UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Diferenční rovnice a jejich aplikace

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracovala:
Jana Vařejčková
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 20. dubna 2013

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce panu doktoru Tomečkovi za čas, který mi věnoval a za velmi cenné rady a připomínky. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

V práci nazvané *Diferenční rovnice a jejich aplikace* přibližím základy diferenčního počtu. Aby čtenáři mohli snáze pochopit danou problematiku, uvedu diferenční rovnice od základních pojmů, které jsou doplněny ilustrativními příklady, až po jejich praktické využití v ekonomii. Daná práce je rozdělena do tří kapitol. První dvě kapitoly jsou věnovány matematické oblasti a poslední kapitola je věnována ekonomické interpretaci.

První kapitola je úplným základem diferenčního počtu. Jsou zde vysvětleny základní definice diference a sumace a jejich početní vlastnosti.

Druhá kapitola je věnována již samotným diferenčním rovnicím. Seznámíme se jak s rovnicemi prvního řádu, tak s rovnicemi vyšších řádů. Budeme se zabývat řešením homogenních rovnic i rovnic nehomogenních, přičemž nehomogenní rovnice jsou řešeny metodou variace konstant.

Myslím si, že pro můj studijní obor je nejvíce zajímavá poslední kapitola. Jedná se o aplikaci diferenčních rovnic v ekonomii. Konkrétně jsou zde uvedeny tři nejběžnější modely, na kterých jsou diferenční rovnice aplikovány. Vybrala jsem zástupce mikroekonomické i makroekonomické části. Konkrétně se jedná o pavučinový model, což je mikroekonomický model, a jako ukázku makroekonomického modelu jsem zvolila model národního důchodu a model otevřené ekonomiky.

Mojí snahou je zpracovat úvod diferenčních rovnic tak, aby byl pochopitelný jak pro studenty, tak i pro veřejnost. Příklady, které jsou součástí každé kapitoly, napomáhají čtenáři k snazšímu pochopení dané problematiky.

1. Diference a sumace

V této kapitole se seznámíme se základy diferenčního a sumačního počtu. Na rozdíl od diferenciálního a integrálního počtu, který má souvislost s problémy spojenými s veličinami závisejícími na spojitém parametru, souvisí diferenční počet s funkcemi, které jsou definované na diskrétní množině. Jedná se o analogii diferenciálního a integrálního počtu.

1.1. Diference funkce

Nyní se seznámíme se základními pojmy diferenčního počtu. Uvedeme si definici diference a některé její vlastnosti.
Uvažujme funkci, jejíž definiční obor je množina $M = \{x \in \mathbb{R}; x = x_0 + hn, n \in \mathbb{N}_0\}$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je tzv. počáteční bod a $h > 0$ je konstanta. Pak reálná funkce jedné proměnné, která je na takovéto množině M definovaná, má hodnoty $f(x) = f(x_0 + hn)$. Funkci f lze tedy chápat jako posloupnost čísel $y_n = f(x_0 + hn)$.

Definice 1. (diference funkce) Je dána reálná funkce $y = f(x)$ a je dána konstanta $h > 0$. Potom definujeme diferenci funkce f v bodě x

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Poznámka 1. Číslo h se nazývá diferenční krok a je rovno rozdílu dvou sousedních bodů. Znak "Δ" čteme "diference".

Jsou-li hodnoty $\Delta f(x)$ definovány ve všech bodech x z jisté množiny M, pak $f(x)$ určuje funkci definovanou na M, kterou značíme Δf, resp. Δy a nazýváme diferencí funkce f na množině M.

Příklad 1. *Vypočítejte* $\Delta f(x)$ *v bodě* 4 *pro* $h = 2$, *je-li* $f(x) = x^2$.
Řešení: $\Delta f(4) = f(4 + 2) - f(4) = 6^2 - 4^2 = 20.$

V následujícím textu se omezíme na diference s krokem $h = 1$. Množina M tedy bude ve tvaru

$$M = \{x \in \mathbb{R}; x = x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

a diferenci budeme uvažovat ve tvaru

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x), \qquad x \in M.$$

Definice 2. (diference vyšších řádů) Diferenci k-tého řádu (zkráceně k-tou diferenci) funkce $y(x), x \in M$ definujeme rekurentním vzorcem

$$\Delta^k y(x) = \Delta(\Delta^{k-1} y(x)),$$

kde

$$\Delta^1 y(x) = \Delta y(x).$$

Diferenci vyššího řádu je možné získat nejen počítáním diferencí řádů nižších, ale lze ji též vypočítat přímo z hodnot funkce. K tomu slouží *funkční vzorec pro k-tou diferenci*, který je uveden v následující větě.

Věta 1. *Nechť funkce $y(x)$ je definována na M. Potom*

$$\Delta^k y(x) = \binom{k}{0} y(x+k) - \binom{k}{1} y(x+k-1) + ... + (-1)^k \binom{k}{k} y(x).$$

Abychom mohli s diferencemi počítat, uvedeme si v následující větě některé základní početní vlastnosti.

Věta 2. *Nechť jsou na množině M definovány první diference $\Delta y(x)$,$\Delta z(x)$. Platí vztahy:*

a) $\Delta[y(x) \pm z(x)] = \Delta y(x) \pm \Delta z(x)$,

b) $\Delta[y(x)z(x)] = z(x+1)\Delta y(x) + y(x)\Delta z(x)$,

c) $\Delta[Cy(x)] = C\Delta y(x)$, *kde C je libovolná konstanta,*

d) $\Delta \frac{y(x)}{z(x)} = \frac{z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)}{z(x)z(x+1)}$.

Důkaz:

a) Diferenci součtu/rozdílu dokážeme následovně:

$$\Delta[y(x) \pm z(x)] = [y(x+1) \pm z(x+1)] - [y(x) \pm z(x)] = [y(x+1) - y(x)] \pm$$

$$\pm [z(x+1) - z(x)] = \Delta y(x) \pm \Delta z(x).$$

b) Obdobně dokážeme vztah pro diferenci součinu $y(x)$ a $z(x)$:

$$\Delta[y(x)z(x)] = y(x+1)z(x+1) - y(x)z(x) = y(x+1)z(x+1) - y(x)z(x) -$$

$$-y(x)z(x+1) + y(x)z(x+1) = z(x+1)(y(x+1) - y(x)) + y(x)(z(x+1) - z(x)) =$$

$$= z(x+1)\Delta y(x) + y(x)\Delta z(x).$$

c) K vytknutí multiplikační konstanty před diferenci lze dojít následovně:

$$\Delta[Cy(x)] = Cy(x+1) - Cy(x) = C[y(x+1) - y(x)] = C\Delta y(x).$$

d) Pro diferenci podílu funkcí $y(x)$ a $z(x)$, kde $z(x) \neq 0$ platí:

$$\Delta \frac{y(x)}{z(x)} = \Delta \frac{1}{z(x)} y(x) = \frac{1}{z(x+1)} \Delta y(x) + y(x) \Delta \frac{1}{z(x)} = \frac{\Delta y(x)}{z(x+1)} +$$

$$+ y(x) \frac{z(x) - z(x+1)}{z(x+1)z(x)} = \frac{\Delta y(x)}{z(x+1)} - \frac{y(x)\Delta z(x)}{z(x)z(x+1)} = \frac{z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)}{z(x)z(x+1)}.$$

Příklad 2. *Vypočítejte* $\Delta\left[(x+2) \cdot 3^x\right]$.

