VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BANACHOVY ALGEBRY

BANACH ALGEBRAS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE | Bc. TATIANA MACHOVIČOVÁ

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE | prof. RNDr. JAN FRANCŮ, CSc.

SUPERVISOR

BRNO 2021

Zadaní diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Bc. Tatiana Machovičová**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**prof. RNDr. Jan Franců, CSc.**
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Banachovy algebry

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Banachova algebra je Banachův prostor navíc s operací násobení. Tato struktura nedávno našla uplatnění při modelování kompozitních materiálů s neperiodickou strukturou.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je sepsat základní definice a vlastnosti Banachových algeber, formulaci Sigma konvergence a její aplikace při modelování kompozitních materiálů s neperiodickou strukturou.

Seznam doporučené literatury:

ZELAZKO, W. Banach algebras. Elsevier, Amsterdam, 1973.

LARSEN, R. Banach algebras, Marcel Dekker, New York, 1973.

NGUETSENG, G. and SVANSTEDT, N. Sigma-convergence, Banach J. Math. Anal. 5, 2011. 101-135.

FRANCŮ, J. Outline of Nguetseng's approach to non-periodic homogenization, Math. Appl. 1, 2012. 117-128.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Banachovou algebrou nazývame Banachov priestor obohatený o operáciu násobenia. Jedná sa o matematickú štruktúru, ktorá sa uplatňuje pri neperiodickej homogenizácii kompozitných materiálov. Teória klasickej homogenizácie študuje materiály za predpokladu periodicity štruktúry. Pri skutočných materiáloch však samotný predpoklad periodicity nestačí a je nahradený tzv. abstraktnou hypotézou, ktorá sa opiera o koncept zložený hlavne zo spektra Banachovej algebry a Sigma konvergencie. Táto teória bola predstavená v roku 2004.

Summary
By Banach algebra we mean Banach space enriched with a multiplication operation. It is a mathematical structure that is used in the non-periodic homogenization of composite materials. The theory of classical homogenization studies materials assuming the periodicity of the structure. For real materials, the assumption of a periodicity is not enough and is replaced by the so-called an abstract hypothesis based on a concept composed mainly of the spectrum of Banach algebra and Sigma convergence. This theory was introduced in 2004.

Klíčová slova
Banachova algebra, homogenizácia, homogenizačná algebra, homogenizačná štruktúra, dvojškálová konvergencia, Sigma konvergencia.

Keywords
Banach algebra, homogenization, homogenization algebra, homogenization structure, two-scale convergence, Sigma convergence.

MACHOVIČOVÁ, T. *Banachovy algebry.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 64 s. Vedoucí prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu *Banachove algebry* vypracovala samostatne pod vedením prof. RNDr. Jana Franců, CSc. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Bc. Tatiana Machovičová

Chcela by som sa na tomto mieste poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce, pánovi prof. RNDr. Janovi Franců, CSc. za ochotu, čas a cenné rady pri konzultáciách. Veľké poďakovanie patrí aj mojej rodine a priateľovi za to, že sú pre mňa obrovskou oporou.

Bc. Tatiana Machovičová

Obsah

1. Úvod

Práca sa zaoberá Banachovými algebrami a ich aplikáciou pri modelovaní kompozitných materiálov s neperiodickou štruktúrou. Modelovanie takýchto materiálov numerickými výpočtami s použitím klasických metód je v dôsledku jemnej štruktúry nemožné, vyžadovalo by to jemnú trianguláciu v metóde konečných prvkov a tým pádom aj riešenie obrovského systému rovníc. Z výpočetných dôvodou sa tieto heterogénne (kompozitné) materiály modelujú ekvivalentnými homogénnymi materiálmi. Teória klasickej homogenizácie heterogénnych materálov je založená na predpoklade, že jej jemná štruktúra je periodická. Prvý prístup homogenizácie z roku 1974 (I. Babuška) používal namiesto jedného periodického materiálu postupnosť materiálov s takou štruktúrou, ktorá postupne konvergovala k homogénnemu materiálu [4]. Matematicky povedané: namiesto jednej rovnice s periodickým koeficientom $a(x)$ sa študovala postupnosť rovníc s koeficientami $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ so zmenšujúcou sa periódou $\varepsilon \to 0$. Problémom klasickej homogenizácie však je, že štruktúra skutočných materiálov nie je úplne periodická. Častokrát ich štruktúra vykazuje známky náhodnosti. V dôsledku tohto problému bolo navrhnutých niekoľko prístupov homogenizácii skutočných (neperiodických) materiálov. V roku 1989 (G. Nguetseng, G.Allaire) bola vynájdená tzv. dvojškálová konvergencia (two-scale convergence) na zefektívnenie periodickej homogenizácie [2]. Neskôr v roku 2004 ten istý autor zaviedol najvšeobecnejší prístup, ktorý pokrýva periodické, takmer periodické a neperiodické štruktúry. Je založený na teorii, ktorá sa opiera o tzv. spektrum Banachovej algebry a Σ-konvergenciu. V tomto prístupe predpoklad periodickosti nahradil existenciou spektra homogenizačnej algebry a dvojškálovú konvergenciu nahradil už vyššie spomínanou Σ-konvergenciou [17], [18] a [19].

Kompozitné materiály s periodickou alebo neperiodickou štruktúrou sú pre svoje špeciálne vlastnosti široko používané v strojárstve, stavebníctve a iných odvetviach. Kompozit je materiál zložený z dvoch alebo viacerých substancii s rozdielnymi vlastnosťami, ktoré dokopy dávajú výslednému výrobku nové vlastnosti. Príkladom kompozitu je napríklad železobetón, živica, asfaltová zmes, v leteckom priemysle napríklad zmes uhlíkových a aramidových vláken (na pevnú a ľahkú konštrukciu lietadových a raketových dielov). Najčastejšie jedna z látok zaisťuje pevnosť a druhá slúži ako pojivo.

V matematike, špeciálne vo funkcionálnej analýze sa Banachovou algebrou označuje matematická štruktúra nad reálnymi alebo komplexnými číslami, ktorá je Banachovým priestorom (úplny normovaný lineárny priestor) a naviac obsahuje operáciu násobenie, ktoré spĺňa viaceré axiómy (viď. kapitola 3). Je pomenovaná podľa zakladateľa funkcionálnej analýzy a poľského matematika - Stefana Banacha.

2. Prehľad základných priestorov

V tejto kapitole pripomenieme základné definície z oblasti priestorov a funkcionálnej analýzy. Informácie pochádzajú hlavne z [1], [6], [7], [9], [13], [14], [15] a [24].

2.1. Lineárny priestor

Definícia 2.1 (Lineárny priestor). Nech V je neprázdna množina nad poľom $\mathbb{F}$. Prvky množiny V nazveme body x, y, z a prvky poľa $\mathbb{F}$ skaláry α, β. Množinu V nazveme lineárny priestor nad poľom $\mathbb{F}$ s operáciami $\bigoplus$ a $\bigodot$ (stručne len $+$ a $\cdot$), ak množina V je uzavretá na operácie $+, \cdot$ a $\forall x, y, z \in V$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ platí nasledovných 8 axiómov

(i) $x + y = y + x$ (komutativita),

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita),

(iii) $\exists 0 \in V, \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$ (existencia nulového prvku),

(iv) $\forall x \in V, \exists (-x) \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (existencia opačného prvku),

(v) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$,

(vi) $1 \cdot x = x$,

(vii) $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$,

(viii) $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$.

Prvé 4 axiómy vyjadrujú, že množina V s operáciou $+$ tvorí *komutatívnu grupu.* Poznamenajme, že ak $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hovoríme o reálnom lineárnom priestore, ak $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ hovoríme o komplexnom lineárnom priestore.

Poznámka 2.2. V prípade lineárneho priestoru V platí, že nie každá podmnožina U priestoru V je lineárny podpriestor. Platí, že lineárny podpriestor musí spĺňať uzavretosť vzhľadom k obom operáciám $+, \cdot$

$$x, y \in U,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U.$$

Definícia 2.3 (Lineárna nezávislosť). Prvky $x_1, \dots x_n \in V$ sú nezávislé ak platí

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Definícia 2.4 (Lineárny funkcionál). Funkcionálom F na (reálom vektorovom) priestore V chápeme zobrazenie $F : V \to \mathbb{R}$. Funkcionál F je lineárny ak zachováva obe operácie priestoru V, čiže platí

(i) $F(x + y) = F(x) + F(y)$,

(ii) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$.

Naviac pre lineárne funkcionály F_1 a F_2 definujeme

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Definícia 2.5 (Duálny (algebraický) priestor). Množina všetkých lineárych funkcionálov na V tvorí lineárny priestor, ktorý nazývame duálnym (prípadne algebraickým) priestorom a označujeme ho $V^\sharp$.

2.2. Normovaný lineárny priestor

Definícia 2.6 (Normovaný lineárny priestor). Nech V je lineárny priestor nad $\mathbb{R}$. Ďalej definujme zobrazenie (reálny funkcionál) $\|\cdot\| : V \to \langle 0, \infty)$, ktoré pre $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ spĺňa nasledovné podmienky

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojuholníková nerovnosť).

Zobrazenie $\|\cdot\|$ sa nazýva *norma* na priestore V a dvojicu $(V, \|\cdot\|)$ nazveme *normovaný lineárny priestor*.

Definícia 2.7 (Konvergentná postupnosť). Postupnosť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazveme konvergentnou ak má vlastnú (konečnú) limitu ozn. a, tj. ak platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \text{ platí } \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.8. Postupnosť sa nazýva divergentná, ak má nevlastnú limitu ($+\infty$ alebo $-\infty$) alebo nemá limitu.

Definícia 2.9 (Cauchyovská postupnosť). Postupnosť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa nazýva cauchyovská ak platí nasledovná podmienka

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} \text{ platí } n > n_0 \wedge m > m_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.10. Každá konvergentná postupnosť je cauchyovská.

Definícia 2.11 (Banachov priestor). Banachov priestor je úplny normovaný lineárny priestor. To znamená, že v ňom každá cauchyovská postupnosť konverguje.

Definícia 2.12 (Spojitý funkcionál). Funkcionál $F : V \to \mathbb{R}$ nazveme spojitým, ak zachováva konvergenciu, tj. ak platí

$$x_n \to x_0 \Rightarrow F(x_n) \to F(x_0).$$

Definícia 2.13 (Obmedzený lineárny funkcionál). Lineárny funkcionál F nazveme obmedzeným, ak existuje konštanta $c > 0$ taká, že $\forall x \in V$ platí

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Definícia 2.14 (Norma funkcionálu). Norma funkcionálu F je najmenšia možná konštanta c, ktorú definujeme nasledovne

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |F(x)|.$$

Definícia 2.15 (Duálny (topologický) priestor). Normované lineárne funkcionály tvoria lineárny priestor ktorý je úplny - tj. Banachov. Tento priestor nazveme topologickým (prípadne adjungovaným alebo duálnym) priestorom a označíme ho V^*. Duálny priestor V^* je úplny aj keď pôvodný priestor V nie je úplny.

Poznámka 2.16. Konvergencia v normovanom lineárnom priestore je určená normou, nazývame to tzv. *silná konvergencia* (prípadne konvergencia v norme). Okrem tejto silnej konvergencie existuje aj tzv. *slabá konvergencia*, ktorá sa určuje pomocou funkcionálov. Viac o tejto konvergencii nájdete v kapitole 4 v sekcii 4.8.1.

2.3. Metrický priestor

Definícia 2.17 (Metrický priestor). Nech M je neprázdna množina. Definujme zobrazenie $\rho : M \times M \to \langle 0, \infty)$, ktoré pre $\forall x, y, z \in M$ spĺňa nasledovné axiómy

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axióm totožnosti),

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axióm symetrie),

(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (trojuholníková nerovnosť).

Zobrazenie ρ sa nazýva *metrika* na množine M a dvojicu (M, ρ) nazveme *metrický priestor.*

Poznámka 2.18. Je zrejmé, že každá norma generuje metriku nasledovným spôsobom

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Definícia 2.19 (Úplny metrický priestor). Metrický priestor sa označuje ako úplny, ak v ňom každá cauchyovská postupnosť konverguje.

Definícia 2.20 (Guľa, okolie, sféra). Otvorenou, resp. uzavretou guľou so stredom v bode x_0 a polomerom r chápeme množinu

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in M : \rho(x_0, x) < r\} \quad \text{resp.} \quad \mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in M : \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Analogicky definujme pojem sféra so stredom v bode x_0 a polomerom r ako množinu

$$\mathcal{S}(x_0, r) = \{x \in M : \rho(x_0, x) = r\}.$$

Označením $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ chápeme ε - okolie bodu x_0 pre ktoré platí

$$\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) = \mathcal{O}_\varepsilon(x_0).$$

Definícia 2.21 (Body priestoru). Nech M je metrický priestor a N jeho podmnožina ($N \subseteq M$). Bod $x_0 \in M$ potom nazveme

- Vnútorným bodom množiny N ak $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r) \subseteq N$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny N nazveme *vnútro množiny* N a označuje sa $N°$.
- Vonkajším bodom množiny N ak $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r) \cap N = \emptyset$.
- Hraničným bodom množiny N ak $\forall r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r) \cap N \neq \emptyset \wedge \mathcal{B}(x_0, r) \backslash N \neq \emptyset$. Množinu všetkých hraničných bodov množiny N nazveme *hranica množiny* N a označuje sa ∂N.
- Bodom uzáveru množiny N ak $\forall r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r) \cap N \neq \emptyset$. Množinu všetkých bodov uzáveru množiny N nazveme *uzáver množiny* N a označuje sa $\overline{N}$.
- Hromadným bodom množiny N ak $\forall r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r)$ obsahuje nekonečne mnoho bodov z množiny N. Množinu všetkých hromadných bodov množiny N nazveme *derivácia množiny* N a označuje sa N'.
- Izolovaným bodom množiny N ak $\exists r > 0 : \mathcal{B}(x_0, r) \cap N = \{x_0\}$. Množinu všetkých izolovaných bodov množiny N nazveme *adherancia množiny* N.

Definícia 2.22 (Otvorené a uzavreté množiny). Množinu N nazveme otvorenou množinou ak $N = N^\circ$ (tj. všetky jej body sú vnútorné). Množinu N nazveme uzavretou ak $N = \overline{N}$ (tj. je rovná svojmu uzáveru).

Definícia 2.23 (Hustá množina). Nech M je metrický priestor a $N, P \subseteq M$ sú podmnožiny M. Povieme, že množina P je hustá v množine N ak platí: $N \subseteq \overline{P}$ (tj. jej uzáver obsahuje N).

Definícia 2.24 (Obmedzená množina). Nech M je metrický priestor a $N \subseteq M$ je podmnožina M. Povieme, že množina N je obmedzená (resp. ohraničená) v množine M ak $\exists c > 0 : \rho(x, y) < c \quad \forall x, y \in N$.

Definícia 2.25 (Kompaktná množina). Povieme, že množina M je kompaktná (úplna a totálne obmedzená) ak každá jej postupnosť obsahuje konvergentnú podpostupnosť.

Poznámka 2.26. V prípade, že máme množinu v $\mathbb{R}^n$ so štandardnou metrikou, tak povieme, že je kompaktná práve vtedy ak je uzavretá a obmedzená.

Definícia 2.27 (Prekompaktná množina). Povieme, že množina M je prekompaktná (totálne obmedzená) ak každá jej postupnosť obsahuje cauchyovskú podpostupnosť.

Definícia 2.28 (Separabilný priestor). Metrický priestor M sa nazýva separabilný, ak existuje najviac spočetná podmnožina $N \subseteq M$, ktorá je hustá v M.

Definícia 2.29 (Spojité, lipschitzovské zobrazenie). Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory. Zobrazenie $f : M \to N$ nazveme spojitým ak zachováva konvergenciu, tj. platí

$$x_n \to x \text{ v } M \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \text{ v } N.$$

Zobrazenie $f : M \to N$ nazveme lipschitzovským ak existuje lipschitzova konštanta $L > 0$, tak, že platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Zobrazenie $f : M \to N$ nazveme kontraktívnym (kontrakciou) ak $L \in \langle 0, 1)$.

Definícia 2.30 (Pevný bod). Nech M je ľubovoľná množina a $F : M \to M$ zobrazenie. Bod $x \in M$ sa nazýva pevný bod zobrazenia F ak platí $F(x) = x$.

Príklad 2.31. Nech $M = \mathbb{R}$. Potom $f(x) = x^2$ má dva pevné body a to 0 a 1.

Veta 2.32 (Banachova veta o pevnom bode). *Nech M je úplny metrický priestor. Potom každá kontrakcia $F : M \to M$ má práve jeden pevný bod v M.*

Dôkaz. Naznačíme si hlavnú ideu dôkazu. Nadefinujeme si najprv postupnosť $\{x_n\}$ predpisom, že $x_1 \in M$ je ľubovoľný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$. Neskôr sa ukáže, že táto postupnosť je cauchyovská a vďaka tomu, že M je úplny priestor, tak má aj limitu v M. Táto limita je jediným pevným bodom zobrazenia F. $\square$

Definícia 2.33 (Sieť). Množinu $S \subset \Omega$ nazveme ε-sieť, ak zjednotenie ε-okolí bodov množiny S pokrýva celú oblasť Ω.

Definícia 2.34 (Topologický priestor). Topologickým priestorom nazveme množinu X spolu s $\tau_X \subseteq \exp X$, kde τ_X je topológia na X s nasledovnými vlastnosťami

(i) $\emptyset \in \tau_X$, $X \in \tau_X$,

(ii) zjednotenie ľubovoľného počtu prvkou z τ_X je prvkom τ_X,

(iii) prienik konečného počtu prvkou z τ_X je prvkom τ_X.

Označením $\exp X$ chápeme množinu všetkých podmnožín množiny X.

Definícia 2.35 (**Hausdorffov priestor**). Priestor K nazveme Hausdorffov, ak pre $\forall x, y \in K, x \neq y\ \exists \mathcal{O}_\varepsilon(x), \mathcal{O}_\varepsilon(y)$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Poznámka 2.36. Každý metrický priestor je Hausdorffov.

Definícia 2.37 (**Lokálne kompaktný priestor**). Topologický priestor X nazveme lokálne kompaktným ak každý bod $x \in X$ má kompaktné okolie.

2.4. Unitárny priestor

Definícia 2.38 (**Unitárny priestor**). Reálny unitárny priestor je lineárny priestor V nad poľom $\mathbb{R}$ na ktorom je definovaný skalárny súčin. Skalárny súčin je zobrazenie $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ také, že pre $\forall x, y, z \in V$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

(i) $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $(x, y) = (y, x)$,

(iii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z)$.

Definícia 2.39 (**Hilbertov priestor**). Hilbertovým priestorom V nazveme úplny unitárny priestor s normou, ktorá je definovaná pomocou skalárneho súčinu vzťahom

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad \forall x \in V.$$

Definícia 2.40 (**Schwarzova nerovnosť**). Skalárny súčin sa dá odhadnúť pomocou normy. Odhad nesie názov Cauchyova (resp. Schwarzova) nerovnosť, ktorá má tvar

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Poznámka 2.41. V každom unitárnom priestore V platí

- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$ - rovnobežníkové pravidlo,
- $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \forall x, y \in V$ - reprezentácia skalárneho súčinu.

Príklad 2.42. Nech $V = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$. Potom skalárny súčin (x, y) je rovný nasledovnému vzťahu

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Poznámka 2.43. Pomocou skalárneho súčinu vieme určiť uhol φ dvoch vektorov x, y nasledovným spôsobom

$$\varphi = \arccos \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Definícia 2.44 (**Ortogonálna a ortonormálna postupnosť**). Postupnosť bodov $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ sa nazýva ortogonálna, ak

(i) $e_i \neq 0$ (body sú nenulové),

(ii) $(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j$ (body sú navzájom kolmé).

Ak naviac platí $(e_i, e_i) = 1 = \|e_i\|^2$, tak postupnosť sa nazýva ortonormálna.

Definícia 2.45 (**Fourierova rada**). Každý prvok $x \in V$ je možné vyjadriť v tvare Fourierovej rady

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i.$$

Prvkom c_i sa vraví Fourierove koeficienty a pre ne platí vzťah

$$c_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2} \quad \text{a naviac spĺňajú Besselovu nerovnosť: } \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|e_i\|^2.$$

Poznámka 2.46. Spojité lineárne funkcionály na Hilbertovom priestore V opäť tvoria duálny priestor V^*. Platí pre ne nasledovná veta.

