického oscilátoru s nadkritickým tlumením

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Tento stav nazýváme kritické tlumení. Podobně jako v případě $b > \omega_0$ nenastane periodický pohyb, tlumení je příliš velké. Výchylka se i v tomto případě blíží k nule asymptoticky a nuly tedy dosáhne v nekonečnu. Pokud bychom porovnali rovnice (2.6) a (2.7) se stejnými počátečními podmínkami, zjistili bychom, že v případě $b = \omega_0$ se výchylka blíží nule rychleji.



Obrázek 2.5: Obecné znázornění harmonického oscilátoru s kritickým tlumením

3. $b < \omega_0$

Z charakteristické rovnice získáme dva imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$. Po přeznačení $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ dostáváme kořeny $\lambda_{1,2} = -b \pm i\omega_1$, ze kterých můžeme zkonstruovat obecné řešení rovnice (2.5) ve tvaru

$$y = e^{-bt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$$

Vhodnou volbou konstant $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

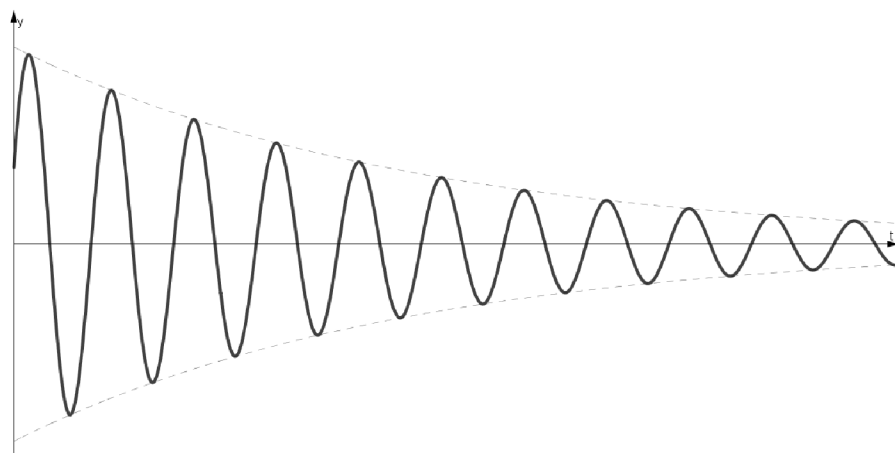
$$y = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (2.8)$$

kde $C \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Získali jsme tak rovnici harmonického pohybu. Tento model nazýváme podkritické tlumení nebo oscilátorické tlumení. Amplituda Ce^{-bt} je funkcí času a s rostoucím časem se blíží k nule. Perioda $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ je oproti periodě netlumeného harmonického pohybu větší. Křivka pohybu je sevřená mezi exponenciálními funkcemi

$$y = Ce^{-bt}$$

$$y = -Ce^{-bt}.$$

Velikost tlumení není dostatečně velká, takže na rozdíl od předešlých typů dojde ke kmitání, v průběhu pohybu výchylka periodicky prochází nulovou hodnotou. Podobně jako u předešlých typů ale dojde k ustálenému stavu teoreticky v nekonečnu.



Obrázek 2.6: Obecné znázornění harmonického oscilátoru s podkritickým tlumením

2.3 Vynucené kmitání

Hmotný bod konající kmitavý pohyb nemusí být jen brzděn tlumící silou, ale může být i zesilován. K tomuto případu musíme zavést novou sílu F_3 , kterou nazveme budící síla. Její vyjádření bude ve tvaru

$$F_3 = P \sin(\omega t),$$

kde P je amplituda budící síly a ω její úhlová frekvence. Tato síla je periodická a působí ve směru výchylky y . Závisí na nezávislé proměnné t , ale na rozdíl od sil F_1, F_2 nezávisí na stavu hmotného bodu.

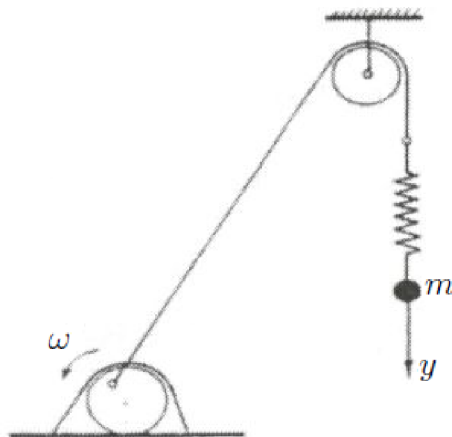
2.3.1 Netlumené vynucené kmitání

Na hmotný bod bude působit síla F_1 od pružiny vychýlené z rovnovážné polohy a budící síla F_3 . Podle druhého Newtonova zákona tedy

$$F_{celk} = F_1 + F_3$$

$$m\ddot{y} = -ky + P \sin(\omega t).$$

2.3 VYNUCENÉ KMITÁNÍ



Obrázek 2.7: Schéma buzeného mechanického oscilátoru [7]

Úpravou a přeznačením dostaneme

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin(\omega t), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0, \quad (2.9)$$

což je nehomogenní LODR2.

Pro vyřešení této rovnice budeme nejdřív uvažovat jen homogenní část. Ta je stejná, jako byla v Sekci 2.1, kde je znázorněn i postup řešení. Můžeme tedy napsat, že homogenní řešení má tvar

$$y_h = C \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

kde konstanty C, φ jsou dány počátečními podmínkami.

Nyní musíme uvažovat dvě možnosti postupu podle velikosti úhlových frekvencí:

1. $\omega \neq \omega_0$

Partikulární řešení budeme hledat metodou neurčitých koeficientů podle [2] ve tvaru

$$y_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Pro získání konstant A, B musíme y_p zderivovat:

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_p &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice (2.9) a získáme tím rovnici

$$A(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t) + B(-\omega^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t).$$

Konstanty získáme porovnáním koeficientů u $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ této rovnice:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) : \quad & A(-\omega^2 + \omega_0^2) = 0 \\ \sin(\omega t) : \quad & B(-\omega^2 + \omega_0^2) = \frac{P}{m}. \end{aligned}$$

Z těchto dvou rovnic vyjádříme konstanty A, B ve tvaru

$$A = 0$$

$$B = \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

a partikulární řešení dostaneme jako

$$y_p = \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t).$$

Obecné řešení pro tuto variantu je tedy

$$y = y_h + y_p = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t). \quad (2.10)$$

Jedná se o složení kmitů různých úhlových frekvencí, které bude rozebráno v další kapitole.

2. $\omega = \omega_0$

Pro tento případ nemůžeme použít stejný obecný tvar partikulárního řešení y_p při metodě neurčitých koeficientů jako v předešlé možnosti, protože by došlo ke shodě členů v homogenním a nehomogenním řešení. Je tedy nutné obecný tvar partikulárního řešení vynásobit podle [2] proměnnou t . Tím už ke shodě členů v homogenním a nehomogenním řešení nedojde a můžeme tedy postupovat podobně, jako v předešlém typu.

Partikulární řešení má nyní tvar

$$y_p = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t).$$

Vyjádříme derivace partikulárního řešení

$$\dot{y}_p = (A + B\omega t) \cos(\omega t) + (-A\omega t + B) \sin(\omega t)$$

$$\ddot{y}_p = (-A\omega^2 t + 2B\omega) \cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t) \sin(\omega t),$$

které dosadíme do rovnice (2.9) a získáme rovnici

$$[(-A\omega^2 t + 2B\omega) + A\omega^2 t] \cos(\omega t) + [(-2A\omega - B\omega^2 t) + B\omega^2 t] \sin(\omega t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t).$$

Nyní porovnáme koeficienty u $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$

$$\cos(\omega t) : \quad -A\omega^2 t + 2B\omega + A\omega^2 t = 0$$

$$\sin(\omega t) : \quad -2A\omega - B\omega^2 t + B\omega^2 t = \frac{P}{m}$$

a vyřešením této soustavy rovnic získáme konstanty A, B o hodnotách

$$A = -\frac{P}{2m\omega}$$

$$B = 0.$$

2.3 VYNUCENÉ KMITÁNÍ

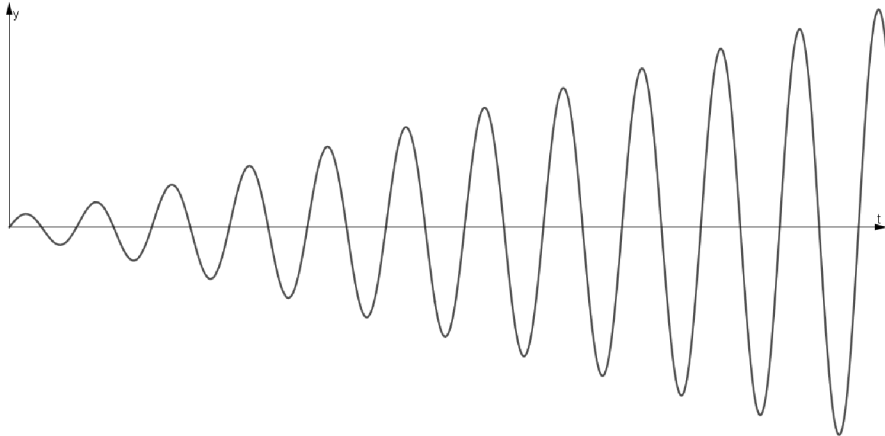
Dosažením vypočítaných konstant do předpisu partikulárního řešení v této sekci dostaneme

$$y_p = -\frac{P}{2m\omega}t \cos(\omega t),$$

a obecné řešení má tentokrát tvar

$$y = y_h + y_p = C \sin(\omega t + \varphi) - \frac{P}{2m\omega}t \cos(\omega t). \quad (2.11)$$

Tento případ popisujeme fyzikálně jako rezonanci. Jde o shodu frekvence vlastních kmitů a budících kmitů. Amplituda nucených kmitů při rezonanci rychle vzrůstá a malá budící síla dokáže vyvolat velké změny oproti variantě, kde $\omega \neq \omega_0$. Z fyzikálního pohledu lze rezonanci využít například k zesílení akustických signálů. Rezonance je taky užitečná u mechanických kyvadlových a setrvačnickových hodin nebo u vibrátorů pro betonování. Taktéž je užitečná u elektromagnetických oscilátorů u ladícího obvodu rozhlasových a televizních přijímačů nebo při funkci elektromagnetických hodinek. Může však být i nežádoucí. Zde je její vliv často rozebírán ve stavebnictví, kde v momentě, kdy nastane rezonanční frekvence, může z důvodů velkých amplitud kmitů dojít k poškození materiálu. Vlastní frekvence může taktéž poškodit rotory turbín nebo křídla letadel.



Obrázek 2.8: Obecné znázornění rezonance buzeného oscilátoru

2.3.2 Tlumené vynucené kmitání

Pro tlumené vynucené kmitání zařadíme do základního modelu ze Sekce 2.3.1 tlumící sílu F_2 danou vzorcem

$$F_2 = -l\dot{y},$$

a vzorec pro celkovou sílu získáme aplikací druhého Newtonova zákona:

$$F_{celk} = F_1 + F_2 + F_3$$

$$m\ddot{y} = -ky - l\dot{y} + P \sin(\omega t).$$

Úpravou a přeznačením dostaneme

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin(\omega t), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad b = \frac{l}{2m}, \quad (2.12)$$

což je nehomogenní LODR2. Výsledná rovnice kmitavého pohybu bude dána sečtením homogenního a partikulárního řešení.