Řešení: Tento příklad můžeme vypočítat dvěma způsoby - podle definice 1 nebo podle věty 2. Ukážeme si oba případy.

a) Podle definice

$$\Delta\left[(x+2) \cdot 3^x\right] = (x+3) \cdot 3^{x+1} - (x+2) \cdot 3^x = 3^x \cdot (3x + 9 - x - 2) = 3^x \cdot (2x+7).$$

b) Podle věty

$$\Delta\left[(x+2) \cdot 3^x\right] = 3^{x+1}\Delta(x+2) + (x+2)\Delta 3^x = 3^{x+1} \cdot (x+3-x-2) + (x+2) \cdot (3^{x+1} - 3^x) =$$

$$= 3^{x+1} + x \cdot 3^{x+1} - x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 3^x \cdot (3 + 3x - x + 6 - 2) = 3^x \cdot (2x+7).$$

1.2. Sumace funkce

Sumace je inverzní proces k nalezení diference funkce, tzn. hledáme takovou funkci $Y(x)$, jejíž diference je rovna funkci $y(x)$.

Definice 3. Je-li $Y(x)$ funkce, která pro $\forall x \in M$ splňuje vztah

$$\Delta Y(x) = y(x),$$

kde $y(x)$ je daná funkce, pak funkci $Y(x)$ nazýváme *neurčitou sumací funkce* $y(x)$ a symbolicky značíme $\Delta^{-1}y(x)$. Na uvedené množině M tedy platí ekvivalence

$$\Delta Y(x) = y(x) \Leftrightarrow Y(x) = \Delta^{-1}y(x).$$

Stejně jako u diference si v následující větě uvedeme některé základní vlastnosti sumace.

Věta 3. 1. *Jsou-li $U(x)$, $V(x)$ dvě neurčité sumace téže funkce $y(x)$, tj. je-li $U(x) = \Delta^{-1}y(x)$, $V(x) = \Delta^{-1}y(x)$, pak nutně platí*

$$U(x) - V(x) = p(x) \qquad \forall x \in M,$$

kde $p(x)$ je libovolná jednotková periodická funkce, tj. platí $p(x+1) = p(x)$ pro $\forall x \in M$.

2. *Je-li $Y(x) = \Delta^{-1}y(x)$, $U(x) = \Delta^{-1}u(x)$ a jsou-li C_1 a C_2 libovolné konstanty, pak je*

$$\Delta^{-1}(C_1 y(x) + C_2 u(x)) = C_1\Delta^{-1}y(x) + C_2\Delta^{-1}u(x) = C_1 Y(x) + C_2 U(x).$$

3. *Nechť $y_k = y_k(x)$ je daná funkce a C_k jsou libovolné konstanty. Potom obecně platí*

$$\Delta^{-1}\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \Delta^{-1} y_k(x).$$

Uveďme si tvary některých sumací (a, C jsou konstanty a $k \in \mathbb{N}_0$):

a) $\Delta^{-1}1 = x + C$.

b) $\Delta^{-1}a = ax + C$.

c) $\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{a-1} + C, \quad a \neq 1$.

d) $\Delta^{-1}x^k = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$.

e) $\Delta^{-1}\cos(ax) = \frac{\sin(ax-\frac{a}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C$.

Příklad 3. *Vypočítejte* $\Delta^{-1}8 \cdot 3^x$.

Řešení: $\Delta^{-1}8 \cdot 3^x = 8 \cdot \Delta^{-1}3^x = 8\frac{3^x}{3-1} = 8 \cdot \frac{3^x}{2} + C = 4 \cdot 3^x + C$.

Poznámka 2. *Vyšší neurčitá sumace* se definuje vztahem $\Delta^{-k}y(x) = \Delta^{-1}(\Delta^{1-k}y(x))$.

Zdroje této kapitoly: [1], [2] a [3].

2. Diferenční rovnice

Pomocí diferenčních rovnic je možné nalézt vztah mezi hledanou funkcí a jejími diferencemi. V této kapitole nejprve uvedeme diferenční rovnice I. a II. typu a poté postupně probereme jednotlivé typy. Zaměříme se na diferenční rovnice lineární, a to na rovnice prvního řádu i řádů vyšších.

Definice 4. (diferenční rovnice I. typu) Nechť je f funkce $(k+1)$ proměnných, pak rovnici tvaru

$$f(x, y(x), \Delta y(x), ..., \Delta^{k-1} y(x)) = 0, \quad x \in M$$

nazýváme diferenční rovnicí k-tého řádu typu I.

Partikulárním řešením této rovnice na množině M je každá funkce y, která danou rovnici splňuje pro $\forall x \in M$.
Obecným řešením rovnice nazýváme vzorec, který obsahuje všechna možná partikulární řešení.

Definice 5. (diferenční rovnice II. typu) Nechť je g funkce $(k+1)$ proměnných. Rovnici tvaru

$$g(x, y(x), y(x+1), \ldots, y(x+k-1)) = 0, \quad x \in M$$

nazýváme diferenční rovnici k-tého řádu typu II.

Partikulárním řešením rovnice nazýváme každou posloupnost $y(x)$, jejíž všechny členy splňují danou rovnici.
Obecným řešením rovnice nazýváme vzorec, který obsahuje všechna možná partikulární řešení.

Vidíme, že diferenční rovnice II. typu jsou ekvivalentní s rovnicemi I. typu. Jedná se pouze o tvar bez diferencí. Opakovaným použitím diference je možné diference vyšších řádů přepsat do tvaru, který již diference neobsahuje, ale obsahuje pouze členy dané posloupnosti.

Příklad 4. *Převeďte rovnici* $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) = x$ *na rovnici II. typu.*
Řešení: Vztahy $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ a $\Delta^2 y(x) = y(x+2) - 2y(x+1) + y(x)$ dosadíme do zadané rovnice a dostaneme:

$$y(x+2) - 2y(x+1) + y(x) - 2\left[y(x+1) - y(x)\right] = x.$$

Hledaný tvar je:

$$y(x+2) - 4y(x+1) - y(x) = x.$$

Poznámka 3. V této práci se budeme zabývat diferenčními rovnicemi II. typu.

2.1. Lineární diferenční rovnice prvního řádu

V této podkapitole budeme pracovat s lineárními diferenčními rovnicemi prvního řádu. Následující definice udává, jaký mají tyto rovnice tvar.

Definice 6. Nechť jsou dány funkce $a(x)$ a $g(x)$ definované na množině M. Předpokládáme, že $a(x) \neq 0$ pro $\forall x \in M$. Pak nazveme diferenční rovnici

$$y(x+1) - a(x)y(x) = g(x) \tag{1}$$

lineární diferenční rovnicí prvního řádu na M. Je-li pro každé $x \in M$ funkce $g(x) = 0$, nazývá se diferenční rovnice (1) *homogenní diferenční rovnice.* V opačném případě hovoříme o *nehomogenní diferenční rovnici.*

Protože lze řešení těchto rovnic vyvodit z řešení rovnic vyšších řádů (které budeme podrobněji probírat v kapitole 2.2), uvedeme zde pouze speciální typ rovnic s konstantní a nekonstantní pravou stranou.

a) Rovnice s konstantní pravou stranou

Zde budeme řešit diferenční rovnice s konstantními koeficienty a konstantní pravou stranou B, kterou můžeme psát ve tvaru

$$y(x+1) = Ay(x) + B,$$

kde $A \neq 0, B$ jsou dané konstanty, $x = x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0$.