Veta 2.47 (**Rieszova-Fischerova veta**). *Pre každý funkcionál $F \in V^*$ existuje jediný prvok $f \in V$ tak, že platí*

$$F(x) = (f, x).$$

Naviac platí, že

$$\|F\| = \|f\|.$$

Dôkaz k vete možno nájsť v [9].

2.5. Lebesgueove priestory

Lebesgueove priestory sa definujú ako priestory integrovateľných funkcii. Využívajú sa hlavne pri definícii Sobolevových priestorov, ktoré majú integrovateľné derivácie. Práve v Sobolevových priestoroch hľadáme zobecnené riešenia úloh.

Definícia 2.48 (**Priestor s mierou**). Trojicu $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazveme priestor s mierou, kde X je základný priestor (neprázdna množina), $\mathcal{S}$ je systém podmnožín priestoru X (tzv. σ-algebra podmnožín základného priestoru X), pre ktorý platí

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{S}$,

(iii) $A_i \in \mathcal{S}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{S}$,

a funkcia $\mu : \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ sa nazýva miera na priestore X. Pre mieru μ a navzájom disjunktné množiny A_i zo systému $\mathcal{S}$ platí vzťah

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Poznámka 2.49. Množiny A_i zo systému $\mathcal{S}$ označujeme ako merateľné množiny.

Uvedieme konštrukciu Lebesgueovej miery v $\mathbb{R}^N$ [13].

- Otvorený N-rozmerný interval I v $\mathbb{R}^N$ je kartézsky súčin ohraničených a otvorených intervalov (a_i, b_i), kde $-\infty < a_i < b_i < \infty$
$$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N).$$
Miera tohto intervalu I je rovná súčinu jeho jednotlivých intervalov (a_i, b_i), tj. platí
$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_N - a_N).$$
- Označme si $\mathfrak{I}$ ako množinu všetkých týchto intervalov.
- Vonkajšiu mieru množiny A označme ako $m^*(A)$ a definujeme ju ako infimum súčtu mier najviac spočetne mnoho otvorených intervalov I_j, $i \in J$, ktoré pokrývajú množinu A, tj.
$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(I_j) : A \subset \bigcup_{j \in J} I_j, I_j \in \mathfrak{I} \right\}.$$
Vonkajšia miera môže byť prípadne aj nekonečno.
- Množinu A nazveme merateľnou, ak pre každý N-rozmerný interval I platí
$$m^*(I \cap A) + m^*(I \backslash A) = m(I)$$
a jej miera je rovná jej vonkajšej miere, tj.
$$m^*(A) = m(A).$$

Poznámka 2.50. Každé otvorené, uzavreté, konečné aj spočetné množiny sú merateľné. Množina, ktorej miera je nula sa nazýva nulová množina.

Definícia 2.51 (**Merateľná funkcia**)**.** Funkciu $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazeme merateľnou na merateľnej množine Ω ak sú merateľné aj jej hladinové funkcie, tj.
$$\{x \in \Omega : \ f(x) < c\} \text{ sú merateľné } \forall c \in \mathbb{R}.$$

Množinu všetkých Lebesgueovsky merateľných funkcii na množine Ω označujeme symbolom $\Lambda(\Omega)$.

Definícia 2.52 (**Lebesgueove priestory**)**.** Nech Ω je oblasť v $\mathbb{R}^N$. Normu merateľnej funkcie f pre $p \in \langle 1, \infty)$ definujeme vzťahom
$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$
v prípade $p = \infty$ je norma daná nasledovne
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf_{m(\mathcal{N})=0} \sup_{x \in \Omega - \mathcal{N}} |f(x)|,$$

kde $\mathcal{N}$ je množina miery nula.
Ďalej pre $p \in \langle 1, \infty \rangle$ definujme podmnožinu množiny $\Lambda(\Omega)$

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{ f \in \Lambda(\Omega) : \|f\|_p \ < \infty \} .$$

Pomocou relácie rovnosti skoro všade ($=_{s.v.}$) stotožníme funkcie, ktoré sa navzájom líšia najviac na množine miery nula - dostávame tak Lebesgueove priestory integrovateľných funkcii na Ω, tj. priestory $L^p(\Omega)$

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)|_{=_{s.v.}} .$$

Prvky priestoru $L^p(\Omega)$ sú triedy funkcii navzájom skoro všade rovných, tj. ktoré sa líšia najviac na množine miery nula.

Veta 2.53. *Nech Ω je oblasť v $\mathbb{R}^N$ a $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Potom množina $L^p(\Omega)$ spolu s normou $\|f\|_p$ tvorí Banachov priestor. V prípade $p = 2$ je priestor $L^2(\Omega)$ Hilbertovým priestorom spolu so skalárnym súčinom definovaným nasledovne*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Dôkaz k vete nájdete v [1].

Definícia 2.54 (Združený exponent). Združeným exponentom k p nazveme exponent q, pre ktorý platí vzťah

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{alebo} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ku združeným exponentom p, q pridáme dvojice $(1, \infty)$ a $(\infty, 1)$.

Veta 2.55 (Hölderova nerovnosť). *Nech $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, kde $p \in \langle 1, \infty \rangle$ a q je združený exponent k p, potom*

$$\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

V prípade $p = 2$ sa predchádzajúca nerovnosť nazýva Cauchy-Schwarzova.

Dôkaz k vete nájdete v [1].

Definícia 2.56 (Nosič). Nosič (z angl. *support*) funkcie f je uzáver množiny bodov v $\mathbb{R}^N$, v ktorých má funkcia f nenulové hodnoty, tj. platí vzťah

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Definícia 2.57. Priestor $C^\infty(\overline{\Omega})$ sa definuje ako priestor nekonečne diferencovateľných funkcii na uzávere oblasti Ω. Priestor $C_0^\infty(\Omega)$ definuje priestor funkcii z $C^\infty(\Omega)$ ktoré majú kompaktný nosič. Tj. funkcie sú nenulové iba na obmedzenej množine a sú nulové v oblasti hranice.

Veta 2.58. *Pre $p \in \langle 1, \infty)$ je priestor $C^\infty(\overline{\Omega})$ aj $C_0^\infty(\Omega)$ hustý v $L^p(\Omega)$.*

Dôkaz k vete nájdete v [15].

Veta 2.59 (**Testovacia lemma**). *Nech funkcia f je spojitá na Ω. Ak platí*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

potom $f = 0$ v Ω.

Dôkaz k vete nájdete v [1].

Poznámka 2.60. Označením $\langle F, u\rangle$, prípade $F(u)$ chápeme hodnotu funkcionálu F na prvku $u \in V$. Priestor všetkých spojitých lineárnych funkcionálov (viď. definície 2.4, 2.12) na V označíme V^* a nazveme to duálnym priestorom k priestoru V.

Definícia 2.61. Funkcionál $F \in V^*$ ide reprezentovať integrovateľnou funkciou f ak $\forall u \in V$ platí vzťah

$$\langle F, u\rangle = \int_\Omega f(x)u(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Duálny priestor V^* ide reprezentovať priestorom funkcii U ak pre každý funkcionál $F \in V^*$ existuje $f \in U$, tak že platí vzťah 2.1. Ak naviac platí

$$\|F\|_{V^*} = \|f\|_U,$$

tak píšeme $V^* \approx U$, tj. medzi priestorom V^* a U existuje izometrický izomorfizmus.

Veta 2.62. *Nech p a q sú združené exponenty, $p, q \in (1, \infty)$. Potom platia nasledovné vzťahy o duálnych priestoroch.*

(i) $(L^p(\Omega))^* \approx L^q(\Omega)$ *(v prípade $p = 2$ platí $(L^2(\Omega))^* \approx L^2(\Omega)$),*

(ii) $(L^1(\Omega))^* \approx L^\infty(\Omega)$,

(iii) $(L^\infty(\Omega))^* \supset L^1(\Omega)$ *(existujú funkcionály v $L^\infty(\Omega)$ ktoré sa nedajú reprezentovať pomocou funkcie z $L^1(\Omega)$).*

Dôkazy k vetám nájdete v [1].

Definícia 2.63 (**Druhý duál**). Označením $V^{**} = (V^*)^*$ chápeme druhý duál priestoru V, ktorý definujeme ako množinu spojitých lineárnych funkcionálov na duálnom priestore V^*. Druhý duál tvorí taktiež Banachov priestor.

Definícia 2.64 (**Kanonické vnorenie**). Nech V je normovaný lineárny priestor, V^* je jeho duálny priestor a V^{**} je druhý duál k priestoru V. Kanonické vnorenie

$$\eta : V \to V^{**}$$

každému prvku $v \in V$ priradí funkcionál $\eta(v) \in V^{**}$ podľa vzťahu

$$\langle \eta(v), f\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall f \in V^*.$$

Definícia 2.65 (**Reflexívny priestor**). Ak zobrazenie $\eta : V \to V^{**}$ je surjektívne ($\eta(V) = V^{**}$), tak priestor V nazveme reflexívnym.

Medzi dôležitú vlastnosť reflexívneho priestoru je kompaktnosť ich obmedzených podmnožín vzhľadom ku slabej konvergencii, z čoho plynie nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 2.66. Nech $\{u_n\} \subset V$ je obmedzená postupnosť. Potom existuje podpostupnosť $\{u_{n^*}\} \subset \{u_n\}$ a prvok $u \in V$ taký, že postupnosť $\{u_{n^*}\}$ slabo konverguje k prvku $u \in V$.

Poznámka 2.67. Podľa vety 2.62 sa dá ukázať, že platí

$$(L^p(\Omega))^{**} \approx (L^q(\Omega))^* \approx L^p(\Omega).$$

Veta 2.68. *Priestor $L^p(\Omega)$ je separabilný pre $p \in \langle 1, \infty)$ a reflexívny pre $p \in (1, \infty)$.*

Dôkaz k vete nájdete v [1].

2.6. Sobolevove priestory

Sobolevove priestory sú normované vektorové priestory funkcii s normou. Norma je daná L^p - normou funkcie spolu s jej deriváciami.
Tieto priestory našli uplatnenie najmä v teórii parciálnych diferenciálnych rovníc (PDR), ktorých zobecnené riešenia sa nachádzajú práve v Sobolevových priestoroch. Definícia Sobolevových priestorov vraví, že sa jedná o priestory funkcii, ktoré majú integrovateľné derivácie. Priestory označujeme symbolom $W^{k,p}(\Omega)$, prípadné ďalšie označenie je $H^{k,p}(\Omega)$. V označení Sobolevových priestorov sa nachádzajú tri symboly

- $k \ldots k \in \mathbb{N}$ je číslo, ktoré udáva rád najvyšších derivácii,
- $p \ldots p \in \langle 1, \infty\rangle$ je exponent podobne ako pri priestoroch L^p,
- $\Omega \ldots \Omega \in \mathbb{R}^N$ je oblasť s lipschitzovskou hranicou.

Poznámka 2.69. Najčastejšie berieme do úvahy $k = 1$ a $p = 2$ (v prípade lineárnych úloh).

Poznámka 2.70 (Lipschitzovská oblasť). Pri úlohách ODR a pri následnom riešení požadujeme aby interval na ktorom hľadáme riešenie bol obmedzený. V prípade úloh PDR je požiadavok obmedzenosti veľmi obecný (nemohli by sme určiť existenciu riešenia). Preto zavádzame pojem tzv. lipschitzovská hranica, ktorý umožňuje dokázať jednoznačnosť a existenciu daného riešenia.
Príkladom oblastí s lipschitzovskou hranicou sú napríklad: štvorce (kocky), mnohouholníky (mnohosteny), kruhy (gule), otvorené konvexné množiny, množiny s výrezmi, atď.

Pripomeňme si stručne normy na L^p priestoroch.
Pre $p \in \langle 1, \infty\rangle$ sa definuje p-norma na Lebesgueovom priestore vzťahom

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p < \infty,$$

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf_{\mu(\mathcal{N})=0} \sup_{x\in\Omega-\mathcal{N}} |u(x)| \qquad p = \infty.$$

Definícia 2.71 (**(k,p)-norma**)**.** Normu (k,p) získame ak sčítame p-normy až do rádu k. Definujeme ju vzťahom

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ je multiindex, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ a pre $D^\alpha u$ platí

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Príklad 2.72. Norma funkcie u v prípade $k = 1$, $p = 2$ a $\Omega = \mathbb{R}^2$ je

$$\|u\|_{1,2} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_2.$$

Poznámka 2.73. Pre $p = 2$ môžeme zaviesť skalárny súčin $(\cdot,\cdot)_k$, ktorým možno definovať normu funkcie u vzťahom

$$\|u\|_{k,2} = \sqrt{(u,u)_k}$$

a zaviesť ekvivalentnú definíciu (k,p)-normy.

Definícia 2.74 (**Norma**)**.** Definujme si (k,p)-normu funkcie u nasledovným ekvivalentným spôsobom

$$\|u\|_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Príklad 2.75. Norma funkcie u v prípade $k = 1$, $p = 2$ a $\Omega = \mathbb{R}^2$ je

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega \left(|u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nasledujú dva spôsoby, ktorým možno zadefinovať Sobolevove priestory.

Definícia 2.76 (**Sobolevov priestor ako zúplenie hladkých funkcii**)**.** Sobolevov priestor $W^{k,p}(\Omega)$ je definovaný ako zúplnenie priestoru $\mathcal{E}(\Omega) = \left\{ u|_\Omega : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \right\}$ v norme (k,p).
Označením $\mathcal{E}(\Omega)$ rozumieme priestor funkcii, ktoré sme získali orezaním funkcii z C_0^∞ v $\mathbb{R}^N$ na oblasť Ω.
Sobolevov priestor $W_0^{k,p}(\Omega)$ je definovaný ako zúplnenie priestoru $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ v norme (k,p).

Definícia 2.77 (**Sobolevov priestor ako funkcie so zobecnenými deriváciami**)**.** Sobolevov priestor $H^{k,p}(\Omega)$ je definovaný ako priestor funkcii, ktoré majú integrovateľné derivácie, tj. je definovaný vzťahom

$$H^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \Lambda(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k \}.$$

Sobolevov priestor $H_0^{k,p}(\Omega)$ je definovaný ako uzáver hladkých funkcii s kompaktným nosičom $C_0^\infty(\Omega)$.

Príklad 2.78. Špeciálne pre $k = 1$, $p = 2$ je priestor $H^{1,2}(\Omega)$ definovaný ako

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, x_N \right\}.$$

Poznámka 2.79. Pre $p < \infty$ platí

- $W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$,
- $W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega)$.

Pre $p = \infty$ platí $W^{k,\infty}(\Omega) \subset H^{k,\infty}(\Omega)$.

Poznámka 2.80. Priestor $W_0^{k,p}(\Omega)$ sa definuje ako Sobolevov priestor funkcii s nulovými stopami na $\partial\Omega$. Je to vlastne zúplnenie priestoru $C_0^\infty(\Omega)$.

Poznámka 2.81. Stopa funkcie u sa definuje ako jej funkcia na hranici oblasti $\partial\Omega$.

Veta 2.82. *Základné vlastnosti Sobolevových priestorov.*

(i) Sobolevove priestory $W^{k,p}(\Omega), W_0^{k,p}(\Omega)$ a $H^{k,p}(\Omega)$ sú Banachove priestory s normou $\|\cdot\|_{k,p}$.

(ii) Priestory $W^{k,p}(\Omega)$ a $H^{k,p}(\Omega)$ sú separabilné ak $p < \infty$. Pre $p = \infty$ je $W^{k,\infty}(\Omega)$ separabilný iba ak Ω je ohraničená. $H^{k,\infty}(\Omega)$ nie je separabilný.

Dôkaz nájdete napríklad v [1].

V nasledujúcej časti tejto kapitoly sa budem venovať duálnym priestorom na Sobolevovom priestore. Spojité lineárne funkcionály na $W^{1,2}(\Omega)$ tvoria duálny (adjungovaný) priestor (Banachov), ktorý označíme $(W_0^{1,2}(\Omega))^*$. Poznamenajme, že funkcionály na $L^2(\Omega)$ ide reprezentovať pomocou funkcii z $L^2(\Omega)$. Z toho dôvodu zavádzame nasledovnú definíciu.

Definícia 2.83 (Reprezentácia funkcionálov). Funkcionál F na $W_0^{1,2}(\Omega)$ ide formálne reprezentovať funkciami $f_0, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ pomocou nasledujúceho vzťahu

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega \left(f_0 v - f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} - \dots - f_N \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) \mathrm{d}x \qquad v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Takto zadefinovaný funkcionál je lineárny, obmedzený a spojitý.
Ak predpokladáme, že funkcie f_i majú derivácie, tak vzťah prejde na tvar

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega \left(f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \right) v \mathrm{d}x,$$

preto F sa dá reprezentovať výrazom

$$f = f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}.$$

Označme $W^{-1,2}$ ako duálny priestor k priestoru $W_0^{1,2}$ a zadefinujme ho vzťahom

$$W^{-1,2}(\Omega) = \left\{ f = f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N} : f_i \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Analogickým spôsobom môžeme reprezentovať funkcionály pre obecné $k \geq 1$ a združené exponenty $p, q \in (1, \infty)$.

Definícia 2.84. Funkcionál F na $(W_0^{k,p}(\Omega))^*$ je možné reprezentovať pomocou vzťahu

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} f_\alpha D^\alpha v \mathrm{d}x,$$

kde funkcie $f_\alpha \in L^q(\Omega)$.

Duálny priestor $(W_0^{k,p}(\Omega))^*$ ide reprezentujeme priestorom $W^{-k,q}(\Omega)$, pre ktorý platí, že je definovaný ako množina

$$W^{-k,q}(\Omega) = \left\{ f = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f_\alpha : f_\alpha \in L^q(\Omega) \right\}.$$

Nasledujúca veta sa týka výsledkov o duálnych priestoroch.

Veta 2.85. *Nech p a q sú združené exponenty, $p, q \in (1, \infty)$. Potom platia nasledovné tvrdenia.*

(i) $(W_0^{k,p}(\Omega))^* \approx W^{-k,q}(\Omega)$,

(ii) $(W_0^{k,1}(\Omega))^* \approx W^{-k,\infty}(\Omega)$.

Poznámka 2.86. Pripomeňme, že v Lebesgueovských priestoroch platil pre druhý duál nasledovný vzťah

$$(L^p(\Omega))^{**} \approx (L^q(\Omega))^* \approx L^p(\Omega).$$

Analogická definícia platí aj v prípade Sobolevových priestorov

$$(W_0^{k,p}(\Omega))^{**} \approx (W^{-k,q}(\Omega))^* \approx W_0^{k,p}(\Omega).$$

Veta 2.87. *Priestory $W^{k,p}(\Omega)$ a $H^{k,p}(\Omega)$ sú v prípade $p \in (1, \infty)$ reflexívne.*

Vo väčšine úloh budeme pracovať s priestorom $W^{1,2}(\Omega)$, ktorý nazývame Hilbertov. Z toho dôvodu si na ňom zadefinujme skalárny súčin.

Definícia 2.88. Skalárny súčin na Hilbertovom priestore $W^{1,2}(\Omega)$ sa definuje nasledovne

$$(u, v)_1 = \int_\Omega \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) \mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.89. Pretože platí

$$(W^{1,2}(\Omega))^* \approx W^{1,2}(\Omega),$$

čoho dôsledkom je, že $F \in (W^{1,2}(\Omega))^*$ je možné reprezentovať $f \in W^{1,2}(\Omega)$ vzťahom

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega \left(fv + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) \mathrm{d}x.$$

Definícia 2.90 (**Slabá konvergencia v** $W^{1,2}(\Omega)$)**.** Predpokladajme, že postupnosť $\{u_n\} \subset W^{1,2}(\Omega)$. Povieme, že postupnosť $\{u_n\}$ slabo konverguje k funkcii u, značíme

$$u_n \rightharpoonup u$$

práve vtedy ak pre postupnosť $\{u_n\}$ a $\forall v \in W^{1,2}(\Omega)$ platí vzťah

$$\int_\Omega \left(u_n(x)v(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x \to \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x.$$

Veta 2.91. *Nech platí, že postupnosť* $\{u_n\} \in W^{1,2}(\Omega)$ *slabo konverguje k funkcii* $u \in W^{1,2}(\Omega)$. *Potom*

(i) $u_n \to u$ *silne v* $L^p(\Omega)$,

(ii) $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *slabo v* $L^p(\Omega)$.