Výpočet všech možností homogenní části rovnice byl rozebrán v Sekci 2.2. Partikulární řešení bude stejné pro všechny možnosti poměru konstant ω_0 a b až na jednu výjimku, která bude uvedena na konci tohoto odstavce. Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

ve kterém jsou pro nás neznámé konstanty A, B . Provedeme potřebné derivace:

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_p &= -A\omega^2 \cos(\omega t) + B\omega^2 \sin(\omega t), \end{aligned}$$

a výše zmíněné rovnice dosadíme do rovnice (2.12)

$$(-A\omega^2 + 2Bb\omega + A\omega_0^2) \cos(\omega t) + (-B\omega^2 - 2Ab\omega + B\omega_0^2) \sin(\omega t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t).$$

Porovnáním konstant u $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ získáme soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) : \quad & -A\omega^2 + 2Bb\omega + A\omega_0^2 = 0 \\ \sin(\omega t) : \quad & -B\omega^2 - 2Ab\omega + B\omega_0^2 = \frac{P}{m}, \end{aligned}$$

ze které dostaneme konstanty A, B ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2Pb\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \\ B &= \frac{P(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy napsat vyjádření partikulárního řešení jako

$$y_p = -\frac{2Pb\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \cos(\omega t) + \frac{P(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \sin(\omega t).$$

Obecné řešení dané tvarem

$$y = y_h + y_p$$

bude záležet na konstantách b, ω_0 . Podle těchto konstant jsme už v předešlé sekci dostali tři různá homogenní řešení rovnice (2.12):

1. Buzený oscilátor s nadkritickým tlumením: $b > \omega_0$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{2Pb\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \cos(\omega t) + \frac{P(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \sin(\omega t),$$

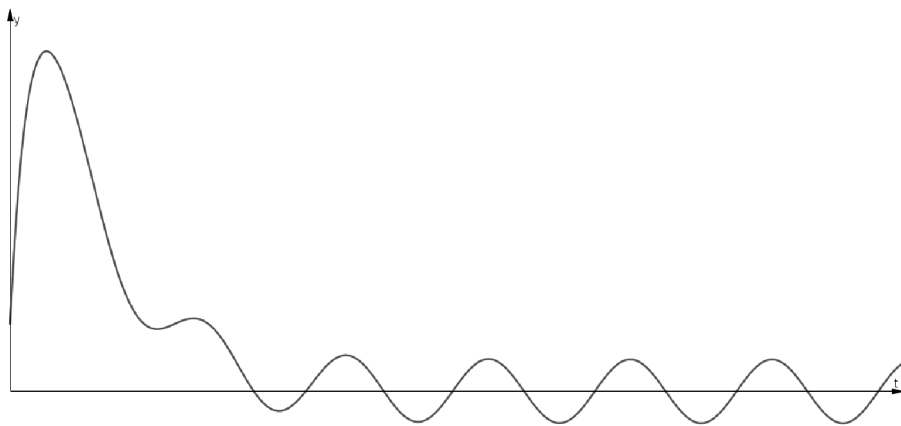
kde $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Buzený oscilátor s kritickým tlumením: $b = \omega_0$

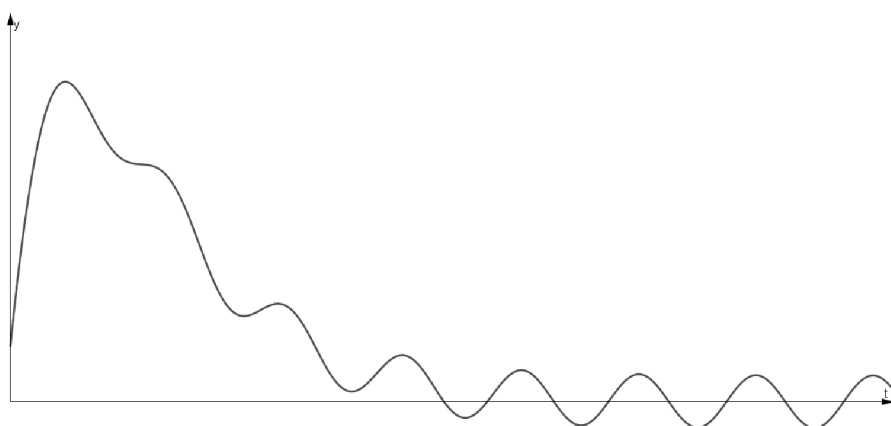
$$y = e^{-bt}(C_1 t + C_2) - \frac{2Pb\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \cos(\omega t) + \frac{P(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \sin(\omega t),$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2.3 VYNUCENÉ KMITÁNÍ



Obrázek 2.9: Obecné znázornění buzeného oscilátoru s nadkritickým tlumením



Obrázek 2.10: Obecné znázornění buzeného oscilátoru s kritickým tlumením

3. Buzený oscilátor s podkritickým tlumením: $b < \omega_0$

Zde by však mohlo dojít ke shodě homogenního a partikulárního řešení. Pro případ $\omega_1 \neq \omega$ má partikulární řešení stejný tvar, jako pro nadkritické a kritické tlumení. Rovnice pohybu má tedy tvar

$$y = Ce^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi) - \frac{2Pb\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \cos(\omega t) + \frac{P(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b\omega^2]} \sin(\omega t),$$

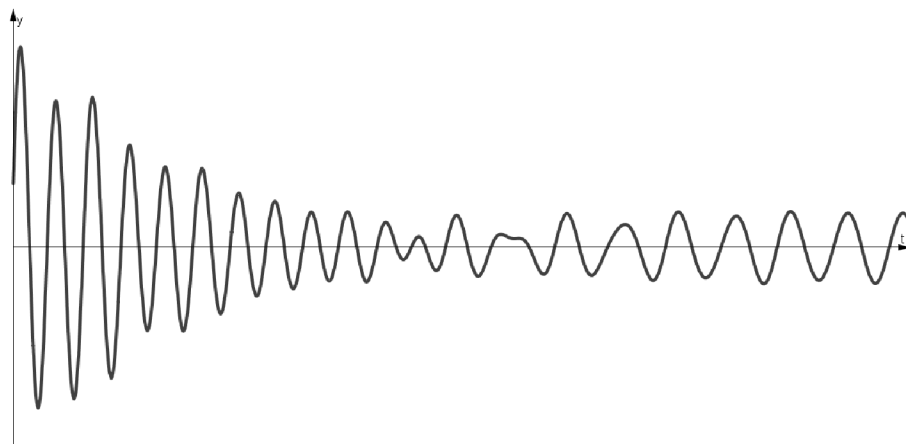
kde $C \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ a $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$.

Pro případ $\omega_1 = \omega$ musíme problém řešit s partikulárním řešením vynásobeným nezávisle proměnnou t a dostat tak upravené partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t).$$

Tím tedy již nedojde ke shodě homogenní a partikulární části. Derivace partikulárního řešení nyní mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= (A + B\omega t) \cos(\omega t) + (-A\omega t + B) \sin(\omega t) \\ \ddot{y}_p &= (-A\omega^2 t + 2B\omega) \cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$



Obrázek 2.11: Obecné znázornění buzeného oscilátoru s podkritickým tlumením za předpokladu $\omega_1 \neq \omega$

Dosazením od rovnice (2.12) získáme

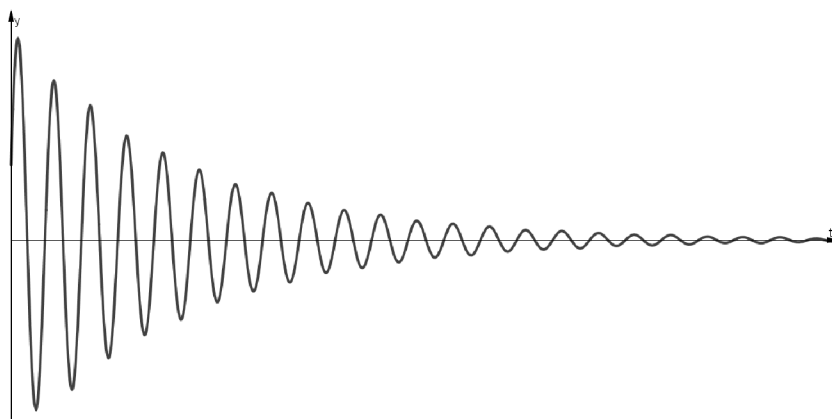
$$[A(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t) + 2B\omega(1 + bt)] \cos(\omega t) + \\ + [-2A\omega(1 + bt) + B(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)] \sin(\omega t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t).$$

Porovnáním koeficientů $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) : \quad & A(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t) + 2B\omega(1 + bt) = 0 \\ \sin(\omega t) : \quad & -2A\omega(1 + bt) + B(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t) = \frac{P}{m}, \end{aligned}$$

ze které vypočítáme konstanty A, B :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2P\omega(1 + bt)}{m[(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)^2 + 4\omega^2(1 + bt)^2]} \\ B &= \frac{P(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)}{m[(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)^2 + 4\omega^2(1 + bt)^2]}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.12: Obecné znázornění buzeného oscilátoru s podkritickým tlumením za předpokladu $\omega_1 = \omega$

2.3 VYNUCENÉ KMITÁNÍ

Tím tedy získáme obecné řešení rovnice (2.12) ve tvaru

$$y = Ce^{-bt} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{2P\omega(1+bt)}{m[(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)^2 + 4\omega^2(1+bt)^2]} \cos(\omega t) + \frac{P(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)}{m[(-\omega^2 t + 2b + \omega_0^2 t)^2 + 4\omega^2(1+bt)^2]} \sin(\omega t), \quad (2.13)$$

kde $C \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$.

Výchylka se blíží k ustálenému stavu. Tedy při stavu $\omega = \omega_1$ nedojde k resonanci jako v případě ze sekce s buzeným kmitáním bez tlumení. Naopak je potlačeno buzení, které zapříčiní jen zpomalení konvergence. Systém popsany rovnicí (2.13) se tedy blíží ustálenému stavu pomaleji, než systém popsany rovnicí (2.8).

3 Skládání kmitů

V této kapitole budeme uvažovat systémy s více stupni volnosti. Ty dostaneme vhodným spojením n oscilátorů o obecně různých amplitudách A_i , úhlových frekvencích ω_i a počátečních výchylkách φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Pro sloučení těchto aspektů do jedné rovnice využijeme princip superpozice, který říká, že výslednou rovnici okamžité výchylky lze počítat jako součet rovnic jednotlivých podsystémů. Matematicky jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i(t).$$

Tohoto vztahu jsme využili již v Sekci 2.3, kde se výsledná rovnice okamžité výchylky počítala jako součet homogenního a partikulárního řešení.

Pro dobré znázornění a zjednodušení řešení budeme v této kapitole uvažovat, že jednotlivé kmity soustavy jsou netlumené. Tím můžeme rovnici okamžité výchylky s použitím superpozice psát jako

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}.$$

Soustavu je možné si představit jako hmotný bod o hmotnosti m připojený na n pružin s tuhostí k_i , které obecně kmitají s jinou amplitudou, úhlovou frekvencí a počáteční výchylkou. Výsledný pohyb však nemusí být harmonický, ani periodický.

Na úvod poznamenejme, že specifické řešení mají soustavy, kde jsou pružiny řazeny paralelně nebo sériově a hmotný bod je zatížen počáteční silou F , která na pružiny působí v ose. Zde stačí nahradit pružiny v systému jednou pružinou.

Pro paralelní řazení pružin se n pružin s tuhostí k_i protáhne o stejnou délku, musí tedy na každou působit obecně jiná síla F_i a platí

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Tuhost systému získáme z rovnice

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{y} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

Výsledná tuhost soustavy je tedy součet tuhostí jednotlivých pružin.

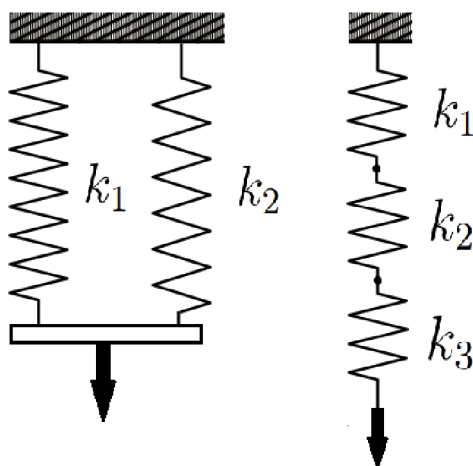
Při sériovém řazení působí na každou pružinu stejná síla F , ale každá pružina se protáhne o obecně jinou délku y_i . Pro celkovou výchylku soustavy platí

$$y = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \frac{F}{k_i} = \frac{F}{k},$$

z čehož nám po vykrácení vyšel vzorec pro celkovou tuhost systému:

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}.$$

Převrácená hodnota výsledné tuhosti je rovna součtu převrácených hodnot tuhostí jednotlivých pružin.



Obrázek 3.1: Schéma paralelního a sériového zařazení pružin

3.1 Rovnoběžné kmity

Uvažujme, že na hmotný bod působí všechny vnější síly v jedné ose. Tím můžeme celé řešení problému uvažovat jen v jedné dimenzi. Pro názornost budeme uvažovat jen dva kmitavé pohyby s pohybovými rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2(t) &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Výsledné kmitání soustavy bude mít po použití principu superpozice pohybovou rovnici ve tvaru

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (3.2)$$

Řešení a i následné grafické znázornění se bude významně lišit podle porovnání jejich úhlových frekvencí.

3.1.1 Izochronní kmity

Předpokládejme nyní, že oba kmity mají stejné uhlové frekvence, tedy $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Rovnice pro samostatné kmitavé pohyby mají tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pro početní vyřešení pohybové rovnice můžeme využít analytické řešení nebo komplexní reprezentaci.