Nejprve uvažujme, že $A \neq 1$. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = CA^{x-x_0} + \frac{B}{1-A}.$$

Je-li navíc dána počáteční podmínka $y(x_0) = Y$, vypočteme z obecného řešení konstantu C:

$$C = Y - \frac{B}{1-A}.$$

Pak je partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = \left(Y - \frac{B}{1-A}\right) A^{x-x_0} + \frac{B}{1-A}, \quad x \in M.$$

Nyní uvažujme $A = 1$. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = C + Bx, \quad x \in M.$$

Je-li navíc dána počáteční podmínka $y(x_0) = Y$, vypočteme z obecného řešení konstantu C

$$C = Y - Bx_0.$$

Pak je partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = B(x - x_0) + Y.$$

b) Rovnice s nekonstantní pravou stranou

Rovnice s konstantními koeficienty a nekonstantní pravou stranou $B(x)$ budeme psát ve tvaru

$$y(x+1) = Ay(x) + B(x),$$

kde $A \neq 0$ a $x = x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí metody variace konstant dostaneme pro funkci $C(x)$ rovnici

$$\Delta C(x) = \frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}.$$

Sumací vypočteme funkci $C(x) = \Delta^{-1}(\frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}) + k$, kde k je konstanta.
Obecné řešení je tedy

$$y(x) = A^{x-x_0}\left[\Delta^{-1}\left(\frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}\right) + k\right].$$

Příklad 5. *Pastevec má stádo* 20 *ovcí, které se každý rok zvětšuje o* 8%. *Určete, kolik ovcí bude mít pastevec za* 10 *let.*
Řešení: Sestavíme diferenční rovnici

$$y(x+1) - y(x) = 0,08y(x)$$

a stanovíme si počáteční podmínky

$$y(0) = 20 = Y, \quad y(x+1) = 1,08y(x), \quad n = 10.$$

Rovnici můžeme psát ve tvaru

$$y(x+1) = Ay(x) + B,$$

kde

$$A = 1,08$$
$$B = 0$$
$$C = Y - \frac{B}{1-A} = 20 - \frac{0}{1-1,08} = 20.$$

Určíme partikulární řešení

$$y(x) = \left(Y - \frac{B}{1-A}\right)A^n + \frac{B}{1-A} = \left(20 - \frac{0}{1-1,08}\right)1,08^{10} + \frac{0}{1-1,08} =$$

$$= 20 \cdot 1,08^{10} \approx 43.$$

2.2. Lineární diferenční rovnice k-tého řádu

Zde se budeme zabývat lineárními diferenčními rovnicemi vyšších řádů. Probereme postupně homogenní i nehomogenní diferenční rovnice - uvedeme si jejich definice, významné vlastnosti a postup řešení.

Definice 7. *Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu* nazýváme rovnici tvaru

$$y(x+k) + a_1(x)y(x+k-1) + \ldots + a_k(x)y(x) = f(x), \tag{2}$$

kde $a_k(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in M$.

Jsou-li $a_1(x), \ldots, a_k(x)$ konstantní, nazýváme tuto rovnici lineární diferenční rovnicí s konstantními koeficienty a označíme $a_1(x) = a_1, \ldots, a_k(x) = a_k$.
Je-li $f(x) = 0$, pro $\forall x \in M$, nazýváme rovnici (2) *homogenní* nebo též *zkrácená rovnice.*
Je-li $f(x) \neq 0$, pro nějaké $x \in M$, nazýváme rovnici (2) *nehomogenní* nebo též *nezkrácená rovnice.*

Obecné řešení lineární diferenční rovnice má tvar

$$y(x) = Y(x) + Z(x),$$

kde $Y(x)$ je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a $Z(x)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice, tzv. partikulární řešení.

Příklad 6. *Ověřte, že posloupnost $y(x) = \frac{x(x-1)}{2} + C$ je pro libovolné $C \in \mathbb{R}$ řešením rovnice $y(x+1) - y(x) = x$.*
Řešení: Rovnici přepíšeme do výhodnějšího tvaru

$$y(x+1) = y(x) + x$$

Určíme $(x+1)$-ní člen posloupnosti

$$y(x+1) = \frac{(x+1)(x+1-1)}{2} + C = \frac{(x+1)x}{2} + C$$

a dosadíme do dané rovnice

$$\frac{(x+1)x}{2} + C = \frac{x(x-1)}{2} + C + x.$$

Výpočtem dostaneme rovnici

$$\frac{x^2+x}{2} + C = \frac{x^2+x}{2} + C,$$

která platí pro libovolné $x \in M$. Posloupnost je tedy řešením.

Homogenní diferenční rovnice k-tého řádu

Tato část bude zaměřena na homogenní diferenční rovnice k-tého řádu, tedy na rovnice tvaru

$$y(x+k) + a_1(x)y(x+k-1) + \ldots + a_k(x)y(x) = 0, \quad \forall x \in M. \tag{3}$$

Aby bylo možné určit obecné řešení homogenní rovnice, musíme nejprve vysvětlit pojmy týkající se lineární nezávislosti funkcí. Proto si uvedeme následující dvě definice.

Definice 8. Řekneme, že funkce $y_1, y_2, \ldots, y_k$ jsou *lineárně nezávislé* na M, jestliže pro všechny $c_i, i = 1, \ldots, k$ platí

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x) = 0, \ \forall x \in M \quad \Leftrightarrow \quad c_i = 0 \quad \text{pro } \forall i = 1, \ldots, k.$$

Poznámka 4. Pokud by rovnost vlevo platila i v případě, že by jedna z konstant $c_i, i = 1, \ldots, k$ byla nenulová, řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ jsou *lineárně závislé.*

Definice 9. Množinu k lineárně nezávislých řešení rovnice (3) nazýváme *fundamentální množinou řešení.*

Příklad 7. *Určete, zda jsou funkce $5^x, x5^x$ a $x^2 5^x$ lineárně závislé nebo nezávislé na $\mathbb{N}_0$.*

Řešení: Funkce dosadíme do rovnice

$$c_1 5^x + c_2 x 5^x + c_3 x^2 5^x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Rovnici podělíme 5^x, čímž dostaneme

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Zvolíme $x = 0$, z čehož plyne, že $c_1 = 0$. Rovnici

$$c_2 x + c_3 x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

podělíme x, čímž dostaneme

$$c_2 + c_3 x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Opět zvolíme $x = 0$, a tedy získáme $c_2 = 0$ i $c_3 = 0$. Protože platí $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, jsou funkce lineárně nezávislé.