3. Banachove Algebry

Kapitolu Banachove algebry sme rozdelili do troch podkapitol. V prvej uvedieme základné definície a vlastnosti, ďalej sa budeme zaoberať príkladmi Banachových algebier a v poslednom rade inverznými a invertibilnými prvkami.

3.1. Úvod do teórie algebier

V tejto podkapitole uvedieme základné definície a vlastnosti, ktoré sú spojené s pojmom algebra, prípadne Banachova algebra. Informácie pochádzajú z [16], [21] a [25].

Definícia 3.1 (**Algebra**)**.** Algebrou rozumieme lineárny priestor A nad poľom $\mathbb{F}$, na ktorom je naviac definovaná operácia násobenia $\cdot$ s nasledujúcimi vlastnosťami, ktoré platia $\forall x, y, z \in A$ a $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

(i) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(ii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,

(iii) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,

(iv) $\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y)$.

Definícia 3.2 (**Druhy algebier**)**.** Algebra A sa nazýva

(i) reálna, ak $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

(ii) komplexná, ak $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

(iii) komutatívna, ak operácia $\cdot$ je komutatívna, tj. ak platí: $x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall x, y \in A$,

(iv) algebra s jednotkou, ak existuje $e \in A$, pre ktorý platí: $e \cdot x = x \cdot e = x \qquad \forall x \in A$.

Prvku e sa obvykle hovorí jednotka. Prvok e sa nazýva

- ľavá jednotka, ak $e \cdot x = x \quad \forall x \in A$,
- pravá jednotka, ak $x \cdot e = x \quad \forall x \in A$.

Definícia 3.3 (**Normovaná algebra**)**.** Nech A je algebra, označme $\|\cdot\|$ ako normu na A, pre ktorú platí

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x, y \in A. \tag{3.1}$$

Potom $\|\cdot\|$ nazveme norma algebry a dvojicu $(A, \|\cdot\|)$ nazveme normovaná algebra.

Definícia 3.4 (**Banachova algebra**)**.** Úplna normovaná algebra sa nazýva Banachova algebra.

Poznámka 3.5. V normovanej algebre A je operácia násobenia obojstranne spojitá vzhľadom na algebraickú normu. Ak $x_n \to x$, potom $x_n y \to xy$ a $y_n x \to yx \;\; \forall y \in A$ pri $n \to \infty$.

Veta 3.6. *V Banachovej algebre je operácia násobenia spojitá. Ak $x_n \to x$ a $y_n \to y$, potom $x_n y_n \to xy$.*

Dôkaz. $\|x_n y_n - xy\| \leq \|(x_n - x)y_n\| + \|(y_n - y)x\| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|y_n - y\|\|x\| \to 0.$ □

3.2. Príklady Banachových algebier

V tejto časti uvedieme niekoľko príkladov Banachových algebier rozdelených do 3 skupín: algebry funkcii, algebry operátorov a algebry grup. Pre viac detailov slúži napríklad literatúra [21] a [22].

3.2.1. Algebry funkcii

V týchto príkladoch uvažujeme funkcie, pre ktoré je násobenie bodové, tj. pre funkcie u a v je ich súčin definovaný vzťahom

$$(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Príklad 3.7. Množina $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$ s normou danou ako absolútna hodnota je komutatívna Banachova algebra s jednotkovým prvkom $e = 1$.

Príklad 3.8. Nech $C(\langle a, b\rangle)$ je množina všetkých spojitých funkcii definovaných na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorá je Banachovým priestorom. Spolu s normou

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$$

tvorí Banachovu algebru.

Príklad 3.9. Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor, potom položme $A = C(K)$. Ak zoberieme do úvahy bodové násobenie funkcii tak A je komutatívna jednotková algebra s normou

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|,$$

potom A je Banachova algebra.

Príklad 3.10. Nech K je lokálne kompaktný Hausdorffov priestor (def. 2.37), položme

$$A = BC(K) := \{f \in C(K),\ \text{kde } f \text{ je obraničená funkcia}\},$$

potom A je komutatívna jednotková Banachova algebra.

Označením $BC(K)$ rozumieme ohraničené a spojité funkcie na priestore K.

Príklad 3.11. Nech K je lokálne kompaktný Hausdorffov priestor, položme

$$A = C_0(K) := \{f(x) \in C(K),\ \text{kde } f(x) \to 0 \text{ pre } x \to \infty\},$$

potom A je komutatívna Banachova algebra bez jednotky.

Poznámka 3.12. Ak funkcia $f \in C(K)$ ide k 0, pre $x \to \infty$ znamená to, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists G \subseteq K$ tak, že $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in G - K$.

Príklad 3.13. Definujme otvorený jednotkový disk v komplexnej rovine nasledovne

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Definujme diskovú algebru $A(\mathbb{D})$

$$A(\mathbb{D}) = H^{\infty}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}),$$

kde $H^{\infty}(\mathbb{D})$ označuje Banachov priestor ohraničených analytických funkcii na disku $\mathbb{D}$ - nazývame to aj tzv. *Hardyho priestor*. Ak na množine definujeme ešte bodové sčítanie a násobenie, tak sa z tejto množiny stáva algebra nad $\mathbb{C}$. Ak definujeme normu

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|,$$

tak z diskovej algebry $A(\mathbb{D})$ sa stáva Banachova algebra.

3.2.2. Algebry operátorov

V tejto časti uvažujeme algebry, ktorých prvkami sú operátory na Banachovom priestore. V tomto prípade je násobenie zloženie operátorov. Prvok 1 je vždy operátor identity.

Príklad 3.14. Nech $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ je množina štvorcových matíc M stupňa n, na ktorých je definované klasické maticové násobenie, sčítanie a Frobeniova (*Hilbert-Schmidtova*) norma definovaná nasledovne

$$\|M\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{trace}(M^{\top}M)}.$$

Potom $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ je nekomutatívna jednotková Banachova algebra.

Príklad 3.15. Nech V je komplexný Banachov priestor s $\dim(V) > 2$. Ďalej označme $\mathcal{V}$ Banachov priestor všetkých ohraničených lineárnych operátorov F na V, kde berieme do úvahy operátorovú normu

$$\|F\| = \sup\{\|Fx\| : x \in V \ \wedge \ \|x\| \leq 1\}.$$

Potom $\mathcal{V}$ je nekomutatívna jednotková Banachova algebra.

Príklad 3.16. Označme si $\mathcal{K}(V) := \{F \in \mathcal{V}, F \text{ je kompaktný}\}$ ako uzavretú subalgebru $\mathcal{V}$. Je zrejmé, že množina $\mathcal{K}(V)$ je Banachovou algebrou. Dá sa ďalej ukázať, že $\mathcal{K}(V)$ je algebra s jednotkou, práve vtedy ak $\dim(V) < \infty$.

3.2.3. Algebry grup

V týchto príkladoch uvažujeme algebry, ktoré sa skladajú z funkcii s operáciou konvolučného násobenia, ktoré sa označuje symbolom $*$. Obvykle sa táto skupina označuje ako grupové algebry. Tieto algebry nie vždy majú jednotkový prvok.

Príklad 3.17. Nech $A = L^1(\mathbb{R}) := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ je merateľná a } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\right\}$. Definujme násobenie

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

a normu nasledovne

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Dá ukázať, že platí

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \qquad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ďalej platí, že A je úplna Banachova algebra bez jednotkového prvku. Operácia konvolúcie je naviac komutatívna.

Príklad 3.18. Nech $A = l^1(\mathbb{Z}) := \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}$.
Definujme násobenie

$$(x * y)_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} \, y_k$$

a normu nasledovne

$$\|x\|_1 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|.$$

Prvok $\delta = (\delta_{0n})$ je jednotkovým prvkom v $l^1(\mathbb{Z})$, kde $\delta_{0n} = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 0 \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$
Potom A je Banachovou algebrou s jednotkovým prvkom δ.

Príklad 3.19. Nech

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$A = L^1(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : f \text{ je merateľná a } \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \, \mu(t) \mathrm{d}t < \infty \right\},$$

kde μ označuje normalizovanú Lebesgueovu mieru na $\mathbb{T}$. Pre $f, g \in A$ definujeme konvolúciu

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t - \tau^{-1}) g(\tau) \mu(d\tau),$$

a normu

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \mu(d\tau).$$

Spolu s týmito operáciami je A komutatívna Banachova algebra bez jednotky.

Príklad 3.20. Nech

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ je merateľná}, 2\pi \text{ - periodická a } \int_0^{2\pi} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

Ak zoberieme do úvahy konvolúciu a normu definovanú nasledovne

$$(f * g)(t) = \int_0^{2\pi} f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

$$\|f\| := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt,$$

tak A je komutatívna Banachova algebra bez jednotky.

3.3. Inverzné a invertibilné prvky, ideály

Informácie v tejto podkapitole pochádzajú z [21], [22] a [16].

Definícia 3.21 (**Invertibilný a inverzný prvok**). Nech A je Banachova algebra s jednotkovým prvkom e.

(i) Ak prvok $y \in A$ spĺňa $x \cdot y = e$, potom y sa nazýva **pravou inverziou** prvku x.

(ii) Ak prvok $y \in A$ spĺňa $y \cdot x = e$, potom y sa nazýva **ľavou inverziou** prvku x.

(iii) Ak prvok x má pravú aj ľavú inverziu, tak x sa nazýva **invertibilný prvok** a jeho **inverzný prvok** je určený jednoznačne, tj. platí: $x \cdot y = y \cdot x = e$.

(iv) Inverzný prvok k prvku x obvykle značíme x^{-1}.

Poznámka 3.22. Množinu všetkých invertibilných prvkov na jednotkovej algebre A označujeme $G(A)$.

Poznámka 3.23.

- Nech $x, y \in G(A)$, potom $x \cdot y \in G(A)$ a $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.
- Množina $G(A)$ spolu s operáciou násobenia tvorí grupu.

Veta 3.24 (**Neumannova rada**). *Nech A je Banachova algebra s jednotkou e. Potom $e - x \in G(A)$, kde $x \in A$ a $\|x\| < 1$. Naviac platí*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{3.2}$$

Dôkaz. Zadefinujeme si $x^n = xx \dots x$ ako n-ticu súčinu prvku x a položme $x^0 = e$. Rada 3.2 je potom definovaná ako limita čiastočných súm. Rada sa obvykle nazýva Neumannova. Zo vzťahu 3.1 vyplýva, že $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Najviac z predpokladu vety máme, že $\|x\| < 1$. Ľahko sa teda ukáže, že rada $\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|$ konverguje. Z toho vyplýva, že rada 3.2 konverguje takisto. Chceme ukázať, že $(e - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = e$. Vďaka spojitosti násobenia na A máme

$$(e - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x) \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N \to \infty} (e - x) \sum_{n=0}^{N} x^n =$$
$$= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} x^n - \sum_{n=0}^{N} x^{n+1} \right) = \lim_{N \to \infty} (e - x^{N+1}) = e.$$

□

Príklad 3.25. Ukážeme, že $\forall x \in A$ platí: $xx^{-1} = e$

$$xx^{-1} = (e - (e - x))x^{-1} = (e - (e - x)) \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n =$$
$$= (e - (e - x)) \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=0}^{N} (e - x)^n \right] = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=0}^{N} (e - x)^n - \sum_{n=0}^{N} (e - x)^{n+1} \right]$$
$$= \lim_{N \to \infty} \left[e - (e - x)^{N+1} \right] = e - 0 = e$$

Analogicky sa dá ukázať, že platí: $x^{-1}x = e$.

Veta 3.26. *Množina $G(A)$ je otvorená v A.*

Táto veta je akýmsi dôsledkom vety 3.24.

Veta 3.27. *Zobrazenie $x \mapsto x^{-1}$ je spojité na $G(A)$. Zobrazenie je dokonca homomorfizmus $G(A)$ na $G(A)$.*

Dôkazy k predošlým dvom vetám nájdete v [22].

Poznámka 3.28. Pretože zobrazenia $(x, y) \mapsto (xy)$ z $G(A) \times G(A) \to G(A)$ a $x \mapsto x^{-1}$ z $G(A) \to G(A)$ sú spojité, môžeme povedať, že množina $G(A)$ tvorí *topologickú grupu.*

Poznámka 3.29. Topologická grupa je matematická štruktúra, ktorá spĺňa axiómy grupy aj topologického priestoru.

Teraz uvedieme pár príkladov množiny $G(A)$.

Príklad 3.30. Nech $A = C(K)$, kde K je kompaktný Hausdorffov priestor. Potom

$$G(A) = \{f \in A : f(x) \neq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Príklad 3.31. Nech $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Potom

$$G(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det(M) \neq 0\}.$$

Definícia 3.32 (Subalgebra). Nech A je algebra a nech $B \subseteq A$. Potom povieme, že B je subalgebra ak B je algebra a je uzavretá na operácie, tj. $\forall x, y \in B$ platí: $xy \in B$.

Definícia 3.33 (Ideál). Ideálom nazývame vlastný vektorový podpriestor $I \subseteq A$, taký, že platí

(i) $\forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{F}$ platí: $\alpha x + y \in I$,

(ii) $\forall x \in I$ a $\forall y \in A$ platí: $xy \in I$ a $yx \in I$.

Poznámka 3.34. Poznáme aj tzv. jednostranné ideály definovné nasledovne

- *ľavý ideál*: $\forall x \in I$ a $\forall y \in A$ platí $yx \in I$,
- *pravý ideál*: $\forall x \in I$ a $\forall y \in A$ platí $xy \in I$.

Definícia 3.35 (Maximálny ideál). Ideál I sa nazýva maximálny ak

(i) $I \neq \{0\}$, $I \neq A$,

(ii) $\forall I \subset J$ je $J = I$ alebo $J = A$.

Poznámka 3.36. Každý ideál musí byť subalgebrou, ale subalgebra nemusí byť ideálom.

Teraz uvedieme niekoľko príkladov subalgebier, ktoré buď sú alebo nie sú ideálom.

Príklad 3.37. Nech K je kompaktný Hausdorffov priestor a $G \subseteq K$. Potom

$$I_G := \{f \in C(K) : f = 0\}$$

je množina ideálov v Banachovej algebre $C(G)$.

Príklad 3.38. Množina všetkých trojuholníkových matíc $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ je subalgebrou, ale nie je ideálom.

Príklad 3.39. Nech $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a $D = \{(a_{ij}) \in A : a_{ij} = 0, i \neq j\}$. Potom D je subalgebrou A ale nie je ideálom.

Príklad 3.40. Jediný ideál v maticovej algebre $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ je nulový ideál.

Poznámka 3.41. Uvedieme niektoré vlastnosti ideálov.

- Ak I je ideál v A, potom $I \cap G(A) = \emptyset$.
- Každý ideál je obsiahnutý v maximálnom ideály.

Definícia 3.42 (Homomorfizmus). Nech A, B sú dve algebry. Definujem zobrazenie $\phi : A \to B$ a nazveme ho *homomorfizmom*, ak $\forall x, y \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ platí

(i) zobrazenie ϕ je lineárne, tj

  (a) platí aditivita: $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,
  (b) platí homogenita: $\phi(\alpha x) = \alpha(\phi x)$.

(ii) zobrazenie ϕ je multiplikatívne: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

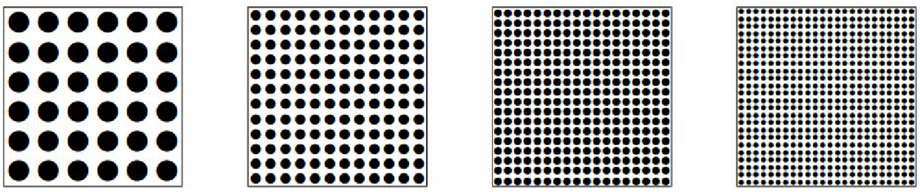
Poznámka 3.43. Ak A, B sú normované algebry, potom homomorfizmus je *izometrický*, ak $\|\phi(x)\| = \|x\| \;\; \forall x \in A$.

4. Periodická homogenizácia

4.1. Úvod

Homogenizáciou rozumieme postup, pri ktorom ekvivalentne nahradíme heterogénny materiál s periodickou štruktúrou homogénnym. Výsledný homogénny materiál má rovnaké makroskopické vlastnosti ako pôvodný kompozit. Cieľom homogenizácie je poskytnúť správny popis materiálu, ktorý sa skladá z viacerých komponent zmiešaných dohromady, takémuto materiálu hovoríme nehomogénny materiál, inak nazývaný aj kompozit. V tejto kapitole sa budeme venovať iba materiálom s periodickou štruktúrou. Spoločným rysom modelov, ktoré budeme uvažovať je to, že všetky sú popísané pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc (skrátene PDR), ktorých koeficienty sa vzájomne periodicky líšia od jednej zložky k druhej. V matematickom zmysle nahradíme PDR s periodickými koeficientami rovnicou s konštantnými koeficientami. Vďaka teórii samotnej homogenizácie vieme počítať makroskopické vlastnosti kompozitu z jeho periodického usporiadania a vlastností jeho komponent. Cieľom je získať homogénny model s homogénnymi koeficientami, ktoré závisia od koefiecientov jednotlivých zložiek.
Poznamenajme, že praktický význam je pre dimenziu $N = 2$, prípadne 3.

Matematický prístup, ktorý navrhol Babuška spočíva v myšlienke, že namiesto jedneho materiálu s periodickou štruktúrou uvažujeme postupnosť materiálov so zjemňujúcou sa štruktúrou. Vo formulácii úlohy uvažujeme postupnosť okrajových rovníc, ktoré sú určené postupnosťou periodických koeficientov s periódou idúcou k nule.



Obr. 4.1: Postupnosť materiálov v $N = 2$ so zmenšujúcou (zjemňujúcou) sa štruktúrou.

Skôr než pristúpime k formulácii modelovej úlohy, zadefinujme si niektoré dôležité pojmy. Pre viac informácii slúži [2], [3], [4] a [11].

Definícia 4.1 (Y**-periodickosť).** Nech $Y = \langle 0,1)^N$ je N-rozmerná jednotková bunka, ktorá charakterizuje základnú periódu. V prípade $N = 2$ bude Y jednotkový štvorec a v prípade $N = 3$ jednotková kocka. Povieme, že funkcia $a(y) \equiv a(y_1, ..., y_N)$ definovaná na $\mathbb{R}^N$ je Y-periodická, ak je periodická s periódou 1 v každej premennej, tj. ak platí rovnosť

$$a(y_1, ..., y_N) = a(y_1 + k_1, ..., y_N + k_N) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^N. \tag{4.1}$$

Poznámka 4.2. Namiesto jednotkového štvorca, prípadne kocky je možné definovať Y-periodické funkcie s periódou $Y = (0, y_1) \times \cdots \times (0, y_N)$.

Definícia 4.3 (**Škála**)**.** V teórii homogenizácie škálou alebo stupnicou budeme nazývať klesajúcu postupnosť $\{\varepsilon_n\}$ malých reálnach čísel ε_n klesajúcich k nule. Táto postupnosť sa dá charakterizovať aj ako veľkosť periodickej štruktúry.

Definícia 4.4. Nech $\Omega \in \mathbb{R}^N$ je oblasť s rozumnou hranicou $\partial\Omega$. Pre Y-periodickú funkciu $a(y)$ vzťah

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, ..., \frac{x_N}{\varepsilon}\right) \tag{4.2}$$

definuje postupnosť funkcii $a^\varepsilon(x)$ so zmenšujúcou sa periódou ε.

4.2. Formulácia úlohy

V tejto podkapitole informácie pochádzajú z [2], [3], [8],[10] a [11].