Analytické řešení

Pro analytické řešení si rovnice jednotlivých kmitů upravíme do tvaru s kvadraturními amplitudami:

$$\begin{aligned} y_1 &= B_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) \\ y_2 &= B_2 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Správnost přepisu a ekvivalentnost s rovnicí (3.3) je možné si ověřit v Sekci 2.1. Použitím superpozice a vytknutím dostáváme rovnici

$$y = (B_1 + B_2) \cos(\omega t) + (C_1 + C_2) \sin(\omega t),$$

kde $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Volbou konstant ve tvaru

$$B_1 + B_2 = A \sin \varphi, \quad C_1 + C_2 = A \cos \varphi$$

a použitím součtového vzorce pro goniometrické funkce lze rovnici přepsat do tvaru

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.4)$$

kde amplituda kmitání je dána vztahem

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}. \quad (3.5)$$

Pro fázi složeného kmitu platí

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A}.$$

Komplexní reprezentace

Netlumený kmitavý pohyb lze vyjádřit jako rovnoměrný pohyb po kružnici v komplexní Gaussově rovině [1]. Komplexní číslo

$$z = x + iy$$

zobrazuje polohu bodu o souřadnicích $[x, y]$ v komplexní rovině. Číslo z zároveň můžeme psát i jako

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Z tohoto tvaru jej pomocí Eulerovy formule [2] přepíšeme na

$$z = re^{i\phi}.$$

Kmitavý pohyb je pak průmět pohybu po kružnici do jedné z os. Pro náš případ bude důležitý průmět do osy y , tedy

$$y = \operatorname{Im} z = r \sin \phi.$$

Při řešení komplexní reprezentací převedeme tedy soustavu (3.1) na pohyby po kružnici v Gaussově rovině:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1[\cos(\omega t + \varphi_1) + i \sin(\omega t + \varphi_1)] \\ z_2 &= A_2[\cos(\omega t + \varphi_2) + i \sin(\omega t + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Tento tvar přepíšeme pomocí Eulerovy formule na

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \\ z_2 &= A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

3.1 ROVNOBĚŽNÉ KMITY

Výsledné kmity dostaneme použitím superpozice jako

$$z = z_1 + z_2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t}.$$

Nyní zavedeme odznačení \mathcal{A} a nazveme jej jako komplexní amplitudu. Pro ni platí

$$\mathcal{A} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}.$$

Rovnici výsledných kmitů tedy můžeme přepsat do tvaru

$$z = \mathcal{A} e^{i\omega t}.$$

Bez újmy na obecnosti ale můžeme \mathcal{A} přepsat jako

$$\mathcal{A} = A e^{i\varphi}$$

a tím získat rovnici výsledných kmitů ve tvaru

$$z = A e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Tento výraz pomocí Eulerovy formule přepíšeme na

$$z = A[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)].$$

Jedná se opět o pohyb po kružnici v Gaussově rovině. Kmitavý pohyb systému (3.1) je znázorněn jako průmět pohybu po kružnici do osy y , tedy imaginární složka výrazu. Tím dostáváme

$$y = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.6)$$

Amplituda výsledných kmitů A je rovna velikosti komplexní amplitudy \mathcal{A} . Platí tedy

$$A = |\mathcal{A}| = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}.$$

Pro výslednou fázi platí

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} \mathcal{A}}{|\mathcal{A}|} = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} \mathcal{A}}{|\mathcal{A}|} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A}.$$

Vyjádření jednotlivých konstant je stejné jako v analytickém řešení, rovnice (3.4) a (3.6) jsou tedy ekvivalentní.

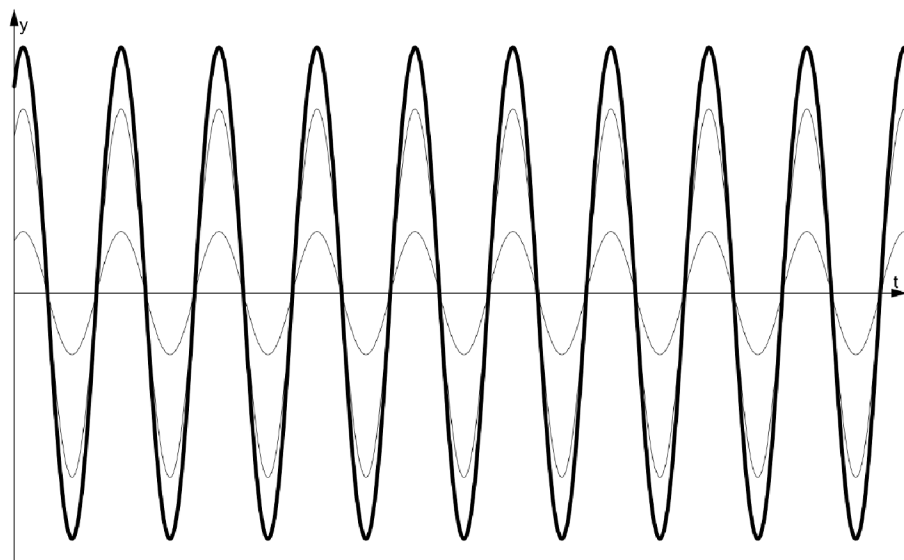
Odvozené řešení dvou složených kmitů o stejné frekvenci se bude lišit podle rozdílu jednotlivých fází. Popíšme nyní dva významné rozdíly fází:

1. Kmitý ve fázi

Pro tento případ platí $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pak $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. Vztah pro výslednou amplitudu (3.5) se tedy zjednoduší na vzorec

$$A = A_1 + A_2.$$

Výslednou fázi systému můžeme zapsat jako $\varphi = \varphi_1$ i $\varphi = \varphi_2$. V tomto případě jsou obě vyjádření v konečném vzorci ekvivalentní.



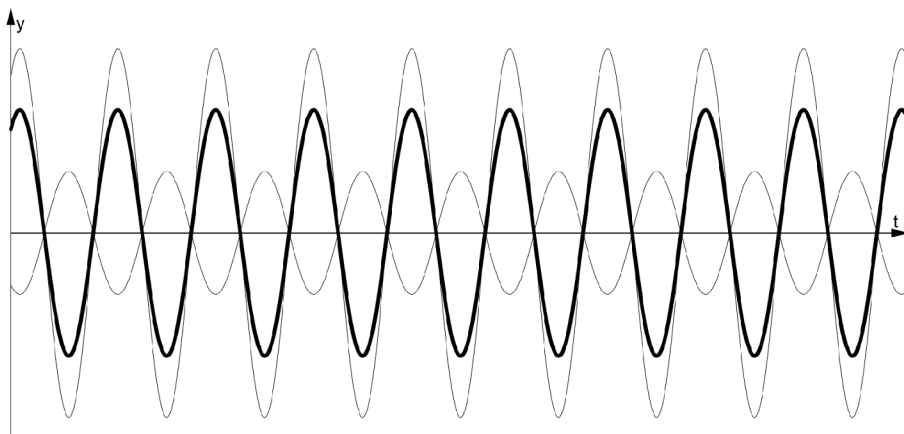
Obrázek 3.2: Skládání dvou izochronních kmitů ve fázi

2. Kmitý v protifázi

Zde platí rovnost $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, tedy $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Pro výslednou amplitudu výchylky platí

$$A = |A_1 - A_2|$$

Velikost fáze systému bude záležet na velikostech amplitud A_1, A_2 . Pro $A_1 > A_2$ platí $\varphi = \varphi_1$. Naopak pro $A_1 < A_2$ platí $\varphi = \varphi_2$. Pokud budou obě amplitudy shodné, dostaneme $A = 0$, tedy celkový pohyb bude nulový v každém čase t . Na velikosti fáze systému φ nebude záležet.



Obrázek 3.3: Skládání dvou izochronních kmitů v protifázi

3.1.2 Anizochronní kmitý

Do této sekce patří všechny případy skládání rovnoběžných kmitů, které nenáleží Sekci 3.1.1, úhlové frekvence jednotlivých kmitů jsou různé. Platí tedy $\omega_1 \neq \omega_2$. Anizochronní kmitý nejsou obecně harmonické ani periodické. Tato situace nastane, pokud neexistuje žádný společný násobek period.

Zde nastávají různé situace podle vzájemného vztahu ω_1 a ω_2 .

3.1 ROVNOBĚŽNÉ KMITY

Různé soudělné frekvence

Pro soudělné frekvence platí, že úhlové frekvence a periody oscilátorů nejsou stejné, ale platí

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

kde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Výsledné kmitání nebude harmonické, ale bude stále periodické. Periodu výsledných kmitů vypočítáme podle vzorce

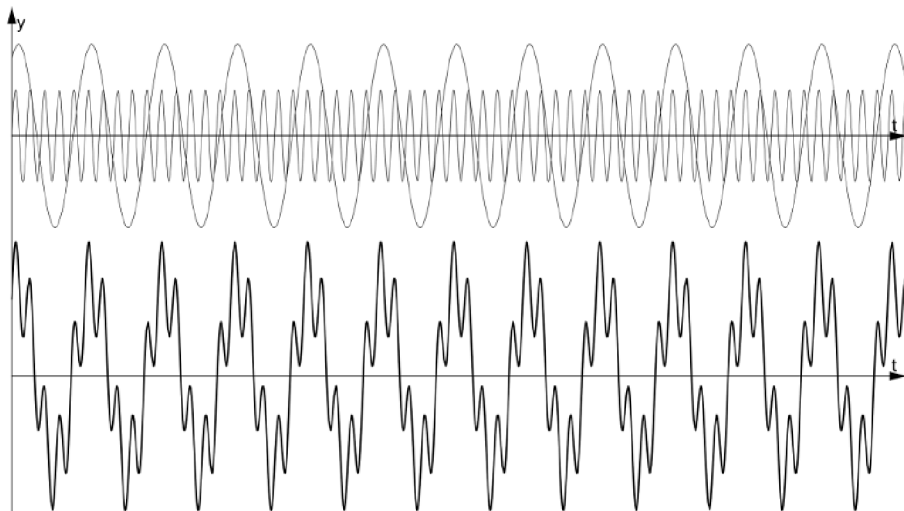
$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2.$$

Platí, že perioda výsledných kmitů se rovná nejmenšímu společnému násobku period T_1, T_2 .

Výslednou úhlovou frekvenci získáme podle vzorce

$$\omega = \frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2}.$$

Zde platí, že výsledná úhlová frekvence ω je rovna největšímu společnému děliteli jednotlivých úhlových frekvencí ω_1, ω_2 .



Obrázek 3.4: Skládání dvou kmitů se soudělnými frekvencemi

Blízké frekvence

Pro zjednodušení nyní předpokládejme, že amplitudy částečných kmitů jsou stejné, tedy platí $A_1 = A_2 = A$. V rovnici (3.2) tedy můžeme amplitudy vytknout a použít goniometrický vzorec pro součet dvou funkcí sinus. Po těchto úpravách dostaneme rovnici ve tvaru

$$y = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (3.7)$$

Úhlové frekvence jednotlivých kmitů vyjádříme jako jako

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega + \Omega \\ \omega_2 &= \omega - \Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde $\omega \gg \Omega$ jsou vhodné konstanty. Pro ω_1, ω_2 platí, že jsou si blízké, tedy $\omega_1 \approx \omega_2$. Po vyjádření konstant ω, Ω z rovnic (3.8) přepíšeme rovnici (3.7) do tvaru

$$y = 2A \cos\left(\Omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Označme pomalu se měnící amplitudu jako

$$\mathcal{A}(t) = 2A \cos\left(\Omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right).$$

Výslednou rovnici pro skládání kmitů blízkých frekvencí tak získáme ve tvaru

$$y = \mathcal{A}(t) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Tento výraz znázorňuje harmonické kmitání s časově proměnnou amplitudou $\mathcal{A}(t)$. Výsledná křivka kmitání je uzavřena v obalu, který je tvořen z křivek

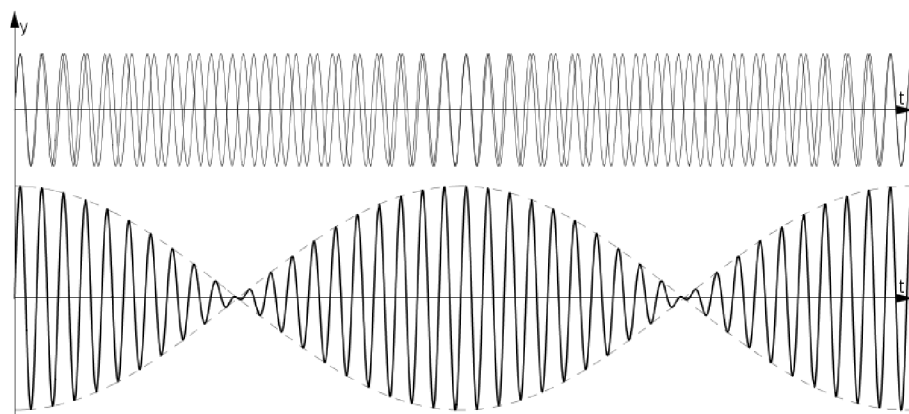
$$\begin{aligned} y &= \mathcal{A}(t) \\ y &= -\mathcal{A}(t). \end{aligned}$$

Časový interval mezi sousedními maximy kmitání je závislý jen na funkci $\mathcal{A}(t)$. Maximum nastává v časovém okamžiku

$$\Omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = k\pi,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Periodu určíme jako rozdíl dvou sousedních okamžiků, kde kmity nabyly maxima, tedy

$$\tilde{T} = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\Omega}.$$

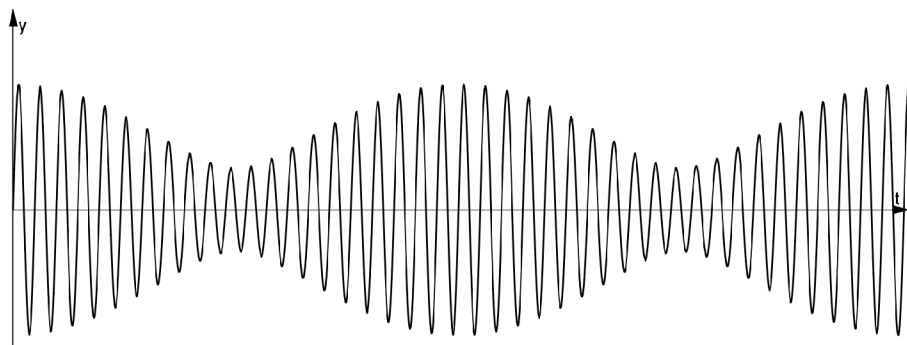


Obrázek 3.5: Skládání dvou kmitů blízké frekvence pro případ $A_1 = A_2$

Tento druh kmitání se nazývá záněže nebo rázy [9]. Jde tedy o výsledný harmonický kmit s časově proměnnou amplitudou. Perioda \tilde{T} se nazývá perioda záněžů. Záněže se často vyskytují v akustice, nejvíce k nim dochází při ladění hudebních nástrojů, když kvůli ladění dojde k přiblížení frekvencí dvou zvuků. Velké využití mají záněže v měření blízkých frekvencí v momentě, kdy jednu z frekvencí známe. Jsou též příčinou úniku informací při příjmu krátkovlnných vysílačů.