Určení lineární nezávislosti lze provést i jiným způsobem. Využijeme funkci $C(x)$, která se nazývá *casoratian* a je dána následujícím předpisem:

$$C(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) & \cdots & y_k(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x+k-1) & y_2(x+k-1) & \cdots & y_k(x+k-1) \end{pmatrix}$$

Věta 4. *Řešení $y_k(x)$ jsou lineárně nezávislá na množině M, jestliže existuje alespoň jedno $x \in M$ takové, že $C(x) \neq 0$.*

Příklad 8. *Najděte casoratian funkcí z příkladu 7 a zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé.*

Řešení:

$$C(x) = \det \begin{pmatrix} 5^x & x5^x & x^2 5^x \\ 5^{x+1} & (x+1)5^{x+1} & (x+1)^2 5^{x+1} \\ 5^{x+2} & (x+2)5^{x+2} & (x+2)^2 5^{x+2} \end{pmatrix}$$

$$= 5^x \begin{vmatrix} (x+1)5^{x+1} & (x+1)^2 5^{x+1} \\ (x+2)5^{x+2} & (x+2)^2 5^{x+2} \end{vmatrix} - x5^x \begin{vmatrix} 5^{x+1} & (x+1)^2 5^{x+1} \\ 5^{x+2} & (x+2)^2 5^{x+2} \end{vmatrix} +$$

$$+x^2 5^x \begin{vmatrix} 5^{x+1} & (x+1)5^{x+1} \\ 5^{x+2} & (x+2)5^{x+2} \end{vmatrix} = \ \dots \ = 2 \cdot 5^{3x+3}.$$

Abychom zjistili, zda jsou řešení $5^x, x5^x$ a $x^2 5^x$ lineárně nezávislá, stačí nalézt $x \in M$, pro které platí $C(x) \neq 0$. Zvolíme například $x = 0$:

$$C(0) = 2 \cdot 5^{3 \cdot 0+3} = 250 \neq 0.$$

Řešení $5^x, x5^x, x^2 5^x$ jsou lineárně nezávislá (tvoří fundamentální množinu řešení).

Obecné řešení homogenní diferenční rovnice je uvedeno v následující definici:

Definice 10. Nechť $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ je fundamentální množina řešení (3). Potom je obecné řešení dáno vztahem

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_k y_k(x) \qquad x \in M,$$

kde $c_i, i = 1, ..., k$ jsou libovolné konstanty.

Homogenní diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty

Řešení homogenní lineární diferenční rovnice k-tého řádu se velmi zjednoduší, jestliže uvažujeme, že má pouze konstantní koeficienty, tzn. že je ve tvaru

$$y(x+k) + a_1 y(x+k-1) + \dots + a_k y(x) = 0, \tag{4}$$

kde $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}, a_k \neq 0$.

Hledáme k lineárně nezávislých řešení rovnice (4) a to tak, že budeme uvažovat $y(x) = \lambda^x$, kde $\lambda \neq 0$ je konstanta a $x \in M$. Po dosazení do původní rovnice (4) dostaneme rovnici

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0,$$

kterou nazýváme *charakteristická rovnice* a její kořeny nazýváme charakteristické kořeny.

Ukážeme si následující situace:

a) Uvažujme, že všechny charakteristické kořeny $\lambda_1, ..., \lambda_k$ jsou *jednoduché*. V tomto případě tvoří fundamentální množinu řešení (4) funkce $\lambda_1^x, ..., \lambda_k^x$. Postačí ukázat, že $C(0) \neq 0$, kde $C(x)$ je casoratian.

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Tento determinant se nazývá Vandermodův determinant a platí

$$C(0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (\lambda_j - \lambda_k).$$

V tomto případě platí $C(0) \neq 0$ a proto je $\{\lambda_1^x, ..., \lambda_k^x\}$ fundamentální množinou řešení (4).
Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda_i^x, \quad \text{kde } p_i \in \mathbb{R}., i = 1, ..., k.$$

b) Nyní ukážeme hledání fundamentálního systému řešení, když jsou charakteristické kořeny $\lambda_1, ..., \lambda_r$ *násobné* s násobnostmi $m_1, ..., m_r$. Zavedeme operátor E, pro který platí vztah $Ey(x) = y(x+1)$, tzn. E každé funkci $y(x)$ definované na množině M přiřadí její hodnotu v bodě $x+1$. Rovnici (4) můžeme zapsat ve tvaru

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \ldots (E - \lambda_r)^{m_r} y(x) = 0. \tag{5}$$

Pokud je funkce $y(x)$ řešením homogenní diferenční rovnice m_i-tého řádu

$$(E - \lambda_i)^{m_i} y(x) = 0,$$

pak je řešením diferenční rovnice (4).

Věta 5. *Množina*

$$G_i = \left\{\lambda_i^x, x\lambda_i^x, x^2\lambda_i^x, ..., x^{m_i-1}\lambda_i^x\right\}$$

je fundamentální množinou řešení rovnice $(E-\lambda_i)^{m_i}y(x)=0$.

Obecné řešení rovnice (5), a tedy rovnice (4), je dáno vztahem

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^x (p_{i0} + p_{i1}x + p_{i2}x^2 + ... + p_{im_i-1}x^{m_i-1}).$$

c) Ve třetí situaci uvažujme, že jsou charakteristické kořeny *komplexní*. Pro připomenutí je algebraický tvar komplexního čísla ve tvaru $\alpha + i\beta$. Pro komplexní číslo užíváme tzv. goniometrické souřadnice, které jsou dány vztahy:

$$\alpha = r \ \cos \ \omega$$

$$\beta = r \ \sin \ \omega$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Věta 6. *Nechť má charakteristická rovnice imaginární kořeny* $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i \ \sin\omega)$*. Pak má příslušná homogenní diferenční rovnice tato lineárně nezávislá partikulární řešení*

$$y_1(x) = r^x \cos(\omega x),$$

$$y_2(x) = r^x \sin(\omega x).$$

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = r^x \left(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)\right).$$

d) Jako poslední si ukážeme situaci, kdy jsou komplexní charakteristické kořeny *násobné* s násobností m.

Věta 7. *Jsou-li komplexní kořeny* $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i \ \sin\omega)$ m*-násobné, pak má rovnice (4) tato lineárně nezávislá řešení*

$$\left\{r^x \cos(\omega x)\right\}, \left\{xr^x \cos(\omega x)\right\}, ..., \left\{x^{m-1}r^x \cos(\omega x)\right\},$$

$$\left\{r^x \sin(\omega x)\right\}, \left\{xr^x \sin(\omega x)\right\}, ..., \left\{x^{m-1}r^x \sin(\omega x)\right\}.$$

Příklad 9. *Najděte obecné řešení diferenční rovnice* $y(x+2) - 16y(x) = 0.$
Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - 16 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$(\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -4.$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \text{ charakteristické kořeny jsou různé.}$$

Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1 4^x + c_2(-4)^x.$$

Příklad 10. *Určete obecné řešení rovnice* $y(x+2) + 4y(x+1) + 4y(x) = 0.$
Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \Rightarrow \text{ charakteristické kořeny jsou násobné.}$$

Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1(-2)^x + c_2 x(-2)^x.$$

Příklad 11. *Určete obecné řešení rovnice* $y(x+2) + 16y(x) = 0.$
Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 16 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$\lambda^2 = -16$$

$$\lambda_1 = 4i, \quad \lambda_2 = -4i.$$

Imaginární číslo $2i$ má $r = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Obecné řešení je tedy

$$y(x) = 2^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} x + c_2 \sin \frac{\pi}{2} x \right).$$