Ako modelovú úlohu uvažujeme okrajový problém pre eliptickú parciálnu diferenciálnu rovnicu (PDR) druhého rádu na ohraničenej oblasti Ω v $\mathbb{R}^N$ s rozumnou hranicou $\partial\Omega$ a s Dirichletovou okrajovou podmienkou $u = 0$ na hranici $\partial\Omega$

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x) \quad \text{v} \quad \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \tag{4.3}$$

Úlohu 4.3 môžeme z fyzikálneho aspektu chápať napríklad ako ustálené vedenie tepla v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pre $N = 3$ je to ustálené vedenie tepla v telese s objemom Ω, kde

- funkcia $u(x)$ je neznáma funkcia, ktorú hľadáme, tj. teplota,
- podmienka $u = 0$ znamená, že na hranici $\partial\Omega$ je nulová teplota,
- funkcia $f(x)$ značí hustotu výkonu vnútorných zdrojov tepla,
- $a(x) \equiv a_{ij}(x) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ sú koeficienty popisujúce vlastnosti materiálu usporiadané do matice stupňa N, ktoré
  - sú ohraničené, hladké a Y-periodické,
  - spĺňajú podmienku elipticity s konštantou $\alpha > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{4.4}$$

4.3. Homogenizovaný problém

Pri homogenizácii analyzujeme postupnosť okrajových úloh pre rovnice s koeficientami so zmenšujúcou sa periódou. Podľa vzťahu 4.2 skúmame nasledovný okrajový problém

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^\varepsilon(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f(x) \quad \text{v} \quad \Omega$$
$$u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \tag{4.5}$$

Poznámka 4.5. Predchádzajúcu úlohu môžeme napísať aj v ekvivalentnom tvare

$$-\text{div}\left(a^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon\right) = f(x) \quad \text{v} \quad \Omega, \qquad u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Nech $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Sobolevov priestor. Potom pre $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ a $f(x) \in L^2(\Omega)$ má úloha 4.5 pre každé $\varepsilon > 0$ práve jedno slabé riešenie. Pozrieme sa preto bližšie na korektné zadefinovanie slabej formulácie a abstraktnej vety Laxa-Milgrama.

Zadefinujme si teraz slabú formuláciu, ktorej cieľom je transformovanie úlohy na integrálnu identitu, ktorá je testovaná testovacími funkciami.

Slabá formulácia našej úlohy 4.5 na Sobolevovom priestore $W_0^{1,2}(\Omega)$ má nasledovné znenie.

Hľadáme funkciu $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tak, aby $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platila nasledovná integrálna identita

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

Integrálna identita sa zapisuje aj v nasledovnej forme

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v) = b(v),$$

kde $\mathcal{A}(u_\varepsilon, v)$ je bilineárna forma na $W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$ a $b(v)$ je spojitý lineárny funkcionál na $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dá sa ukázať pomocou nasledovnej Lemy Laxa-Milgrama, že pre každé $\varepsilon > 0$ má úloha práve jedno riešenie.

Teraz sa budeme zaoberať existenciou riešenia úlohy slabej formulácie. Nasleduje abstraktná veta Laxa-Milgrama, pomocou ktorej vieme dokázať jednoznačnosť, existenciu a odhad slabého riešenia úlohy.

Veta 4.6 (**Lema Laxa-Milgrama**). *Nech $W_0^{1,2}(\Omega)$ je reálny Hilbertov priestor s normou $\|\cdot\|$ a skalárnym súčinom $(\cdot,\cdot)$. Nech ďalej $\mathcal{A}(u, v)$ je bilineárna forma na $W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$, ktorá je*

- *spojitá, tj. existuje $m > 0$ také, že*

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq m \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ a}$$

- *eliptická, tj. existuje $\alpha > 0$ taká, že*

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ďalej nech $b(v)$ je lineárny funkcionál na $W_0^{1,2}(\Omega)$, ktorý je spojitý, tj. existuje $\beta > 0$ taká, že

$$|b(v)| \leq \beta \|v\| \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Potom slabá formulácia úlohy: Hľadáme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ také, že

$$\mathcal{A}(u, v) = b(v) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

má práve jedno riešenie, ktoré naviac spĺňa odhad

$$\|u\| \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Uvedenú vetu spolu s dôkazom môžte nájsť napríklad v [13].

4.4. Ciele homogenizácie

Hlavné ciele homogenizácie spočívajú v nasledovných krokoch.

- Študovaní konvergencie postupnosti riešenia $\{u_\varepsilon\}$.
- Nájdení limity (ak existuje) u^* postupnosti $\{u_\varepsilon\}$.
- Spočítaní homogenizovaných koeficientov.
- Zlepšení aproximácie riešenia pridaním korektorov k homogenizovanému problému.

Pozrime sa konkrétnejšie na jednotlivé ciele homogenizácie.

Tvrdenie 4.7. Homogenizované koeficienty b_{ij} sú dané nasledovnou formulou

$$b_{ij} = \int_Y \left(a_{ij}(y) - \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(y) \frac{\partial \omega^j(y)}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y, \tag{4.7}$$

kde $\omega^j(y)$, $j = 1, \dots N$ sú Y-periodické slabé riešenia nasledujúcich rovníc

$$-\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ik}(y) \frac{\partial \omega^j(y)}{\partial y_k} \right) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} \quad \text{na} \quad Y.$$

Tvrdenie 4.8. Postupnosť riešení u_ε rovnice 4.5 konverguje k funkcii u^*.

Tvrdenie 4.9. Limita u^* je tzv. homogenizované riešenie nasledujúceho homogenizovaného problému s koeficientami b_{ij} (viď.4.7)

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \right) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_j \partial x_i} = f \quad \text{v} \quad \Omega$$

$$u^* = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Tvrdenie 4.10. Pomocou funkcii $\omega^j(y)$ môžme k homogenizovanému riešeniu u^* pridať korektor tak, že vzťah

$$u^*(x) - \varepsilon \left(\omega^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x) + \cdots + \omega^N \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x_N}(x) \right)$$

vystihuje nielen globálne ale i lokálne chovanie riešenia $u_\varepsilon(x)$.

Vyššie uvedené tvrdenia možno nájsť hlavne v [11] a [12].

V nasledovnej podkapitole si odvodíme vyššie spomínaný vzťah pre homogenizované koeficienty 4.7 pomocou metódy asymptotického rozvoja.

4.5. Metóda asymptotického rozvoja

Informácie v tejto sekcii pochádzajú hlavne z [2], [3] a [20].

4.5.1. Odvodenie metódy asymptotického rozvoja

Metóda asymptotického rozvoja (*Multiscale expansion method*) je heuristická metóda, ktorá hľadá správne správanie postupnosti $\{u_\varepsilon\}$. Pretože v rovnici 4.5 vystupuje malý parameter ε, hľadáme riešenie u_ε v tvare mocninnej rady

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i.$$

Hlavnou myšlienkou metódy je predpoklad, že všetky vyššie uvedené funkcie u_i závisia výslovne na x aj na $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Preto predpokladáme nasledovnú formulu pre riešenie u_ε

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{4.8}$$

Funkcie $u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u_i(x, y)$ sú Y-periodické a závisia na 2 premenných

- $x-$ *globálna* (pomalá) premenná - reprezentuje makroskopické vlastnosti,
- $y-$ *lokálna* (rýchla) premenná - reprezentuje mikroskopické vlastnosti, znamená to, že pre $\varepsilon << 1$ sa y mení omnoho rýchlešie než x.

Ďalej budeme potrebovať nasledovný vzorec pre derivovanie zloženej funkcie F, kde $y = \frac{x}{\varepsilon}$

$$\frac{dF}{dx}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Vzorec si následne upravíme pre naše potreby

$$\nabla\left[u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \left[\nabla_x u_i + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u_i\right]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

kde ∇_x značí parciálnu deriváciu podľa x a analogicky, ∇_y značí parciálnu deriváciu podľa y.

4.5.2. Asymptotický rozvoj

Pre jednoduchosť budeme namiesto $a_{ij}(y)$ písať len a. Rozvoj rovnice 4.8 v premennej ε je nasledovný

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon^{-2}\left[\operatorname{div}_y a\nabla_y u_0\right]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\\
&-\varepsilon^{-1}\left[\operatorname{div}_y a\left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\right) + \operatorname{div}_x(a\nabla_y u_0)\right]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\\
&-\varepsilon^{0}\left[\operatorname{div}_x a\left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\right) + \operatorname{div}_y a(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)\right]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i}\left[\operatorname{div}_x a\left(\nabla_x u_i + \nabla_y u_{i+1}\right) + \operatorname{div}_y a(\nabla_x u_{i+1} + \nabla_y u_{i+2})\right]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f(x).
\end{aligned}$$

Vedie to na nasledovné rovnice.

Rovnica pre stupeň ε^{-2}:

$$- \operatorname{div}_y a\nabla_y u_0(x,y) = 0. \tag{4.9}$$

Rovnica pre stupeň ε^{-1}:

$$- \operatorname{div}_y \left[a(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)\right](x,y) - \operatorname{div}_x \left[a\nabla_y u_0\right](x,y) = 0. \tag{4.10}$$

Rovnica pre stupeň ε^{0}:

$$- \operatorname{div}_x \left[a(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)\right](x,y) - \operatorname{div}_y \left[a(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)\right](x,y) = f(x). \tag{4.11}$$

4.5.3. Riešenie sústavy rovníc

Teraz prejdeme postupne k vyriešeniu systému rovníc 4.9 až 4.11.

- Stupeň ε^{-2}:

  $$-\operatorname{div}_y \left[a\nabla_y u_0\right](x,y) = 0.$$

  Riešením je funkcia $u_0(x,y) = u_0(x)$, ktorá nezávisí na y.

- Stupeň ε^{-1}:

  $$-\operatorname{div}_y \left[a(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)\right](x,y) - \operatorname{div}_x \left[a\nabla_y u_0\right](x,y) = 0.$$

  Pretože u_0 nezávisí na y, môžeme predošlú rovnicu zjednodušiť na tvar

  $$-\operatorname{div}_y \left[a(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)\right](x,y) = 0.$$

  Riešenie $u_1(x,y)$ nájdeme v závislosti na u_0

  $$u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\,\omega_i(y), \tag{4.12}$$

  kde $\omega_i(y)$ sú Y-periodické riešenia rovníc

  $$-\operatorname{div}_y \left[a\nabla_y\,\omega_i(y)\right] = \operatorname{div}_y \left[a\,e_i\right],$$

  kde e_i je i-tý bázový vektor v $\mathbb{R}^N$.

- Stupeň ε^{0}:

  $$-\operatorname{div}_x \left[a(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)\right](x,y) - \operatorname{div}_y \left[a(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)\right](x,y) = f(x).$$

  Integráciou rovnice a použitím periodicity u_1 a u_2 dostávame

  $$- \operatorname{div}_x \int_Y \left[a\left(\nabla_y u_0 + \nabla_y u_1\right)\right](x,y) = \int_Y f(x)\mathrm{d}y = f(x). \tag{4.13}$$

  Vidíme, že v rovnici sa už nevyskytuje u_2 a použitím rovnice 4.12 môžeme napísať

  $$\nabla_y u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\,\nabla_y\omega_i(y).$$

Rovnica 4.13 potom prejde na tvar

$$-\operatorname{div}_x \int_Y \left[a \left(\nabla_y u_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, \nabla_y \omega_i(y) \right) \right] (x,y) = f(x).$$

Posledná rovnica sa dá upraviť na tvar

$$-\operatorname{div}_x (b_{ij} \nabla_x u_0) = f(x),$$

kde homogenizované koeficienty b_{ij} sú dané rovnicou

$$b_{ij} = \int_Y \left(a_{ij}(y) - \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(y)\, \frac{\partial \omega_j(y)}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y.$$

Odvodili sme teda vzťah pre homogenizované koeficienty - viď. 4.7.

4.6. Zhrnutie

V predchádzajúcej sekcii sme odvodili tzv. homogenizovaný problém s homogenizovanými koeficientami b_{ij}

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_j \partial x_i} \right) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_j \partial x_i} \right) = f \quad \text{na} \quad \Omega$$

$$u^* = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \tag{4.14}$$

Homogenizované koeficienty sa vypočítajú pomocou vzťahu

$$b_{ij} = \int_Y \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \omega^j}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y.$$

Poznámka 4.11. Koeficienty b_{ij} nezávisia na x ani na y, závisia iba na rozložení hodnôt a_{ij} jednotkovej bunky $Y = \langle 0,1 \rangle^N$.

Poznámka 4.12. *Priemer funkcie* $f(y)$ budeme značiť ako

$$M\left[f(y)\right] := \int_Y f(y)\, \mathrm{d}y.$$

4.7. Príklad - jednodimenzionálna úloha

Nech $N = 1$, $\Omega = \langle 0,1 \rangle$. Okrajová úloha potom vyzerá nasledovne

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}x} \right) = f \quad \text{na} \quad \Omega$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

Predpokladáme, že funkcia $a(y)$ je hladká, periodická s periódou 1 a ohraničená. Taktiež funkcia f je hladká.
Riešime nasledovnú rovnicu na získanie funkcie $\omega(y)$, ktorá je 1-periodickým riešením rovnice

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(a(y)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}a(y).$$

Integráciou spočítame, že

$$a(y)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y} = -a(y) + c_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y} = -1 + \frac{c_1}{a(y)}.$$

Z toho, plynie, že

$$\omega(y) = -y + c_1 \int_0^y \frac{1}{a(y)}\mathrm{d}y + c_2.$$

Pretože $\omega(y)$ je periodická, platí

$$\omega(0) = \omega(1) \Rightarrow 0 = -1 + c_1 \int_0^1 \frac{1}{a(y)}\mathrm{d}y \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(y)}\mathrm{d}y} =: M\left[f(y)^{-1}\right]^{-1}.$$

Homogenizované koeficienty, v našom prípade jeden homogenizovaný koeficient sa vypočíta vzťahom

$$b_{ij} = b = \int_0^1 \left(a(y) + a(y)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y := M\left[a(y)\left(1 + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y}\right)\right].$$

Vieme, že

$$1 + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y} = 1 + (-1) + \frac{c_1}{a(y)} = \frac{1}{a(y)\,M\left[a(y)^{-1}\right]}.$$

Z toho plynie, že homogenizovaný koeficient b je rovný vzťahu

$$b = M\left[a(y)^{-1}\right]^{-1}. \tag{4.15}$$

Predchádzajúci vzťah 4.15 vyjadruje homogenizovaný koeficient v 1D. Vidíme, že aj napriek tomu, že sme v 1D, tak homog. koeficient b sa nezistí len obyčajným spriemerovaným nehomog. koeficientu $a(y)$. Platí teda, že inverzná hodnota b je priemer inverznej hodnoty $a(y)$.

Prejdeme k ďalšej časti, v ktorej si zadefinujeme rôzne druhy konvergencii.

4.8. Konvergencia

4.8.1. Slabá vs. silná konvergencia

V normovanom lineárnom priestore V máme okrem silnej konvergencie, ešte konvergenciu slabú. Postupnosť koeficientov $a^{\varepsilon}(x)$ úlohy 4.5 nekonverguje silne, ale konverguje slabo. Pripomeňme si preto niektoré dôležité pojmy, ktoré pochádzajú z [13].

Definícia 4.13 (Silná konvergencia). Nech V je normovaný lineárny priestor na ktorom definujme silnú konvergenciu nasledovným spôsobom (pomocou normy)

$$u_\varepsilon \to u^* \Longleftrightarrow \|u_\varepsilon \to u^*\| \to 0.$$

Na zavedenie pojmu slabá konvergencia je potrebné si zadefinovať spojitý lineárny funkcionál F. Pripomeňme si jeho definíciu.

Definícia 4.14 (Spojitý lineárny funkcionál). Reálny funkcionál F je zobrazenie z V do $\mathbb{R}$. Ďalej,

(i) F je lineárny, ak $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) F je spojitý, ak zachováva konvergenciu, tj. $u_\varepsilon \to u_0 \Longrightarrow F(u_\varepsilon) \to F(u^*)$.

Definícia 4.15 (Slabá konvergencia). Postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ konverguje slabo k funkcii u^*, ak platí

$$F(u_\varepsilon - u^*) \to 0 \qquad \forall F \in V^*.$$

Slabú konvergenciu označujeme polovičnou šípkou: $u_\varepsilon \rightharpoonup u^*$.

Nasledujú dve známe vety týkajúce sa konvergencie, ktoré uvádzame bez dôkazov, tie možno nájsť v [14].

Veta 4.16. *V normovanom priestore konečnej dimenzie silná a slabá konvergencia splývajú.*

Veta 4.17. *Každá obmedzená postupnosť v normovanom lineárnom priestore konečnej dimenzie obsahuje konvergentnú podpostupnosť.*

Pripomeňme, že v slabej formulácii 4.6 sa nachádza súčin koeficientov a_{ij}^ε a parciálnych derivácii. Pri $\varepsilon \to 0$ potrebujeme prejsť k limite týchto dvoch slabo konvergujúcich postupností, čo predstavuje problém. Síce obe postupnosti konvergujú slabo, pre ich súčin to neplatí.
Pre riešenie problému súčinu dvoch slabo konvergentných postupností zavedieme tzv. dvojškálovú konvergenciu, ktorú vynašiel Nguetseng a neskôr rozvinul Allaire [2].

Pozrieme sa bližšie na **problém súčinu dvoch slabo konvergentných postupností**.

Pre silne konvergentné postupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ platí vzťah

$$u_n \to u^* \wedge v_n \to v^* \Rightarrow u_n v_n \to u^* v^*.$$

Pre silne konvergentnú postupnost $\{u_n\}$ a slabo konvergentnú postupnosť $\{v_n\}$ platí vzťah

$$u_n \to u^* \wedge v_n \rightharpoonup v^* \Rightarrow u_n v_n \rightharpoonup u^* v^*.$$

V prípade, že obe postupnosti konvergujú slabo, uvedené implikácie neplatia. Je to spôsobné tým, že v slabej limite nemáme žiadnu informáciu o lokálnom chovaní postupnosti. Aby sme v prípade súčinu slabo konvergentných postupností vedeli prejsť k limite, zavedieme si tzv. dvojškálovú limitu. V silnej dvojškálovej konvergencii už máme informáciu aj o lokálnom chovaní.

4.8.2. Konvergencia v L^p priestoroch

V Lebesgueových priestoroch máme viac druhov konvergencii, ktoré si teraz popíšeme [10].

Definícia 4.18. Nech $u^* \in L^p(\Omega)$ a $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$.

(i) Postupnosť $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$, $p \in \langle 1, \infty)$, konverguje **silne** pri $n \to \infty$ k u^*, píšeme $u_n \to u^*$ ak

$$\|u_n - u^*\|_p \equiv \left(\int_\Omega |u_n(x) - u^*|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

(ii) Postupnosť $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$, $p \in \langle 1, \infty)$, konverguje **slabo** pri $n \to \infty$ k u^*, píšeme $u_n \rightharpoonup u^*$ ak

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_\Omega f(x)(u_n(x) - u^*(x)) \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \forall f \in L^q(\Omega),\ q = \frac{p}{p-1}, \quad \text{viď. definícia 2.54.}$$

(iii) Postupnosť $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$, $p = \infty$, konverguje **slabo** pri $n \to \infty$ k u^*, píšeme $u_n \rightharpoonup u^*$ ak

$$F(u_n - u^*) \to 0 \qquad \forall F \in (L^\infty(\Omega))^*.$$

(iv) Postupnosť $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$, $p = \infty$, konverguje **slabo-**$*$ pri $n \to \infty$ k u^*, píšeme $u_n \rightharpoonup_* u^*$ ak

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_\Omega f(x)(u_n(x) - u^*(x)) \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \forall f \in L^1(\Omega).$$

Tvrdenie 4.19. Nech $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ je obmedzená postupnosť, ďalej nech $u^* \in L^p(\Omega)$, $p \in \langle 1, \infty)$ a nech $\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$ platí vzťah

$$\int_\Omega f(x)(u_n(x) - u^*(x)) \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Potom $\{u_n\}$ konverguje slabo v $L^p(\Omega)$.
Ak $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ je obmedzená postupnosť a platí rovnaký vzťah, potom $\{u_n\}$ konverguje slabo-$*$ v $L^\infty(\Omega)$.

Tvrdenie 4.20. Nech $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ je obmedzená postupnosť, $p \in (1, \infty)$. Potom existuje podpostupnosť, ktorá slabo konverguje k $u^* \in L^p(\Omega)$.
Ak $p = \infty$, tak obmedzená postupnosť v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje slabo-$*$ konvergentnú podpostupnosť.