Pokud si nejsou rovny amplitudy jednotlivých kmitů ($A_1 \neq A_2$), bude pohyb podobný jako ve variantě výše, jen velikost časově proměnné amplitudy bude náležet intervalu $\langle |A_1 - A_2|; A_1 + A_2 \rangle$, tedy nikdy nedosáhne nuly.

3.1 ROVNOBĚŽNÉ KMITY



Obrázek 3.6: Skládání dvou kmitů blízké frekvence pro případ $A_1 \neq A_2$

3.1.3 Harmonická analýza

Základem této sekce bude skutečnost, že podle [2] každý periodický pohyb s periodou kmitu T a úhlovou frekvencí ω lze rozložit na nekonečně mnoho harmonických kmitů, které mají periody o hodnotách

$$T_1 = T, T_2 = \frac{T}{2}, T_3 = \frac{T}{3}, \dots, T_k = \frac{T}{k}, \dots$$

a úhlové frekvence ve tvaru

$$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \dots, \omega_k = k\omega, \dots$$

To dokázal kolem roku 1822 francouzský matematik a fyzik Jean Baptiste Joseph Fourier [1].

Mějme tedy (obecně složitou) periodickou funkci $y = f(t)$ s periodou T a frekvencí ω . S použitím výše zmíněného tvrzení a principu superpozice můžeme naši funkci přepsat do tvaru

$$y = C_0 + C_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots$$

Podle odvození v Sekci 2.1 můžeme jednotlivé členy přepsat do tvaru

$$C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Nyní položíme $C_0 = A_0$ a naši funkci můžeme vyjádřit jako

$$y = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + \dots + A_k \cos(k\omega t) + \dots + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + \dots + B_k \sin(k\omega t) + \dots$$

tedy v sumačním zápisu jako

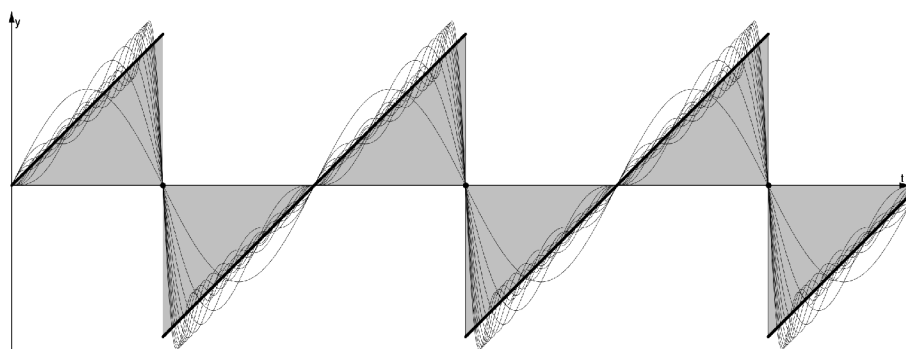
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t).$$

Tuto řadu nazýváme jako Fourierova řada. Harmonická analýza spočívá v nalezení konstant A_k, B_k , respektive C_k, φ_k . Konstanty A_k, B_k vypočítáme pomocí vztahů z [1]

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$



Obrázek 3.7: Harmonická analýza funkce $f(t) = t$ na intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$

Výpočet může podle [10] usnadnit skutečnost, že pokud je funkce $f(t)$ na intervalu $\langle -\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \rangle$ lichá, jsou konstanty A_k pro $k = 0, 1, 2, \dots$ rovny nule. Pokud je funkce $f(t)$ na intervalu $\langle -\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \rangle$ sudá, jsou nulové konstanty B_k pro $k = 1, 2, 3, \dots$

3.2 Kolmé kmity

Budeme předpokládat kmity ve dvou dimenzích. Kmit $x(t)$ bude probíhat v ose x , kmit $y(t)$ v ose y . Zavedeme vektor výchylky \mathbf{r} jako

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)].$$

Velikost výchylky je dána Pythagorovou větou, tedy

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Opět budeme předpokládat jen netlumené kmity s vyjádřením

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y &= B \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Řešení bude stejně jako v Sekci 3.1 záviset na poměru úhlových frekvencí jednotlivých kmitů.

3.2.1 Kolmé izochronní kmity

Předpokládejme rovnost obou úhlových frekvencí ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$). Označme nyní $\varphi(t) = \omega t + \varphi_1$ a $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Tím dostaneme rovnice (3.9) ve tvaru

$$x = A \sin \varphi \quad (3.10)$$

$$y = B \sin(\varphi + \Delta\varphi) = B \sin \varphi \cos \Delta\varphi + B \cos \varphi \sin \Delta\varphi. \quad (3.11)$$

Tím jsme eliminovali z rovnic čas t . Rovnici (3.11) upravíme do tvaru

$$B \cos \varphi \sin \Delta\varphi = y - B \sin \varphi \cos \Delta\varphi \quad (3.12)$$

a umocníme ji. Z rovnice (3.10) vyjádříme

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{x}{A} \\ \cos^2 \varphi &= 1 - \frac{x^2}{A^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Když rovnice (3.13) dosadíme do umocněné (3.12), dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \Delta\varphi, \quad (3.14)$$

což je rovnice elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic. Tato rovnice vyjadřuje křivku, kterou bude soustava opisovat při stejné úhlové frekvenci obou kmitů.

Pokud rovnici (3.14) přepíšeme do polárních souřadnic $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, získáme rovnici

$$\frac{\cos^2 \theta}{A^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{AB} \cos \Delta\varphi + \frac{\sin^2 \theta}{B^2} = \frac{\sin^2 \Delta\varphi}{r^2}. \quad (3.15)$$

Odtud lze dostat vyjádření pro $r(\theta)$, která má stejné extrémy jako funkce $\frac{1}{r^2}(\theta)$ [1]. Tyto extrémy zjistíme derivováním levé strany rovnice (3.15), kterou následně položíme rovnou nule. Po úpravách získáme rovnici

$$-2AB(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \Delta\varphi + 2(A^2 - B^2) \cos \theta \sin \theta = 0.$$

Použitím příslušných goniometrických vzorců tuto rovnici přepíšeme do tvaru

$$-2AB \cos 2\theta \cos \Delta\varphi + (A^2 - B^2) \sin 2\theta = 0,$$

ze které dostaneme

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \cos \Delta\varphi. \quad (3.16)$$

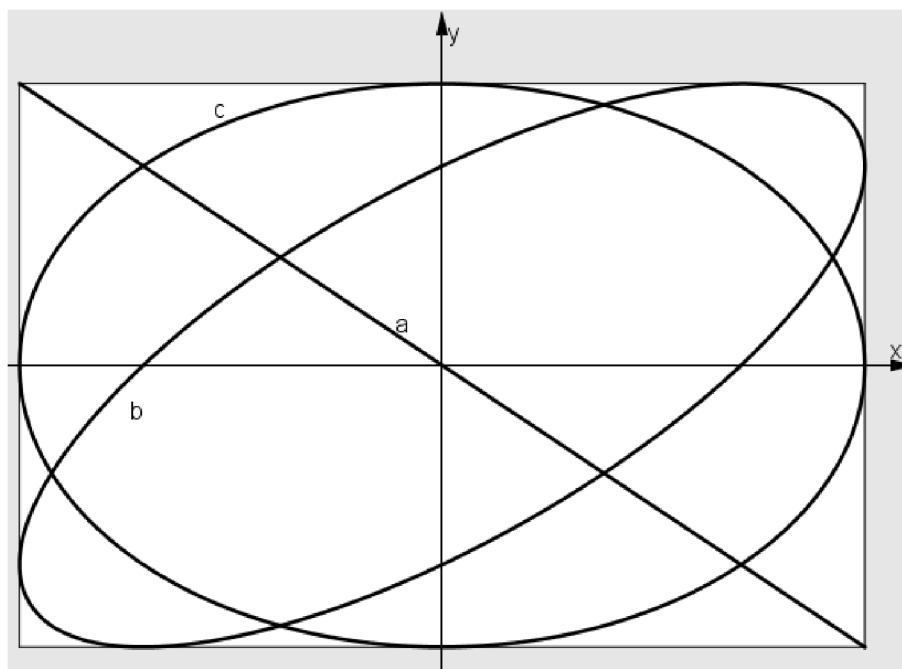
Tento vzorec vyjadřuje úhel natočení hlavní osy a resp. b od osy x resp. y souřadného systému.

Tvar a natočení křivky pohybu vyjádřené rovnicí (3.14) bude ovlivněn $\Delta\varphi$, tedy rozdílem počátečních fází φ_1, φ_2 . Při volbě libovolného rozdílu počátečních fází kmitů však křivka výsledného kmitu neopustí obdélník o rozměrech $2A \times 2B$.

Pro $\Delta\varphi = \frac{(k+1)\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ dostáváme z rovnice (3.16), že natočení os elipsy a, b oproti osám x, y bude nulové. V obrázku 3.8 je tento případ znázorněn jako křivka c . Pokud se amplitudy obou složených kmitů rovnají, tedy $A = B$, dostaneme rovnici kruhu.

Pro $\Delta\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se z rovnice (3.14) stane rovnice přímky spojující body $[-A, B]$ a $[A, -B]$ (v obrázku 3.8 křivka a). Podobně pro $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ dostaneme rovnici přímky spojující body $[-A, -B]$ a $[A, B]$.

V obrázku 3.8 je znázorněn i případ elipsy s natočenými hlavními osami, konkrétně pro případ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ (křivka b).



Obrázek 3.8: Křivky kolmých izochronních kmitů

3.2.2 Kolmé anizochronní kmity

Zde budeme předpokládat, že $\omega_1 \neq \omega_2$, máme tedy kmity různých frekvencí. Trajektorie výsledných kmitů bude velice složitá, obecně otevřená křivka. Eliminace času t z rovnic kmitů (3.9) je podstatně složitější a významně se mění v závislosti na amplitudách a počátečních fázích jednotlivých kmitů.

Pokud je výsledná trajektorie otevřená křivka, tedy okamžitá výchylka se nedostane do počáteční výchylky a pohyb se nebude periodicky opakovat, vyplní postupně celá obdélník $2A \times 2B$. Tento děj nastane vždy pro dva kmity o nesoudělných frekvencích.

Soudělné frekvence

Podobně jako v případě skládání rovnoběžných kmitů i zde budeme mluvit o soudělných frekvencích, pokud bude platit

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

kde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná celá čísla. Pro výslednou periodu platí

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2.$$

Ta se tedy rovná nejmenšímu společnému násobku. Pro výslednou úhlovou frekvenci platí

$$\omega = \frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2},$$

je tedy rovna největšímu společnému děliteli.

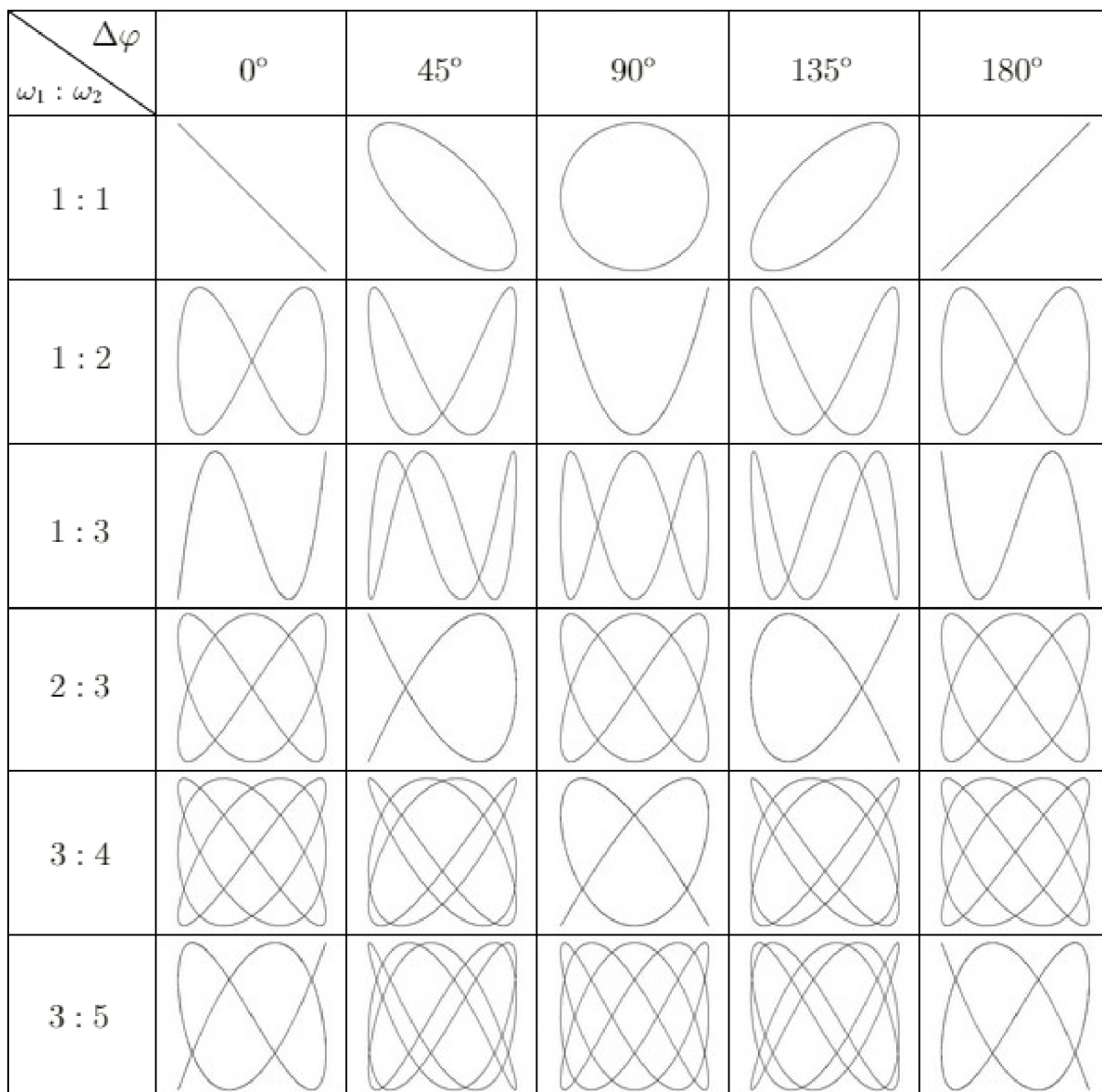
Jedná se o jediný typ anizochronních kmitů, který je periodický a tvoří uzavřenou křivku. Vzniklé trajektorie nazýváme jako Lissajousovy křivky (obrázek 3.9). Jules-Antoine Lissajous (1858) zaznamenal kmity na základě malého kyvu Blackburnova kyvadla, což je jistý druh složeného kyvadla, které se přibližuje matematickému kyvadlu. Toto kyvadlo