Nehomogenní diferenční rovnice k-tého řádu

V tomto odstavci si ukážeme, jak nalézt partikulární řešení nehomogenní rovnice. K tomu použijeme *metodu variace konstant.*
Budeme předpokládat, že $Y_i(x), i = 1, \ldots, k, x \in M$ je fundamentální systém řešení homogenní rovnice (3), pak partikulární řešení nehomogenní rovnice (2) hledáme ve tvaru

$$Z(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + \ldots + C_k(x)Y_k(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x)Y_i(x), \qquad (6)$$

kde $C_i(x), i = 1, ..., k$ jsou neznámé funkce na definované množině M. K nalezení partikulárního řešení nehomogenní diferenční rovnice stačí nalézt jednu k-tici těchto funkcí tak, aby $Z(x)$ bylo řešením nehomogenní rovnice.
Podle definice 1 víme, že $C_i(x+1) = \Delta C_i(x) + C_i(x)$. Proto platí

$$Z(x+1) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x+1)Y_i(x+1) = \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x)Y_i(x+1) + \sum_{i=1}^{k} C_i(x)Y_i(x+1).$$

Zvolme funkce $C_i(x)$ tak, aby na množině M platilo

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x)Y_i(x+1) = 0.$$

Za tohoto předpokladu je

$$Z(x+1) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x)Y_i(x+1),$$

z čehož vyplývá

$$Z(x+2) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x+1)Y_i(x+2) = \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x)Y_i(x+2) + \sum_{i=1}^{k} C_i(x)Y_i(x+2).$$

Tady opět zvolíme

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x)Y_i(x+2) = 0$$

a pokračujeme analogicky dál, až vyjádříme $k-1$ rovnic

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x) Y_i(x+r) = 0, \quad r = 1, 2, ..., k-1$$

a $k-1$ funkcí

$$Z(x+r) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x+r), \quad r = 1, 2, ..., k-1.$$

Za těchto předpokladů vyjádříme funkci $Z(x+k)$

$$Z(x+k) = \sum_{i=1}^{k} C_i(x+1) Y_i(x+k) = \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x) Y_i(x+k) + \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x+k),$$

čímž po dosazení vyjádřených funkcí $Z(x), Z(x+1), ..., Z(x+k)$ do rovnice (2) za $y(x), y(x+1), ..., y(x+k)$, dostaneme

$$a_0 \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x) + a_1 \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x+1) + ... + a_{k-1} \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x+k-1) +$$

$$+ a_k \sum_{i=1}^{k} C_i(x) Y_i(x+k) + a_k \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x) Y_i(x+k) = f(x).$$

Protože se dle předpokladu jedná o dosazené obecné řešení homogenní diferenční rovnice, jsou všechny členy kromě $a_k \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(x) y_i(x+k)$ rovny nule. Z toho vyplývá, že pokud funkce $\Delta C_i(x), i = 1, ..., k$ splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Delta C_1(x) Y_1(x+1) & + & \Delta C_2(x) Y_2(x+1) & + \cdots + & \Delta C_k(x) Y_k(x+1) & = & 0 \\
\Delta C_1(x) Y_1(x+2) & + & \Delta C_2(x) Y_2(x+2) & + \cdots + & \Delta C_k(x) Y_k(x+2) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
\Delta C_1(x) Y_1(x+k-1) & + & \Delta C_2(x) Y_2(x+k-1) & + \cdots + & \Delta C_k(x) Y_k(x+k-1) & = & 0 \\
\Delta C_1(x) Y_1(x+k) & + & \Delta C_2(x) Y_2(x+k) & + \cdots + & \Delta C_k(x) Y_k(x+k) & = & f(x),
\end{array}$$

je funkce $Z(x)$ definovaná vztahem (6) řešením nehomogenní diferenční rovnice k-tého řádu. Determinant matice nehomogenní soustavy rovnic pro $\Delta C_i(x)$ je casoratian řešení $Y_i(x)$. Soustava má proto nenulový determinant a můžeme tedy z ní najít funkce $\Delta C_i(x)$. Pomocí sumace je možné určit funkce $C_i(x)$ a nakonec dosadit do rovnice (6), která dává partikulární řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice k-tého řádu.

Příklad 12. *Nalezněte partikulární řešení diferenční rovnice*

$$y(x+2) - \frac{2(x+2)}{x+1}y(x+1) + \frac{x+2}{x}y(x) = x(x+2),$$

jestliže známe dvě řešení homogenní rovnice $Y_1(x) = x$ *a* $Y_2(x) = x^2$.

Řešení: Hledané řešení $Z(x)$ bude ve tvaru

$$Z(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) = xC_1(x) + x^2C_2(x),$$

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ jsou funkce proměnné x. Dosazením dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x+1)\Delta C_1(x) + (x+1)^2\Delta C_2(x) &= 0\\ (x+2)\Delta C_1(x) + (x+2)^2\Delta C_2(x) &= x(x+2).\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme vztahy pro $\Delta C_1(x)$ a $\Delta C_2(x)$

$$\begin{aligned}\Delta C_1(x) &= -(x+1)x\\ \Delta C_2(x) &= x.\end{aligned}$$

Provedeme sumaci a tím dostaneme

$$\begin{aligned}C_1(x) &= -\Delta^{-1}(x+1)x = -\frac{(x+1)x(x-1)}{3}\\ C_2(x) &= \Delta^{-1}x = \frac{x(x-1)}{2}.\end{aligned}$$

Partikulární řešení zadané rovnice má tedy tvar

$$Z(x) = -\frac{(x+1)x(x-1)}{3}x + \frac{x(x-1)}{2}x^2 = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{6}.$$

Zdroje této kapitoly: [1], [3], [4], [5] a [6].

3. Aplikace diferenčních rovnic

Poslední kapitola této práce je zaměřena na aplikaci diferenčních rovnic v ekonomii. Aplikaci si ukážeme na třech modelech, konkrétně na pavučinovém modelu, na modelu národního důchodu a na modelu otevřené ekonomiky.

3.1. Pavučinový model

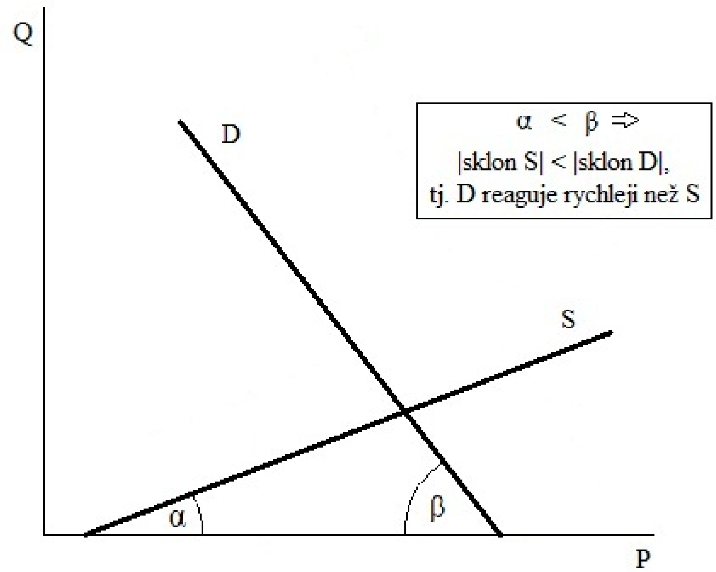
Pavučinový model je jeden z dynamických modelů, který hledá rovnováhu nabídky a poptávky v čase. Je to jednoduchý model, kde nedochází ke změnám závislostí v průběhu modelování a týká se jednoho zboží na trhu, tzn. nepřihlíží k cenám ostatních druhů zboží, nezohledňuje existenci zásob, a naopak předpokládá dokonalou konkurenci.