Dôkazy k tvrdeniam možno nájsť napríklad v [14].

4.8.3. Dvojškálová konvergencia

Na overenie konvergencie riešenia sa používa tzv. dvojškálová konvergencia (*two-scale covergence*). Jedná sa o druh slabej konvergenicie, ktorá sa využíva pri problémoch periodickej homogenizácie. V tejto časti ju zadefinujeme a preskúmame niektoré jej základné vlastnosti.

V dvojškálovej konvergencii limita postupnosti $\{u_n(x)\}$ jednej N-tice premenných x má za limitu funkciu $u_0(x,y)$ dvoch N-tic premenných, kde $x \in \Omega$ a $y \in Y$. Prvá premenná x popisuje globálne chovanie funkcii u_n a druhá premenná y lokálne chovanie.
Informácie sú z [2],[3], [8] a [9].

Definícia 4.21 (**Slabá dvojškálová konvergencia**)**.** Postupnosť $\{u_\varepsilon(x)\} \in L^p(\Omega)$ konverguje slabo dvojškálovo v $L^p(\Omega)$ k limite $u_0(x,y) \in L^p(\Omega \times Y)$ pri $\varepsilon \to 0$, ak postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ je ohraničená v $L^p(\Omega)$ a pre každú testovaciu funkciu $\varphi(x,y)$ platí nasledovná podmienka konvergencie

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}x \to \int_\Omega \left(\int_Y u_0(x,y)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Testovacia funkcia $\varphi(x,y)$ je spojitá na $\overline{\Omega} \times Y$ a Y-periodická v premennej y.

Definícia 4.22 (**Silná dvojškálová konvergencia**)**.** Postupnosť $\{u_\varepsilon(x)\} \in L^p(\Omega)$ konverguje silne dvojškálovo v $L^p(\Omega)$ k limite $u_0(x,y) \in L^p(\Omega \times Y)$ pri $\varepsilon \to 0$, ak naviac platí

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \to \|u_0\|_{L^p(\Omega\times Y)}.$$

Poznámka 4.23. Ak postupnosť u_ε konverguje silne dvojškálovo k u_0 pri $\varepsilon \to 0$, tak to značím ako

$$u_\varepsilon \twoheadrightarrow u_0.$$

Hlavným dôvodom pre zavedienie dvojškálovej konvergencie sú nasledovné dôležité vety.

Veta 4.24 (**O kompaktnosti**)**.** *Nech $\{u_\varepsilon\}$ je ohraničená postupnosť v $L^p(\Omega)$. Potom existuje podškála $\{\varepsilon^*\} \subset \{\varepsilon\}$ a limita $u_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ tak, že podpostupnosť $\{u_{\varepsilon^*}\}$ slabo dvojškálovo konverguje k limite u_0.*

Veta 4.25. *Nech pre exponenty $p, q, r \in \langle 1, \infty\rangle$ platí: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ a nech $\{u_\varepsilon\}$ silne dvojškálovo konverguje k limite $u_0 \in L^p(\Omega)$ a $\{v_\varepsilon\}$ slabo dvojškálovo konverguje k limite $v_0 \in L^q(\Omega)$.*
Potom súčin $u_\varepsilon v_\varepsilon$ slabo dvojškálovo konverguje k limite $u_0 v_0 \in L^r(\Omega)$.

Dôkazy k predošlým vetám možno nájsť v [2].

Poznámka 4.26. Na záver tejto kapitoly by sme zahrnuli ešte ďalšie poznatky týkajúce sa konvergencie v $L^p(\Omega)$ priestoroch.

- V prípade $p < \infty$, silná dvojškálová konvergencia implikuje slabú dvojškálovú konvergenciu.
- V prípade $p = \infty$, dvojškálová konvergencia implikuje iba slabú-$*$ konvergenciu v $L^\infty(\Omega)$.

5. Neperiodická homogenizácia

Štruktúra skutočných materiálov je neperiodická, niekedy aj úplne náhodná.
V roku 2004 Nguetseng predstavil uplatnenie Banachových algebier pri modelovaní materiálov s neperiodickou štruktúrou. Predpoklad periodicity Y sa nahradil existenciou spektra homogenizačnej algebry $\triangle(A)$ a dvojškálová konvergencia sa nahradila Σ - konvergenciou. Informácie v tejto kapitoly sú najmä z [8], [17], [18], [19] a [23].

5.1. Stredná hodnota funkcie

Definícia 5.1 (**Stredná hodnota**). Funkcia $u \in BC(\mathbb{R}^N)$ má strednú hodnotu na $\mathbb{R}^N$, ak existuje číslo $M(u) \in \mathbb{R}$ ktoré je slabou-$*$ limitou postupnosti $\{u_\varepsilon\}$ v $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tak, že pre každú funkciu $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x \to M(u) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pri} \quad \varepsilon \to 0.$$

Potom $M(u)$ nazveme stredná hodnota funkcie u.

Definícia 5.2. Priestor všetkých reálnych ohraničených a spojitých funkcii, ktoré majú strednú hodnotu označíme ako $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pre tento priestor platí $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq BC(\mathbb{R}^N)$. Naviac $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$ je Banachov priestor so suprémovou normou.

Poznámka 5.3. Stredná hodnota M sa definuje aj ako lineárny funkcionál

$$M : \Pi^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}.$$

5.2. Takmer periodické funkcie

Predtým než prejdeme k samotnej definícii takmer periodických funkcii by sme zopakovali charakter periodických funkcii. Pod pojmom **periodické funkcie** chápeme funkcie $f(x)$, ktorých hodnoty sa opakujú s určitou kladnou periódou p, tj. platí vzťah

$$f(x+p) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Medzi najznámejšie príklady patria trigonometrické funkcie, napríklad $f(x) = \sin(8\pi x)$. Pre tieto funkcie platí, že sa dajú reprezentovať pomocou Fourierovej rady.

Funkcie, ktoré nie sú periodické nazývame **aperiodické** (neperiodické). Matematická definícia hovorí, že sú to "periodické funkcie" s periódou v nekonečne. Tieto funkcie nemožno reprezentovať pomocou Fourierovej rady.

Medzi podtriedu aperiodických funkcii patria **takmer periodické funkcie**. Sú veľmi späté s periodickými funkciami, lebo sa dajú reprezentovať pomocou Fourierovej rady, tj. dajú sa napísať ako konečná suma dvoch alebo viacerých periodických funkcii, pričom funkcie nie sú racionálnymi násobkami. Ako príklad uvedieme nasledovnú takmer periodickú funkciu

$$f(x) = \sin(2\pi x) + \sin(2\pi x\sqrt{3}),$$

ktorá sa skladá z dvoch periodických funkcii $f_1(x) = \sin(2\pi x)$ a $f_2(x) = \sin(2\pi x\sqrt{3})$.

Posledným typom ktorý budeme charakterizovať sú **kvázi periodické funkcie**, ktoré sú špeciálnym typom takmer periodických funkcii. Existujú dva základné typy a to aritmetické kvázi periodické funkcie, ktoré spĺňajú rovnicu

$$f(x+p) = f(x) + c, \qquad \text{kde } p \text{ je perióda a } c \text{ je konštatnta a}$$

geometrické kvázi periodické funkcie, ktoré spĺňajú rovnicu

$$f(x+p) = cf(x).$$

Napríklad funkcia $f(x) = \frac{x}{2\pi} + \cos(x)$ je aritmetická kvázi periodická, lebo spĺňa rovnicu $f(x+2\pi) = f(x) + c$, kde $c = 1$.

Nasleduje schéma, ktorá vyjadruje vzťahy medzi vyššie spomínanými funkciami

$$\text{periodické funkcie} \subset \text{kvázi periodické} \subset \text{takmer periodické} \subset \text{aperiodické}.$$

Vrátime sa k pojmu takmer periodických funkcii.

Definícia 5.4 (**Takmer periodické funkcie**). Bohr [5] definoval takmer periodické funkcie ako uzáver trigonometrických polynómov s normou

$$\|u\|_\infty = \sup_x |u(x)|.$$

Inými slovami, funkcia u je takmer periodická ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná lineárna kombinácia sinov a kosinov, ktorá je vzhľadom na normu vzdialená menej ako ε od funkcie u.

Príklad 5.5. Pre každé $k = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{R}^N$ položme

$$\gamma_k(y) = e^{2i\pi ky} \qquad y \in \mathbb{R}^N. \tag{5.1}$$

Funkcia $\gamma_k(y)$ je takmer periodická v Bohrovom zmysle slova.

Definícia 5.6 (**Translácia**). Transláciu funkcie $u \in \Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$ definujeme vzťahom

$$\tau_a u(y) = u(y-a) \quad \forall a, y \in \mathbb{R}^N.$$

Uvedieme ešte ekvivaletnú definíciu takmer periodickej funkcie.

Definícia 5.7. Funkcia $u \in \Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$ sa nazýva takmer periodická práve vtedy ak $\tau_a u(y)$ tvorí relatívne kompaktnú množinu v $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Poznámka 5.8. Pripomeňme si pojem relatívna kompaktnosť. Množina sa nazýva relatívne kompaktná, ak jej uzáver je kompaktná množina. V prípade úplneho metrického priestoru je relatívna kompaktnosť totožná s prekompaknosťou, viď. definícia 2.27.

Definícia 5.9. Množinu všetkých trigonometrických polynómov na $\mathbb{R}^N$ označme $T(\mathbb{R}^N)$. Množina $T(\mathbb{R}^N)$ obsahuje všetky funkcie u, ktoré sú v tvare

$$u(y) = \sum_{k \in R} c_k \gamma_k(y),$$

kde R je konečná podmnožina $\mathbb{R}^N$ a $c_k \in \mathbb{C}$.

Poznámka 5.10. Priestor všetkých takmer periodických funkcii na $\mathbb{R}^N$ budeme označovať ako $AP(\mathbb{R}^N)$, z anglického výrazu *almost periodic.* .

Pre viac detailov slúži literatúra [5], [18] a [23].

6. Homogenizačná algebra

V tejto kapitole sa budeme zaoberať homogenizačnou algebrou, ktorej koncept budeme neskôr využívať práve pri aplikáciách neperiodickej homogenizácie. Pre viac detailov slúži nasledovná literatúra [8], [17], [18] a [23].

Definícia 6.1 (**Homogenizačná algebra**)**.** Homogenizačnou algebrou na $\mathbb{R}^N$ rozumieme uzavretú subalgebru $A \subset BC(\mathbb{R}^N)$, ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti.

(i) A so suprémovou normou je separabilná 2.28.

(ii) A obsahuje konštantné funkcie.

(iii) $A \subset \Pi^\infty$.

Poznámka 6.2. Homogenizačnú algebru budeme stručne označovať ako H-algebra.

6.1. Takmer periodická H-algebra

V tejto časti predstavíme typické príklady H-algebier na $\mathbb{R}^N$, ktorými sú takmer periodické algebry. Pripomenieme, že takmer periodickou funkciou sa rozumie funkcia $u(y) \in \Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$, ktorej translácie

$$\left\{\tau_a u(y) : \tau_a u(y) = (y - a), \quad \forall a, y \in \mathbb{R}^N\right\}$$

tvoria relatívne kompaktnú množinu v priestore $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Priestor týchto funkcii nesie označenie $AP(\mathbb{R}^N)$ a je to Banachov priestor spolu so suprémovou normou. Priestor $AP(\mathbb{R}^N)$ je teda uzavretá subalgebra $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$, ktorá spĺňa skoro všetky predpoklady z definície homogenizačnej algebry (viď. 6.1) okrem prvého - tj. $AP(\mathbb{R}^N)$ nie je separabilný priestor.
Homogenizačnú algebru získame tým, že sa obmedzíme len na špecifické subalgebry, ktoré získame nasledovným spôsobom. Vyberieme spočitateľnú množinu kladných takmer periodických funkcii a najmenšia subalgebra obsahujúca tieto funkcie bude separabilnou subalgebrou v $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$, ktorá je homogenizačnou algebrou.

Definícia 6.3 (**Spektrum funkcie**)**.** Nech $u \in AP(\mathbb{R}^N)$. Spektrum funkcie u definujeme nasledovným vzťahom

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{k \in \mathbb{R}^N : M(\overline{\gamma_k} u) \neq 0\right\},$$

kde γ_k je definovaná vzťahom 5.1.
Potom $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset \Leftrightarrow u = 0 \in \mathbb{R}^N$. (Výrazom $u = 0$ chápeme, že u je nulová funkcia.)

Príklad 6.4. Nech R je spočítateľná podgrupa v $\mathbb{R}^N$. Položme

$$AP_R(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in AP(\mathbb{R}^N) : \mathrm{Sp}(u) \subset R\right\}.$$

Potom platí, že $AP_R(\mathbb{R}^N)$ je uzavretá subalgebra v $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$.

6.2. Príklady

V tejto sekcii uvedieme ešte ďalšie príklady H-algebier.

Príklad 6.5. Nech S je sieť (viď. 2.33) v $\mathbb{R}^N$. Ďalej nech

$$P_S(\mathbb{R}^N) = \left\{\psi \in C(\mathbb{R}^N) : \psi \text{ je } S\text{-periodická}\right\}.$$

S-periodicitou funkcie ψ chápeme, že pre každé $k \in S$ platí

$$\psi(y) = \psi(y+k) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Potom priestor $P_S(\mathbb{R}^N)$ je H-algebrou na $\mathbb{R}^N$.

Príklad 6.6. Ako sme spomínali, priestor $AP(\mathbb{R}^N)$ je H-algebrou na $\mathbb{R}^N$. V konkrétnom prípade, ak R je sieť v $\mathbb{R}^N$, potom platí

$$AP_R(\mathbb{R}^N) = P_{\tilde{R}}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\tilde{R} = \left\{k \in \mathbb{R}^N : k \cdot y \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in R\right\}$.

Príklad 6.7. Nech

$$B_\infty(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in C(\mathbb{R}^N) : \lim_{|y|\to\infty} u(y) = \zeta(u) \in \mathbb{R}\right\}.$$

Potom $B_\infty(\mathbb{R}^N)$ je H-algebra.

Príklad 6.8. Nech R je spočítateľná podgrupa v $\mathbb{R}^N$.
Definujme $B_{\infty,R}$ ako uzáver v $B(\mathbb{R}^N)$ priestoru všetkých konečných súm $\sum \varphi_i u_i$, kde $\varphi_i \in B_\infty$ a $u_i \in AP_R$.
Potom priestor $B_{\infty,R}$ je H-algebrou na $\mathbb{R}^N$.

6.3. Spektrum Banachovej algebry

Definíciu spojitého lineárneho funkcionálu sme prebrali v definícii 4.14. Zadefinujme si teraz multiplikatívny funkcionál, ktorý slúži na zavedenie pojmu spektra Banachovej algebry.

Definícia 6.9 (Multiplikatívny funkcionál). Spojitý lineárny funkcionál $s : A \to \mathbb{R}$ sa nazýva multiplikatívny, ak naviac platí

$$s(uv) = s(u)s(v) \quad \forall u, v \in A.$$

Poznámka 6.10. Lineárny funkcionál s sa nazýva *triviálny* alebo *nulový*, ak platí

$$s(u) = 0 \quad \forall u \in A.$$

V opačnom prípade sa funkcionál s nazýva *netriviálny*.

Definícia 6.11 (Spektrum Banachovej algebry). Spektrum Banachovej algebry A budeme označovať $\triangle(A)$ a rozumieme tým množinu všetkých netriviálnych multiplikatívnych lineárnych funkcionálov s na A.

6.4. Gelfandova reprezentácia

Definícia 6.12 (Gelfandova reprezentácia). Gelfandova reprezentácia $\mathcal{G}$ zobrazuje algebru A na priestor spojitých funkcii na spektre algebry $\triangle(A)$

$$\mathcal{G} : A \to C\left(\triangle(A)\right).$$

Pre funkciu $u \in A$ platí

$$\mathcal{G} : u \in A \mapsto \mathcal{G}(u) \in C\left(\triangle(A)\right) \qquad \text{kde} \qquad \mathcal{G}(u)(s) = s(u) \quad \forall s \in \triangle(A).$$

Poznámka 6.13. Pre Gelfandovu reprezentáciu $\mathcal{G}$ platia nasledovné tvrdenia.

- $\mathcal{G}$ zachováva normu, tj. $\|\mathcal{G}(u)\|_{C(\triangle(A))} = \|u\|_A$.
- $\mathcal{G}$ je izometrický izomorfizmus medzi A a $C\left(\triangle(A)\right)$, tj. bijekcia zachovávajúca operácie a príslušné normy.

Pomocou Gelfandovej reprezentácie $\mathcal{G}$ a lineárneho funkcionálu M môžme vytvoriť diferenciálne a integrálne štruktúry na spektre Banachovej algebry $\triangle(A)$, ktoré sú analógiou štruktúr na $\mathbb{R}^N$.

Operátor strednej hodnoty M, resp. lineárny funkcionál

$$M : \Pi^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

indukuje mieru na spektre $\triangle(A)$, ktorú označíme β.

Definícia 6.14 (Radonová miera). Miera β sa nazýva Radonová na Hausdorffovom priestore K (viď. 2.35) (spolu so σ-algebrou Borelovských množín), ktorá je

(i) konečná na všetkých kompaktných množinách,

(ii) vonkajšia regulárna, ak pre každú Borelovskú množinu A sa $\beta(A)$ definuje ako infimum $\beta(B)$ cez všetky otvorené množiny B obsahujúce A,

(iii) vnútorná regulárna, ak pre ľubovoľnú otvorenú množinu je $\beta(A)$ suprémum $\beta(B)$ nad všetkými kompaktnými podmnožinami B množiny A.

Tieto tri podmienky zaručujú, že Radonová miera β je kompatibilná s inými mierami. Mnoho mier, ako napríklad Lebesgueova alebo Diracova, sú vlastne Radonové miery.

Veta 6.15. *Existuje jednoznačná Radonová miera β na spektre $\triangle(A)$ tak, že $\forall u \in A$ platí*

$$M(u) = \int_{\triangle(A)} \mathcal{G}(u)(s) \mathrm{d}\beta(s).$$

Dôkaz vety nájdete napríklad v [17].

Poznámka 6.16. Miera β vyjadruje mieru zodpovedajúcej množiny závislých bodov v $\mathbb{R}^N$. V prípade algebry Y-periodických spojitých funkcii, spektrum algebry $\triangle(A)$ môže byť vyjadrené Y periódou a mierou β, ktorá je vlastne Lebesgueova miera na Y. Pre operátor strednej hodnoty M funkcie u platí vzťah

$$M(u) = \int_Y u(y) \mathrm{d}y.$$

Dôsledok 6.17. Nech $p \in (0, \infty)$. Pre $u \in A$ a pre $|u|^p \in A$ platí

(i) $\mathcal{G}(|u|^p) = |\mathcal{G}(u)|^p$,

(ii) $M(|u|^p) = \int_{\triangle(A)} |\mathcal{G}(u)(s)|^p \, \mathrm{d}\beta(s)$.

Teraz prejdeme k ďalšej časti týkajúcej sa priestorov, ktoré sú v istom zmysle spojené s homogenizačnou algebrou.
Medzi základné priestory spojené s H-algebrou patria

- $\mathcal{X}_A^p(\mathbb{R}^N)$ - tzv. Lebesgueove priestory,
- $W_\sharp^{k,p}(\triangle(A))$ - tzv. Sobolevove priestory.

6.5. Priestor $\mathcal{X}_A^p(\mathbb{R}^N)$

Informácie v tejto podkapitole týkajúcej sa Lebesgueových priestorov na spektre algebry pochádzajú z [17], [18] a [19].

Definícia 6.18. Nech $p \in \langle 1, \infty)$, potom Ξ_p je priestor všetkých funkcii $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Priestor $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ označuje priestor lokálne integrovateľných funkcii s p-tou mocninou.

Definícia 6.19. Norma na priestore Ξ_p je daná vzťahom

$$\|u\|_{\Xi_p} = \sup_{\varepsilon \in \langle 0,1 \rangle} \left(\int_{\mathcal{B}^N} \left| u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \forall u \in \Xi_p,$$

kde $\mathcal{B}^N$ označuje jednotkovú guľu v $\mathbb{R}^N$.