3.2 KOLMÉ KMITY

zanechává stopy sypaním písku ze svého závaží [1][9]. Lissajousovy křivky se znázorňují jako schémata zobrazující trajektorie dvou určitých kmitů y_1, y_2 s různými poměry jednotlivých frekvencí. Tvar křivky také ovlivní fázový posun jednotlivých kmitů. Čím jsou čísla n_1, n_2 menší, tím je tvar výsledné trajektorie jednodušší. Křivka neopustí obdélník $2A \times 2B$.

Z tvaru Lissajousovy křivky lze určit poměr obou frekvencí. Křivkou vedeme přímku p kolmou na osu x a přímku q kolmou na osu y . Poměr počtu průsečíků přímky p s křivkou kmitu (označme n_p) a počtu průsečíků přímky q s křivkou kmitu (označme n_q) je stejný jako poměr úhlových frekvencí ω_1, ω_2 , tedy platí

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_p}{n_q}.$$



Obrázek 3.9: Lissajousovy křivky

4 Spřažené oscilátory

V této sekci budeme vycházet z rovnice tlumeného kmitu jednoho oscilátoru tvaru

$$m\ddot{y} + l\dot{y} + ky = 0,$$

kde platí $m > 0, k > 0$.

Předpokládejme nyní soustavu n oscilátorů obecně s různými koeficienty a jinými okamžitými výchylkami i její první a druhou derivací. Dostáváme pak rovnici pro jeden samostatný oscilátor před spřažením ve tvaru

$$m_j\ddot{y}_j + l_j\dot{y}_j + k_jy_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Pojmem spřažení rozumíme svázání určitým způsobem několika oscilátorů. Tyto systémy se svými kmity vzájemně ovlivňují. Předpokládejme nyní spojení oscilátorů i a r . Je zřejmé, že oscilátor i bude ovlivněn oscilátorem r a zároveň bude oscilátor i ovlivňovat oscilátor r . Diferenciální rovnici pohybu i -tého oscilátoru tedy dostaneme podle [4] ve tvaru

$$m_i\ddot{y}_i + l_i\dot{y}_i + k_iy_i + a_{ir}\ddot{y}_r + b_{ir}\dot{y}_r + c_{ir}y_r + \alpha_{ir}\ddot{y}_i + \beta_{ir}\dot{y}_i + \gamma_{ir}y_i = 0,$$

kde koeficienty a_{ir}, b_{ir}, c_{ir} značí, jak je oscilátor i ovlivněn oscilátorem r , a koeficienty $\alpha_{ir}, \beta_{ir}, \gamma_{ir}$ znázorňují, jak oscilátor i ovlivňuje oscilátor r . Při spřažení n soustav budou pohyb oscilátoru i ovlivňovat oscilátory $1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n$ a naopak. Diferenciální rovnici pohybu i -tého oscilátoru dostaneme ve tvaru

$$m_i\ddot{y}_i + l_i\dot{y}_i + k_iy_i + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (a_{ir}\ddot{y}_r + b_{ir}\dot{y}_r + c_{ir}y_r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (\alpha_{ir}\ddot{y}_i + \beta_{ir}\dot{y}_i + \gamma_{ir}y_i) = 0. \quad (4.1)$$

Nyní označíme

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \alpha_{ir} = a_{ii}, \quad \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \beta_{ir} = b_{ii}, \quad \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \gamma_{ir} = c_{ii}.$$

Rovnici (4.1) tak můžeme přepsat jako

$$m_i\ddot{y}_i + l_i\dot{y}_i + k_iy_i + \sum_{r=1}^n (a_{ir}\ddot{y}_r + b_{ir}\dot{y}_r + c_{ir}y_r) = 0.$$

Konstanty v této rovnici nejsou na sobě nezávislé. Při odvození z kinetické energie, potenciální energie a dissipační funkce podle [4] dostaneme, že platí

$$a_{ir} = a_{ri}, \quad c_{ir} = c_{ri}. \quad (4.2a)$$

Člen b_{ir} podle odvození z kinetické energie a dissipační funkce budeme psát ve tvaru

$$b_{ir} = d_{ir} - e_{ir} \quad (4.2b)$$

a o konstantách d_{ir}, e_{ir} bude platit

$$d_{ir} = d_{ri}, \quad e_{ir} = -e_{ri}. \quad (4.2c)$$

4.1 SPŘAŽENÍ VÝCHYLKOU

Stav s těmito předpoklady nazveme jako obecné spřažení.

Nyní ukážeme modely pro základní typy spřažení. Svázání provedeme postupně pro výchylku a dále pro první a druhou derivaci výchylky. Pro dobrou názornost provedeme spojení dvou oscilátorů, rozšíření na $n > 2$ oscilátorů by probíhalo analogicky. Dále budeme brát oscilátory bez tlumení. V rovnicích tedy bude platit

$$l_i = 0.$$

V jednotlivých typech spřažení budeme uvažovat tři případy. Nejdřív uvedeme případ obecného spřažení definovaného podle (4.2). Dále pro symetrické spřažení bude kromě (4.2) platit i

$$a_{11} = a_{22}, \quad c_{11} = c_{22}, \quad e_{12} = e_{21} = 0.$$

Pro třetí případ, antisymetrické spřažení, bude kromě (4.2) platit i

$$d_{12} = d_{21} = 0.$$



Obrázek 4.1: Schéma spřažení dvou oscilátorů

4.1 Spřažení výchylkou

Pro spřažení výchylkou obecně platí

$$a_{ir} = 0, \quad 1 \leq i, r \leq n$$

$$b_{ir} = 0, \quad 1 \leq i, r \leq n$$

a alespoň pro některé i, r platí $c_{ir} \neq 0$.

Při spřažení dvou systémů tedy dostáváme soustavu dvou diferenciálních rovnic:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + c_{11})y_1 + c_{12}y_2 = 0 \quad (4.3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + c_{22})y_2 + c_{12}y_1 = 0. \quad (4.4)$$

Nyní provedeme eliminaci časové proměnné y_2 . Rovnici (4.3) vynásobíme $(k_2 + c_{22})$ a rovnicí (4.4) vynásobíme $-c_{12}$. Sečtením vynásobených rovnic vyloučíme člen y_2 a dostaneme rovnici

$$m_1(k_2 + c_{22})\ddot{y}_1 + [(k_1 + c_{11})(k_2 + c_{22}) - c_{12}^2]y_1 - m_2c_{12}\ddot{y}_2 = 0. \quad (4.5)$$

Dále rovnicí (4.3) dvakrát zderivujeme, vyjádříme z ní člen \ddot{y}_2 , který dosadíme do rovnice (4.5). Tím získáme

$$m_1m_2y_1^{(4)} + [m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22})]\ddot{y}_1 + [(k_1 + c_{11})(k_2 + c_{22}) - c_{12}^2]y_1 = 0.$$

Z této rovnice vytvoříme charakteristickou rovnici:

$$m_1m_2\lambda^4 + [m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22})]\lambda^2 + [(k_1 + c_{11})(k_2 + c_{22}) - c_{12}^2] = 0.$$

Jak již víme ze Sekce 2, při případě $\lambda \in \mathbb{R}$ nenastane kmitavý pohyb. Zaměříme se tedy nyní na případ $\lambda \in \mathbb{C}$. Řešení charakteristické rovnice dostaneme ve tvaru

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22})}{2m_1m_2} \pm \frac{\sqrt{[m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22})]^2 - 4m_1m_2[(k_1 + c_{11})(k_2 + c_{22}) - c_{12}^2]}}{2m_1m_2}. \quad (4.6)$$

Výraz pod odmocninou lze upravit do tvaru

$$[m_2(k_1 + c_{11}) - m_1(k_2 + c_{22})]^2 + 4m_1m_2c_{12}^2, \quad (4.7)$$

který je vždy kladný. Abychom dostali imaginární charakteristické kořeny, musí být celý výraz (4.6) záporný. Jmenovatel zlomků je vždy kladný. Pro zápornost čitatele musí platit

$$m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22}) > \sqrt{[m_2(k_1 + c_{11}) - m_1(k_2 + c_{22})]^2 + 4m_1m_2c_{12}^2}.$$

Za této podmínky má charakteristická rovnice čtyři kořeny ryze imaginární po dvou komplexně sdružené. Získáme tedy dva harmonické kmity o úhlových frekvencích

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22}) \pm \sqrt{[m_2(k_1 + c_{11}) - m_1(k_2 + c_{22})]^2 + 4m_1m_2c_{12}^2}}{2m_1m_2}}. \quad (4.8)$$

Aby nastala jednovlnnost, tedy aby obě frekvence byly stejné, musel by být výraz (4.7) roven nule. Tento výraz je však vždy kladný, jednovlnnost tedy v tomto případě nikdy nenastane.

U spřažených oscilátorů zavedeme opět úhlovou frekvenci, budeme ale předpokládat, že je pro obě soustavy stejná. Hodnotu ω_0 tedy zavedeme vztahem

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}. \quad (4.9)$$

Pokud tuto rovnost a označení zaneseme do rovnice (4.8), dostaneme rovnici úhlových frekvencí ve tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11}}{2m_1} + \frac{c_{22}}{2m_2} \pm \frac{\sqrt{(m_2c_{11} - m_1c_{22})^2 + 4m_1m_2c_{12}^2}}{2m_1m_2}}.$$

Pokud bychom k úhlové frekvenci ω_0 předpokládali rovnost hmotností hmotných bodů a dále i rovnost tuhostí pružin, dostaneme zjednodušení ve tvaru

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (4.10)$$

Rovnice pro úhlové frekvence spřažení pak bude tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11} + c_{22}}{2m} \pm \frac{\sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}}{2m}}.$$

4.1 SPŘAŽENÍ VÝCHYLKOU

Pro symetrické spřažení ($c_{12} = c_{21}$) dostaneme až na menší úpravy v indexech stejnou rovnici jako v obecném případě. Pokud opět zavedeme úhlovou frekvenci ω_0 jako v (4.9), pak se rovnice pro úhlové frekvence změň na

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11}(m_1 + m_2)}{2m_1m_2} \pm \frac{\sqrt{c_{11}^2(m_2 - m_1)^2 + 4m_1m_2c_{12}^2}}{2m_1m_2}},$$

a za předpokladů (4.10) dostaneme toto vyjádření ve tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11} \pm c_{12}}{m}}. \quad (4.11)$$

Jelikož v rovnicích nevystupuje člen b_{kr} , případ antisymetrického spřažení bude shodný s obecným případem.

Uvažujme nyní speciální případ, kdy $c_{11} = c_{12}$. Rovnice (4.11) se nám zjednoduší na tvar

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{c_{11}}{m}}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

Člen c_{11} můžeme brát jako tuhost pružiny, která spojuje oba systémy. Můžeme definovat i úhlovou frekvenci této pružiny, která bude mít tvar

$$\omega_s^2 = \frac{c_{11}}{m},$$

a úhlové frekvence kmitů nyní dostaneme ve tvaru

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_s^2}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

S těmito předpoklady můžeme rovnice (4.3), (4.4) přepsat do tvaru

$$\ddot{y}_1 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_1 + \omega_s^2y_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$\ddot{y}_2 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_2 + \omega_s^2y_1 = 0. \quad (4.13)$$

Když tyto dvě rovnice sečteme a odečteme od sebe, dostaneme soustavu ve tvaru

$$(4.12) + (4.13) : \quad \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \omega_1^2(y_1 + y_2) = 0 \quad (4.14)$$

$$(4.12) - (4.13) : \quad \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \omega_2^2(y_1 - y_2) = 0. \quad (4.15)$$

Zavedeme substituci

$$q_1 = y_1 + y_2, \quad q_2 = y_1 - y_2, \quad (4.16)$$

čímž můžeme přepsat rovnice (4.14), (4.15) jako

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = 0.$$

Vyřešením každé diferenciální rovnice zvlášť získáme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \\ q_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde konstanty $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ budou dány počátečními podmínkami oscilátorů v systému. Rovnice pro kmity y_1, y_2 získáme zpětnou substitucí z (4.16), tedy

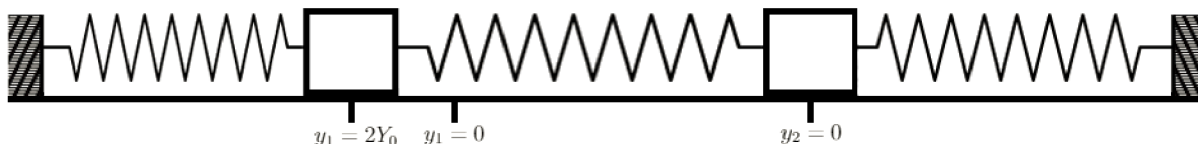
$$y_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2). \quad (4.18)$$

Ukažme si nyní tři významné kmity dvou soustav spřažených výchylkou.