Abychom mohli pracovat s tímto modelem, uvedeme si jednotlivá označení:
t - čas, $t = 0,1,2,\ldots$
P - cena za jednotku zboží
S (nabídka) - množství zboží, které jsou prodávající ochotni prodat při určité ceně na trhu
D (poptávka) - množství zboží, které jsou kupující ochotni koupit za určitou cenu

Budeme se zabývat tradičním pavučinovým modelem, který předpokládá zpoždění na straně nabídky, čímž dochází k nerovnováze na trhu způsobené malým množstvím nabízeného zboží. K obnovení rovnováhy na trhu zboží při zpoždění na straně nabídky dojde, pokud poptávka bude reagovat rychleji než nabídka, tj. jestliže sklon poptávky bude větší než sklon nabídky (bez ohledu na znaménko sklonu)

Poznámka 5. Sklon přímky je charakterizován úhlem, který je nutné měřit od osy nezávisle proměnné - v tomto modelu se jedná o osu s cenou (P).

Porovnání velikosti sklonů nabídky a poptávky je graficky znázorněno na obr. 1.



Obrázek 1: Porovnání velikostí sklonů nabídky a poptávky

Nyní si popíšeme průběh modelu a uvedeme matematické vyjádření.
Výrobci učiní rozhodnutí o množství zboží v čase t na základě ceny v tomto čase (P_t). Jedná se však o rozhodnutí na straně nabídky, které musí být učiněno o jedno časové období dříve před dobou prodeje. To znamená, že zboží je na trhu realizovatelné až v čase $(t+1)$, proto cena P_t determinuje množství $Q_{S,t+1}$.
Tímto jsme si popsali funkci nabídky se zpožděním:

$$Q_{S,t+1} = S(P_t)$$

nebo ekvivalentně, posuneme-li časové označení o jedno období zpět:

$$Q_{S,t} = S(P_{t-1}).$$

Poptávka reaguje bez zpoždění, tzn.

$$Q_{D,t} = D(P_t).$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že funkce D poptávky a funkce S nabídky jsou lineární funkce. Budeme tedy předpokládat, že křivky, které znázorňují závislost poptávky a nabídky na ceně, jsou přímky, a že platí rovnost $S = D$. Tím dostaneme soustavu tří rovnic:

$$S = D: \quad Q_{S,t} = Q_{D,t} \quad t \in \mathbb{N}_0$$

$$D: \quad Q_{D,t} = a - bP_t \quad a, b > 0,\ t \in \mathbb{N}_0$$

$$S: \quad Q_{S,t} = -c + dP_{t-1} \quad c, d > 0,\ t \in \mathbb{N}_0,$$

kde b je směrnice přímky, která znázorňuje závislost poptávky na ceně, a je průsečík této přímky s osou souřadnic, konstanty c a d označují u přímky znázorňující závislost nabídky na ceně P_{t-1} to samé.
Dosazením posledních dvou rovnic do první dostaneme diferenční rovnici prvního řádu

$$bP_t + dP_{t-1} = a + c.$$

Po úpravě a posunutí časového označení o jednu periodu vpřed, kdy zavedeme substituci $T = t + 1$, obdržíme rovnici

$$P_{t+1} + \frac{d}{b}P_T = \frac{a+c}{b}.$$

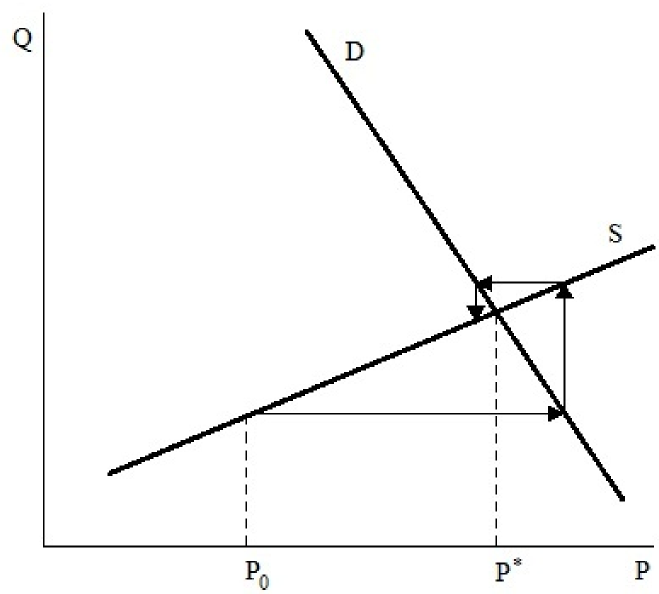
V příkladě 13 si ukážeme, že za předpokladu, kdy známe počáteční hodnotu P_0, můžeme psát řešení diferenční rovnice ve tvaru

$$P_T = \left(P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^T + \left(\frac{a+c}{b+d}\right).$$

Nyní si ukážeme, jak závisí vývoj ceny v čase na koeficientech b, d. Budeme předpokládat, že cena se v čase chová oscilačně, tedy $\frac{d}{b} < 0$. Mohou nastat tyto tři možnosti:
1. $|b| > |d|$: cena P_T konverguje k rovnovážné hodnotě ceny
2. $|b| = |d|$: cena P_T osciluje s konstantní amplitudou kolem rovnovážné hodnoty
3. $|b| < |d|$: cena P_T diverguje od rovnovážné hodnoty ceny.

Konstrukce pavučinového modelu ($|sklonS| < |sklonD|$)**:**

Vycházíme z počáteční ceny P_0, kdy předpokládáme, že P_0 je níže než rovnovážná cena P^*, z čehož vyplývá, že je nabízeno malé množství zboží. Rovnovážnou cenu P^* udává průsečík poptávkové a nabídkové přímky. Poptávka je vysoká, proto výrobce kvůli vidině vysokých zisků zvýší cenu a začne vyrábět více zboží. Nastane ale opačný případ, kdy je zboží přebytek a poptávka proto tlačí cenu dolů. To vede k tomu, že výrobci snižují množství, aby nevyráběli nadbytek.



Obrázek 2: Grafické znázornění pavučinového modelu

Příklad 13. *([7], úkol 1/121): Jsou dány lineární funkce nabídky a poptávky se zpožděním na straně nabídky pro pavučinový model nespojitý v čase. Zjistěte graficky i analytickým výpočtem rovnovážnou úroveň ceny a stabilitu tržní rovnováhy: a)* $D : Q_{Dt} = 24 - 3P_t$, $S : Q_{St} = -1 + 2P_{t-1}$, $P_0 = 3$

Řešení: Nejprve budeme hledat rovnovážnou cenu P^*. Zjistíme tedy, zda je současná cena rovnovážná

$$D = S : \ 24 - 3P = -1 + 2P \quad \Rightarrow \ \text{rovnovážná cena } P^* = 5$$

$$P^* \neq P_0 \quad \Rightarrow \text{na trhu je nerovnováha}$$

I. Porovnáme velikosti sklonů S a D

$$|sklonS| = |2| \quad a \quad |sklonD| = |-3|$$

$$|sklonD| > |sklonS|$$

a tím učiníme odhad, že model bude konvergentní (D reaguje rychleji než S).