Poznámka 6.20. Priestor Ξ_p spolu s normou $\|\cdot\|_{\Xi_p}$ tvorí Banachov priestor. Taktiež množina $\mathcal{X}_A^p(\mathbb{R}^N)$ spolu s normou $\|\cdot\|_{\Xi_p}$ tvorí Banachov priestor.

Definícia 6.21. Priestor $\mathcal{X}_A^p(\mathbb{R}^N)$ označuje uzáver H-algebry A v priestore Ξ_p.

Tvrdenie 6.22. Gelfandova transformácia $\mathcal{G} : A \to C(\triangle(A))$ sa spojito rozširuje na spojité lineárne zobrazenie $\mathcal{G} : \mathcal{X}_A^p \to L^p(\triangle(A))$.

Poznámka 6.23. Obor hodnôt priestoru $\mathcal{X}_A^p$ v $\mathcal{G}$ definuje Lebesgueov priestor $L^p(\triangle(A))$ spolu s normou

$$\|\psi\|_{L^p(\triangle(A))} = \left(\int_{\triangle(A)} |\psi(s)|^p \, \mathrm{d}\beta(s) \right)^{\frac{1}{p}} \equiv \left(M(\mathcal{G}^{-1}(|\psi|^p)) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zobrazeniu $\mathcal{G} : \mathcal{X}_A^p \to L^p(\triangle(A))$ sa vraví aj tzv. kanonické.

Dôsledok 6.24. Nech pre p, q platí $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$.
Ak $u \in \mathcal{X}^p, v \in \mathcal{X}^q$, potom

(i) $uv \in \mathcal{X}^r$,

(ii) $\mathcal{G}(uv) = \mathcal{G}(u)\,\mathcal{G}(v)$.

Dôsledok 6.25. Nasledujúce tvrdenia sú pravdivé.

(i) Ak $u \in \mathcal{X}^p$, potom $\bar{u} \in \mathcal{X}^q$ a $\mathcal{G}(\bar{u}) = \overline{\mathcal{G}(u)}$.

(ii) Ak $u \in \mathcal{X}^p$, potom $|u|^p \in \mathcal{X}^1$ a $\mathcal{G}(|u|^p) = |\mathcal{G}(u)|^p$.

(iii) Ak $\varphi \in A$ a $u \in \mathcal{X}^p$, potom $\varphi u \in \mathcal{X}^p$ a $\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(\varphi u)$.

(iv) Ak $u \in \mathcal{X}^1$ a $u \geq 0$, potom $\mathcal{G}(u) \geq 0$.

(v) Ak $u \in \mathcal{X}^1 \cap L^\infty$, potom $\mathcal{G}(u) \in L^\infty(\triangle(A))$ a $\|\mathcal{G}(u)\|_{\infty(\triangle(A))} < \|u\|_\infty$.

6.6. Sobolevov priestor $W^{1,2}_\sharp(\triangle(A))$

Nech A je homogenizačná algebra na $\mathbb{R}^N$. Cieľom tejto podkapitoly bude zovšeobecnenie Sobolevovho priestoru na spektre algebry. Na to aby sme vedeli tento Sobolevov priestor na $\triangle(A)$ definovať, je potrebné si predstaviť pojem parciálnej derivácie na $\triangle(A)$. Budeme pracovať s nasledovným konceptom. Informácie pochádzajú z [17], [18] a [19].

Pre $k \geq 1$ položme

$$A^k = \left\{\psi \in A \cap C^k(\mathbb{R}^N) : D^\alpha \psi \in A \text{ pre } |\alpha| \leq k\right\}, \tag{6.1}$$

kde

$$D^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}\psi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}.$$

Ďalej definujeme normu funkcie $\psi \in A^k$ nasledovne

$$\|\psi\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \psi\|_\infty.$$

Naviac platí, že A^k spolu s normou $\|\cdot\|_k$ tvorí Banachov priestor.

Poznámka 6.26. Priestor A^1 definujeme ako

$$A^1 = \left\{u \in A \,:\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \in A\right\}.$$

Naviac platí

$$A^\infty = \bigcap_{k \geq 1} A^k$$

Definícia 6.27. Zadefinujme si pre $1 \leq k \in \mathbb{N}$ nasledovné priestory

$$\mathcal{D}(\triangle(A)) = \left\{\varphi \in C(\triangle(A)) \,:\, \mathcal{G}^{-1}(\varphi) \in A^\infty\right\}, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{D}^k(\triangle(A)) = \left\{\varphi \in C(\triangle(A)) \,:\, \mathcal{G}^{-1}(\varphi) \in A^k\right\}.$$

Priestor $\mathcal{D}(\triangle(A))$ sa nazýva obor hodnôt priestoru A^∞ v Gelfandovom zobrazení $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{D}(\triangle(A)) = \mathcal{G}(A^\infty)$. Priestor $\mathcal{D}^1(\triangle(A))$ sa nazýva obor hodnôt priestoru A^1 v Gelfandovom zobrazení $\mathcal{G}$. Norma na A^1 indukuje normu na priestore $\mathcal{D}^1(\triangle(A))$.
Analogické vzťahy platia aj pre vyšší stupeň $k = 2, 3, \dots$.

Teraz môžme pristúpiť k zadefinovaniu pojmu parciálnej derivácie.

Definícia 6.28. Zobrazenie $\partial_i : \mathcal{D}^1(\triangle(A)) \to C(\triangle(A))$ sa nazýva parciálna derivácia podľa indexu i, $i \in \langle 1, N \rangle$, na $\triangle(A)$. Platí pre to vzťah

$$\partial_i = \mathcal{G} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \mathcal{G}^{-1}.$$

Operácia $\circ$ označuje klasickú operáciu skladania.
Vzťah $\partial_i \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} \in C(\triangle(A))$ sa nazýva parciálna derivácia podľa indexu i funkcie $\varphi \in \mathcal{D}^1(\triangle(A))$. Platí pre to vzťah

$$\partial_i \varphi = \mathcal{G}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{G}^{-1}(\varphi)\right)\right).$$

Poznámka 6.29. $\mathcal{D}^k(\triangle(A)), k \geq 1$ spolu s normou

$$\|\varphi\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

tvorí Banachov priestor.

Veta 6.30. *Nech $\varphi \in \mathcal{D}^k(\triangle(A))$, $k \geq 1$. Pre každý multi-index α, $1 \leq |\alpha| \leq k$, platí*

$$\int_{\triangle(A)} \partial^\alpha \varphi(s) \, \mathrm{d}\beta(s) = 0,$$

kde

$$\partial^\alpha = \mathcal{G} \circ D^\alpha \circ \mathcal{G}^{-1}$$

je parciálna derivácia podľa indexu α.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnej definícii Sobolevovho priestoru na $\triangle(A)$.

Definícia 6.31. Pre $k = 1$ a $p = 2$ definujme

$$W^{1,2}(\triangle(A)) \equiv H^1(\triangle(A)) = \left\{u \in L^2(\triangle(A)) : \partial_i u \in L^2(\triangle(A)), i = 1, \ldots, N\right\}, \tag{6.3}$$

ktorý nazveme Sobolevov priestor $W^{1,2}(\triangle(A))$ na spektre Banachovej algebry $\triangle(A)$.

Spolu s normou funkcie u, ktorá je nasledovná

$$\|u\|_{W^{1,2}(\triangle(A))} = \left(\|u\|^2_{L^2(\triangle(A))} + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2_{L^2(\triangle(A))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

tvorí $W^{1,2}(\triangle(A))$ Hilbertov priestor.

Poznámka 6.32. Častejšie využitie v praxi má však priestor $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$, ktorý je podpriestorom $W^{1,2}(\triangle(A)$. Definujeme ho nasledovným spôsobom

$$W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C} = \left\{u \in W^{1,2}(\triangle(A)) : \int_{\triangle(A)} u \, \mathrm{d}\beta = 0\right\}$$

Norma na $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$ sa definuje vzťahom

$$\|u\|_{W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}} = \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2_{L^2(\triangle(A))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Poznámka 6.33. Vo všeobecnosti však platí, že $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$ z topologického hľadiska nie je tzv. oddeliteľný (z angl. *separated*, resp. že $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$ nie je Hausdorffov). To nás vedie k tomu, aby sme zaviedli oddeliteľné doplnenie $W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))$ priestoru $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$
.

Ďalej si zadefinujme lineárne zobrazenie $\mathcal{I}$ dané vzťahom

$$\mathcal{I} : W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C} \to W_\sharp^{1,2}(\triangle(A)), \tag{6.4}$$

pre ktoré naviac platí

(i) $\mathcal{I}(W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C})$ je hustý v $W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))$.

(ii) $\|\mathcal{I}(u)\|_{W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))} = \|u\|_{W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}} \qquad \forall u \in W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$.

Poznamenajme, že $W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))$ je Banachovým priestorom.

Veta 6.34. *Nech pre každý index i považujme ∂_i ako zobrazenie $W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}$ do priestoru $L^2(\triangle(A))$. Potom existuje jediné spojité lineárne zobrazenie tiež označené ako ∂_i priestoru $W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))$ do priestoru $L^2(\triangle(A))$ tak, že platí*

$$\partial_i \mathcal{I}(v) = \partial_i v \qquad \forall v \in W^{1,2}(\triangle(A))/\mathbb{C}.$$

Naviac platí

$$\|u\|_{W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\triangle(A))} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in W_\sharp^{1,2}(\triangle(A)).$$

7. Štrukturálna reprezentácia a homogenizačná štruktúra

V neperiodickej homogenizácii nám štrukturálna reprezentácia značí základnú množinu koeficientov modelujúcich štruktúru materiálu, ktorá sa má homogenizovať. Označujeme ju symbolom Γ. Homogenizačná štruktúra, ktorú označujeme Σ vyjadruje triedu štrukturálnych reprezentácii, ktoré generujú ten istý lineárny podpriestor v $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$. Poznamenajme, že priestor $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$ je priestor všetkých reálnych ohraničených a spojitých funkcii, ktoré majú strednú hodnotu, viď. definícia 5.2. Namiesto homogenizačnej štruktúry budeme v texte písať skrátene H-štruktúra.
Označme si

- $\mathcal{HS}$– súhrn všetkých homogenizačných štruktúr,
- $\mathcal{HA}$– súhrn všetkých homogenizačných algebier.

Našim cieľom v tejto kapitole bude nájsť vzájomnú bijekciu medzi $\mathcal{HS}$ a $\mathcal{HA}$.
Informácie, ktoré sú obsahom kapitoly sú z [17], [18] a [19].

Definícia 7.1 (**Štrukturálna reprezentácia**). Pojmom štrukturálna reprezentácia chápeme množinu $\Gamma \subset \Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$, ktorá spĺňa nasledovné.

(i) Γ je spočítateľná množina.

(ii) Γ je grupa (multiplikatívna) nezáporných funkcii na $\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teraz zadefinujme binárnu reláciu $\sim$ v množine všetkých štruktúrálnych reprezentácii nasledovne

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \Leftrightarrow \text{span}(\Gamma_1) = \text{span}(\Gamma_2),$$

kde span(Γ_1) označuje uzavretý vektorový podpriestor, tzv. *lineárny obal* pre ktorý platí

$$\text{span}(\Gamma_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}^N, \gamma_i \in \Gamma_1 \right\}.$$

Analogicky to platí aj pre span(Γ_2).

Definícia 7.2 (**Homogenizačná štruktúra**). Každá trieda ekvivalencie modulo $\sim$ sa nazýva homogenizačná štruktúra v $\mathbb{R}^N$.

Poznámka 7.3. Ak Σ je H-štruktúra, potom pod Σ chápeme akéhokoľvek zástupcu triedy ekvivalencie $\Gamma \in \Sigma$. Pre každú štrukturálnu reprezentáciu Γ existuje práve jedna H-štruktúra.

Definícia 7.4 (**Obor hodnôt**). Označením $\mathcal{J}(\Sigma)$ rozumieme obraz alebo obor hodnôt H-štruktúry Σ.

Veta 7.5. *Pre každú $\Sigma \in \mathcal{HS}$ nech $\mathcal{J}(\Sigma) = span(\Gamma)$, kde Γ je štrukturálna reprezentácia H-štruktúry Σ. Potom*

(i) $\mathcal{J}(\Sigma)$ je H-algebra závislá iba na Σ.

(ii) Zobrazenie $\Sigma \to \mathcal{J}(\Sigma)$ je bijekcia z $\mathcal{HS}$ na $\mathcal{HA}$.

Dôkaz k vete môžete nájsť napríklad v [17].

7.1. Príklady homogenizačných štruktúr

Príklad 7.6. (*Triviálna H-štruktúra:* Σ_0)
Nech Γ je množina všetkých konštantných zobrazení

$$\gamma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}.$$

Množina Γ je štrukturálna reprezentácia na $\mathbb{R}^N$. Triviálnou H-štruktúrou na $\mathbb{R}^N$ sa rozumie H-štruktúra Σ_0 na $\mathbb{R}^N$ reprezentovaná množinou Γ.
Platí, že

$$\mathcal{J}(\Sigma_0) = \mathbb{C}.$$

Príklad 7.7. (*Periodická H-štruktúra:* Σ_R)
Nech R je sieť v $\mathbb{R}^N$. Množina Γ je reprezentovaná nasledovne

$$\Gamma = \left\{\gamma_k, k \in R, \gamma_k = e^{2i\pi ky}, y \in \mathbb{R}^N\right\}.$$

Množina Γ je štrukturálna reprezentácia na $\mathbb{R}^N$. H-štruktúru na $\mathbb{R}^N$ reprezentovanú množinou Γ označujeme ako Σ_R.
Platí, že

$$\mathcal{J}(\Sigma_R) = P_{\tilde{R}}(\mathbb{R}^N),$$

kde (viď. príklad 6.6)

$$\tilde{R} = \left\{k \in \mathbb{R}^N : k \cdot y \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in R\right\}.$$

Príklad 7.8. (*Takmer periodická H-štruktúra:* Σ_R)
Nech R je spočítateľná podgrupa $\mathbb{R}^N$. Množina $\Gamma : \{\gamma_k, k \in R\}$ je štrukturálna reprezentácia na $\mathbb{R}^N$. Definujme Σ_R ako jedinú H-štruktúru na $\mathbb{R}^N$, kde Γ je jej reprezentácia. Potom Σ_R označuje takmer periodické H-štruktúry na $\mathbb{R}^N$ reprezentované množinou Γ.
Platí, že

$$\mathcal{J}(\Sigma_R) = AP_R(\mathbb{R}^N),$$

kde $AP_R(\mathbb{R}^N)$ (viď. príklad 6.4) je daná vzťahom

$$AP_R(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in AP(\mathbb{R}^N) : \mathrm{Sp}(u) \subset R\right\}.$$

Príklad 7.9. (*H-štruktúra:* Σ_∞)
Jedná sa o H-štruktúru konvergencie v ∞, ktorej obor hodnôt je H-algebra $B_\infty(\mathbb{R}^N)$, viď. príklad 6.7.
Platí, že

$$\mathcal{J}(\Sigma_\infty) = B_\infty(\mathbb{R}^N).$$

Príklad 7.10. (*H-štruktúra:* $\Sigma_{\infty,R}$)
Nech R je spočítaleľná podgrupa $\mathbb{R}^N$. Definujeme $\Sigma_{\infty,R}$ ako H-štruktúru, ktorej obor hodnôt je H-algebra $B_{\infty,R}(\mathbb{R}^N)$, viď. príklad 6.8.
Platí, že

$$\mathcal{J}(\Sigma_{\infty,R}) = B_{\infty,R}(\mathbb{R}^N).$$

7.2. Porovnávanie H-štruktúr

V tejto kapitole sa budeme venovať porovnávaniu H-štruktúr na $\mathbb{R}^N$.

V množine všetkých H-štruktúr $\mathcal{HS}$ uvažujme binárnu reláciu $\preceq$ definovanú ako

$$\Sigma_1 \preceq \Sigma_2 \Longleftrightarrow \mathcal{J}(\Sigma_1) \subset \mathcal{J}(\Sigma_2).$$

Poznamenajme, že $\mathcal{J}(\Sigma)$ sa nazýva obor hodnôt homogenizačnej štruktúry Σ, viď. definícia 7.4.
Relácia $\preceq$ nám vyjadruje usporiadanie v $\mathcal{HS}$. Poznamenajme, že na základe vety 7.5 platí vzťah

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 \Longleftrightarrow \mathcal{J}(\Sigma_1) = \mathcal{J}(\Sigma_2).$$

Ďalej pre jednoduchosť si označme (využijeme pri tom skutočnosť, že $\mathcal{J}(\Sigma)$ je homogenizačná algebra, tj. položíme $\mathcal{J}(\Sigma)$ rovné A, kde A je algebra)

$$\mathcal{X}^p_A(\mathbb{R}^N) \equiv \mathcal{X}^p_A = \mathcal{X}^p_{\mathcal{J}(\Sigma)}(\mathbb{R}^N) \equiv \mathcal{X}^p_{\mathcal{J}(\Sigma)} \qquad \forall \Sigma \in \mathcal{HS},\, 1 \le p < \infty.$$

Poznámka 7.11. Priestor $\mathcal{X}^p_A(\mathbb{R}^N)$ definujeme ako uzáver homogenizačnej algebry A v priestore všetkých funkcii, ktoré sú lokálne integrovateľné. Podrobnosťami sme sa zaoberali v kapitole 6, konkrétne v sekcii 6.5.

Zhrnieme si teraz jednotilivé vlastnosti porovnávania.

(i) Pre každú H-štruktúru Σ platí: $\Sigma_0 \preceq \Sigma$, kde Σ_0 je triviálna štruktúra.

(ii) $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2 \Rightarrow \mathcal{X}^p_{\mathcal{J}(\Sigma_1)} \subset \mathcal{X}^p_{\mathcal{J}(\Sigma_2)}$, $1 \le p < \infty$.

(iii) $R_1 \subset R_2 \Rightarrow \Sigma_{R_1} \preceq \Sigma_{R_2}$, kde R_1, R_2 sú definované ako v príklade 7.8 a Σ_{R_1}, Σ_{R_2} sú takmer periodické H-štruktúry (viď. príklad 7.8).

7.3. Súčin H-štruktúr

Nech $k \in \mathbb{N}$ a $\{N_j\}$ je konečná množina kladných celých čísel, kde $j \in \langle 1, k\rangle$.
Ďalej nech $N = N_1 + \cdots + N_k$ tak, že platí

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_k}.$$

Poznamenajme, že znakom $\times$ rozumieme klasický Kartézsky súčin a N je označenie dimenzie.

Veta 7.12. *Uvažujme množinu $\{\Sigma_j\}$, kde Σ_j je H-štruktúra na $\mathbb{R}^{N_j}$ a $j \in \langle 1, k\rangle$. Potom tu existuje práve jedna H-štruktúra Σ na $\mathbb{R}^N$, ktorá spĺňa nasledovnú vlastnosť.*
Ak Γ_j je reprezentácia Σ_j, potom Γ je taktiež jedna reprezentácia Σ, ktorá je daná vzťahom

$$\Gamma = \bigodot_{j=1}^{k} \Gamma_j.$$

Dôkaz k vete môžete nájsť napríklad v [17].

Označením $\bigodot$ rozumieme nasledovné

$$\bigodot_{j=1}^{k} \Gamma_j = \left\{ \gamma : \gamma = \otimes_{j=1}^{k} \gamma_j,\, \gamma_j \in \Gamma_j \subset \Pi^{\infty}(\mathbb{R}^{N_j}) \right\},$$

kde $\otimes$ značí tenzorový súčin.

Definícia 7.13. Súčin H-štruktúr Σ_j sa označuje symbolom $\prod_{j=1}^{k} \Sigma_j$ a platí vzťah

$$\prod_{j=1}^{k} \Sigma_j = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_k = \Sigma.$$

Veta 7.14. *Uvažujme množinu* $\{\Sigma_j\}$*, kde* Σ_j *je* H*-štruktúra na* $\mathbb{R}^{N_j}$ *a* $j \in \langle 1, k \rangle$*. Potom* $\otimes_{j=1}^{k} \mathcal{J}(\Sigma_j)$ *je hustá v* $\mathcal{J}(\prod_{j=1}^{k} \Sigma_j)$*.*

Dôkaz možno nájsť v [17].