4.1.1 Vychýlení jednoho hmotného bodu

V čase $t = 0$ hmotný bod 1 vychýlíme o $2Y_0$ a hmotný bod 2 necháme na místě. Oba oscilátory následně uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Počáteční podmínky pro soustavu dvou oscilátorů budou tedy

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2Y_0, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$



Obrázek 4.2: Schéma sprážení s vychýlením jednoho oscilátoru na počátku

Tyto podmínky přepíšeme použitím substituce (4.16) jako

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 2Y_0, & \dot{q}_1(0) &= 0, \\ q_2(0) &= 2Y_0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením těchto podmínek do rovnic (4.17) získáme

$$\begin{aligned} q_1 &= 2Y_0 \cos(\omega_1 t) \\ q_2 &= 2Y_0 \cos(\omega_2 t), \end{aligned}$$

a tedy i rovnice kmitů za použití (4.18) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_0 \cos(\omega_1 t) + Y_0 \cos(\omega_2 t) \\ y_2 &= Y_0 \cos(\omega_1 t) - Y_0 \cos(\omega_2 t). \end{aligned}$$

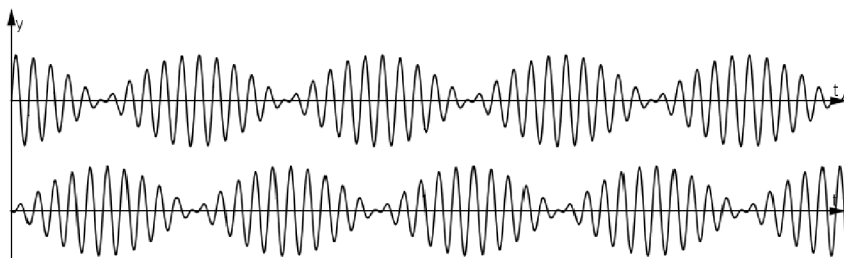
Dojde tedy ke složení dvou kmitů o různých frekvencích.

Skládání bude probíhat tak, jak bylo rozebráno v sekci o skládání kmitání. Pokud nebude docházet k tření, bude mít soustava konstantní celkovou energii, která se bude přelévat z kmitů jedné soustavy na druhou. Nejlépe je tento fakt vidět, pokud budeme předpokládat, že tuhost pružiny, která spojuje hmotné body, bude velmi malá. Potom si budou úhlové frekvence ω_1, ω_2 blízké a kmity obou oscilátorů budou probíhat tak, jak je znázorněno na obrázku 4.3, tedy v čase, kdy kmity jednoho hmotného bodu budou maximální, kmity druhého budou minimální a naopak. Toto přelévání energie se bude periodicky opakovat.

4.1.2 Symetrické kmity

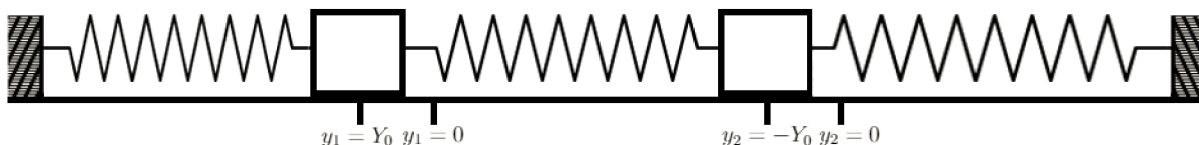
Nyní v čase $t = 0$ oba hmotné body vychýlíme ve stejném směru vzhledem k souřadné soustavě celého systému o Y_0 a uvolníme je s nulovou počáteční rychlostí. Souřadné systémy jednotlivých kmitů orientujeme tak, aby kladný směr osy y mířil od hmotného bodu

4.1 SPŘAŽENÍ VÝCHYLKOU



Obrázek 4.3: Kmity spřažených soustav při vychýlení jednoho oscilátoru na počátku směrem k pevné podpoře, ke které je upevněn před svázáním. Osy y každého kmitu zvlášť jsou tedy opačně orientované. Tím získáme počáteční podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(0) &= Y_0, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= -Y_0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$



Obrázek 4.4: Schéma počátečního stavu spřažených oscilátorů při symetrických kmitech

Za použití substituce (4.16) dostaneme počáteční podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & \dot{q}_1(0) &= 0, \\ q_2(0) &= 2Y_0, & \dot{q}_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

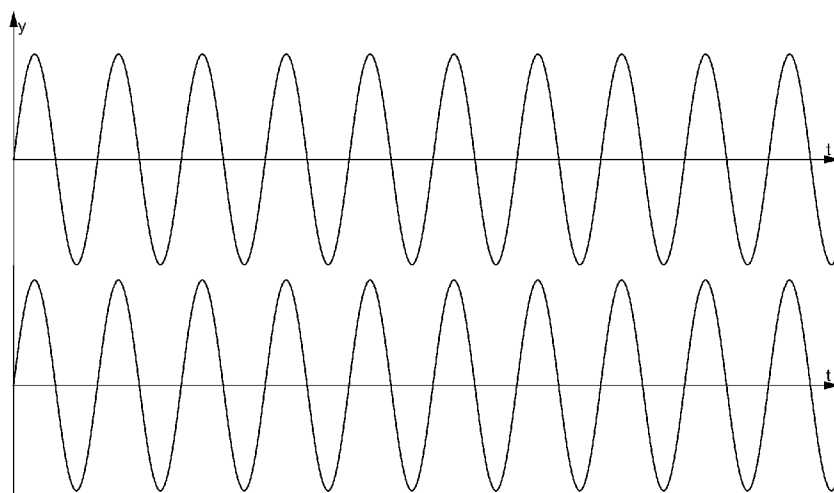
a tedy rovnici (4.17) ve tvaru

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ q_2 &= 2Y_0 \cos(\omega_2 t). \end{aligned}$$

Zpětnou substitucí (4.18) získáme rovnice kmitů jako

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_0 \cos(\omega_2 t) \\ y_2 &= -Y_0 \cos(\omega_2 t). \end{aligned}$$

Obě soustavy kmitají se stejnou fází i velikostí amplitudy, která je dána počátečním vychýlením. I když mají rovnice kmitů opačné znaménko, je třeba si uvědomit, že souřadné systémy jednotlivých oscilátorů jsou opačně orientované. Z celkového hlediska kompletní soustavy jsou však kmity orientovány stejně. Můžeme tedy říci, že oba kmity budou ve fázi. Jelikož úhlová frekvence ω_2 v sobě jakkoli nezahrnuje tuhost pružiny, která spojuje hmotné body, jsou oba kmity na této pružině nezávislé. Během pohybu nedojde ke stlačení nebo natažení pružiny a obě soustavy se chovají, jakoby pružina do systému zařazena nebyla. Tento pohyb nazýváme jako první základní kmit [9].

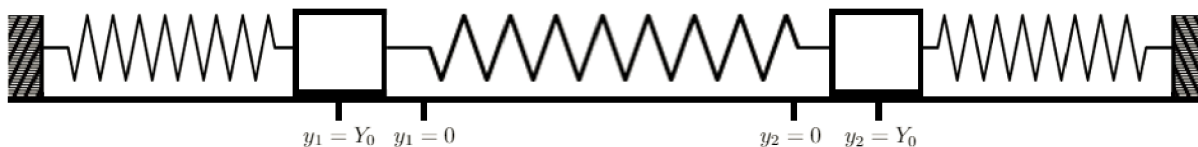


Obrázek 4.5: Symetrické kmity spřažených oscilátorů

4.1.3 Antisymetrické kmity

V čase $t = 0$ tentokrát vychýlíme oba hmotné body v opačném směru vzhledem k souřadné soustavě celého systému o Y_0 a opět je uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Dostaneme tedy počáteční podmínky s přihlédnutím na opačnou orientaci os y ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(0) &= Y_0, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= -Y_0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$



Obrázek 4.6: Schéma počátečního stavu spřažených oscilátorů při antisymetrických kmitech

Počáteční podmínky můžeme převést substitucí (4.16) na

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 2Y_0, & \dot{q}_1(0) &= 0, \\ q_2(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

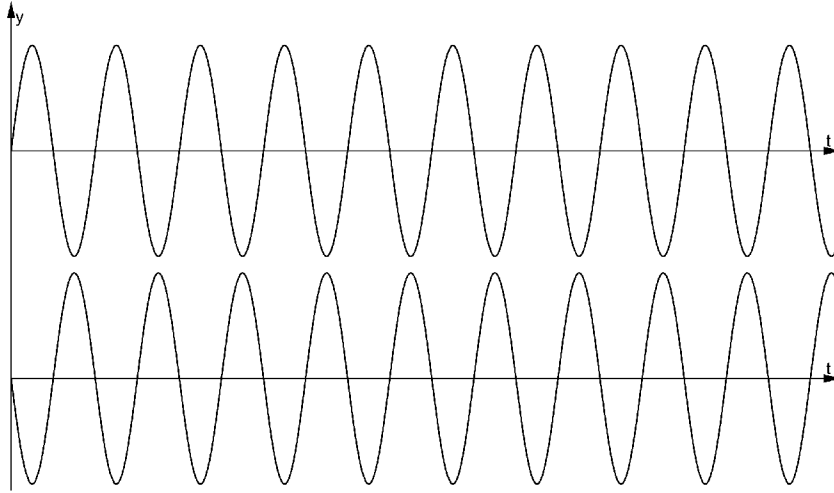
Použitím těchto rovnic získáme konstanty z rovnic (4.17), které tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} q_1 &= 2Y_0 \cos(\omega_1 t) \\ q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tím máme i určeny rovnice kmitů y_1, y_2 , které dostáváme podle (4.18) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_0 \cos(\omega_1 t) \\ y_2 &= -Y_0 \cos(\omega_1 t). \end{aligned}$$

4.2 SPŘAŽENÍ PRVNÍ DERIVACÍ VÝCHYLKY



Obrázek 4.7: Antisymetrické kmity spřažených oscilátorů

Obě soustavy kmitají se stejnou fází i amplitudou. Amplituda je dána počátečním vychýlením. Jelikož však bereme jako souřadný systém obou soustav v opačném směru (jako kladný směr kmity považujeme pohyb hmotného bodu k pevné podpoře, na které je uchycen), budou kmity po celou dobu svého kmitu v protifázi, tedy oba hmotné body vždy míří opačným směrem vzhledem k souřadné soustavě celého systému. Obě soustavy však budou kmitat rychleji než při symetrickém kmitání, jelikož platí $\omega_1 > \omega_2$. Tento pohyb nazýváme jako druhý základní kmit [9].

4.2 Spřažení první derivací výchylky

Pro spřažení první derivací platí

$$a_{ir} = 0, \quad 1 \leq i, r \leq n$$

$$c_{ir} = 0, \quad 1 \leq i, r \leq n$$

a alespoň pro některé i, r platí $b_{ir} \neq 0$. Tuto konstantu budeme psát ve tvaru $b_{ir} = d_{ir} + e_{ir}$.