II. Dále provedeme výpočet.

Nejprve porovnáme b a d a tím určíme, zda bude model konvergovat nebo divergovat

$$b = 3, \quad d = 2$$

$$b > d$$

$$\Rightarrow \text{model konverguje k rovnovážné hodnotě}$$

Dále budeme řešit diferenční rovnici

$$24 - 3P_t = -1 + 2P_{t-1}.$$

1. Pro lepší orientaci zavedeme substituci, kdy závisle proměnnou P označíme jako y a nejnižší čas položíme rovno základnímu času x, čímž budou všechna další období kladná, tj. $P_{t-1} = y(x)$ a $P_t = y(x+1)$. Tím získáme rovnici

$$3y(x+1) + 2y(x) = 25.$$

2. Dále řešíme homogenní rovnici (bez pravé strany)

$$3y(x+1) + 2y(x) = 0$$

a z tohoto tvaru je patrné, že charakteristická rovnice bude mít tvar

$$3\lambda^1 + 2\lambda^0 = 0$$
$$3\lambda^1 = -2\lambda^0$$
$$\lambda = -\frac{2}{3}.$$

Po dosazení získáme obecné řešení homogenní rovnice

$$Y(x) = c_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^x, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

3. Odhad partikulárního řešení vyjde ve tvaru

$$Z(x) = A_0$$
$$y(x+1) = y(x) = A_0,$$

čímž po dosazení obdržíme

$$3A_0 + 2A_0 = 25$$
$$5A_0 = 25$$
$$A_0 = 5 \Rightarrow Z(x) = 5.$$

4. Nyní vypočítáme obecné řešení $y(x)$ diferenční rovnice s pravou stranou:

$$y(x) = Y(x) + Z(x)$$
$$y(x) = c_1(-\frac{2}{3})^x + 5.$$

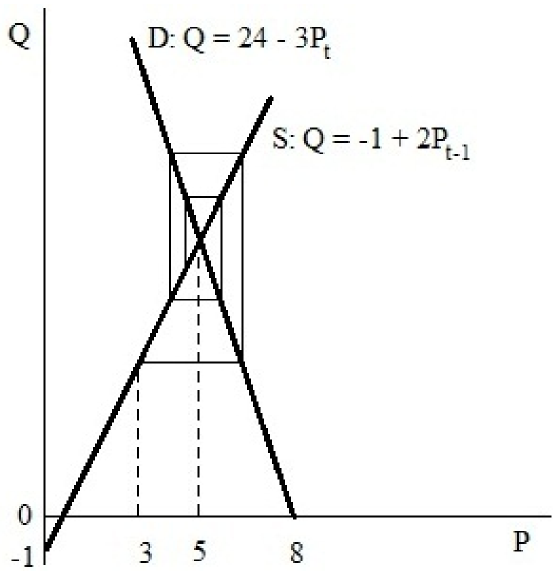
5. Řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $P_0 = 3$, dostaneme dosazením do rovnice výše

$$3 = c_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + 5$$
$$c_1 = -2$$
$$y(x) = (-2) \left(-\frac{2}{3}\right)^x + 5$$

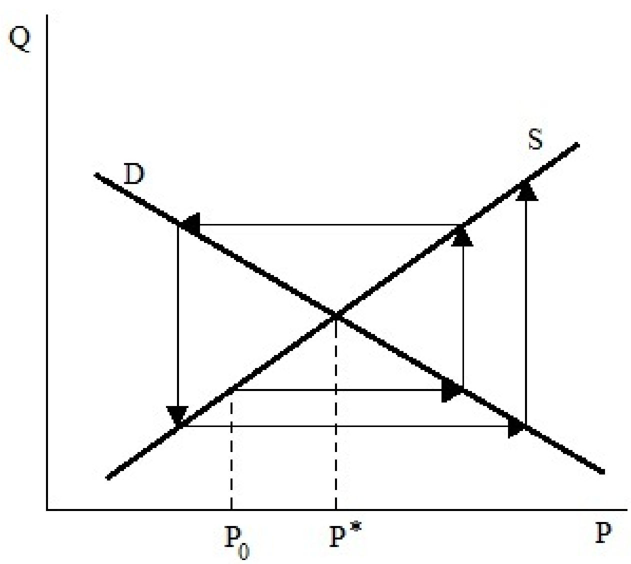
Po odstranění substituce dostaneme konvergentní posloupnost

$$P_{t-1} = (-2) \left(-\frac{2}{3}\right)^{t-1} + 5.$$

C) Grafické znázornění:



Poznámka 6. Je-li sklon poptávky menší než sklon nabídky, pak rovnováha na trhu zboží se zpožděním na straně nabídky nebude obnovena a dochází k tzv. divergenci. Poptávka v tomto případě nestačí dostatečně včas napravovat chybná rozhodnutí nabídky.



Obrázek 3: Divergentní model

3.2. Dynamický model národního důchodu

V tomto makroekonomickém modelu si ukážeme, jak se chová národní důchod v čase. Neuvažujeme zde vládní výdaje ani zdanění. V první části si ukážeme, jak model vypadá, pokud jsou investice zcela autonomní (tzn. nezávisí na výši důchodu v některém z období) a v druhé části budeme pracovat s investicemi, které jsou z části autonomní a z části závislé na důchodu.

Nejprve si označme jednotlivé veličiny:
t - čas, $t = 1, 2, 3 \dots$
Y_t - národní důchod v čase t (výnosy v čase t)
C_t - výdaje na spotřebu v období t
I_t - investiční výdaje v období t

Obvykle předpokládáme, že spotřeba lineárně závisí na důchodu, který je zpožděný o jedno období, tj.

$$C_t = a + bY_{t-1}, \qquad a \geq 0,\ 0 < b < 1, \tag{7}$$

kde a je výše *autonomní spotřeby* (tj. je nezávislá na výši důchodu) a b je *marginální sklon ke spotřebě*.

3.2.1. Autonomní investice

Investice se v počátečním období přesouvají z hodnoty I_0 na $I_0+\Delta I$ (zůstávají na této úrovni ve všech následujících obdobích):

$$I_t = I_0 + \Delta I. \tag{8}$$

Rovnici

$$Y_t = C_t + I_t \tag{9}$$

bereme jako rovnovážný stav.

Substitucí rovnic (7) a (8) do (9) dostaneme diferenční rovnici 1. řádu:

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I,$$

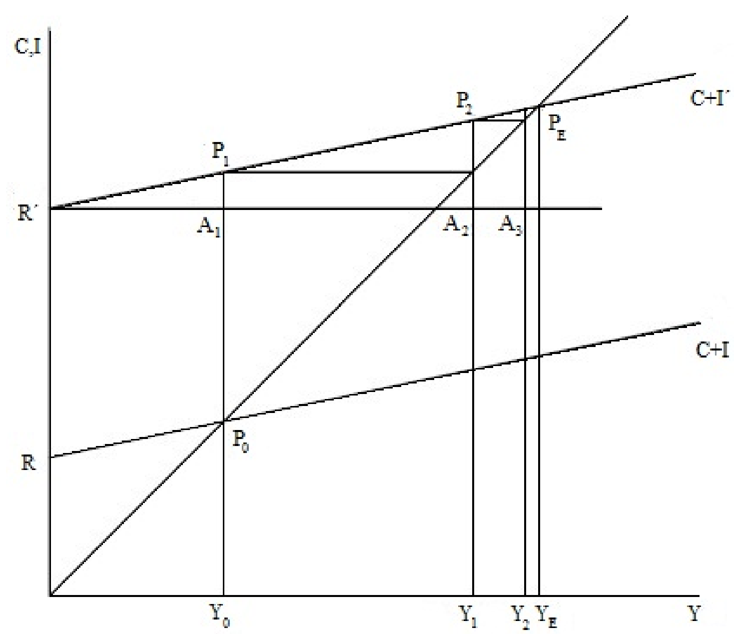
jejíž obecné řešení je

$$Y_t = A(b)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b},$$

kde A je konstanta a $1 - b$ je *mezní sklon k úsporám.*
Vzhledem k tomu, že platí $0 < b < 1$, je vždy splněna podmínka stability i podmínka monotónního ekonomického růstu.

Konstrukce modelu

Nejprve zvolíme počáteční úroveň investic R (kdy předpokládáme, že $a = 0$) a jejich novou úroveň R'. Odpovídající rovnováha je Y_0 (respektive Y_E).
V prvním období je spotřeba, která závisí na příjmech v období nula, rovna A_1P_1. Přidáním této hodnoty do úrovně investice $R' = A_1Y_0$, dostaneme příjem v prvním období, který je roven Y_0P_1. Pomocí osy prvního kvadrantu dostaneme na ose bod Y_1. Ve druhém období má spotřeba hodnotu A_2P_2 a příjem je roven $Y_1P_2 = A_2P_2 + A_2Y_1$. Dále opět prostřednictvím osy prvního kvadrantu dostaneme na ose bod Y_2, a tak dále. Jak vidíme, systém má tendenci se monotónně pohybovat k bodu P_E, tj. Y_E. Graficky je model znázorněn na obr. (4).



Obrázek 4: Grafické znázornění modelu

3.2.2. Částečně autonomní investice

Nyní budeme pracovat s modelem, který předpokládá, že investice jsou pouze částečně autonomní, tj. platí

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I, \qquad 0 < h < 1,$$

kde h je *mezní sklon k investicím*. Po dosazení bude mít rovnice (8) tvar

$$Y_t - (b+h)Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I,$$

jejíž obecné řešení je

$$Y_t = A(b+h)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b - h}.$$

Veličiny b a h jsou kladné, proto je pohyb monotónní. V tomto modelu je podmínkou rovnováhy $b + h < 1$, tj.

$$h < 1 - b, \tag{10}$$

kde $1 - b$ je *mezní sklon k úsporám*. Z nerovnice (10) vyplývá, že mezní sklon k investicím musí být menší než mezní sklon k úsporám, pokud má být úroveň potenciálního produktu stabilní.

3.3. Model otevřené ekonomiky

Jako poslední si uvedeme model otevřené ekonomiky, kde na rozdíl od předchozího modelu, vezmeme v úvahu import (dovoz) a export (vývoz). Předpokládáme, že import je funkcí příjmů a export je zcela exogenní, tj. jeho výše závisí spíše na vnějších podmínkách. Celkový produkt je dán jako součet spotřeby, investic a rozdíl exportu a importu.

V tomto modelu budeme pracovat opět s veličinami t, Y_t, C_t a I_t, které mají stejný význam jako v modelu 3.2 a navíc je model rozšířen o dvě nové veličiny:
X_t - celkový export v čase t
M_t - celkový import v čase t

Pro model otevřené ekonomiky pak platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} C_t &= a + bY_{t-1}, \\ I_t &= hY_{t-1} + I_0 + \Delta I, \\ X_t &= X_0 + \Delta X, \\ M_t &= mY_{t-1} + M_0, \quad\ 0 < m < 1, \\ Y_t &= C_t + I_t + X_t - M_t. \end{aligned}$$

Dosazením prvních čtyř rovnic uvedeného systému do páté, získáme rovnici

$$Y_t - (b + h - m)Y_{t-1} = a + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X,$$

jejíž řešení je:

$$Y_t = A(b + h - m)^t + \frac{a + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X}{1 - b - h + m}. \tag{11}$$

Multiplikátorem je zde $\frac{1}{1-b-h+m}$. Součet $b + h$ je vždy větší než m, protože pro výraz $b + h - m$, který měří *mezní sklon ke spotřebě na domácí zboží*, platí $b + h - m > 0$. Pohyb ekonomiky směrem k potenciálnímu produktu (11) je tedy monotónní.

Podmínkou stability je $b + h - m < 1$. Tato nerovnost se dá přepsat vztahem $1 - b - h + m > 0$, a tak rovnovážná podmínka zajišťuje, že multiplikátor $\frac{1}{1-b-h+m}$ je kladný. Podmínka může také být psána ve formě

$$h < 1 - b + m, \tag{12}$$

tj, mezní sklon k investicím, musí být menší než součet mezního sklonu k úsporám a mezního sklonu k dovozu.

Zdroje této kapitoly: [7], [8] a [9].

Závěr

Účelem práce bylo ukázat aplikace některých diferenčních rovnic v ekonomii. Proto bylo nezbytné přiblížit si základy diferenčního počtu. Výklad jsem podala tak, aby byl srozumitelný nejen matematikům. Z tohoto důvodu jsem dostatečně vysvětlila základní pojmy, které s diferenčním počtem souvisí. Navíc jsem většinu definic a pojmů názorně vysvětlila na ilustrativních příkladech.

V prvních dvou kapitolách jsem se zaměřila na matematickou interpretaci diferenčních rovnic. Snažila jsem se podat ucelený výklad základních definic a vět, které s diferenčním počtem souvisí.

Kapitola třetí je zaměřena na ekonomickou aplikaci. Ekonomických modelů existuje velké množství, avšak z důvodu rozsahu práce, jsou zde uvedeny pouze tři. Konkrétně byla uvedena aplikace diferenčních rovnic prvního řádu.

Reference

[1] Nagy J., Navrátil O.: *Diferenciální a diferenční rovnice.* ČVUT, Praha 2005.

[2] Škrášek J., Tichý Z.: *Základy aplikované matematiky II.* Nakladatelství technické literatury - SNTL, Praha 1986.

[3] Prágerová A., Voříšek J..: *Metodické listy pro posluchače dálkového studia.* Státní pedagogické nakladatelství Praha 1985.

[4] Elaydi Saber N.: *An introduction to difference equations.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.

[5] Mařík R.: *Diferenciální a diferenční rovnice.* Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně 2004.

[6] Prágerová A.: *Diferenční rovnice.* Nakladatelství technické literatury, Praha 1971.

[7] Kolektiv autorů: *Matematická ekonomie (1. část).* Ostrava 1995.

[8] Glückaufová D.: *Diferenční rovnice s přihlédnutím k jejich použití v ekonomii.* Ekonomicko-matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, Praha 1966.

[9] Gandolfo G.: *Mathematical methods and models in economic dynamics.* North-Holland publishing company 1971.