Uvažujme pre $j \in \langle 1, k \rangle$ nasledovné

- Σ je H-štruktúra na $\mathbb{R}^N$,
- Σ_j je H-štruktúra na $\mathbb{R}^{N_j}$,
- platí $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_k$, viď. definícia 7.13,
- $A = \mathcal{J}(\Sigma)$, viď. veta 7.5,
- $A_j = \mathcal{J}(\Sigma_j)$, viď. veta 7.5,

Potom na základe viet a tvrdení, ktoré možno nájsť v [17] a [18] sa dá dokázať, že platí rovnosť

$$\triangle(A) = \triangle(A_1) \times \cdots \times \triangle(A_k).$$

Označením $\triangle(A_j)$ rozumieme spektrum Banachovej algebry (resp. homogenizačnej algebry) A_j.

Príklad 7.15. (*Súčin takmer periodických* H*-štruktúr*).
Nech Σ_{R_j} je takmer periodická H-štruktúra na $\mathbb{R}^{N_j}$ reprezentovaná R_j (viď. príklad 7.8), $j \in \langle 1, k \rangle$ a nech $\Sigma_{R_1 \times \cdots \times R_k}$ je takmer periodická H-štruktúra na $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_k}$ reprezentovaná súčinom $R_1 \times \cdots \times R_k$. Potom platí

$$\Sigma_{R_1 \times \cdots \times R_k} = \Sigma_{R_1} \times \cdots \times \Sigma_{R_k}.$$

7.4. Súčet H-štruktúr

Označme $\{\Sigma_j\}$ konečnú množinu H-štruktúr na $\mathbb{R}^N$, kde $j \in \langle 1, k\rangle$. Ďalej pre $\forall j$ platí $A_j = \mathcal{J}(\Sigma_j)$. Označme ďalej $A_1 + \cdots + A_k$ priestor všetkých konečných súm $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j$, $\varphi_j \in A_j$.

Definícia 7.16. Množina $\{\Sigma_j\}$ je sumovateľná ak vektorový priestor $A_1 + \cdots + A_k$ je stabilný pri bodovom násobení.

Veta 7.17. *Nech platí, že množina $\{\Sigma_j\}$ je sumovateľná a ďalej predpokladajme, že A je uzáver $A_1 + \cdots + A_k$ v $B(\mathbb{R}^N)$. Potom A je H-algebra na $\mathbb{R}^N$.*

Definícia 7.18. H-štruktúru Σ, pre ktorú platí: $\mathcal{J}(\Sigma) = A$ nazveme sumou $\{\Sigma_j\}$ a značíme to ako

$$\Sigma = \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_k.$$

Definícia 7.19. Nech $A_1/\mathbb{C} = \{\psi \in A_1 : M(\psi) = 0\}$. Potom predpokladajme nasledovné.

(i) $A_1/\mathbb{C}$ je stabilný pri bodovom násobení.

(ii) Ak $\varphi \in A_1/\mathbb{C}$ a $\psi \in A_2$, potom $\varphi\psi \in A_1/\mathbb{C}$.

(iii) $(A_1/\mathbb{C}) \cap A_2 = \{0\}$.

Tvrdenie 7.20. Nech platia predpoklady z definície 7.19. Potom množina $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ je sumovateľná.

Tvrdenie 7.21. Nech Σ_R a Σ_∞ sú H-štruktúry. Potom dvojica $\{\Sigma_R, \Sigma_\infty\}$ je sumovateľná a platí:

$$\Sigma_\infty + \Sigma_R = \Sigma_{\infty,R}.$$

8. Σ - konvergencia

V tejto kapitole budeme analyzovať druh konvergencie, ktorý je typický pre neperiodickú homogenizáciu. Bude sa to týkať konceptu Σ-konvergencie, ktorá je zovšeobecnením dvojškálovej konvergencie. V texte budeme ďalej predpokladať, že A je homogenizačná algebra generovaná homogenizačnou štruktúrou Σ. Pre viac informácii slúži napríklad [10], [11], [17], [18] a [19].

8.1. Úvod

Nech Ω je oblasť v $\mathbb{R}^N$ s lipschitzovskou hranicou $\partial\Omega$. Pripomenieme si, že klasická Gelfandova reprezentácia $\mathcal{G}$ zobrazuje algebru A na priestor $C\triangle(A)$, tj.

$$\mathcal{G} : A \to C\triangle(A).$$

Inými slovami, je to zobrazenie z priestoru funkcii na $\mathbb{R}^N$ na funkcie na $\triangle(A)$.

Túto Gelfandovu reprezentáciu $\mathcal{G}$ rozšírime na zobrazenie $\mathcal{G}_\Omega$. Toto zobrazenie konvertuje funkciu $u(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ na funkciu $\hat{u}(x,s) \in \Omega \times \triangle(A)$, tj.

$$\mathcal{G}_\Omega : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \Omega \times \triangle(A).$$

Tým pádom, $\mathcal{G}_\Omega$ je spojité lineárne zobrazenie medzi nasledovnými priestormi:

$$\begin{aligned} L^p(\Omega, \mathcal{X}^p_\Sigma) &\to L^p(\Omega \times \triangle(A)), \\ L^p(\Omega, A) &\to L^p(\Omega \times \triangle(A)), \\ C(\overline{\Omega}, \mathcal{X}^p_\Sigma) &\to C(\overline{\Omega}, L^p(\triangle(A))), \\ C(\overline{\Omega}, A) &\to C(\overline{\Omega} \times \triangle(A)). \end{aligned}$$

8.2. Slabá Σ - konvergencia v $L^p, p \in \langle 1, \infty)$

Definícia 8.1. Postupnosť $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ slabo Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$ k funkcii $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$ ak je ohraničená v $L^p(\Omega)$ a pre $\varepsilon \to 0$ platí

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi^\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \to \iint_{\Omega\times\triangle(A)} u_0(x,s)\hat{\psi}(x,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\beta(s) \qquad \forall\psi \in L^q(\Omega, A), \tag{8.1}$$

kde

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p},$$
$$\psi^\varepsilon(x) = \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Funkciu u_0 nazveme slabou Σ - limitou postupnosti $\{u_\varepsilon\}$ a pre funkciu $\hat{\psi} \in L^q(\Omega, C(\triangle(A)))$ platí vzťah

$$\hat{\psi} = \mathcal{G}_\Omega(\psi), \qquad \text{resp. } \hat{\psi}(x) = \mathcal{G}(\psi(x)).$$

Tvrdenie 8.2. Nech $u \in L^p(\Omega, A)$. Potom postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ je slabo Σ - konvergujúca v $L^p(\Omega)$ k $\hat{u}$, ktoré je dané vzťahom

$$\hat{u} = \mathcal{G} \circ u.$$

Tvrdenie 8.3. Predpokladajme postupnosť $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ slabo Σ - konvergujúcu v $L^p(\Omega)$ k funkcii $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$. Potom $u_\varepsilon \to \tilde{u_0}$ v $L^p(\Omega)$ slabo, kde

$$\tilde{u_0} = \int_{\triangle(A)} u_0(x,s)\mathrm{d}\beta(s) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Toto tvdenie nám dáva do súvislosti slabú Σ - konvergenciu a (štandardnú) slabú konvergenciu v $L^p(\Omega)$.

Predtým, než prejdem k nasledovnej vete, položme pre $r \in \langle 1, \infty)$

$$\mathcal{X}_A^{r,\infty} = \mathcal{X}_A^r \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Tento priestor spolu s L^∞ normou tvorí Banachov priestor. V nasledujúcej časti by sme radi ukázali, že ak postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ slabo Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$ k u_0 v $L^p(\Omega \times \triangle(A))$, potom vzťah 8.1 platí pre všetky funkcie $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathcal{X}_A^{q,\infty})$.

Veta 8.4. *Nech $p \in (1, \infty)$. Predpokladajme postupnosť $\{u_\varepsilon\} \in L^p(\Omega)$ slabo Σ - konvergujúcu v $L^p(\Omega)$ k funkcii $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$. Potom rovnica 8.1 platí pre $\forall \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathcal{X}_A^{q,\infty})$.*

Dôkaz možno nájsť v [19].

Dôsledok 8.5. Pre $u \in C(\overline{\Omega}, \mathcal{X}_A^{p,\infty})$ postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ slabo Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$ k funkcii $\hat{u}$.

Teraz môžme prejsť z základnej vete, ktorá sa týka kompaktnosti a vďaka ktorej musíme predpokladať, že homogenizačná algebra je separabilná.

Veta 8.6. *Každá postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ ohraničená v $L^p(\Omega)$ obsahuje podpostupnosť $\{u_{\varepsilon^*}\}$, ktorá slabo Σ - konverguje k limite $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$.*

Dôkaz možno nájsť v [19].

8.3. Silná Σ - konvergencia v $L^p, p \in \langle 1, \infty)$

Definícia 8.7. Postupnosť $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$, silne Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$ k funkcii $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$ ak

$$\forall \eta > 0, \forall \psi \in L^p(\Omega, A) : \|u_0 - \hat{\psi}\|_{L^p(\Omega \times \triangle(A))} \leq \frac{\eta}{2} \Rightarrow \exists \alpha > 0 : \|u_\varepsilon - \psi^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta \text{ pri } \varepsilon \leq \alpha. \tag{8.2}$$

Príklad 8.8. Nech $u \in L^p(\Omega, A)$, potom $u_\varepsilon \to \hat{u}$ v $L^p(\Omega)$ silne Σ.

Tvrdenie 8.9. Nech $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$. Ak $u_\varepsilon \to u$ v $L^p(\Omega)$ silne, potom $u_\varepsilon \to u$ v $L^p(\Omega)$ silne Σ.

Poznámka 8.10. Silná Σ - konvergencia v $L^p(\Omega)$ nie je nutne silne konvergentná v $L^p(\Omega)$.

Tvrdenie 8.11. Ak postupnosť $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ silne Σ - konverguje k u_0, potom u_0 je určená jednoznačne.

Veta 8.12. *Pre každú funkciu $\Phi \in L^p(\Omega, A)$ platí*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\Phi^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|\hat{\Phi}\|_{L^p(\Omega \times \triangle(A))}.$$

Príklad 8.13. Nech $u \in L^p(\Omega, A)$, potom $\{u_\varepsilon\}$ silne Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$ k $\hat{u}$. Pre každú funkciu $\psi \in L^p(\Omega, A)$ a pre $\varepsilon \to 0$ platí

$$\|u_\varepsilon - \psi^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \to \|\hat{u} - \hat{\psi}\|_{L^p(\Omega \times \triangle(A))}.$$

Veta 8.14. *Predpokladajme postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ silne Σ - konvergujúcu v $L^p(\Omega)$ k $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$. Potom pre $\varepsilon \to 0$ platí*

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ *v* $L^p(\Omega)$ *slabo* Σ.

(ii) $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \to \|u_0\|_{L^p(\Omega \times \triangle(A))}$.

Uvedieme teraz dôsledok vety pre $p = 2$.

Dôsledok 8.15. Majme postupnosť $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$. Táto postupnosť silne Σ - konverguje v $L^2(\Omega)$ k $u_0 \in L^2(\Omega \times \triangle(A))$ ak platia nasledovné dve (nutné a postačujúce) podmienky.

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ v $L^2(\Omega)$ slabo Σ.

(ii) $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|u_0\|_{L^2(\Omega \times \triangle(A))}$.

Veta 8.16. *Nech $\{u_\varepsilon\}$ je postupnosť v $L^p(\Omega)$ a $\{v_\varepsilon\}$ je postupnosť v $L^q(\Omega)$, ktoré spĺňajú nasledovné*

(i) $\{u_\varepsilon\}$ *slabo* Σ *- konverguje k limite* $u_0 \in L^p(\Omega \times \triangle(A))$,

(ii) $\{v_\varepsilon\}$ *silno* Σ *- konverguje k limite* $v_0 \in L^q(\Omega \times \triangle(A))$.

Potom súčin $\{u_\varepsilon v_\varepsilon\}$ slabo Σ - konverguje k limite $u_0 v_0 \in L^r(\Omega \times \triangle(A))$, kde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1.$$

Dôsledok 8.17. Nech $\{u_\varepsilon\}$ je postupnosť v $L^p(\Omega)$ a $\{v_\varepsilon\}$ je postupnosť v $L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, ktoré spĺňajú nasledovné

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ v $L^p(\Omega)$ slabo Σ,

(ii) $v_\varepsilon \to v_0$ v $L^q(\Omega)$ silne Σ,

(iii) $\{v_\varepsilon\}$ je ohraničená v $L^\infty(\Omega)$.

Potom $u_\varepsilon v_\varepsilon \to u_0 v_0$ v $L^p(\Omega)$ slabo Σ.

Veta 8.18. *Ak postupnosť $\{u_\varepsilon\}$ silne konverguje v $L^p(\Omega)$, potom $\{u_\varepsilon\}$ silne Σ - konverguje v $L^p(\Omega)$.*

Poznámka 8.19. Predošlá veta nám ukazuje, že silná Σ konvergencia je zovšeobecnenie klasickej silnej konvergencie.

Dôkazy k predošlým vetám a tvrdeniam možno nájsť v [17] a [19].

Zhrnutie
V tejto časti zhrnieme dôležité tvrdenia týkajúce sa slabej a silnej Σ - konvergencie.

(i) Tvrdenie 8.3: Ak postupnosť slabo Σ - konverguje, potom postupnosť slabo konverguje.

(ii) Tvrdenie 8.9: Ak postupnosť silne konverguje, potom postupnosť silne Σ - konverguje.

(iii) Veta 8.14: Ak postupnosť silne Σ - konverguje, potom postupnosť slabo Σ - konverguje.

Na základe týchto tvrdení platí nasledovná schéma konvergencii:

$$\text{silne} \Rightarrow \text{silne } \Sigma \Rightarrow \text{slabo } \Sigma \Rightarrow \text{slabo.}$$

8.4. Vlastné H-štruktúry

Ako neskôr uvidíme, uplatnenie homogenizačných štruktúr PDR je založené práve na tomto koncepte vlastných H-štrukúr. Označením Σ rozumieme homogenizačnú štruktúru na $\mathbb{R}^N$ s algebrou $A = \mathcal{J}(\Sigma)$, kde $\mathcal{J}(\Sigma)$ je obor hodnôt Σ (viď. definícia 7.4).

Definícia 8.20. Povieme, že H-štruktúra Σ je **triedy** C^∞ ak A^∞ je hustá v A.
Poznamenajme, že platí vzťah

$$A^\infty = \bigcap_{k\geq 1} A^k, \qquad \text{kde } A^k \text{ je dané vzťahom 6.1.}$$

Definícia 8.21. Povieme, že H-štruktúra Σ je **úplna** ak priestor $\mathcal{D}(\triangle(A))$ je hustý v priestore $W^{1,2}(\triangle(A))$.
Pripomeňme, že pre obor hodnôt priestoru A^∞ v zobrazení $\mathcal{G}$ platí vzťah (viď. 6.2)

$$\mathcal{D}(\triangle(A)) = \left\{\varphi \in C(\triangle(A)) : \mathcal{G}^{-1}(\varphi) \in A^\infty\right\}.$$

Označením $W^{1,2}(\triangle(A))$ rozumieme Sobolevov priestor na spektre Banachovej algebry daný vzťahom 6.3.

Poznámka 8.22. Uvedieme zopár poznámok týkajúcich sa homogenizačných štruktúr triedy C^∞.
Medzi príklady H-štruktúr triedy C^∞ patria všetky H-štruktúry zo sekcie 7.1.
Nech $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ (resp. $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$) kde Σ_j je H-štruktúra triedy C^∞ v $\mathbb{R}^{N_j}$, kde $N = N_1 + N_2$. Potom Σ je triedy C^∞.

Poznamenajme, že pre zobrazenie $\mathcal{I}$ platí (viď. 6.4)

$$\mathcal{I} : W^{1,2}(\triangle(A)/\mathbb{C}) \to W^{1,2}_\sharp(\triangle(A)).$$

Tvrdenie 8.23. Predpokladajme, že Σ je vlastná. Potom (na základe 6.30, 6.4 a 6.34) platia nasledovné tvrdenia.

(i) $\mathcal{I}(\mathcal{D}(\triangle(A))/\mathbb{C})$ je husté v priestore $W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A))$, kde

$$\mathcal{D}(\triangle(A))/\mathbb{C} = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\triangle(A)) : \int_{\triangle(A)} \varphi \mathrm{d}\beta = 0 \right\}$$

(ii) $\int_{\triangle(A)} \partial_i u \mathrm{d}\beta = 0 \quad \forall u \in W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A))$.

Definícia 8.24 (Σ-reflexívny priestor). Sobolevov priestor $W^{1,2}(\Omega)$ je Σ-reflexívny ak z ohraničenej postupnosti z $W^{1,2}(\Omega)$ ide vybrať podpostupnosť $\{u_\varepsilon\}$ tak, že pre $\varepsilon \to 0$ platí

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ v $W^{1,2}(\Omega)$ slabo a

(ii) $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \to \frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \partial_j u_1$ v $L^2(\Omega)$ slabo Σ, kde $u_1 \in L^2(\Omega, W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A))$.

Definícia 8.25 (Vlastná H-štruktúra). Povieme, že H-štruktúra Σ je vlastná, ak platia nasledovné tri podmienky.

(i) Σ je triedy C^∞.

(ii) Σ je úplna.

(iii) $W^{1,2}(\Omega)$ je Σ-reflexívny $\quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Príklad 8.26. Každá takmer periodická H-štruktúra je vlastná. To isté platí aj pre periodické H-štruktúry.

Vlastné H-štruktúry majú veľkú úlohu práve pri neperiodickej homogenizácii PDR. Preto je potrebná základná veta 8.27 pomocou ktorej dokážeme zistiť, či istá H-štruktúra je vlastná. Na to, aby sme dokázali, že ak Σ_2 je vlastná, tak potom aj Σ je tiež vlastná sú potrebné dôležité tvrdenia a definície, ktoré možno nájsť v [17] a [19]. Kvôli prehľadnosti textu ich v práci neuvádzame.

Veta 8.27 (Základná veta). *Nech $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Predpokladajme, že Σ_2 je vlastná homogenizačná štruktúra, potom platí, že aj Σ je vlastná.*

Príklad 8.28. Homogenizačná štruktúra $\Sigma_{\infty,R}$ na $\mathbb{R}^N$ je vlastná. Označme si $\Sigma_1 = \Sigma_\infty$, $\Sigma_2 = \Sigma_R$ a $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_{\infty,R}$. Využili sme pri tom vlastnosť, že množina $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ je sumovateľná - viď. 7.21 . Ukáže sa [17], že Σ_2 je vlastná, z čoho hneď na základe predchádzajúcej vety vyplýva, že Σ je tiež vlastná homogenizačná štruktúra.

Príklad 8.29. Homogenizačná štruktúra Σ_∞ na $\mathbb{R}^N$ je vlastná. Označme si $\Sigma_1 = \Sigma_\infty$, $\Sigma_2 = \Sigma_0 = \Sigma_{R=O}$, kde O značí počiatok a $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_\infty$. Analogicky sa ukáže že Σ je vlastná homogenizačná štruktúra.

9. Aplikácia pri modelovaní materiálov s neperiodickou štruktúrou

9.1. Úvod

V kapitole 8. sme sa zaoberali konceptom Σ-konvergencie. V tejto kapitole budeme analyzovať túto konvergenciu z hľadiska výskytu v homogenizácii problémov popísaných PDR [17] a [19].
Špeciálne budeme uvažovať nasledovný okrajový problém pre eliptickú PDR (analogicky ako v periodickom prípade, viď.4.5)

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f(x) \quad \text{v} \quad \Omega$$

$$u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \tag{9.1}$$

Kde $\varepsilon > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, pričom koeficienty $a(x)$ spĺňajú taktiež podmienku elipticity (viď 4.4)

$$\sum_{i,j=1}^{N} a(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \qquad \forall x \in \Omega. \tag{9.2}$$

Pomocou abstraktnej vety Laxa-Milgrama 4.6 sa dá dokázať, že pre $\forall\varepsilon > 0$ máme jednoznačné riešenie $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, ktoré je ohraničené a nezávislé na ε. Cieľom periodickej homogenizácie je preskúmanie limitného správania postupnosti $\{u_\varepsilon\}$ pričom $\varepsilon \to 0$. Naviac požadujeme, aby koeficienty $a(x)$ splnili predpoklad periodicity (viď. 4.1).