Pro spřažení dvou oscilátorů první derivací výchylky dostaneme diferenciální rovnice jednotlivých oscilátorů ve tvaru

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (d_{12} + e_{12}) \dot{y}_2 = 0 \quad (4.19)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + (d_{12} - e_{12}) \dot{y}_1 = 0. \quad (4.20)$$

Stejně jako v předchozím případě provedeme eliminaci členu y_2 . Rovnici (4.20) zderivujeme:

$$m_2 y_2^{(3)} + k_2 \dot{y}_2 + (d_{12} - e_{12}) \ddot{y}_1 = 0. \quad (4.21)$$

Nyní rovnici (4.19) vynásobíme $-k_2$ a rovnici (4.21) vynásobíme $(d_{12} + e_{12})$. Obě upravené rovnice sečteme a tím dostaneme

$$(d_{12}^2 - e_{12}^2 - m_1 k_2) \ddot{y}_1 - k_1 k_2 y_1 + m_2 (d_{12} + e_{12}) y_2^{(3)} = 0. \quad (4.22)$$

Dále rovnici (4.19) dvakrát zderivujeme, vyjádříme z ní člen $y_2^{(3)}$ a toto vyjádření dosadíme do (4.22). Tím je eliminace dokončena. Získali jsme rovnici

$$m_1 m_2 y_1^{(4)} + (m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2) \ddot{y}_1 + k_1 k_2 y_1 = 0.$$

Pro vyřešení této rovnice vytvoříme její charakteristickou rovnici

$$m_1 m_2 \lambda^4 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2) \lambda^2 + k_1 k_2 = 0, \quad (4.23)$$

ze které dostaneme kořeny ve tvaru

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2) \pm \sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}. \quad (4.24)$$

Opět budeme chtít, aby došlo ke kmitům. Budeme tedy hledat charakteristické kořeny v oboru komplexních čísel. Jmenovatel bude vždy kladný. Člen pod odmocninou musí být nezáporný. Musí tedy platit

$$(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 \geq 4m_1 m_2 k_1 k_2.$$

Při splnění této podmínky a vztahu

$$(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2) > \sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}$$

dostaneme čtyři komplexní charakteristické kořeny po dvou komplexně sdružené. Přesněji vyjádřeno, všechny kořeny bikvadratické rovnice (4.23) budou za uvedených podmínek ryze imaginární. Úhlové frekvence budou mít tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2 \pm \sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}}. \quad (4.25)$$

V případě spřažení první derivací výchylky může dojít k jednovlnnosti. Ta nastane, pokud

$$(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 = 4m_1 m_2 k_1 k_2.$$

Úhlové frekvence pak mají tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2}{2m_1 m_2}} = \sqrt[4]{\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}.$$

Při zavedení (4.9) se vzorec pro úhlové frekvence zjednoduší na tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e_{12}^2 - d_{12}^2}{2m_1 m_2} \pm \frac{\sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 - d_{12}^2 + e_{12}^2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}}.$$

Jednovlnnost nastane za stejných podmínek jako v obecném případě, a bude platit

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0}.$$

Za předpokladů (4.10) dostaneme úhlové frekvence ve tvaru

$$\omega_{1,2}^2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e_{12}^2 - d_{12}^2}{2m^2} \pm \frac{\sqrt{(e_{12}^2 - d_{12}^2)(4mk + e_{12}^2 - d_{12}^2)}}{2m^2}}.$$

4.2 SPŘAŽENÍ PRVNÍ DERIVACÍ VÝCHYLKY

Zde jednovlnnost nastane v případě

$$e_{12}^2 = d_{12}^2,$$

nebo

$$4mk + e_{12}^2 = d_{12}^2.$$

Pro symetrické spřažení první derivací (platí $e_{12} = e_{21} = 0$) bude (především pro přehlednost) výhodnější si člen pod odmocninou ve vzorci (4.24) upravit do tvaru

$$(m_1k_2 - m_2k_1)^2 - 2(m_1k_2 + m_2k_1)(d_{12}^2 - e_{12}^2) + (d_{12}^2 - e_{12}^2)^2.$$

Toto vyjádření bude následně lepší i pro antisymetrický příklad.

Vzorec pro úhlové frekvence v obecném tvaru (4.25) se zjednoduší na tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1k_2 + m_2k_1 - d_{12}^2 \pm \sqrt{(m_1k_2 - m_2k_1)^2 - 2(m_1k_2 + m_2k_1)d_{12}^2 + d_{12}^4}}{2m_1m_2}}.$$

Pro jednovlnnost musí platit

$$(m_1k_2 - m_2k_1)^2 - d_{12}^4 = 2(m_1k_2 + m_2k_1)d_{12}^2.$$

Pak

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1k_2 + m_2k_1 - d_{12}^2}{2m_1m_2}}.$$

Po zavedení (4.9) dostaneme úhlové frekvence vzorcem

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{d_{12}^2}{2m_1m_2} \pm \frac{d_{12}\sqrt{d_{12}^2 - 4m_1k_2}}{2m_1m_2}}.$$

Při jednovlnnosti (charakterizované podmínkou $d_{12}^2 = 4m_1k_2$) platí

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{d_{12}^2}{2m_1m_2}} = \sqrt{-\omega_0^2}.$$

Jelikož požadujeme $\omega_{1,2} \in \mathbb{R}$, jednovlnnost nenastane. Pro (4.10) se vzorec změní na

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{d_{12}^2}{2m^2} \pm \frac{d_{12}\sqrt{d_{12}^2 - 4mk}}{2m^2}},$$

a jednovlnnost nenastane ze stejného důvodu jako v předchozím případě.

Pro antisymetrické spřažení ($d_{12} = d_{21} = 0$) se vzorec (4.25) změní na

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1k_2 + m_2k_1 + e_{12}^2 \pm \sqrt{(m_1k_2 - m_2k_1)^2 + 2(m_1k_2 + m_2k_1)e_{12}^2 + e_{12}^4}}{2m_1m_2}}.$$

Po zavedení (4.9) získáme úhlové frekvence jako

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e_{12}^2}{2m_1m_2} \pm \frac{e_{12}\sqrt{4m_1k_2 + e_{12}^2}}{2m_1m_2}}.$$

Nakonec při splnění (4.10) dostaneme vzorec úhlových frekvencí ve tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e_{12}^2}{2m^2} \pm \frac{e_{12}\sqrt{4mk + e_{12}^2}}{2m^2}}.$$

Ani v jednom z případů antisymetrického spřažení nemůže dojít k jednovlnnosti.

4.2.1 Synchronizace

Spřažení první derivací se využívá při synchronizaci kmitů. Do diferenciální rovnice každého synchronizovaného kmitu je nutné zavést kontrolní vstup u_i , který v systému n oscilátorů bývá zaveden podle [5] jako

$$u_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik}(\dot{y}_i - \dot{y}_k),$$

kde člen b_{ik} charakterizuje míru vzájemného ovlivnění systémů i a k . Synchronizované členy tedy budou popsány diferenciální rovnicí ve tvaru

$$m_j \ddot{y}_j + k_j y_j - u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Cílem synchronizace, jak je uvedeno v [8], bude dosáhnout platnosti

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_j(t)| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{y}_i(t) - \dot{y}_j(t)| &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Nyní budeme uvažovat dva oscilátory se stejnou hmotností hmotného bodu m a tuhostí pružiny k . K jejich synchronizaci zavedeme do diferenciální rovnice obou oscilátorů kontrolní vstup u_i ve tvaru

$$u_1 = -b(y_1 - y_2)$$

respektive

$$u_2 = -b(y_2 - y_1).$$

Rovnice oscilátorů, které budeme chtít synchronizovat, předepíšeme v diferenciálním tvaru podle [6] jako

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + ky_1 + b(y_1 - y_2) &= 0 \\ m\ddot{y}_2 + ky_2 + b(y_2 - y_1) &= 0, \end{aligned}$$

které upravíme do tvaru

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 + K(y_1 - y_2) = 0 \quad (4.27)$$

$$\ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - K(y_1 - y_2) = 0, \quad (4.28)$$

kde

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad K = \frac{b}{m}.$$

Odečtením a sečtením těchto rovnic získáme

$$(4.27) - (4.28) : \quad \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + 2K(y_1 - y_2) + \omega^2(y_1 - y_2) = 0 \quad (4.29)$$

$$(4.27) + (4.28) : \quad \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \omega^2(y_1 + y_2) = 0. \quad (4.30)$$

Nyní zavedeme substituci

$$y_1 - y_2 = q_1, \quad y_1 + y_2 = q_2. \quad (4.31)$$

4.2 SPŘAŽENÍ PRVNÍ DERIVACÍ VÝCHYLKY

Pro derivace zřejmě platí

$$\dot{y}_1 - \dot{y}_2 = \dot{q}_1, \quad \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = \ddot{q}_1, \quad \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = \ddot{q}_2.$$

Rovnice (4.29), (4.30) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\ddot{q}_1 + 2K\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0 \quad (4.32)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0, \quad (4.33)$$

čímž jsme získali dvě na sobě nezávislé rovnice. Vyřešením (4.33) získáme

$$q_2 = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t),$$

kde reálná konstanta A_1 bude dána vektorovým součtem počátečních výchylek jednotlivých oscilátorů a konstanta A_2 bude záviset na vektorovém součtu počátečních rychlostí jednotlivých oscilátorů. Jedná se o rovnici harmonického kmitu.

Pro vyřešení rovnice (4.32) sestavíme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$\lambda^2 + 2K\lambda + \omega^2 = 0,$$

ze které získáme kořeny $\lambda_{1,2}$ ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega^2}.$$

Tvar výsledné rovnice se bude výrazně měnit podle porovnání hodnot koeficientů K, ω . Výpočet bude probíhat analogicky se Sekcí 2.2 pojednávající o tlumených oscilátorech. Získáme tedy tři možné vyjádření řešení:

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-Kt} \left[C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - K^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - K^2}t) \right] && \text{pro } \omega > |K|, \\ q_1 &= e^{-Kt} (C_1 t + C_2) && \text{pro } \omega = |K|, \\ q_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} && \text{pro } \omega < |K|, \end{aligned}$$

kde reálné konstanty C_1, C_2 budou dány počátečními podmínkami soustavy. Aby byl splněn účel synchronizace podle první rovnice podmínky (4.26), požadujeme aby pro $t \rightarrow \infty$ platilo $y_1 - y_2 \rightarrow 0$, tj. $q_1 \rightarrow 0$. To nastane právě tehdy, když bude pro konstantu K platit $K > 0$. Jelikož K je dáno vztahem $K = \frac{b}{m}$ a platí $m > 0$, musí pro splnění synchronizace platit i $b > 0$.

Dále pro splnění druhé rovnice z podmínky synchronizace (4.26) zderivujeme rovnice pro q_1 . Pro $t \rightarrow \infty$ bude platit $\dot{q}_1 \rightarrow 0$, a tedy i $\dot{y}_1 - \dot{y}_2 \rightarrow 0$ taktéž za podmínky $K > 0$ a tedy $b > 0$.

Zpětnou substitucí z (4.31) získáme pohybové rovnice jednotlivých kmitů ve tvaru

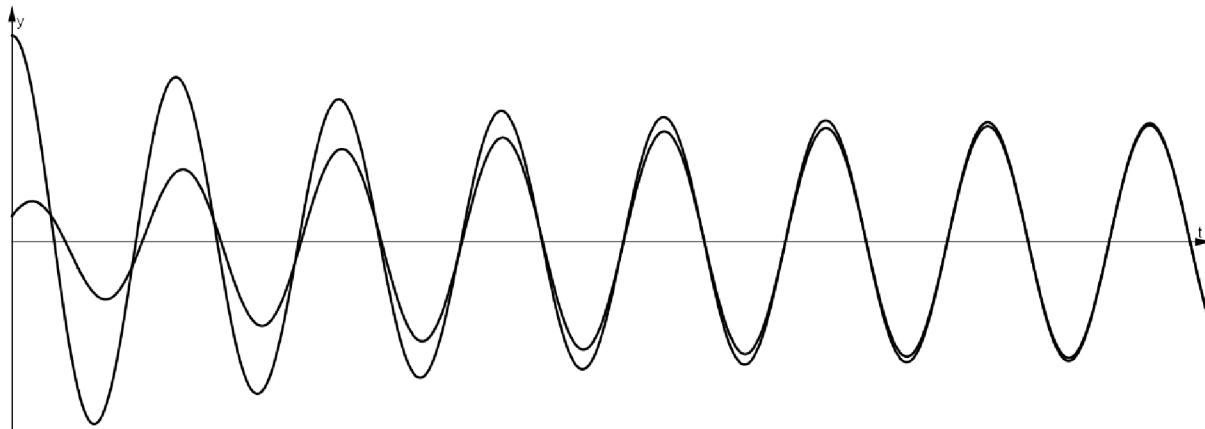
$$y_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} (C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - K^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - K^2}t)) \right] \\
y_2 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} (C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - K^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - K^2}t)) \right] \\
&\text{pro } \omega > |K|, \\
y_1 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right] \\
y_2 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right] \quad \text{pro } \omega = |K|, \\
y_1 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \right] \\
y_2 &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \right] \quad \text{pro } \omega < |K|.
\end{aligned}$$

Jelikož však rovnice pro q_1 představují pohyb tlumených kmitů, který se asymptoticky blíží nulové výchylce, pro $t \rightarrow \infty$ budou mít kmity y_1, y_2 pohybové rovnice

$$\begin{aligned}
y_1 &\rightarrow \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] \\
y_2 &\rightarrow \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)].
\end{aligned}$$

Protože jsou rovnice stejné, dosáhli jsme tedy absolutní synchronizace obou kmitů.