Hypotéza samotnej periodicity nám však v mnohých prípadoch nestačí, resp. je nevhodná. Teória Σ-konvergencie sa javí ako efektívny nástroj, ktorý umožňuje riešiť problémy homogenizácie, pri ktorých sa predpokladá iná hypotéza než periodicita.
Nasleduje niekoľko príkladov kontétnych hypotéz, ktoré sú využiteľné v neperiodickej homogenizácii. Neskôr ukážeme, že v teórii neperiodickej homogenizácie požadujeme tzv. *abstraktnú hypotézu*, ktorá bude najobecnejším tvarom, a to aby koeficienty $a(x)$ patrili do Lebesguoeovho priestoru $\mathcal{X}_A^2(\mathbb{R}^N)$ (viď. sekcia 6.5), tj.

$$a(x) \in \mathcal{X}_A^2(\mathbb{R}^N). \tag{9.3}$$

9.2. Príklady

Príklad 9.1. Uvažujme základnú periódu $Y = (0,1)^N$. Ďalej nech $L^2_{per}(Y)$ značí Hilbertov priestor všetkých Y-periodických funkcii v $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Nech $B^\infty(\mathbb{R}, L^2_{per}(Y))$ označuje priestor všetkých spojitých funkcii $u \in B^\infty(\mathbb{R}, L^2_{per}(Y))$ tak, že $u(y_N)$ konverguje v $L^2_{per}(Y)$ pričom $|y_N| \to \infty$.
Potom predpoklad periodicity nahradíme nasledovne

$$a(x) \in B^\infty(\mathbb{R}, L^2_{per}(Y)). \tag{9.4}$$

Príklad 9.2. Nech $L^2_{AP}(\mathbb{R}^N)$ označuje priestor všetkých funkcii $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, ktoré sú takmer periodické.
Potom predpoklad takmer periodickej hypotézy je nasledovný

$$a(x) \in L^2_{AP}(\mathbb{R}^N). \tag{9.5}$$

Poznámka 9.3. Pre viac príkladov slúži napríklad [17],[18],[19].

9.3. Abstaktný homogenizovaný problém

V neperiodickej homogenizácii požaduje tzv. abstraktnú hypotézu, čo znamená, že chceme aby koeficienty ktoré sa majú homogenizovať patrili do Lebesgueovho priestoru $\mathcal{X}^2_A(\mathbb{R}^N)$ (viď. sekcia 6.5), tj.

$$a(x) \in \mathcal{X}^2_A(\mathbb{R}^N). \tag{9.6}$$

Za predpokladu tejto hypotézy chceme študovať správanie postupnosti $\{u_\varepsilon\}$, pričom $\varepsilon \to 0$.

V predchádzajúcom vzťahu nám A značí homogenizačnú algebru, pričom platí vzťah (viď. 7.4)

$$\mathcal{J}(\Sigma) = A,$$

kde Σ je vlastná homogenizačná štruktúra, tj. podľa definície 8.25 platia nasledovné tri podmienky

(i) Σ je triedy C^∞, tj. priestor A^∞ je hustý v A.

(ii) Σ je úplna, tj. $\mathcal{D}(\triangle(A))$ je hustý v $W^{1,2}(\triangle(A))$,

(iii) $W^{1,2}(\Omega)$ je Σ-reflexívny $\forall\Omega \in \mathbb{R}^N$, tj. z ohraničenej postupnosti z $W^{1,2}(\Omega)$ ide vybrať podpostupnosť $\{v_\varepsilon\}$ tak, že pre $\varepsilon \to 0$ platí

- $v_\varepsilon \to v_0$ v $W^{1,2}(\Omega)$ slabo a
- $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \to \frac{\partial v_0}{\partial x_j} + \partial_j v_1$ v $L^2(\Omega)$ slabo - Σ,

kde $v_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$, $v_1 \in L^2(\Omega, W^{1,2}_\sharp(\triangle(A)))$ a priestor $W^{1,2}_\sharp(\triangle(A))$ je definovaný v 6.33

Poznamenajme, že vo vzťahu

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \to \frac{\partial v_0}{\partial x_j} + \partial_j v_1$$

sa nachádzajú dve rozdielne značenia parciálnej derivácie.
Vzťah $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ znamená klasickú parciálnu deriváciu funkcie $v(x)$ podľa x_j a vzťah $\partial_j v \equiv \frac{\partial v}{\partial_{s_j}}$ znamená parciálnu deriváciu funkcie v podľa indexu j, tj. podľa 6.28 platí

$$\partial_j v = \mathcal{G}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{G}^{-1}(v)\right)\right).$$

Zadefinujme si teraz priestor

$$\mathbb{F}^1_0 = W^{1,2}_0(\Omega) \times L^2(\Omega, W^{1,2}_\sharp(\triangle(A)))$$

na ktorom je definovaná norma pre $\mathbf{v} = (v_0, v_1) \in \mathbb{F}_0^1$ tvaru

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{F}_0^1} = \left(\|v_0\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega, W_\sharp^{1,2}(\triangle(A)))} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{9.7}$$

Pre jednoduchosť si pre $j \in \langle 1, N \rangle$ zadefinujme vzťah

$$\mathbb{D}_j \mathbf{v} = \frac{\partial v_0}{\partial x_j} + \partial_j v_1$$

vďaka ktorému môžeme 9.7 prepísať na ekvivalentú formu (s použitím znalosti z tvrdenia 8.23)

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{F}_0^1} = \sum_{i=1}^{N} \left(\|\mathbb{D}_i \mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega \times \triangle(A))} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Analogický vzťah platí aj pre $\mathbf{u} = (u_0, u_1) \in \mathbb{F}_0^1$, kde $i \in \langle 1, N \rangle$

$$\mathbb{D}_i \mathbf{u} = \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \partial_i u_1 .$$

Zadefinujme si teraz bilineárnu formu $\hat{\mathcal{A}}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{F}_0^1 \times \mathbb{F}_0^1$ vzťahom

$$\hat{\mathcal{A}}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{N} \iint_{\Omega \times \triangle(A)} \hat{a}_{ij}(x, s) \mathbb{D}_i \mathbf{u}(x, s) \mathbb{D}_i \mathbf{v}(x, s) \mathrm{d}x \mathrm{d}\beta(s)$$

kde $\hat{a}_{ij} = \mathcal{G}(a_{ij}) \in L^\infty(\triangle(A))$ a spojitý funkcionál $b(\mathbf{v}) \in \mathbb{F}_0^1$ vzťahom

$$b(\mathbf{v}) = \langle f, v_0 \rangle .$$

Teraz môžme pristúpiť k slabej formulácii úlohy.

Veta 9.4. *Slabá formulácia úlohy: Hľadáme $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1) \in \mathbb{F}_0^1$ tak, že*

$$\hat{\mathcal{A}}_\Omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_0^1.$$

Pomocou vety 4.6 sa ukáže, že slabá formulácia má len jediné riešenie .

Veta 9.5. *Nech $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1) \in \mathbb{F}_0^1$ a ďalej nech pre každé $\varepsilon > 0$ je u_ε riešenie úlohy 9.1. Potom pre $\varepsilon \to 0$ platí*

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ *slabo v* $W_0^{1,2}(\Omega)$,

(ii) $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \to \mathbb{D}_i \boldsymbol{u}$ *slabo-*Σ *v* $L^2(\Omega)$.

Rovnako ako v periodickej homogenizácii, tak aj tu hľadáme funkcie $\omega^j \in W_\sharp^{1,2}(\triangle(A))$ také, že platí

$$\hat{\mathcal{A}}(\omega^j, v) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\triangle(A)} \hat{a}_{kj}(s) \partial_k v(s) \mathrm{d}\beta(s),$$

kde $\hat{\mathcal{A}}(u,v) \in W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A)) \times W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A))$ je bilineárna forma daná vzťahom

$$\hat{\mathcal{A}}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\triangle(A)} \hat{a}_{ij}(s)\partial_i u(s)\partial_j v(s)\mathrm{d}\beta(s) \qquad u,v \in W^{1,2}_{\sharp}(\triangle(A)).$$

Nakoniec homogenizované koeficienty b_{ij}, $i,j \in \langle 1, N\rangle$ sú dané vzťahom

$$b_{ij} = \int_{\triangle(A)} \hat{a}_{ij}(s)\mathrm{d}\beta(s) - \sum_{k=1}^{N} \int_{\triangle(A)} \hat{a}_{ik}(s)\partial_k \omega^j(s)\mathrm{d}\beta(s).$$

Tvrdenie 9.6. Limita $u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ zo vzťahu 9.5*(i)* je slabé riešenie nasledujúceho homogenizovaného problému s koeficientami b_{ij}

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_i} = f \quad \text{v} \quad \Omega$$

$$u_0 = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Poznámka 9.7. Všimnime si, že predchádzajúci vzťah je analogický ako v periodickom prípade, viď. vzťah 4.14. Ďalej platí, že ak predpokladáme symetrickosť nehomogenizovaných koeficientov a_{ij}, tj. že platí

$$a_{ij} = a_{ji}$$

tak aj homogenizované koeficienty b_{ij} budú symetrické (resp. matica koeficientov stupňa N bude symetrická). Naviac platí pre ne takisto podmienka elipticity 4.4.

Zhrnutie

Pomocou konceptu homogenizačných štruktúr môžme úlohu 9.1 homogenizovať za predpokladu rôznych hypotéz - sekcia 9.2, z ktorej najobecnejšou je nasledovná tzv. abstraktná hypotéza: požadujeme, aby koeficienty $a(x)$ patrili do priestoru $\mathcal{X}^2_A(\mathbb{R}^N)$. Proces spočíva v prevedení konkrétneho homogenizačného problému na abstraktný, preto je môžné využiť vetu 9.5. Teória Sigma konvergencie sa javý ako efektívny nástroj pre rozšírenie klasickej periodickej homogenizácie na neperiodickú. Princíp fungovania sme vysvetlili na jednoduchom modelovom príklade PDR, avšak teória neperiodickej homogenizácie má široké uplatnenie napríklad pri nelineárnych alebo evolučných rovniciach.

10. Záver

Predložená diplomová práca sa zaoberá Banachovými algebrami spolu s ich využitím v teórii homogenizácie. Cieľom práce bolo spísať základné definície a vlastnosti Banachových algebier, formuláciu Sigma konvergencie a jej aplikácie pri modelovaní kompozitných materiálov s neperiodickou štruktúrou. Pojmom homogenizácia rozumieme postup, pri ktorom ekvivalentne nahradíme heterogénny materiál (kompozit) homogénnym, ktorý má rovnaké makroskopické vlastnosti ako kompozit. Prvý matematický prístup je založený na myšlienke, že namiesto jedneho materiálu s periodickou štruktúrou sa študuje postupnosť materiálov so zjemňujúcou sa štruktúrou. Problémom klasickej (periodickej) homogenizácie je, že štruktúra skutočných materiálov je neperiodická. V dôsledku toho bol zavedený všeobecný prístup pre pracovanie s neperiodickými materiálmi. Je založený na koncepte, ktorý pracuje s tzv. spektrom Banachovej algebry a Sigma konvergenciou.
Druhá kapitola diplomovej práce sa zaoberá základnými definíciami a vetami, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšie kapitoly.
Kapitola tretia obsahuje základné definície a vlastnosti Banachových algebier a ich príklady, ktoré sú rozdelené na tri časti.
Štvrtá kapitola nesie názov Periodická homogenizácia. V úvode kapitoly sa nachádza formulácia úlohy, ktorá je popísaná PDR. Následne sme zadefinovali homogenizovaný problém, uviedli abstraktné Lema Laxa-Milgrama a pozreli sa bližšie na konkrétne ciele homogenizácie. Obsahom tejto kapitoly je aj asymptotický rozvoj, ktorým sme odovodili formulu pre výpočet homogenizovaných koeficientov spolu s jednoduchým ilustračným príkladom. V tejto kapitole sa nachádza aj časť týkajúca sa konvergencii, konkrétne slabá, silná a dvojškálová konvergencia.
Piata krátka kapitola sa týka úvodu do neperiodickej homogenizácie, kedy sa predpoklad periodicity nahradí spektrom algebry a dvojškálová konvergencia sa nahradí Sigma konvergenciou.
V nasledovnej šiestej kapitole sa zaoberáme už homogenizačnou algebrou, takmer periodickou homogenizačnou algebrou a príkladmi. V tejto časti sa venujeme najmä Gelfandovej reprezentácii a priestorom spojenými s homogenizačnou algebrou, konrétne Lebesgueovým a Sobolevovým priestorom na spektre algebry.
Siedma kapitola sa týka štrukturálnej reprezentácie, pomocou ktorej vieme reprezentovať množinu koeficientov, ktoré modelujú štruktúru materiálu. Nasledujú príklady homogenizačných štruktúr a operácie štruktúr (porovnávanie, súčin a súčet).
Vo ôsmej kapitole analyzujeme Sigmu konvergenciu, ktorá je zovšeobecnením klasickej silnej konvergencie pre neperiodickú homogenizáciu. Následne sme zadefinovali slabú a silnú sigma konvergenciu spolu s tzv. vlastnými homogenizačnými štruktúrami.
V poslednej deviatej kapitole aplikujeme túto Sigma konvergenciu pre materiály s neperiodickou štruktúrou na konkrétnej eliptickej PDR za predpokladu tzv. abstraktnej hypotézy.

Zoznam použitých skratiek a symbolov

$AP(\mathbb{R}^N)$	priestor všetkých takmer periodických funkcii na $\mathbb{R}^N$ - viď. 5.4
$B(\Omega)$	priestor ohraničených funkcii na Ω
$BC(\Omega)$	priestor ohraničených a spojitých funkcii na Ω
$\mathcal{B}(x_0, r)$	guľa so stredom v bode x_0 a polomerom r
$C(\Omega)$	priestor spojitých funkcii na oblasti Ω
$C^\infty(\Omega)$	priestor nekonečne diferencovateľných funkcii - viď. 2.57
$C_0^\infty(\Omega)$	priestor funkcii z $C^\infty(\Omega)$ ktoré majú kompaktný nosič - viď. 2.57
c_i	Fourierove koeficienty
$D^\alpha u$	klasická parciálna derivácia - viď. 2.71
$\mathcal{D}(\triangle(A))$	obor hodnôt priestoru A^∞ - viď. 6.2
e_i	bázové vektory
$\exp X$	množina všetkých podmnožín množiny X
$\mathcal{E}(\Omega)$	priestor hladkých funkcii na Ω - viď. 2.76
F	funkcionál
$\mathbb{F}$	pole skalárov, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alebo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
$\mathcal{G}$	Gelfandova reprezentácia - viď. 6.12
$G(A)$	množina všetkých invertibilných prvkov na A
$H^{k,p}(\Omega)$	Sobolevov priestor, platí $H^{k,p}(\Omega) \equiv W^{k,p}(\Omega)$ - viď. 2.77
I	ideál - viď. 3.33
$\mathcal{J}(\Sigma)$	obor hodnôt homogenizačnej štruktúry Σ - viď. 7.4
$L^p(\Omega)$	Lebesgueov priestor funkcii integrovateľných s p-tou mocninou - viď. 2.52
$l^p(\Omega)$	Lebesgueov priestor postupností absolútne sumovateľných s p-tou mocninou
$M(u)$	stredná hodnota funkcie u - viď. 5.1
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	množina štvorcových matíc stupňa n na priestore $\mathbb{C}$
$N^\circ, \partial N, \overline{N}$	vnútro, hranica a uzáver množiny N

$\mathcal{O}_{\varepsilon}(x)$	ε - okolie bodu x
$\mathcal{S}(x_0, r)$	sféra so stredom v bode x_0 a polomerom r
$T(\mathbb{R}^N)$	množina trigonometrických polynómov na $\mathbb{R}^N$
V	lineárny priestor
$V^\sharp$	algebraický duál - viď. 2.5
V^*	topologický duál - viď. 2.15
V^{**}	topologický druhý duál - viď.2.63
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolevov priestor - viď. 2.76
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Sobolevov priestor funkcii s nulovými stopami - viď. 2.76
$\mathcal{X}_A^p(\mathbb{R}^N)$	uzáver algebry v priestore Ξ_p - viď. 6.21
$\Pi^\infty(\mathbb{R}^N)$	priestor funkcii, ktoré majú strednú hodnotu - viď. 5.2
Ξ_p	priestor všetkých lokálne integrovateľných funkcii - viď. 6.18
$\Lambda(\Omega)$	množina všetkých Lebesgueovsky merateľných funkcii na Ω - viď. 2.51
$\triangle(A)$	spektrum Banachovej algebry A - viď. 6.11
$\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	škála
$\Vert f\Vert_p$	p-norma funkcie f - viď. 2.52
$\Vert u\Vert_{k,p}$	(k,p)-norma funkcie u - viď. 2.71
supp (f)	nosič funkcie f - viď. 2.56
$\mathrm{Sp}(u)$	spektrum funkcie u - viď. 6.3
$f * g$	konvolúcia funkcii f a g
α	multiindex v $\mathbb{R}^N$ - viď. 2.71
β	Radonová miera - viď. 6.14
τ_X	topológia na množine X - viď. 2.34
Γ	štrukturálna reprezentácia - viď. 7.1
Σ	homogenizačná štruktúra - viď. 7.2
Ω	oblasť v $\mathbb{R}^N$
$\sim$	relácia ekvivalencie
$\approx$	izometrický izomorfizmus

Literatúra

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier: Sobolev Spaces. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003. isbn: 0120441438.

[2] G. Allaire: Homogenization and two-scale convergence SIAM J. Math. Anal. 23.6 (1992), 1482-1518.

[3] F. Alouges: Introduction to Periodic Homogenization. Interdisciplinary Information Sciences. 22. (2016) 147-186.

[4] I. Babuška: Homogenization approach in engineering: Computing methods in applied sciences and engineering, Lecture notes in Econ. and Math. Systems 134, Springer, Berlin, 1976, 137-153.

[5] J. Brom: The theory of almost periodic functions in constructive mathematics. Pacific Journal of Mathematics 70.1 (1977), 67-81.

[6] D. Daners: Introduction to functional analysis. The University of Sydney (2008).

[7] O. Došlý: Lineární funkcionální analýza. Brno Masarykova univerzita (2015).

[8] J. Franců: Outline of Nguetseng's approach to non-periodic homogenization. Mathematics for Applications. 2. (2012) 117-128.

[9] J. Franců: Funkcionální analýza 1, FSI VUT (2014).

[10] J. Franců: O řešení problémů slabé konvergence. Kvaternion 1 (2013): 27-44.

[11] J. Franců: Od kompozitních materiálů ke slabé konvergenci. Kvaternion 2 (2012): 113-124.

[12] J. Franců: Homogenizace — matematická metoda výpočtu materiálů s periodickou strukturou, Stavebnícky časopis 31 (1983), 789–814.

[13] J. Franců: Moderní metody řešení diferenciálních rovnic, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2006.

[14] A. N. Kolmogorov, S. N Fomin: Introductory real analysis. Courier Corporation, 1975.

[15] A. Kufner, O. John, and S. Fučík. Function Spaces. Mechanics Series. Springer, 1977. isbn: 9789028600157.

[16] R. Larsen: Banach algebras: an introduction. New York: M. Dekker, (1973).

[17] G. Nguetseng: Homogenization Structures and Applications I. Z. Anal. Anwend. 22 (2003), 73-108.

[18] G. Nguetseng: Homogenization Structures and Applications II. Z. Anal. Anwend. 23 (2004), 482-508.

[19] G. Nguetseng, N. Svanstedt: Σ-convergence. Banach Journal of Mathematical Analysis - Banach J. Math. Anal. 5 (2011), 101-135.

[20] G. A. Pavliotis, a A. M. Stuart: An introduction to multiscale methods. Lecture Notes (2006).

[21] S. Petrakis : Introduction to Banach Algebras and the Gelfand-Naimark Theorems. (2010).

[22] G. Ramesh: Banach algebras. Israel J. Math, (2013), 144-160.

[23] L. Singing:Almost periodic homogenization of the Klein-Gordon type equation. Differential Equations and Applications (2009). 143-163.

[24] J. Spurný: Funkcionální analýza. (2020).

[25] W. Zelazko: Banach algebras. Elsevier, Amsterdam, (1973).