Obrázek 4.8: Kmity dvou synchronizovaných oscilátorů

Poznámka. V soustavě n oscilátorů může být zaveden i předpoklad, že se prvky ovlivňují, jen pokud jsou navzájem „dostatečně blízko“. Ke správné definici vstupního členu u_j , konkrétně členu b_{ik} , bývá využívána i teorie grafů. Po synchronizaci takovým způsobem bude pro $t \rightarrow \infty$ podle [8] platit

$$\begin{aligned}
y_j &\rightarrow \bar{y}(0) \cos(\omega t) + \frac{\bar{y}'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \\
\dot{y}_j &\rightarrow -\omega \bar{y}(0) \sin(\omega t) + \bar{y}'(0) \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$, kde

$$\bar{y}(0) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(0)}{n}, \quad \bar{y}'(0) = \frac{\sum_{i=1}^n \dot{y}_i(0)}{n}.$$

4.3 SPŘAŽENÍ DRUHOU DERIVACÍ VÝCHYLKY

Možná je i synchronizace k tzv. vedoucímu členu [6], který má diferenciální rovnici tvaru

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0.$$

U tohoto druhu synchronizace se budou všechny členy soustavy synchronizovat podle pohybu vedoucího členu. Tedy pro $t \rightarrow \infty$ bude platit

$$\begin{aligned} y_j(t) &\rightarrow y_0(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0(0)}{\omega} \sin(\omega t) \\ \dot{y}_j(t) &\rightarrow -\omega y_0(0) \sin(\omega t) + \dot{y}_0(0) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Poznámka. V praxi častěji využívaný způsob je synchronizace s časovým zpožděním. Pro tento způsob by dva oscilátory měly diferenciální rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + \omega^2 y_1(t) + K(\dot{y}_1(t - \tau) - \dot{y}_2(t - \tau)) &= 0 \\ \ddot{y}_2(t) + \omega^2 y_2(t) + K(\dot{y}_2(t - \tau) - \dot{y}_1(t - \tau)) &= 0, \end{aligned}$$

kde $\tau > 0$ znázorňuje časové zpoždění odezvy. Kmity obou soustav se tedy mění v reakci na stavy obou soustav v době, která předcházela (o hodnotu τ) danému časovému okamžiku t .

4.3 Spřažení druhou derivací výchylky

Podobně jako v předešlých dvou sekcích musí u spřažení druhou derivací platit

$$\begin{aligned} b_{ir} &= 0, \quad 1 \leq i, r \leq n \\ c_{ir} &= 0, \quad 1 \leq i, r \leq n \end{aligned}$$

a alespoň pro některé i, r platí $a_{ir} \neq 0$.

Soustavu diferenciálních rovnic pro dva členy tentokrát dostaneme ve tvaru

$$(m_1 + a_{11})\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 = 0 \tag{4.34}$$

$$(m_2 + a_{22})\ddot{y}_2 + k_2 y_2 + a_{12}\ddot{y}_1 = 0. \tag{4.35}$$

Při eliminaci proměnné y_2 budeme postupovat tak, že rovnici (4.34) vynásobíme $(m_2 + a_{22})$ a rovnici (4.35) vynásobíme $-a_{12}$. Sečtením takto upravených rovnic dostaneme

$$[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]\ddot{y}_1 + k_1(m_2 + a_{22})y_1 - a_{12}k_2 y_2 = 0.$$

Tuto rovnici dvakrát zderivujeme a dostaneme tak

$$[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]y_1^{(4)} + k_1(m_2 + a_{22})\ddot{y}_1 - a_{12}k_2\ddot{y}_2 = 0. \tag{4.36}$$

Z rovnice (4.34) si následně vyjádříme \ddot{y}_2 a toto vyjádření dosadíme do rovnice (4.36). Tím je eliminace dokončena a získali jsme výslednou diferenciální rovnici ve tvaru

$$[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]y_1^{(4)} + [k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11})]\ddot{y}_1 + k_1k_2 y_1 = 0.$$

Charakteristickou rovnici dostaneme jako

$$[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]\lambda^4 + [k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11})]\lambda^2 + k_1k_2 = 0$$

a pro její kořeny platí

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-[k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11})]}{2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]} \pm \frac{\sqrt{[k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11})]^2 - 4k_1k_2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]}}{2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]}.$$

Výraz pod odmocninou můžeme upravit na

$$[k_1(m_2 + a_{22}) - k_2(m_1 + a_{11})]^2 + 4k_1k_2a_{12}^2.$$

Tento výraz je vždy kladný. Abychom dostali komplexní charakteristické kořeny, musíme určit, kdy bude příslušný zlomek záporný. To nastane za podmínek

$$k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11}) > \sqrt{[k_1(m_2 + a_{22}) - k_2(m_1 + a_{11})]^2 + 4k_1k_2a_{12}^2},$$

$$(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) > a_{12}^2.$$

Při splnění těchto podmínek má rovnice čtyři ryze imaginární kořeny (po dvou komplexně sdružené). Rovnice úhlových frekvencí pro obecný případ má tedy tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1(m_2 + a_{22}) + k_2(m_1 + a_{11}) \pm \sqrt{[k_1(m_2 + a_{22}) - k_2(m_1 + a_{11})]^2 + 4k_1k_2a_{12}^2}}{2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]}}. \quad (4.37)$$

Jednovlnnost by nastala v případě

$$[k_1(m_2 + a_{22}) - k_2(m_1 + a_{11})]^2 = -4k_1k_2a_{12}^2.$$

Jelikož je celá levá strana vždy nezáporná a zároveň platí $k_1, k_2, a_{12}^2 > 0$, rovnost nenastane a jednovlnnost při spřažení druhou derivací výchylky nikdy nevznikne.

Pro úhlovou frekvenci danou vztahem (4.9) má rovnice pro úhlové frekvence spřažené soustavy tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1(2m_2 + a_{22}) + k_2a_{11} \pm \sqrt{(k_1a_{22} - k_2a_{11})^2 + 4k_1k_2a_{12}^2}}{2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{22}) - a_{12}^2]}}.$$

Při zavedení (4.10) dostaneme úhlové frekvence jako

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k(2m + a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2[m^2 + m(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2]}}.$$

Pro symetrické spřažení tentokrát platí $a_{11} = a_{22}$. Rovnice obecné úhlové frekvence bude, až na přeindexování podle zavedení symetrického spřažení, stejná jako rovnice (4.37).

Pro (4.9) dostáváme rovnici

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{2k_1m_2 + (k_1 + k_2)a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2(k_1 + k_2)^2 + 4k_1k_2a_{12}^2}}{2[(m_1 + a_{11})(m_2 + a_{11}) - a_{12}^2]}}.$$

4.3 SPŘAŽENÍ DRUHOU DERIVACÍ VÝCHYLKY

a pro (4.10) má rovnice tvar

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m + a_{11} \pm a_{12}}}. \quad (4.38)$$

Jelikož se v rovnici (4.37) nevyskytuje člen b_{ir} a tedy ani e_{ir} , zavedení antisymetrického spřažení by nevyvolalo žádné změny oproti obecnému řešení.

Uvažujme nyní speciální případ, kdy $a_{11} = a_{12}$. Z rovnice (4.38) dostaneme dvě úhlové frekvence o hodnotách

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m + 2a_{11}}}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

Následně zanesme veškeré naše zjednodušení do rovnic (4.34), (4.35). Získáme tak soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$(m + a_{11})\ddot{y}_1 + ky_1 + a_{11}\ddot{y}_2 = 0 \quad (4.39)$$

$$(m + a_{11})\ddot{y}_2 + ky_2 + a_{11}\ddot{y}_1 = 0. \quad (4.40)$$

Sečtením respektive odečtením těchto rovnic získáme

$$(4.39) + (4.40) : \quad \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \omega_1^2(y_1 + y_2) = 0$$

$$(4.39) - (4.40) : \quad \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \omega_2^2(y_1 - y_2) = 0.$$

Tato soustava rovnic je stejná jako rovnice (4.14), (4.15), postup řešení by tedy byl totožný.

Na rozdíl od vyjádření v sekci se spřažení výchylkou zde však platí, že $\omega_1 < \omega_2$. Při antisymetrických kmitech bude tentokrát rychlost menší, než při kmitech symetrických.

5 Závěr

Cílem práce byla analýza pohybu lineárních mechanických oscilátorů z matematického pohledu. Jak vychází z druhého Newtonova zákona, výsledná síla (a tedy i pohyb oscilátoru) závisí na jednotlivých silách, které na něj působí. Jako nejjednodušší model byl uveden netlumený harmonický oscilátor, kde jediná síla působící na hmotný bod je tvořena pružinou, na které je hmotný bod připevněn. Při tlumených kmitech jsme do systému zařadili navíc i tlumící sílu. Ta byla závislá na rychlosti hmotného bodu a znázorňovala tření hmotného bodu a okolí. Tlumení může nastat též zařazením speciální vazby, takto bývá i znázorňována schématicky. Pohyb závisel na velikosti tlumící síly. Dostali jsme nadkritické, kritické a podkritické tlumení. Příliš velké tlumení však způsobilo, že ke kmitání došlo jen při podkritickém tlumení, kde bylo tlumení dostatečně slabé. Oproti harmonickému pohybu však křivka podkritického pohybu měla časově proměnnou amplitudu, která se asymptoticky blížila nule.

Při začlenění budící síly jsme dostali nehomogenní ODR. Řešení se však značně lišilo při porovnání úhlové frekvence vlastního kmitu a úhlové frekvence budící síly. Pokud ke shodě nedošlo, výsledný kmit byl pouhým součtem homogenní části, která byla uvedena v předešlé části práce, a nehomogenní části. Pokud ke shodě došlo v systému bez tlumení, nastala rezonance, tedy amplituda kmitů se poměrně rychle zvětšovala. Při shodě úhlových frekvencí v případě podkriticky tlumeného kmitu, došlo naopak k útlumu kmitu, ke kterému však došlo pomaleji, než při podkriticky tlumených kmitech bez buzení.

Při skládání kmitů jsme jako hlavní aparát uplatňovali princip superpozice. Pro případ rovnoběžných izochronních kmitů jsme rovnicí výsledného kmitu odvodili analyticky i přes komplexní reprezentaci a uvedli jsme příklady pro kmity ve fázi a v protifázi. Dále jsme při anizochronních rovnoběžných kmitech uvedli, že výsledný kmit bude periodický pouze pro soudělné úhlové frekvence a rozebrali jsme případ blízkých frekvencí a tím i příčinu vzniku záznejů. Jako použití skládání rovnoběžných kmitů jsme uvedli harmonickou analýzu, kde byl ukázán její princip a postup řešení.

Pro kolmé izochronní kmity byla odvozena křivka pohybu vyloučením času i časově proměnných veličin. Na obrázku byly ilustrovány některé případy, které se lišily rozdílem počátečních fází jednotlivých kmitů. Pro anizochronní kmity jsme rozebrali případ soudělných úhlových frekvencí, což je jediný případ, kde je křivka pohybu uzavřená. Tyto trajektorie nazýváme jako Lissajousovy křivky. V ostatních případech kolmé anizochronní kmity nekonají periodický pohyb.

V kapitole o spřažených oscilátorech jsme na začátku uvedli obecnou rovnici systému n oscilátorů. Dále byly odvozeny rovnice pro úhlové frekvence při různých typech spřažení v obecných případech, nebo i v příkladech specifitějších jako symetrické či antisymetrické spřažení. Při spřažení výchylkou jsme dále rozebrali případ, kdy byl na počátku vychýlen jen jeden hmotný bod, první základní kmit a druhý základní kmit. Při spřažení první derivací výchylky jsme uvedli, kdy může nastat jednovlnost kmitů. Dále byl uveden případ synchronizace oscilátorů, které lze docílit díky spřažení první derivací výchylky. Podrobně byl rozebrán jeden případ synchronizace dvou členů. Byly ale i uvedeny další způsoby, jako synchronizace se zpožděním nebo případ synchronizace n oscilátorů, kde při návrhu vstupního členu významnou roli nesla teorie grafů. Při spřažení druhou derivací výchylky bylo odvozování ukončeno ve fázi, kdy jsme získali rovnice ve stejném tvaru, jako při spřažení výchylkou. Následné úpravy by tedy byly analogické jako při spřažení výchylkou.

Na tuto bakalářskou práci by bylo možné navázat analýzou matematicky komplikovanějších systémů, například nelineárních oscilátorů (mezi nejznámější modely patří Duffingův nebo Van der Polův oscilátor). Do zkoumaného systému lze zahrnout i časové zpoždění. S tím související další možnost rozšíření tématu představuje hlubší analýza synchronizace systémů lineárních i nelineárních oscilátorů.

Literatura

- [1] BAJER, Jiří.: *Mechanika 3. 2.*, rozš. a dopl. vyd. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012. 542 s. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [2] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL: *Matematika III.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016, 171 s. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [3] KALAS, Josef a Miloš RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Vyd. 3. Brno: Masarykova univerzita, 2012. 207 s. ISBN 978-80-210-5815-6.
- [4] KOŠTÁL, Rostislav: *Kmity spřažených soustav.* Brno: Přírodovědecká fakulta, 1931. 31 s.
- [5] OLFATI SABER, Reza a Richard M. MURRAY: *Flocking with obstacle avoidance: Cooperation with limited communication in mobile networks.* Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control. 2003, 2, 2022–2028.
- [6] REN, Wei: *Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction.* Automatica. 2008, 44, 3195–3200.
- [7] SLÁDEK, Petr a Jan KUČÍREK: *Kmity.* Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2014. 86 s. ISBN 978-80-210-6756-1.
- [8] SU, Housheng, Xiaofan WANG a Zongli LIN: *Synchronization of coupled harmonic oscillators in a dynamic proximity network.* Automatica. 2009, 45, 2289–2291.
- [9] VYBÍRAL, Bohumil: *Kmitání a vlnění.* Hradec Králové: GAUDEAMUS, 2014. 246 s. ISBN 978-80-7435-379-6.
- [10] *Fourierovy řady* [online]. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechniky, Katedra matematiky [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/3/txc3ea3f.htm>

6 Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
a	zrychlení
F	síla
f	frekvence, kmitočet
k	tuhost pružiny
l	součinitel tření
m	hmotnost
v	rychlost
T	perioda
t	čas
τ	časové zpoždění
φ	fázový posun
ω	úhlová frekvence
ODR_n	obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu
LODR_n	lineární obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu