



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## LIEOVY GRUPY A JEJICH FYZIKÁLNÍ APLIKACE

LIE GROUPS AND THEIR PHYSICAL APPLICATIONS

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Daniel Kunz

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.

BRNO 2020

# Zadání diplomové práce

|                   |                                   |
|-------------------|-----------------------------------|
| Ústav:            | Ústav matematiky                  |
| Student:          | <b>Bc. Daniel Kunz</b>            |
| Studijní program: | Aplikované vědy v inženýrství     |
| Studijní obor:    | Matematické inženýrství           |
| Vedoucí práce:    | <b>doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.</b> |
| Akademický rok:   | 2019/20                           |

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Lieovy grupy a jejich fyzikální aplikace

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomant vypracuje přehled základních faktů z teorie Lieových grup se zaměřením na aplikace ve fyzice, případně v mechanice. Pozornost bude věnována i základům teorie jetových grup, základních pojmů z teorie přirozených operátorů a možnostem jejich využití.

### Cíle diplomové práce:

Hlavním cílem je prezentovat základní pojmy a fakta z teorie Lieových grup, maticových i obecných a uvést vybrané fyzikální aplikace. Pozornost bude věnována i jetovým grupám v kontextu k základům teorie přirozených bandlů a operátorů.

### Seznam doporučené literatury:

HALL, B. C. Lie groups, Lie algebras and Representations, Graduate Texts in Maths, 2015, ISBN 978-3-319-37433-8.

GILMORE, R. Lie groups, Physics and Geometry, Cambridge Univ. Press, 2008.

STILLWELL, J. Naive Lie Theory, Springer 2008, ISBN 978-0-387-78214-0.

KOLÁŘ I. Úvod do globální analýzy, Masarykova univerzita (2003).

KOLÁŘ, I., MICHOR, P. W. Natural Operations in Differential Geometry, Springer Verlag 1983.

SHARPE, R. W. Differential Geometry, Springer Verlag 1999.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M. Feynmanovy přednášky z fyziky, Alfa Bratislava 1989, orig. Addison-Wesley Publishing Company 1966.



Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



**Abstrakt:**

Diplomová práce objasňuje pojmy Lieova grupa a Lieova algebra a jejich aplikace na fyzikálních problémech. Abychom mohli vykonstruovat Lieovy grupy a algebry je zapotřebí definovat pár základních pojmů jako je topologická varieta, tenzorový počet a diferenciální geometrie. Tomuto je věnovaná první část mé práce. V druhé části se zabývám konstrukcí Lieových grup a algeber. Následně ukazuji různé vlastnosti jednotlivých struktur a pak se zabývám tím, zda existuje provázání mezi Lieovými grupami a Lieovými algebry. V poslední části se jedná čistě o aplikace vykonstruované teorie na fyzikální problémy. Jako je hledání symetrií ve fyzice, které dle teorému Noetherové je spjat se zákony zachování.

**Abstract:**

In this thesis I describe construction of Lie group and Lie algebra and its following usage for physical problems. To be able to construct Lie groups and Lie algebras we need define basic terms such as topological manifold, tensor algebra and differential geometry. First part of my thesis is aimed on this topic. In second part I am dealing with construction of Lie groups and algebras. Furthermore, I am showing different properties of given structures. Next I am trying to show, that there exists some connection among Lie groups and Lie algebras. In last part of this thesis is used just for showing how this apparatus can be used on physical problems. Best known usage is to find physical symmetries to establish conservation laws, all thanks to famous Noether theorem.

**Klíčová slova:**

topologie, varieta, diferenciální geometrie, Lieovy grupy, Lieova algebra, Lieova závorka, Poissonova závorka, variační počet, Diracova symbolika

**Keywords:**

topology, manifold, differential geometry, Lie groups, Lie algebras, Lie bracket, Poisson bracket, calculus of variations, Dirac symbolic



## Bibliografická citace

KUNZ, Daniel. *Lieovy grupy a jejich fyzikální aplikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jiří Tomáš Dr..

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „LIEOVY GRUPY A JEJICH FYZIKÁLNÍ APLIKACE“ vypracoval samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Brně, dne 26.6.2020

.....

Kunz Daniel

## Poděkování

Na tomto místě bych chtěl velice poděkovat mému vedoucímu práce doc. RNDr. Jiřímu Tomášovi Dr. za jeho odborné rady, za čas strávený během konzultací a za pečlivé vedení práce.





# Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Úvod .....</b>   | <b>13</b> |
| <b>1 Topologické prostory a jejich vlastnosti .....</b>     | <b>14</b> |
| 1.1 Topologický prostor .....                               | 14        |
| 1.2 Křivky na topologickém prostoru .....                   | 16        |
| <b>2 Topologická varieta a bandly .....</b>                 | <b>18</b> |
| 2.1 Variety.....  | 18        |
| 2.2 Bandly-Fibrováný prostor .....                          | 22        |
| <b>3 Tenzorový počet .....</b>                              | <b>26</b> |
| 3.1 Vektorový prostor a jeho duál .....                     | 26        |
| 3.2 Tenzory .....   | 32        |
| <b>4 Diferenciální geometrie .....</b>                      | <b>37</b> |
| 4.1 Diferencovatelnost na varietách .....                   | 37        |
| 4.2 Tečný prostor .....                                     | 39        |
| 4.3 Kotečný prostor .....                                   | 44        |
| 4.4 Fibrovaná varieta .....                                 | 46        |
| <b>5 Maticové Lieovy grupy a jejich Lieovy algebry.....</b> | <b>48</b> |
| 5.1 Lieova grupa.....                                       | 48        |
| 5.2 Příklady maticových Lieových grup .....                 | 48        |
| 5.3 Vlastnosti maticových Lieových grup .....               | 57        |
| 5.4 Homomorfismus Lieových grup.....                        | 59        |
| 5.5 Maticová exponenciála.....                              | 61        |
| 5.6 Lieova algebra .....                                    | 67        |
| 5.7 Lieova algebra Lieovy grupy .....                       | 73        |
| 5.8 Příklady provázání.....                                 | 74        |
| 5.9 Přenos homomorfismu .....                               | 77        |
| 5.10 Komplexifikace .....                                   | 79        |
| 5.11 Exponenciální zobrazení .....                          | 80        |
| <b>6 Lieovy grupy a jejich Lieovy algebry .....</b>         | <b>82</b> |
| 6.1 Lieova grupa.....                                       | 82        |
| 6.2 Lieova algebra Lieových grup .....                      | 84        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.3      | Rekonstrukce Lieových grup z Lieových algeber ..... | 86         |
| 6.4      | Jety.....   | 90         |
| <b>7</b> | <b>Využití a fyzikální aplikace .....</b>           | <b>92</b>  |
| 7.1      | Základy teoretické mechaniky .....                  | 92         |
| 7.2      | Poissonova závorka.....                             | 95         |
| 7.3      | Lagrangeovy rovnice pro polní problémy .....        | 98         |
| 7.4      | Maxwellovy rovnice, elektromagnetické pole.....     | 100        |
| 7.5      | Diracova symbolika .....                            | 103        |
| 7.6      | Kvantová teorie.....                                | 111        |
| 7.7      | Spiny .....   | 117        |
| 7.8      | Mechanika kontinua – grupa symetrií.....            | 118        |
|          | <b>Závěr .....</b>                                  | <b>120</b> |
|          | <b>Seznam použitých zdrojů.....</b>                 | <b>121</b> |
|          | <b>Seznam obrázků .....</b>                         | <b>123</b> |

# Úvod

Hlavním cíle práce je reprezentovat základní pojmy a fakta z teorie Lieových grup, maticových i nematicových, a uvést fyzikální aplikaci v mechanice. Abych mohl tato fakta reprezentovat, musel jsem nastudovat a důkladně pochopit rozsáhlý aparát topologie, variet, diferenciálního počtu a tenzorového počtu (tenzorovým počtem jsem se zabýval v mé bakalářské práci).

První a druhá kapitola bude věnována topologii a topologickým varietám. Topologické variety hrají klíčovou roli v definování Lieových grup.

Ve třetí kapitole se budeme zabírat tenzorovým počtem, jelikož schopnost pracovat s kovariantními a kontravariantními indexy bude zcela nezbytná při popisu fyzikálních a matematických struktur. Nastíníme zde taktéž velice důležité identity vektorových funkcí, které posléze využijeme při popisu Maxwellových rovnic.

Čtvrtá kapitola bude pojednávat o moderní diferenciální geometrii. Zde zavedeme pojmy  $C^r$  kompatibilitosti na varietách, což nám dovolí později definovat hladké variety. Taktéž zde budeme poprvé netriviálně definovat pojem difeomorfismus, který využijeme při definici Lieovy závorky v pozdějších kapitolách. Uvedeme si, jak zacházet s jednotlivými mapami a také zde probereme, jak bez pomoci vnějšího náhledu na svět definovat tečný a kotečný prostor na varietě v daném bodě. S tímto je spjat pojem fibrované variety, který taktéž objasníme v této kapitole.

Další kapitola bude věnována maticovým Lieovým grupám. Poprvé se zde setkáme s přímou reprezentací Lieových grup. Prozkoumáme zde jejich vlastnosti a zda opravdu splňují obecnou definici Lieovy grupy. Pak si objasníme pojmy jako je exponenciála matice. Následně ukážeme, co jsou Lieovy grupy. Dále vykonstruujeme Lieovy algebry Lieových grup a ukážeme jaké jsou mezi nimi vztahy. Poprvé se zde potkáme s přímým provázáním na fyzikální aplikace, jako jsou rotace v prostoru či rapidita v časoprostoru.

Šestá kapitola je zaměřena na obecné Lieovy grupy a bude podávat obecný návod, jak konstruovat Lieovy grupy a Lieovy algebry. Využijeme pojmů jako je vektorové pole a levoinvariantní pole. Ukážeme, jak rekonstruovat Lieovy grupy z Lieových algeber a různé další vlastnosti jako jsou třeba homomorfismy. V poslední části kapitoly si zavedeme pojem jetů.

V poslední kapitole objasníme, jakou roli hrají Lieovy grupy a Lieovy algebry v aplikacích. Nejdříve se budeme zabírat klasickou teoretickou mechanikou. Zde budeme využívat teorém Noetherové pro konstrukci zákonů zachování. Následně přejdeme do relativistické fyziky a odvodíme Maxwellovy rovnice pro čtyřrozměrný prostor. Poté nahlédneme do kvantové fyziky a zobecníme si zde Poissonovy závorky, které nám vytvoří celý aparát v Kvantové teorii. Následovat budou pojmy jako je spin či Schrödingerova rovnice. V posledním odstavci se budeme zabývat problematikou mechaniky kontinua, kde na něj budeme nahlížet za pomoci jetů.

# 1 Topologické prostory a jejich vlastnosti

## 1.1 Topologický prostor

Tato struktura byla zavedena jako zeslabení metrického prostoru. Toto zeslabení zachovává konvergenci k bodu, a také spojitě zobrazení mezi dvěma množinami. Konvergence je zde chápána zcela v jiném smyslu než za pomoci vzdáleností, jelikož metrika není k dispozici na dané struktuře.

### 1.1.1 Definice (Topologický prostor)

Nechť  $M$  je množina. Topologie na  $M$  je množina otevřených podmnožin  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ , takový že:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{O}, M \in \mathcal{O}$
- ii)  $U, V \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$  1.1
- iii)  $C \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \cup C \in \mathcal{O}$

Vlastnost ii) indukuje, že se musíme omezit na konečný průnik otevřených množin z  $M$ , zatímco vlastnost iii) takto omezená není.

### 1.1.2 Poznámka

Pro zajímavost uvedeme, že pro konečně rozměrnou množinu lze vytvořit několik různých topologií. Ku příkladu, jestliže máme množinu s kardinalitou 5, pak na této množině lze vytvořit 6942 navzájem různých topologií. Dále budeme dvojici  $(M, \mathcal{O})$  nazývat topologickým prostorem.

### 1.1.3 Poznámka (Souvislá množina)

Topologický prostor  $(M, \mathcal{O})$  je souvislý právě tehdy, když jediné obojetné (tedy uzavřené i otevřené) množiny jsou celá  $M$  a prázdná množina. Podmnožina  $S \subseteq M$  je souvislá právě tehdy, když topologický prostor  $S$  s indukovanou topologií je souvislý (indukovaná topologie na  $S$  z  $M$  je tvořena množinami  $A \cap S$ , kde  $A$  je otevřená v  $M$ )

### 1.1.4 Příklad

Nejnámějším příkladem je tzv. standardní topologie  $\mathcal{O}_{st}$  na  $\mathbb{R}^d$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall r \in \mathbb{R} : \quad B_r(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \left( \sum_{i=1}^d (y^i - x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r \right\} \quad 1.2$$

Jasně lze rozpoznat, že suma vlastně odpovídá euklidovské normě. Tento pojem ale ještě nemáme k dispozici, jelikož se stále nacházíme pouze v topologickém prostoru. I přesto lze

ukázat, že tato topologie je nezávislá na volbě normy a opravdu tvoří topologii na  $\mathbb{R}^d$ . Každý metrický prostor je topologickým prostorem.

### 1.1.5 Definice (Konvergence)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologický prostor a dále  $q$  je zobrazení, které definujeme takto

$$q: \mathbb{N} \rightarrow M. \quad 1.3$$

Pak řekneme, že posloupnost  $q$  v  $M$  konverguje k bodu  $a \in M$  pokud

$$\forall U \in \mathcal{O}: a \in U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: q(n) \in U. \quad 1.4$$

Vidíme, že tato definice je mnohem obecnější než běžná definice z normovaných nebo metrických prostorů. Nikde se nevyskytuje pojem vzdálenosti ani normy, vše je vztaženo čistě na otevřené množiny.

### 1.1.6 Definice (Spojitost)

Mějme dva topologické prostory  $(M, \mathcal{O}_M), (N, \mathcal{O}_N)$  a dále zobrazení  $\varphi: M \rightarrow N$ . Pak toto zobrazení  $\varphi$  nazveme spojitým pokud

$$\forall S \in \mathcal{O}_N, \varphi^{-1}(S) \in \mathcal{O}_M. \quad 1.5$$

A to je ekvivalentní s tím, že vzor každé otevřené množiny v  $N$  je opět otevřenou množinou v  $M$ .

### 1.1.7 Příklad

Mějme dvě množiny  $M, N$  a jejich topologie  $\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_N$ .

$$\begin{aligned} M &= \{1,2,3,4\}, N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \\ \mathcal{O}_M &= \{\emptyset, \{1,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\} \\ \mathcal{O}_N &= \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\} \end{aligned} \quad 1.6$$

A zobrazení  $\varphi$  je dáno předpisem

$$\varphi(1) = \alpha, \varphi(2) = \delta, \varphi(3) = \alpha, \varphi(4) = \beta. \quad 1.7$$

Pak se dá opravdu ukázat, že je toto zobrazení spojité, jelikož platí vztah 1.5.

$$\begin{aligned} \text{preim}_\varphi(\emptyset) &= \emptyset, & \text{preim}_\varphi(\{\alpha\}) &= \{1,3\}, \\ \text{preim}_\varphi(\{\gamma\}) &= \emptyset, & \text{preim}_\varphi(\{\alpha, \beta\}) &= \{1,3,4\}, \\ \text{preim}_\varphi(\{\alpha, \gamma\}) &= \{1,3\}, & \text{preim}_\varphi(\{\alpha, \beta, \gamma\}) &= \{1,3,4\}, \\ \text{preim}_\varphi(\{\alpha, \beta, \delta\}) &= \{1,2,3,4\}, & \text{preim}_\varphi(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}) &= \{1,2,3,4\} \end{aligned} \quad 1.8$$

### 1.1.8 Definice (Homeomorfismus)

Homeomorfismem topologických prostorů  $(M, \mathcal{O}_M), (N, \mathcal{O}_N)$  nazveme zobrazení  $f: M \rightarrow N$ , které je spojitě a bijektivní. Přičemž  $f^{-1}: N \rightarrow M$  je opět spojitě.

### 1.1.9 Terminologie

Pokud mezi dvěma prostory opravdu existuje takové bijektivní zobrazení, pak tento vztah zapisujeme jako:  $(M, \mathcal{O}_M) \cong_{top} (N, \mathcal{O}_N)$ . Jedná se o izomorfismus na poli topologických prostorů s hladkými zobrazeními.

### 1.1.10 Definice (Separabilnost T2)

Topologický prostor je T2 separabilní neboli Hausdorffův, jestliže platí

$$\forall x_1, x_2 \in M: x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists U(x_1), V(x_2) \in \mathcal{O}_M: U(x_1) \cap V(x_2) = \emptyset, \quad 1.9$$

[1].

### 1.1.11 Definice (Kompaktnost)

Topologický prostor  $(M, \mathcal{O})$  se nazývá kompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí  $U$  má konečné podpokrytí  $U'$ .

### 1.1.12 Definice (Lokální konečnost)

Nechť je  $(M, \mathcal{O})$  topologický prostor. Pro soubor podmnožin souboru  $\{N_i, i \in I\}$  platí, že je lokálně konečný v  $(M, \mathcal{O})$ , jestliže pro každý bod  $x \in M$  a jeho okolí  $U$  platí, že  $U \cap N_i \neq \emptyset$  pro konečně mnoho  $i \in I$  [1].

### 1.1.13 Definice (Parakompaktnost)

Topologický prostor  $(M, \mathcal{O})$  se nazývá parakompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí  $U$  má otevřené zjemnění  $U'$ , které je lokálně konečné.

### 1.1.14 Poznámka

Pojem zjemnění nám říká, že kromě toho, že  $U'$  je otevřené pokrytí, tak navíc splňuje podmínku, že:  $\forall O \in U, \exists O' \in U': O' \subseteq O$ . Každé podpokrytí je již zjemněním. Opačné implikace neplatí. Více lze dohledat v knize [2]. Lokálně konečný požadavek je vztažen sice k libovolnému, ale pevně zvolenému bodu  $p \in M$ , pro který existuje otevřené okolí  $O(p) \in \mathcal{O}$ , a to takové, že platí  $O \cap O' \neq \emptyset$  pouze pro konečně mnoho  $O' \in U'$ .

## 1.2 Křivky na topologickém prostoru

### 1.2.1 Definice (Homotopie křivek)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologický prostor. Dále mějme dvě křivky  $\gamma, \delta: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow M$  pro něž platí:

$$\gamma(0) = \delta(0), \gamma(1) = \delta(1), \quad 1.10$$

Pak definujeme, že jsou tyto dvě křivky  $\gamma, \delta$  homotopické právě tehdy, když platí, že existuje spojitě zobrazení  $h$  takové, že: [1]

$$\begin{aligned}
h &: \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \rightarrow M \\
&\forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle \\
h(0, \lambda) &= \gamma(\lambda) \wedge h(1, \lambda) = \gamma(\lambda)
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

### 1.2.2 Definice (Prostor uzavřených křivek)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologický prostor. Dále mějme bod  $p \in M$ , pak definujeme prostor uzavřených křivek v tomto bodě jako množinu: [1]

$$\mathcal{L}_p = \{\gamma : \langle 0,1 \rangle \rightarrow M \mid \gamma \text{ je spojitá a } \gamma(0) = \gamma(1)\} \tag{1.12}$$

### 1.2.3 Definice (Řetězení křivek)

Definujme operaci řetězení  $*$ :  $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_p$  předpisem: [1]

$$(\gamma * \delta)(\lambda) = \begin{cases} \gamma(2\lambda) & 0 \leq \lambda \leq 1/2 \\ \delta(2\lambda - 1) & 1/2 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

### 1.2.4 Definice (Fundamentální grupa)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologický prostor, pak fundamentální grupu  $\pi_1(p)$  pro daný  $(M, \mathcal{O})$  v bodě  $p \in M$  definujeme jako:

$$\pi_1(p) = \mathcal{L}_p / \sim = \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{L}_p\} \tag{1.14}$$

Třídy ekvivalence jsou homotopické křivky. Navíc definujeme grupovou operaci jako: [1]

$$\begin{aligned}
\circ &: \pi_1(p) \times \pi_1(p) \rightarrow \pi_1(p) \\
[\gamma] \circ [\delta] &= [\gamma * \delta]
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

### 1.2.5 Příklady

Pro všechny  $S^n$  koule platí, že všechny uvažené křivky jsou homotopické:

$$\forall p \in S^n: \pi_1(p) = \{[\gamma_e]\}$$

Další příklad by mohl být nekonečný válec. Fundamentální grupa  $\pi_1(p)$  je pak izomorfní s celými čísly  $\mathbb{Z}$ .

Pokud vezmeme  $T^n$  torus, který je tvořen:

$$S^1 \times \underbrace{\dots \times}_{n} S^1,$$

pak pro jeho fundamentální grupu  $\pi_1(p)$  lze zkonstruovat grupový izomorfismus se  $\underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times}_{n} \mathbb{Z}$  [1].

## 2 Topologická varieta a bandly

Mějme obecný pojem topologická varieta. Zhruba řečeno a dosti povrchně by se dalo říct, že varieta je jistý topologický prostor, který lze lokálně zobrazit na euklidovský prostor. Následně budeme definovat dodatečné struktury, jako je kompatibilita, diferencovatelnost atd. Pojdme nyní v matematickém formalizmu zkonstruovat tento objekt.

### 2.1 Variety

#### 2.1.1 Definice (Varieta)

Hausdorffův a parakompaktní topologický prostor  $(V, \mathcal{O})$  nazveme topologickou varietou, pokud pro každý bod  $p \in V$  existuje otevřené okolí  $U \in \mathcal{O} \wedge p \in U$  a dále existuje zobrazení  $f: U \rightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , které je topologickým izomorfismem (homeomorfismem).

#### 2.1.2 Poznámka

Pro další práci si označíme dvojici  $(U, f)$  jako  $m$ -dimenzionální mapu na  $V$ . Dále značíme, že  $\dim M = n$ . Pak zobrazení  $f$  přiřazuje lokálně v  $\mathbb{R}^n$  jistý bod  $f(p)$ , který lze v euklidovském prostoru zapsat za pomoci souřadnic v tomto prostoru.

#### 2.1.3 Definice (Podvarieta)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologická varieta a dále  $N$  je podmnožinou  $M$ . Pokud  $(N, \mathcal{O}|_N)$  je opět varietou, pak se jedná o podvarietu variety  $(M, \mathcal{O})$ .

#### 2.1.4 Definice (Přechodové zobrazení)

Mějme dvě mapy  $(V_1, f_1), (V_2, f_2)$  na  $V$  a pokud navíc na topologické varietě platí, že  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , pak existuje přechodové zobrazení  $f_2 \circ f_1^{-1}$  mezi těmito dvěma mapami, která přenáší tento průnik z jednoho  $\mathbb{R}^n$  do druhého  $\mathbb{R}^n$ .

#### 2.1.5 Definice

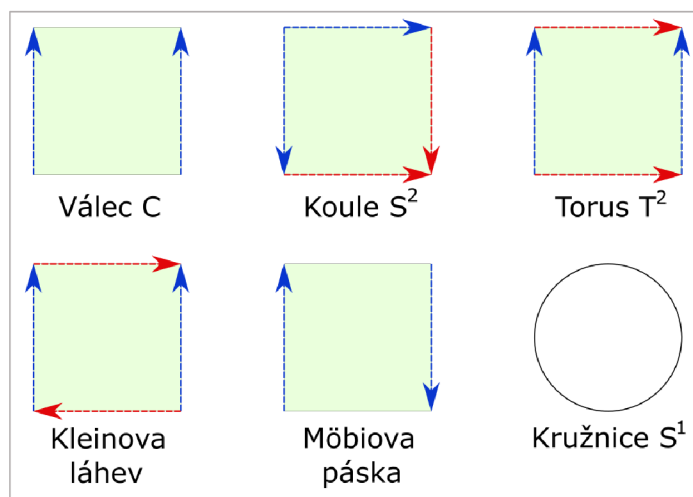
Mějme dvě topologické variety  $(M, \mathcal{O}_M), (N, \mathcal{O}_N)$ , pak také  $(M \times N, \mathcal{O}_{M \times N})$  je topologickou varietou. A navíc pro dimenzi nové variety bude platit, že [1]:

$$\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N) \quad 2.1$$

#### 2.1.6 Příklad

Za pomoci této definice jsme schopni definovat  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Jedná se tedy o torus, který je (topologický) součin dvou kružnic. Torus lze zobecnit na  $n$ -dimenzionální případ:  $T^n = S^1 \times S^1 \dots S^1 \times S^1$ . Obdobně lze definovat i dvourozměrný válec  $C = S^1 \times \mathbb{R}$ .





Obrázek 2-1 Repräsentace 3D-4D objektů v rovině, Zdroj: Vlastní

### 2.1.7 Poznámka

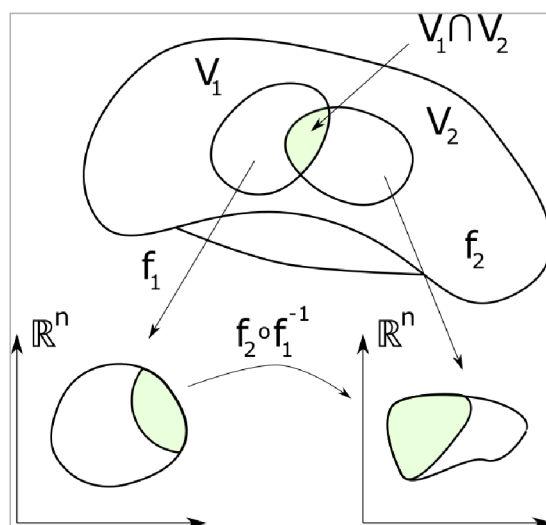
Později se ukáže, že toto vytváření nových variet je až moc striktní. Na příklad Möbiovu pásku za pomoci této definice nelze zkonstruovat. I když se dá tento objekt lokálně vyjádřit jako  $S^1 \times \langle 0,1 \rangle$ , vyvstane otázka, jestli neexistuje obecnější pojem s menšími požadavky, který by tuto strukturu dovoloval. Daný pojem se nazývá bandl. V další části se budeme této struktuře věnovat podrobněji.

### 2.1.8 Definice (Atlas)

O množině map  $\{(V_i, f_i)\}_{i \in I}$  řekneme, že je atlas  $\mathcal{A}$  na  $V$ , pokud  $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ .

### 2.1.9 Definice ( $C^0$ Kompatibilita map)

Mějme mapy  $(V_1, f_1), (V_2, f_2)$ . Nazveme je  $C^0$  kompatibilními, pokud  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  anebo obrazy průniku množin  $f_1(V_1 \cap V_2), f_2(V_1 \cap V_2)$  na varietě  $V$  jsou otevřené, což koresponduje s pojmem, že přechodové zobrazení  $f_2 \circ f_1^{-1}$  je spojitě.



Obrázek 2-2 Přechod mezi mapami, Zdroj: Vlastní

### 2.1.10 Poznámka

Lze vidět, že všechny mapy jsou  $C^0$  kompatibilní. To vyplývá z definice těchto map. Zdá se, že tento pojem je redundantní, ale díky této definici a difeomorfismu budeme moci později definovat kompatibilitu vyšších řádů.

### 2.1.11 Definice ( $C^0$ Atlas)

Atlas nazveme  $C^0$  atlasem, pokud byl vytvořen pouze z  $C^0$  kompatibilních map.

### 2.1.12 Příklad

Uvažujme množinu  $M = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1\}$ , kde pod topologií rozumíme topologii z  $\mathbb{R}^2$ , která je vnořena na tuto množinu. Vidíme, že naše varieta  $M$  je nyní obyčejná uzavřená křivka na prostoru  $\mathbb{R}^2$ , která je dosti podobná kružnici. Mějme mapy  $f_1, f_2, g_1, g_2$ , které jsou definované jako:

$$\begin{aligned}
 f_1: \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, n > 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\
 f_1(m, n) &= m \\
 f_2: \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, n < 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\
 f_2(m, n) &= m \\
 g_1: \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, m > 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\
 g_1(m, n) &= n \\
 g_2: \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, m < 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\
 g_2(m, n) &= n
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Je třeba ověřit, že se opravdu jedná o mapy, tudíž zda jsou homeomorfové. Což znamená, že musíme ověřit, že jsou mapy bijektivní, spojitě, a že existují inverze k těmto mapám. Ukážeme to pro jednu mapu:

Injekce:  $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  :

$$(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2) \Rightarrow f_1(m_1, n_1) \neq f_1(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \tag{2.3}$$

Jelikož jsme se omezili na interval  $(-1, 1)$ , nenastane tento příklad. Lze ověřit sporem:

$$(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2) \wedge m_1 = m_2 \Rightarrow n_1 \neq n_2 \tag{2.4}$$

To je ale v rozporu, jelikož neexistují dvě rozdílné  $n_1, n_2$ , které by splňovaly omezení  $\{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, n > 0\}$ .

Surjekce:  $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$

$$\forall n: \exists(m, n): f_1(m, n) = n \tag{2.5}$$

Pro všechny  $n$  lze sestavit takovou dvojici  $(m, n)$ :

$$(m, n) = ((1 - n^8)^{1/8}, n) \quad 2.6$$

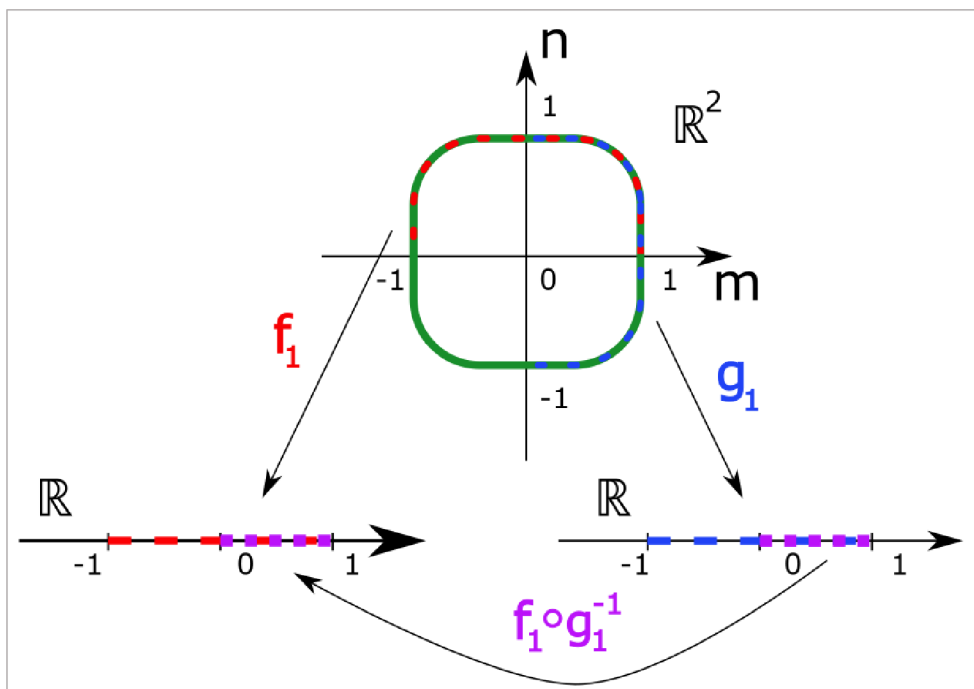
Máme bijekci. Spojitost je triviálně splněna. Ověření existence inverze  $f_1^{-1}$  je triviální a plyne z bijekce.

$$\begin{aligned} f_1^{-1}: (-1, 1) &\rightarrow \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, n > 0\} \\ n &\mapsto ((1 - n^8)^{1/8}, n) \end{aligned} \quad 2.7$$

Abychom mohli říct, že soubor map  $f_1, f_2, g_1, g_2$  tvoří  $C^0$  Atlas, tak musíme ověřit, že mapy jsou kompatibilní. Opět ukážeme kompatibilitu pouze u dvou map  $f_1, g_1$ . Jelikož je jejich průnik nenulový  $\{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^8 + n^8 = 1, m > 0, n > 0\}$ , musí existovat přechodové zobrazení  $f_1 \circ g_1^{-1}$ .

$$\begin{aligned} f_1 \circ g_1^{-1}: (0, 1) &\rightarrow (0, 1) \\ n &\mapsto f_1 \left( (1 - n^8)^{1/8}, n \right) = (1 - n^8)^{1/8} \end{aligned} \quad 2.8$$

Množina těchto map skutečně tvoří  $C^0$  Atlas.



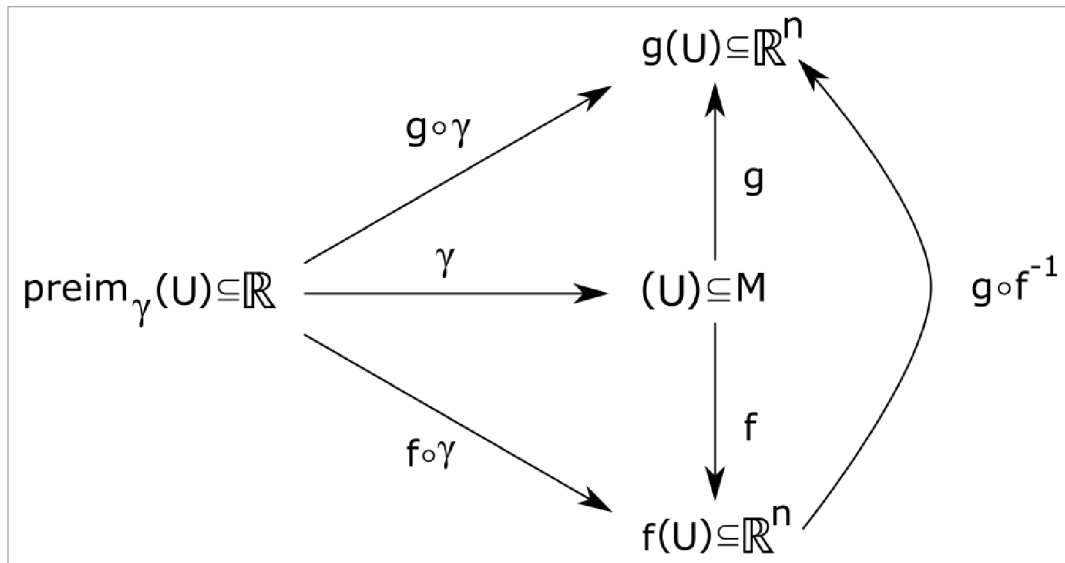
Obrázek 2-3 Vizualizace příkladu, Zdroj: Vlastní

### 2.1.13 Definice

$C^0$  atlas  $\mathcal{A}$  nazveme maximálním atlasem, pokud pro všechny mapy  $(U, f) \in \mathcal{A}$  v tomto atlasu platí, že všechny ostatní mapy jsou  $C^0$  kompatibilní s touto mapou.

### 2.1.14 Poznámka

Uvažujme křivku  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ . Jelikož na samotné varietě nemáme žádnou možnost zjistit, jestli je něco spojitě či nikoliv (nebo dokonce derivovatelné), musíme využít definici map. Budeme se koukat pouze na část  $M$  z pohledu mapy  $(U, f)$ , která část variety lokálně zobrazí do  $\mathbb{R}^n$ . Řekneme, že křivka  $\gamma$  je spojitá na varietě, pokud pro všechny mapy na  $M$  platí, že  $\gamma$  je spojitá na těchto mapách. Pokud ale zvolíme jinou mapu  $(U, g)$ , která přenáší stejnou oblast do jiného  $\mathbb{R}^n$  s jinými bázemi, pak nás bude zajímat, jestli existuje přechod mezi bázemi ( $g \circ f^{-1}$ ). Tento přechod je zobecněný jacobíán. Více o konstrukci a ověření vlastností tohoto přechodu lze dohledat zde [3].



Obrázek 2-4 Křivka gamma, Zdroj: Vlastní

Je potřeba si všimnout, že v klasické fyzice jsme doposud pracovali pouze v mapách a s přechody mezi těmito mapami reálného světa. Vůbec jsme nestudovali vlastnosti variety  $M$  a struktury na ní. Přímá studie  $M$  se ukázala jako velice vhodná v kvantové teorii. Dá se říct, že klasická fyzika pouze „osahává“ skutečnou strukturu světa  $M$  za pomoci lokální reprezentace v  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Bandly-Fibrováný prostor

V české literatuře se používají různé pojmy pro tuto strukturu, a to Bandl či Fibrováný prostor. Vždy se bavíme o struktuře na varietě.

### 2.2.1 Definice (Bandl)

Bandl na topologické varietě je trojice  $(E, \pi, M)$ , kde  $E$  a  $M$  jsou topologické variety.  $E$  nazveme totálním prostorem a  $M$  se nazývá báze prostoru. Dále zobrazení  $\pi$  je spojitě (tento pojem lze opravdu zavést, jelikož je to přechod mezi dvěma topologiemi) a surjektivní. Toto zobrazení nazveme projekcí.

$$E = M \times F$$

$$\pi: M \times F \rightarrow M$$
2.9

$$(p, f) \mapsto p$$

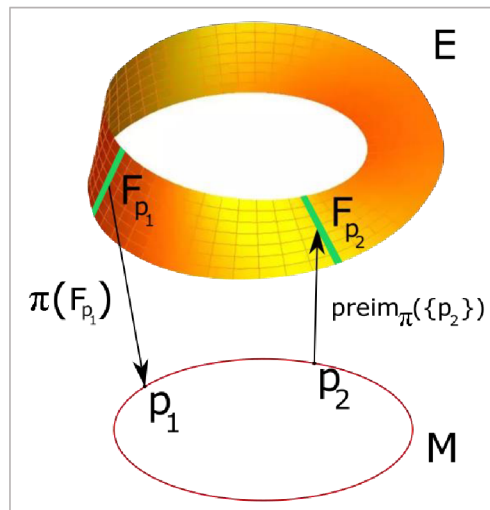
### 2.2.2 Definice (Fiber)

Nechť  $p \in M$ , pak  $\text{preim}_\pi(\{p\}) = F_p$  nazveme fibrem v bodě  $p$  (český překlad vlákno se skoro nepoužívá).

### 2.2.3 Poznámka

Dříve jsme zmiňovali 2.1.7, že bandl je zobecněným pojmem produktu dvou topologických variet. Opravdu lze ukázat, že bandl obsahuje tento produkt. Navíc obsahuje i jiné struktury, jako je například Möbiova páska.

Pro Möbiovu pásku dostáváme, že se lokálně chová jako  $S^1 \times (-1,1)$  (interval je zvolen libovolně). Problém v produktu by nastal na hranici intervalu. Ten se odstraní za pomoci bandlu, který tyto dvě hranice ztotožní díky projekčnímu zobrazení  $\pi$ .



Obrázek 2-5 Möbiova páska, Zdroj: Vlastní

### 2.2.4 Definice (Fiber Bandl)

Mějme bandl  $(E, \pi, M)$ , pro který navíc platí, že  $\forall p \in M, \text{preim}_\pi(\{p\}) = F_p$ , pak je tento fiber všude stejný. Tuto strukturu nazveme fiber bandl s typickým fiberem  $F$ .

### 2.2.5 Poznámka

Nyní se omezíme na bandly, které mají pro všechny body stejný fiber. Doposud jsme dovoluvali, aby na jedné části  $M$  byl fiber  $F$ , třeba kružnice  $S^1$ , a na druhé interval  $(-1,1)$ . Ihned z této definice plyne, že Möbiova páska je fiber bandlem.

### 2.2.6 Definice (Section – řez bandlu)

Mějme bandl  $(E, \pi, M)$ . Dále mějme zobrazení  $\sigma: M \rightarrow E$ , které splňuje:  $\pi \circ \sigma = id_M$ , pak toto zobrazení nazveme section-řezem na bandlu.

### 2.2.7 Definice (Morfismus mezi bandly)

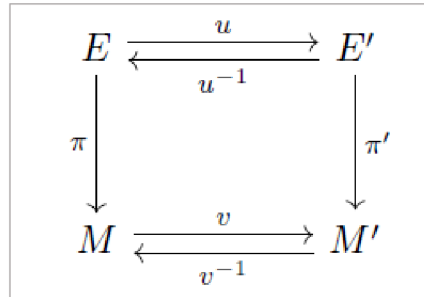
Nechť existují dva bandly  $(E, \pi, M)$  a  $(E', \pi', M')$  a nechť existují dvě zobrazení  $u: E \rightarrow E'$  a  $v: M \rightarrow M'$ . Pak tuto dvojici  $(u, v)$  nazveme morfismus mezi bandly pokud platí, že komutují:

$$\pi' \circ u = v \circ \pi \quad 2.10$$

Navíc lze ukázat, že pro dané  $u$  existuje jediné  $v$ , které definuje morfismus mezi těmito bandly. Důkaz lze dohledat v knize [2].

### 2.2.8 Definice (Izomorfní bandly)

Dva bandly  $(E, \pi, M)$  a  $(E', \pi', M')$  nazveme izomorfní, pokud platí, že existuje morfismus mezi bandly  $(u, v)$ , a navíc existují inverze  $(u^{-1}, v^{-1})$ :



Obrázek 2-6 Izomorfismus, Zdroj: [1], Lec 06 – 54:39

### 2.2.9 Poznámka

Tato dvojice  $(u, v)$  se nazývá izomorfismus mezi bandly, které zachovávají struktury na těchto bundlech.

### 2.2.10 Definice (Lokálně izomorfní)

Bandl  $(E, \pi, M)$  je lokálně izomorfní k  $(E', \pi', M')$ , pokud  $\forall p \in M: \exists U \in \mathcal{O}, p \in U$  je takový, že bandl na tomto  $U$  je izomorfní s  $(E', \pi', M')$ . [2] (Zde je definice pro vektorové bandly).

### 2.2.11 Definice

Bandl  $(E', \pi', M')$  nazveme triviální bandl (respektive lokálně triviální), pokud je izomorfní (resp. lokálně izomorfní) se součinným bandlem.

### 2.2.12 Definice (Pull-back)

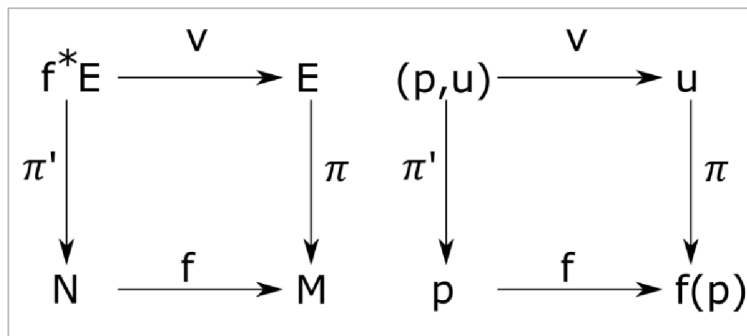
Nechť  $(E, \pi, M)$  je fiber bandl s typickým fibrem  $F$ . Pokud je dáno zobrazení  $f: M \rightarrow N$ , pak dvojice  $(E, f)$  definuje nový fiber bandl nad  $N$  se stejným fibrem  $F$ . Nechť  $f^*E$  je podprostor  $N \times E$ , jenž se skládá z bodů  $(p, u)$ , kde  $f(p) = \pi(u)$ . Pak  $f^*E$  nazveme pullback od  $E$  daného  $f$ . Fiber  $F_p$  je jednoznačně identické s fibrem  $F$  od  $E$ . Dále dodefinujeme

$$\begin{aligned} \pi' &: f^*E \rightarrow N \\ \pi' &: (p, u) \mapsto p \\ v &: f^*E \rightarrow E \\ v &: (p, u) \mapsto u \end{aligned} \quad 2.11$$

Pro dané zobrazení  $f$  jsme dokázali dodefinovat zpětnou strukturu na  $N$ , proto platí:

$$f \circ \pi'(p, u) = \pi \circ v(p, u) \quad 2.12$$

Podrobnější konstrukci lze dohledat v knize [4] na straně 375.



Obrázek 2-7 PullBack, Zdroj: Vlastní

### 2.2.13 Poznámka

Tato struktura se nám bude velice hodit v momentu, kdy definujeme tečný prostor  $TM$ .

## 3 Tenzorový počet

K definici tenzoru budeme potřebovat pojmy vektorový prostor a k němu duální prostor. Tyto prostory pak budeme multilineárně skládat a vytvoříme tak pojem tenzoru. Co je myšleno pod pojmem multilinearity osvětlíme níže. Zatím jsme se snažili na vytvořené struktury přidávat další požadavky, abychom vytvořili co možná nejpřesnější popis reálného světa. To ale není případ tenzorového počtu, ten nám bude sloužit pouze jako nástroj. Konstrukce tečného prostoru  $T_p M$  využívá hojně tenzorový počet. Pokud bude chtít čtenář najít konkrétnější informace o těchto strukturách, doporučuji knihu [3].

### 3.1 Vektorový prostor a jeho duál

#### 3.1.1 Definice (Vektorový prostor)

Vektorový prostor (lineární prostor)  $V$  nad polem  $F$  je trojice  $(V, \oplus, \odot)$ , kde  $V$  je množina s dvěma operacemi, sčítáním  $\oplus$  a násobením  $\odot$  elementem z  $F$  (skalárem), jež jsou definovány:

$$\begin{aligned}\oplus: V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\mapsto v \oplus w \\ \odot: F \times V &\rightarrow V \\ (c, v) &\mapsto c \odot v\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dále platí, že  $(V, \oplus)$  je abelovská grupa a pro zobrazení  $\odot$  platí:

$$\begin{aligned}1 \odot v &= v \\ c \odot (v \oplus w) &= (c \odot v) \oplus (c \odot w) \\ (c + d) \odot v &= (c \odot v) \oplus (d \odot v) \\ (c \cdot d) \odot v &= c \odot (d \odot v)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Toto platí pro všechny  $v, w \in V$  a pro všechny  $c, d \in F$ . Kde pod 1 v 3.2 rozumíme jednotkový prvek z  $F$ .

#### 3.1.2 Definice (Vektorový podprostor)

Nechť existuje vektorový prostor  $(V, \oplus, \odot)$  nad polem  $F$  a dále nechť  $U \subseteq V$  a dále  $U \neq \emptyset$ . Pak řekneme, že trojice  $(U, \oplus|_{U \times U}, \odot|_{F \times U})$  je vektorový podprostor prostoru  $(V, \oplus, \odot)$ , pokud platí  $\forall u_1, u_2 \in U, \forall c \in F$  že  $(c \odot u_1) \oplus u_2 \in U$ .

#### 3.1.3 Příklad

Mějme množinu

$$P_2 = \left\{ p: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=1}^2 p_i x^i, p_i \in \mathbb{R} \right\}\tag{3.3}$$



Jde vidět, že se jedná o množinu polynomů řádu 2. Dále mějme na této množině definované operace  $\oplus, \odot$ :

$$\begin{aligned} \oplus: P_2 \times P_2 &\rightarrow P_2 \\ (p, q) &\mapsto p \oplus q = p(x) + q(x) \\ \odot: \mathbb{R} \times P_2 &\rightarrow P_2 \\ (c, p) &\mapsto c \odot p = cp(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$P_1 \subseteq P_2$  a operace  $\oplus, \odot$  jsou stejné, tedy i vnořené, což automaticky splní druhou podmínku pro vektorový podprostor.

### 3.1.4 Definice (Lineární zobrazení)

Nechť existují dva vektorové prostory  $(V, +_V, \cdot_V)$ ,  $(W, +_W, \cdot_W)$ , které jsou definované nad stejným polem  $F$  a dále mějme obecné zobrazení  $f: V \rightarrow W$ . Toto zobrazení nazveme lineární, pokud  $\forall v_1, v_2 \in V$  a  $\forall c \in F$  platí, že

$$f((c \cdot_V v_1) +_V v_2) = (c \cdot_W f(v_1)) +_W f(v_2). \tag{3.5}$$

### 3.1.5 Příklad

Pokračujeme v příkladu 3.1.3, kde jsme ukázali, že množina  $P_2$  tvoří vektorový prostor s daným sčítáním a násobením.

Nechť  $\delta$  je zobrazení definované jako

$$\begin{aligned} \delta: P_2 &\rightarrow P_2 \\ p &\mapsto \delta(p) = p'. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pod pojmem  $p'$  chápeme klasickou derivaci ze základních kurzů matematické analýzy. Ukážeme, že se jedná o lineární zobrazení.

$$\begin{aligned} &\delta(c(p_1 + p_2x + p_3x^2) + (p_4 + p_5x + p_6x^2)) = \\ &= \delta((cp_1 + p_4) + (cp_2 + p_5)x + (cp_3 + p_6)x^2) = \\ &= c(p_2 + 2p_3x) + (p_5 + 2p_6x) = \\ &= c\delta(p_1 + p_2x + p_3x^2) + \delta(p_4 + p_5x + p_6x^2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Díky libovolnosti  $q_1, q_2$  je lze zvolit jako  $p_1, p_4$ . Což zaručí vlastnost, že se jedná o lineární zobrazení  $\delta: P_2 \xrightarrow{\sim} P_2$ . Pro funkce platí

$$\delta(af + g) = (af + g)' = af' + g' = a\delta(f) + \delta(g). \tag{3.8}$$

Obecně platí, že kompozice dvou lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení [4].

### 3.1.6 Definice (Lineární izomorfismus)

Pokud lineární zobrazení  $f$  je navíc bijekcí, pak nazveme tyto dva vektorové prostory izomorfní. Zobrazení  $f$  se pak nazývá lineárním izomorfismem.

### 3.1.7 Definice (Homomorfismus)

Nechť existují dva vektorové prostory  $V, W$ . Definujme množinu  $Hom(V, W)$  za pomoci lineárních zobrazení  $f$  takto:

$$Hom(V, W) = \{f: V \rightarrow W\} \quad 3.9$$

Tato množina navíc tvoří vektorový prostor, pokud se vhodně dodefinují operace na této množině.

$$\begin{aligned} \oplus: Hom(V, W) \times Hom(V, W) &\rightarrow Hom(V, W) \\ (f_1, f_2) &\mapsto f_1 \oplus f_2 \\ f_1 \oplus f_2: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto (f_1 \oplus f_2)(v) = f_1(v) +_W f_2(v) \end{aligned} \quad 3.10$$

Vidíme, že operace  $\oplus$  se dá definovat tak, že se jedná o „zdědění“ z nižší struktury  $f: V \rightarrow W$ . To stejné uděláme pro operaci  $\odot$  nad polem  $F$ .

$$\begin{aligned} \odot: F \times Hom(V, W) &\rightarrow Hom(V, W) \\ (c, f) &\mapsto c \odot f \\ c \odot f: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto (c \odot f)(v) = c \cdot_W f(v) \end{aligned} \quad 3.11$$

Dále je potřeba ověřit skutečnost, že se jedná o lineární zobrazení, a že tato struktura splňuje vlastnosti vektorového prostoru. Tato ověření lze dohledat zde [1], [5], ale jsou dosti triviální.

### 3.1.8 Poznámka

Dále nebudeme využívat různých notací pro operace na rozdílných strukturách.

### 3.1.9 Poznámka

Je dobré si povšimnout, že vektorový prostor  $V$  lze zobecnit ve smyslu nahrazení pole  $F$  okruhem  $R$  s jedničkou, čímž dostáváme modul nad okruhem  $R$ .

Uvědomíme si, že nelze vykonstruovat vektorový prostor z modulu. Ukažme si to na protipříkladu pro  $f \in Hom(V, W)$ ,  $f \neq e$  a  $c \in R$ , kde bude platit  $af \in Hom(V, W)$ :

$$\begin{aligned} cf: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto (cf)(v) = cf(v) \\ cf(v) &= f(cv) \end{aligned} \quad 3.12$$

Využili jsme definice o „zdedění“ 3.10 a linearitu zobrazení  $f$ . Necht' naše funkce  $f = ag$ , pak lze napsat, že:

$$\begin{aligned}c(ag)(v) &= (ag)(cv) \\cag(v) &= ag(cv) \\cag(v) &= acg(v) \\(ca - ac)g(v) &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

To ale obecně pro okruh  $R$  neplatí  $ca - ac = 0$ . Tudíž nelze zkonstruovat takový vektorový prostor.

### 3.1.10 Definice (Duální vektorový prostor)

Opět mějme vektorový prostor  $V$  nad polem  $F$ . Duální vektorový prostor  $V^*$  k  $V$  posléze definujme jako:

$$V^* = \text{Hom}(V, F)\tag{3.14}$$

Kde pole  $F$  je obecně taky vektorovým prostorem  $\Rightarrow$  lze uvažovat  $V^*$ .

### 3.1.11 Poznámka

Takto definovaný objekt bývá často nazýván: Lineární funkcionály, kovektory, 1-formy  $\omega\dots$  na  $V$ . V této práci se bude držet terminologie, že se jedná o duální vektorový prostor  $(V^*, +, \cdot)$ .

### 3.1.12 Příklad

Uvažujme klasický prostor  $\mathbb{R}^3$ , který je zajisté i vektorovým prostorem  $V$ .

Dále mějme lineární zobrazení  $j$ :

$$\begin{aligned}j: V &\simeq \mathbb{R} \\(a, b, c) &= j(a, b, c) = 2a + 0b + \frac{2}{3}c\end{aligned}\tag{3.15}$$

Ověření linearit je triviální, stačí pouze ukázat že:

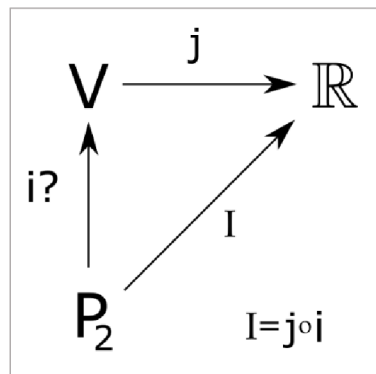
$$\begin{aligned}j(c(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)) &= \\= cj(v_1, v_2, v_3) + j(w_1, w_2, w_3)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Pro lineární zobrazení  $j$  platí, že  $j \in V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ .

Uvažujme nyní pokračování příkladu s polynomy  $P_2$ . Definujme lineární zobrazení  $I$ :

$$\begin{aligned}I: P_2 &\simeq \mathbb{R} \\p &= I(p) = \int_{-1}^1 p(x)dx\end{aligned}\tag{3.17}$$

Opět lze ukázat, že se jedná o lineární mapu a dále  $I \in V^*$ .



Obrázek 3-1 Bijektivní lineární zobrazení, Zdroj: Vlastní

Vyvstává otázka, jestli bychom nemohli dodefinovat zobrazení  $i$ , které by splňovalo, že bude platit:  $I = j \circ i$ . Navíc budeme platit, že se jedná o bijektivní lineární zobrazení.

$$\begin{aligned}
 & i: P_2 \times V \\
 p & \mapsto i(p) = i(p_1 + p_2x + p_3x^2) = & 3.18 \\
 & = (p_1, p_2, p_3)
 \end{aligned}$$

Ověřme, že se jedná o bijekci: Injekce  $\forall (p, q) \in P_2: p \neq q \Rightarrow i(p) \neq i(q)$  sporem:

$$p = q \Rightarrow p_i = q_i \Rightarrow i(p) = i(q) \quad 3.19$$

Surjekce:  $\forall (a, b, c): \exists p \in P_2: i(p) = (a, b, c)$ :

$$p = a + bx + cx^2 \quad 3.20$$

Linearita:

$$\begin{aligned}
 & i(c(p_1 + p_2x + p_3x^2) + (q_1 + q_2x + q_3x^2)) = \\
 & = ((cp_1 + q_1), (cp_2 + q_2), (cp_3 + q_3)) = & 3.21 \\
 & = c(p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) = \\
 & = ci(p) + i(q)
 \end{aligned}$$

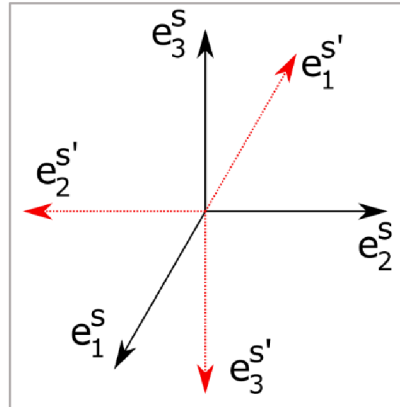
Opravdu existuje takové  $i$ .

### 3.1.13 Poznámka

Většina struktur ve fyzice se vlastně nesprávně nazývá vektorem. Lze ukázat, díky naší konstrukci, že gradient vektoru je kovektor a nikoliv vektor, jak bylo prezentováno. Obdobně, ale nikoliv již triviálně, lze ukázat, že výsledek vektorového součinu není vektor. Jedná se o asymetrický tenzor druhého řádu.

Důkaz.

Složky tenzorů se obecně transformují za pomoci daných pravidel, které jsou spojeny s přechodem mezi bázemi. Přirozeně vezmeme prostor  $\mathbb{R}^3$  a dva vektory  $u, v$  z tohoto prostoru. Zvolme klasickou kartézskou bázi tohoto prostoru  $e_i^s$ . Zvolme nyní bázi prostoru  $e_i^{s'}$ , která je opačná vůči  $e_i^s$ .



Obrázek 3-2 Souřadné systémy, Zdroj: Vlastní

Matice přechodu  $A$  od báze  $s$  do báze  $s'$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Triviálně dostaneme, že pro přechod bude platit  $v^s \rightarrow -v^s = v^{s'}$  to stejné pro  $u$ . Pro vektorový součin dostaneme  $w^s = u^s \times v^s \rightarrow (-u^s) \times (-v^s) = w^s$ , ale samotný vektor  $w$  by se měl transformovat takto  $w^s \rightarrow -w^s = w^{s'}$ . Vidíme, že  $w$  nemůže být vektor. Ve skutečnosti se jedná o antisymetrický tenzor druhého řádu, který je definován takto

$$w_{kl} = u_k v_l - u_l v_k$$

$$w_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ -u_1 v_2 + u_2 v_1 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 & -u_2 v_3 + u_3 v_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednoznačně lze ztotožnit antisymetrický tenzor druhého řádu s klasickým vektorem, ale vidíme, že nesplní podmínky transformace, jelikož se musí transformovat jako tenzor druhého řádu.

$$w_{kl} \mapsto (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Rigoróznější odvození lze dohledat v knize [6].

### 3.1.14 Poznámka

Dále budeme používat Einsteinovu sumační konvenci. Budeme vynechávat symbol sumace, když složky, přes které budeme sčítat, budou mít stejný index, přičemž jeden bude „horní“ a druhý „dolní“.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{e}_i = v^i \vec{e}_i \quad 3.22$$

### 3.1.15 Definice (Hamelova báze)

Mějme vektorový prostor  $(V, +, \cdot)$ . Pak podmnožinu  $B \subseteq V$  nazveme Hamelovou bází, pokud platí pro všechny konečné podmnožiny  $\{b_1, \dots, b_n\} \in B$ , že jsou lineárně nezávislé:

$$\lambda^i b_i = 0 \implies \lambda^i = 0 \quad 3.23$$

A dále platí, že: [1]

$$\forall v \in V, \exists v^1, \dots, v^m \in F, \exists b_1, \dots, b_m \in B: v = v^i b_i \quad 3.24$$

### 3.1.16 Poznámka

Této definice lze využít v Hilbertových prostorech. Využijeme ji ve fyzikálních příkladech.

### 3.1.17 Definice

Pro vektorový prostor  $(V, +, \cdot)$  s Hamelovou bází definujeme pojem dimenze jako  $\dim V = |B|$ .

### 3.1.18 Poznámka

Navíc lze ukázat, že platí  $(V^*)^* \cong V$ , viz. [7]. Jde vidět, že jsme omezeni na pouze konečné báze. Tento problém se dá vyřešit definováním Shauderovými bázemi, ale ta vyžaduje pojem konvergence v normě, a tento pojem nemáme zatím k dispozici.

## 3.2 Tenzory

Jak již bylo výše zmíněno, doporučuji knihy [3] a [8] v případě, že by čtenář chtěl hlouběji rozšířit své znalosti o tenzorovém počtu.

### 3.2.1 Definice (Tensor)

Tensor  $T$  typu  $(r, s)$  na  $V$  definujeme jako multilineární zobrazení:

$$T = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-krát}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-krát}} \xrightarrow{\sim} F \quad 3.25$$

Kde pod multilinearitou rozumíme linearitu v každé složce.

### 3.2.2 Definice

Dále definujeme:

$$T_s^r V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-krát}} = \{T \mid T \text{ je } (r, s) \text{ tenzor} \} \quad 3.26$$

Na takovéto množině lze navíc zavést operace  $+$ ,  $\cdot$  z vektorového prostoru  $V$  nad  $F$ , jež budou definovány po složkách, jako byly definované pro  $\text{Hom}(V, W)$ .

$$\begin{aligned}
+ : T_s^r V \times T_s^r V &\rightarrow T_s^r V \\
(T, S) &\mapsto T + S \\
\cdot : F \times T_s^r &\rightarrow T_s^r \\
(c, T) &\mapsto c \cdot T
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

Takto definované operace zaručí, že obdržíme opět vektorový prostor [3].

### 3.2.3 Poznámka

Někdy se zápis  $T_s^r V$  zkracuje na  $V_s^r$ . Obě varianty jsou dosti časté, i zde je budeme zaměňovat. Dále  $T \in T_s^r V$  nazveme  $r$ -krát kontravariantní a  $s$ -krát kovariantní tenzor na  $V$  [9].

### 3.2.4 Definice (Tensorový součin)

Nechť existují dva tenzory  $T \in T_s^r V, S \in T_q^p V$ , pak tenzorový součin  $T \otimes S \in T_{s+q}^{r+p} V$  definujeme:

$$\begin{aligned}
(T \otimes S)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+p}, \omega_1, \dots, \omega_s, \omega_{s+1}, \dots, \omega_{s+q}) &= \\
= T(v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s) S(v_{r+1}, \dots, v_{r+p}, \omega_{s+1}, \dots, \omega_{s+q}) &
\end{aligned}
\tag{3.28}$$

Kde  $v_i \in V$  a  $\omega_i \in V^*$ . Dále násobení mezi  $T, S$  se odehrává na poli  $F$ , což plyne z definic  $T, S$ .

### 3.2.5 Poznámka

Je dobré si povšimnout, že nelze zaměnit symbol  $\otimes$  definovaný v 3.2.2 za 3.2.4.

### 3.2.6 Poznámka (Vektory a kovektory jako tenzory)

Mějme  $\varphi \in V^*$ , kde se jedná o lineární zobrazení  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} F$ . To ale není nic jiného než definice tenzoru  $\varphi$  typu  $(0,1)$  Definice (Tensor) 3.2.1.

Mějme  $v \in V \cong (V^*)^*$  (je potřeba dodat, že se jedná o prostor s konečnou dimenzí), pak dle definice duálu dostáváme, že se jedná o lineární zobrazení  $v: V^* \xrightarrow{\sim} F$ . To ale není nic jiného než naše definice tenzoru  $v$  typu  $(1,0)$ .

### 3.2.7 Příklady

Dle předchozích úvah lze analogicky odvodit, že:

Skaláry jsou tenzory typu  $(0,0)$ .

Bilineární forma je tenzor typu  $(0,2)$ . Takové struktury jsou například metrický tenzor a skalární součin.

Nechť  $T$  je  $(1,1)$  tenzor ( $T_1^1 V = V \otimes V^* = \{T \mid T: V^* \times V \xrightarrow{\sim} F\}$ ). Ukážeme, že  $T_1^1 V \cong \text{End}(V^*) = \text{Hom}(V^*, V^*)$  platí. Pro  $T_v \in \text{End}(V^*)$  dostáváme:

$$\begin{aligned}
T_v: V^* &\xrightarrow{\sim} V^* \\
\omega &\mapsto T(\cdot, \omega),
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

kde zajisté platí  $T(\cdot, \omega) \in V^*$ .

Pro dané  $\omega$ :

$$\begin{aligned} T(\cdot, \omega): V &\simeq F \\ v &\mapsto T(v, \omega) \end{aligned} \quad 3.30$$

Druhý směr: Máme dané  $T_v$ , pak ukážeme, že pro  $T$  platí:

$$\begin{aligned} T: V \times V^* &\simeq F \\ (v, \omega) &\mapsto T(v, \omega) = (T_v(\omega))(v) \end{aligned} \quad 3.31$$

Jedná se o izomorfismus.

### 3.2.8 Definice

Mějme konečně rozměrný vektorový prostor  $V$ , pak na něm lze definovat Hamelovu bázi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a následně i bázi duální  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ .

$$\epsilon^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad 3.32$$

Pak lze každý tenzor  $T \in T_s^r V$  rozložit do příslušných bází jako:

$$T = T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_r}, \quad 3.33$$

kde  $T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} \in F$  nazveme složku příslušné báze.

### 3.2.9 Definice (Symetrický tenzor)

Tensor  $T$  se nazývá symetrický v kovariantních (kontravariantních) indexech  $i$  a  $j$ , jestliže výměna  $i$ -tého a  $j$ -tého vektoru (kovektoru) v argumentech nemá vliv na hodnotu, kterou získáme vyčíslením tensoru na argumentech.

$$T_{(ij)k\dots} = \frac{1}{2}(T_{ijk\dots} + T_{jik\dots})$$

### 3.2.10 Definice (Symetrizace tenzoru přes dva indexy)

Obecný tenzor  $T_{ab\dots}$  můžeme symetrizovat přes tyto dva indexy  $a, b$  a dosáhnout tak symetrického tenzoru  $S_{ab\dots}$ :

$$S_{ab\dots} = \frac{1}{2}(T_{ab\dots} + T_{ba\dots}) \quad 3.34$$

Pro tenzor  $S_{ab\dots}$  platí:

$$S_{ab\dots} = S_{ba\dots} \quad 3.35$$

[6].



### 3.2.11 Definice (Antisymetrický tenzor)

Tensor  $T$  se nazývá antisymetrický v kovariantních (kontravariantních) indexech  $i$  a  $j$ , jestliže výměna  $i$ -tého a  $j$ -tého vektoru (kovektoru) v argumentech zamění znaménko hodnoty, kterou získáme vyčíslením tensoru na argumentech.

$$T^{[ij]k\dots} = \frac{1}{2}(T^{ijk\dots} - T^{jik\dots})$$

### 3.2.12 Definice (Antisymetrizace tenzoru přes dva indexy)

Obečný tenzor  $T^{ab\dots}$  můžeme antisymetrizovat přes tyto dva indexy  $a, b$  a dosáhnout tak antisymetrického tenzoru  $A^{ab\dots}$ :

$$A^{ab} = \frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba}) \quad 3.36$$

Pro tenzor  $A^{ab}$  platí:

$$A^{ab} = -A^{ba} \quad 3.37$$

[6].

### 3.2.13 Definice (Sumace symetrického a antisymetrického tenzoru)

Pro dva tenzory, ne nutně různého řádu, platí:

$$A^{ab}S_{ab} = 0 \quad 3.38$$

Odvození:

$$\begin{aligned} A^{ab}S_{ab} &= A^{op}S_{op} = -A^{po}S_{po} = -A^{ab}S_{ab} \\ 2A^{ab}S_{ab} &= 0 \\ A^{ab}S_{ab} &= 0 \end{aligned} \quad 3.39$$

### 3.2.14 Příklad

V Maxwellových rovnicích se často vyskytují různé kombinace operátorů působící buď na vektorovou funkci, anebo na obyčejnou funkci. Už v předchozím příkladu jsme ukázali, že derivace je lineární zobrazení. Druhá parciální derivace bude symetrický tenzor druhého řádu. Lze ukázat, že Levi-Civitův symbol je pseudotenzor, který je antisymetrický (pseudotenzor se chová zcela obdobně jako tenzor, jen má slabší předpoklady). Díky tomu lze odvodit základní vztahy pro diferenciální operátory.

Rotace gradientu:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad}(g)) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}g) \\ \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}g)\right)_i &= \epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k g = \epsilon^{ijk}\partial_{jk}^2 g = 0 \end{aligned} \quad 3.40$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} g) = \vec{0}$$

Divergence rotace:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \partial_i (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \partial_i e^{ijk} \partial_j F_k = & 3.41 \\ &= e^{ijk} \partial_{ij}^2 F_k = 0 \end{aligned}$$

Vždy jsme sumovali přes antisymetrický a symetrický tenzor, což způsobí vynulování všech složek.

## 4 Diferenciální geometrie

V této kapitole uvedeme důležité pojmy z moderní diferenciální geometrie. Rozšíříme pojem  $C^0$  kompatibilitu a zavedeme tečný prostor, kotečný prostor a fibrovanou varietu. Tyto pojmy budou nezbytné pro práci na Lieových grupách a s nimi spojenými Lieovými algebrami. Nyní navážeme na konec druhé kapitoly 2.1.14.

### 4.1 Diferencovatelnost na varietách

#### 4.1.1 Definice ( $C^r$ kompatibilitu)

Mějme mapy  $(V_1, f_1), (V_2, f_2)$  pro topologickou varietu. Nazveme je  $C^r$  kompatibilními, pokud platí, že  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , a také musí splňovat tyto vlastnosti:

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2^{-1}: f_2(V_1 \cap V_2) &\rightarrow f_1(V_1 \cap V_2) \\ f_2 \circ f_1^{-1}: f_1(V_1 \cap V_2) &\rightarrow f_2(V_1 \cap V_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tyto přechody jsou typu  $C^r$  v klasickém smyslu neboli, že jsou diferencovatelné do řádu  $r$ .

#### 4.1.2 Poznámka

V klasickém smyslu se rozumí, že se nacházíme na euklidovském prostoru  $\mathbb{R}^d$ , kde již umíme ověřit diferencovatelnost. Dle definice lze skutečně ukázat, že  $f_2(V_1 \cap V_2) \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $f_1(V_1 \cap V_2) \subseteq \mathbb{R}^d$ .

#### 4.1.3 Terminologie

Pro speciální  $r$  ( $C^r$  kompatibilitu) používáme speciální názvy. Ku příkladu:

- $C^0$  spojité zobrazení
- $C^k$   $k$ -krát diferencovatelné zobrazení
- $C^\infty$  hladké zobrazení
- $C^\omega$  analytické zobrazení

#### 4.1.4 Poznámka

Je možno i komplexní kompatibilita, pak je ale nutno požadovat i platnost Cauchyho–Riemannových podmínek.

#### 4.1.5 Definice ( $C^r$ atlas)

Nechť  $(M, \mathcal{O})$  je topologická varieta. Systém  $\mathcal{A} = \{(V_i, f_i)\}_{i \in I}$  lokálních map pokrývajících  $(M, \mathcal{O})$  nazveme  $C^r$  atlasem, jestliže libovolné dvě mapy  $(V_i, f_i), (V_j, f_j)$  z  $\mathcal{A}$  jsou  $C^r$  kompatibilní.

Úplným  $C^r$  atlasem na varietě  $(M, \mathcal{O})$  nazveme její maximální  $C^r$  atlas.

#### 4.1.6 Definice ( $C^r$ ekvivalence)

Mějme dva  $C^r$  atlasy. Řekneme, že jsou  $C^r$  ekvivalentní, pokud jejich sjednocením dostaneme opět  $C^r$  atlas. Více lze dohledat např. v [1].

#### 4.1.7 Definice (Diferencovatelná varieta)

$C^r$  diferencovatelná varieta je trojice  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Jedná se tedy o topologickou varietu, kde navíc  $\mathcal{A}$  atlas je  $C^r$  atlasem ( $r$ -krát diferencovatelné mapy).

#### 4.1.8 Definice (Diferencovatelné zobrazení)

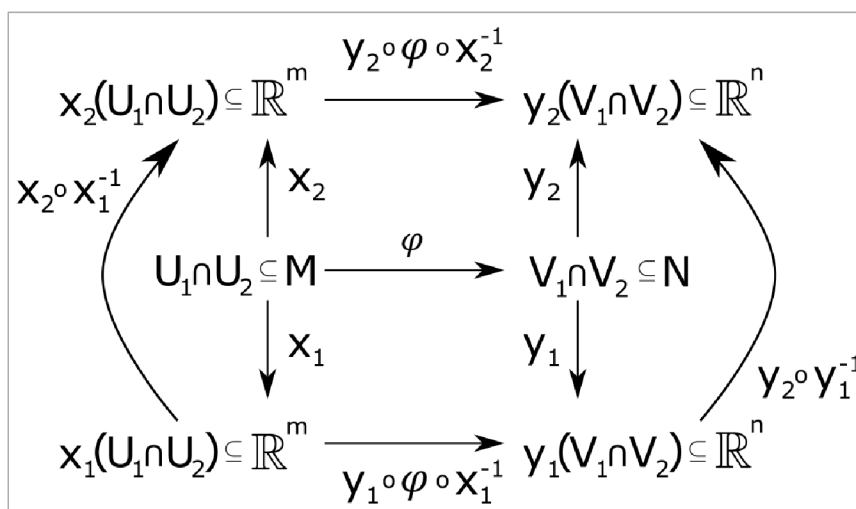
Nechť  $\varphi$  je zobrazení mezi dvěma varietami  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ ,  $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$  a oba atlasy jsou  $C^r$  atlasy. Řekneme, že zobrazení  $\varphi$  je  $C^r$ -diferencovatelné v bodě  $p \in M$ , pokud pro libovolně zvolenou mapu  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ , kde  $p \in U$ , a pro libovolnou mapu  $(V, y) \in \mathcal{A}_N$ , kde  $\varphi(p) \in V$  platí, že zobrazení  $y \circ \varphi \circ x^{-1}$  je  $r$ -krát spojitě diferencovatelná v klasickém smyslu. Pokud to platí pro všechny  $p \in M$ , pak se jedná o diferencovatelné zobrazení, [1].

#### 4.1.9 Poznámka

Ověříme, zda můžeme požadovat diferencovatelnost v klasickém smyslu.

$$\begin{aligned} x: U \rightarrow x(U) \in \mathbb{R}^m, y: V \rightarrow y(V) \in \mathbb{R}^n, \varphi: M \rightarrow N \\ x^{-1}: x(U) \in \mathbb{R}^m \rightarrow U \\ y \circ \varphi \circ x^{-1}: x(U) \in \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad 4.2$$

Díky libovolnosti map, lze navíc ukázat, že nezávisí na volbě map. Skutečně nechť máme:  $p \in U_1 \cap U_2$ ,  $\varphi(p) \in V_1 \cap V_2$  a dále  $x_1: U_1 \rightarrow x_1(U_1) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x_2: U_2 \rightarrow x_2(U_2) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_1: V_1 \rightarrow y_1(V_1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_2: V_2 \rightarrow y_2(V_2) \in \mathbb{R}^n$ .



Obrázek 4-1 Diferencovatelné zobrazení, Zdroj: Vlastní

Jelikož víme, že  $(U_1, x_1, U_2, x_2)$  patří do stejného  $C^r$  atlasu, pak dostáváme, že i jejich složení  $x_2 \circ x_1^{-1}$  patří do totožného  $C^r$  atlasu. Opravdu nezávisí na volbě map, jelikož pro libovolné mapy lze ukázat, že:

$$y_2 \circ \varphi \circ x_2^{-1} = (y_2 \circ y_1^{-1}) \circ (y_1 \circ \varphi \circ x_1^{-1}) \circ (x_2 \circ x_1^{-1}) \quad 4.3$$

#### 4.1.10 Definice (Difeomorfismus)

$C^r$  difeomorfismem nazveme  $C^r$  diferencovatelnou bijekci  $\varphi: M \rightarrow N$   $C^r$  variet  $M, N$ .

### 4.1.11 Poznámka

$M, N$  nazýváme  $C^r$  difeomorfní, pokud splňují předchozí definici. Je-li  $r = \infty$ , hovoříme o hladkých varietách, hladkých zobrazeních a (hladkých) difeomorfismech.

## 4.2 Tečný prostor

### 4.2.1 Definice (Tečné vektory)

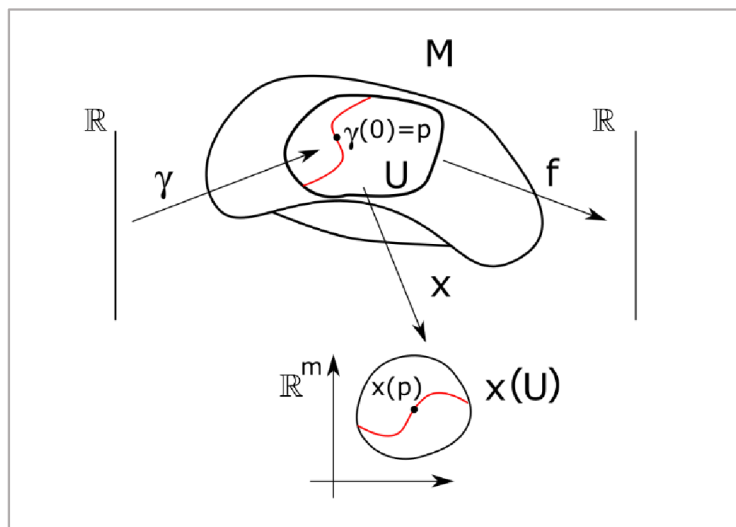
Uvažujme varietu  $M$  s klasickými vlastnostmi. Dále necht' máme hladké zobrazení  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ , které nazveme křivkou a jež má vlastnost (bez ztráty na obecnosti)  $\gamma(0) = p$ . Pak lineární zobrazení  $X_{\gamma,p}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme tečným vektorem ke křivce  $\gamma$  v bodě  $p$ , pokud platí, že:

$$\begin{aligned} X_{\gamma,p}: C^\infty(M) &\simeq \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \gamma)'(0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pro všechny  $f \in C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , [1].

### 4.2.2 Poznámka

Tato definici se nijak nerozchází s klasickou intuicí, kde tečný vektor odpovídá, například ve fyzice, termínu rychlosti. Vezměme si příklad, kdy funkce  $f$  nám definuje teplotu na varietě  $M$  a křivka  $\gamma$  odpovídá pohybu člověka na této varietě. Pak  $(f \circ \gamma)'$  v libovolném bodě odpovídá rychlosti změny teploty na této varietě v libovolném, ale pevně zvoleném bodě, viz obrázek.



Obrázek 4-2 Křivka na Varietě, Zdroj: Vlastní

### 4.2.3 Poznámka (Ekvivalence)

Pro takto definované křivky  $\gamma_i$  lze zavést tečný vektorový prostor za pomoci relace ekvivalence. Ta rozdělí všechny křivky do ekvivalentních tříd. Dané jednotlivé třídy prohlásíme za tečný vektorový prostor. Pro naše účely zvolíme trochu jiný, ale zcela ekvivalentní přístup. Odvození za pomoci tříd ekvivalence lze nalézt zde [4].

### 4.2.4 Definice (Tečný vektorový prostor)

Pro libovolný bod  $p \in M$  definujeme množinu, nazývanou tečný vektorový prostor, takto:

$$T_p M = \{X_{\gamma,p} \mid \text{kde } \gamma \text{ je hladká křivka procházející bodem } p\} \quad 4.5$$

#### 4.2.5 Tvrzení

Jedná se o vektorový prostor s operacemi, které definujeme takto

$$\begin{aligned} +: T_p M \times T_p M &\rightarrow T_p M \\ (X_{\gamma_1,p}, X_{\gamma_2,p}) &\mapsto X_{\gamma_1,p} + X_{\gamma_2,p} \\ (X_{\gamma_1,p} + X_{\gamma_2,p})(f) &= X_{\gamma_1,p}(f) +_{\mathbb{R}} X_{\gamma_2,p}(f) \\ \cdot: \mathbb{R} \times T_p M &\rightarrow T_p M \\ (c, X_{\gamma,p}) &\mapsto c \cdot X_{\gamma,p} \\ (c \cdot X_{\gamma,p})(f) &= c \cdot_{\mathbb{R}} X_{\gamma,p}(f). \end{aligned} \quad 4.6$$

Vidíme, že využíváme bodové definice. Není průhledné, zda takto definované operace jsou uzavřené na prostoru  $T_p M$ , [1].

#### 4.2.6 Ověření

Ověříme skutečnost, že sčítání splňuje definici vektorového prostoru. Důkaz pro operaci násobení zde vynecháme [1].

Mějme  $X_{\gamma_1,p}, X_{\gamma_2,p} \in T_p M$ . Pak platí, že existuje mapa  $(U, x)$  pro tento bod  $p$ . Definujme novou křivku  $\delta$ :

$$\delta(t) = x^{-1}((x \circ \gamma_1)(t) + (x \circ \gamma_2)(t) - x(p)) \quad 4.7$$

Jedná se o hladkou křivku, která navíc splňuje vlastnost  $\delta(0) = p$ , jinými slovy  $\delta \in T_p M$ . Pak tedy pro libovolnou  $f \in C^\infty(U)$  lze psát dle definice, že:

$$\begin{aligned} X_{\delta,p}(f) &= (f \circ \delta)'(0) = \\ &= \left( f \circ x^{-1}((x \circ \gamma_1)(t) + (x \circ \gamma_2)(t) - x(p)) \right)'(0) \end{aligned} \quad 4.8$$

Díky asociativnosti, pravidlu pro derivaci složené funkce a linearitě derivování, lze psát:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) \left( ((x^\mu \circ \gamma_1)(t) + (x^\mu \circ \gamma_2)(t) - x^\mu(p)) \right)'(0) &= \\ = \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) \left\{ ((x^\mu \circ \gamma_1)(t) + (x^\mu \circ \gamma_2)(t) - x^\mu(p))'(0) \right\} &= \\ = \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) \left( (x^\mu \circ \gamma_1)'(0) + (x^\mu \circ \gamma_2)'(0) \right) &= \\ = \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) (x^\mu \circ \gamma_1)'(0) + \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) (x^\mu \circ \gamma_2)'(0) \end{aligned} \quad 4.9$$

Jelikož  $f \circ x^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  je nutno derivovat přes všechny komponenty  $\mu$ , vyskočí nám automaticky sumace přes tento index  $\mu$ . Nyní se koukneme na křivku  $\gamma_1$ , jak se chová pod stejným  $f$ .

$$\begin{aligned}
X_{\gamma_1,p}(f) &= (f \circ \gamma_1)'(0) = \\
&= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma_1)'(0) = \\
&= ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma_1))'(0) \\
&= \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p))(x^\mu \circ \gamma_1)'(0)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ta je ekvivalentní se vztahem, který jsme dostali v 4.9 a obdobně pro křivku  $\gamma_2$ . Lze psát:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p)) \left( ((x^\mu \circ \gamma_1)(t) + (x^\mu \circ \gamma_2)(t) - x^\mu(p)) \right)'(0) = \\
&= \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p))(x^\mu \circ \gamma_1)'(0) + \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p))(x^\mu \circ \gamma_2)'(0) = \\
&= (f \circ \gamma_1)'(0) + (f \circ \gamma_2)'(0) = \\
&= (X_{\gamma_1,p} + X_{\gamma_2,p})(f) = X_{\gamma_1,p} +_{T_p M} X_{\gamma_2,p}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Toto jsme chtěli ukázat. Opravdu takto definované sčítání je uzavřené na  $T_p M$ . Další vlastnosti jako asociativnost atd. ihned plynou z toho, jak jsme definovali novou operaci  $+$  (vychází z operace  $+$   $\mathbb{R}$ ), [1].

#### 4.2.7 Příklad

Předchozí odvození není nijak triviální. Pro lepší pochopení uvažujme tento příklad. Nechť  $M$  je varieta, jejíž dimenze je rovna dvěma. Následně na  $M$  máme definované tyto zobrazení:

$$\begin{aligned}
(x \circ \gamma)(t) &= (\sin t, \cos t) \\
(f \circ x^{-1})(y, z) &= y^2 + z^2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

kde  $(U, x), U \subseteq \mathbb{R}^2$  je mapa na této varietě,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  je křivka a  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  je hladké zobrazení. Ukažme si na příkladu zmiňovanou derivaci (ve směru). Pro obecný bod  $p \in M$ . Dle definice:

$$X_{\gamma,p}(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \tag{4.13}$$

Můžeme požadovat derivaci, jelikož  $f \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
&(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(0) = \\
&= \partial_\mu(f \circ x^{-1})(x(p))((x \circ \gamma_1)^\mu)'(0) = \\
&= \partial_\mu(y^2 + z^2)((\sin t, \cos t)(0)) \cdot ((\sin t, \cos t)^\mu)'(0) = \\
&= \partial_1(y^2 + z^2)(0,1)^1 \cdot ((\sin t, \cos t)^1)'(0) + \\
&\quad + \partial_2(y^2 + z^2)(0,1)^2 \cdot ((\sin t, \cos t)^2)'(0) = \\
&= (2y)(0) \cdot (\cos t)(0) + (2z)(1) \cdot (-\sin t)(0) = \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Rychlost je nulová. Není to nic nečekaného, jelikož teplota  $f$  a její ekvipotenciální plochy (křivky) se jeví pod mapou  $(U, x)$ , jako kružnice se středem v bodě  $[0,0]$  vzhledem k příslušné mapě.

Lze obecně ukázat, že pro  $\forall t$  na  $\gamma$  lze psát.

$$\begin{aligned}
 (f \circ \gamma)'(t) &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(t) = \\
 &= \partial_\mu (f \circ x^{-1})(x(p)) ((x \circ \gamma)^\mu)'(t) = \\
 &= \partial_\mu (y^2 + z^2)((\sin t, \cos t)) \cdot ((\sin t, \cos t)^\mu)'(t) = \\
 &= \partial_1 (y^2 + z^2)(\sin t, \cos t)^1 \cdot ((\sin t, \cos t)^1)'(t) + & 4.15 \\
 &+ \partial_2 (y^2 + z^2)((\sin t, \cos t))^2 \cdot ((\sin t, \cos t)^2)'(t) = \\
 &= (2y)|_{\sin t} \cdot (\cos t) + (2z)|_{\cos t} \cdot (-\sin t) = \\
 &= 2 \sin t \cos t - 2 \sin t \cos t = 0
 \end{aligned}$$

Je to způsobeno tím, že křivka  $\gamma$  tvoří kružnici vzhledem k příslušné mapě  $(U, x)$ . A jelikož teplota je na těchto kružnicích konstantní, pak rychlost musí být nulová.

Příklad nebyl přebrán z žádné knihy, využil jsem pouze obdobné konstrukce, která je v knize [1].

#### 4.2.8 Terminologie

Pro definici 4.2.1 jsme si ukázali, že se dá zapsat jako

$$\begin{aligned}
 X_{\gamma,p}(f) &= (f \circ \gamma)'(0) = ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))'(0) = \\
 &= \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) \cdot ((x \circ \gamma)^i)'(0). & 4.16
 \end{aligned}$$

Tento zápis je ale dosti rozsáhlý, a proto se zkracuje.

$$\begin{aligned}
 \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) \cdot ((x \circ \gamma)^i)'(0) &= \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p (\gamma_x^i)' & 4.17
 \end{aligned}$$

Nyní si je dobré povšimnout, že se jedná o operátor, který vypadá takto

$$(\gamma_x^i)' \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p [-]. \quad 4.18$$

Ten může působit na libovolné zobrazení  $f \in C^\infty(M)$ . Toto značení je o něco přesnější než to, které se používá v [4]. Tam se vypouštějí téměř všechny indexy.

$$X[f] = X^\mu \cdot \partial_\mu f = \frac{d}{dt} (x^\mu(\gamma)) \cdot \partial_\mu f \quad 4.19$$



Tento zápis je mnohem lepší pro pozdější použití, ale pro prvotní náhled dosti matoucí.

#### 4.2.9 Poznámka

Lze si uvědomit, že jsme touto konstrukcí bezděčně získali bázi tečného prostoru  $T_p M$ .

$$\begin{aligned} v_{\gamma,p} &\in T_p M \\ v_{\gamma,p} &= (\gamma_x^i)' \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \end{aligned} \quad 4.20$$

Kde  $(\gamma_x^i)'$  je složka rychlosti a  $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$  nám určuje bázi vektorového prostoru vzhledem k dané volbě mapy  $(U, x)$ .

#### 4.2.10 Věta (Báze tečného prostoru)

Nechť  $(U, x)$  je mapa patřící do atlasu příslušné variety  $M$ , pak řekneme, že

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \in T_p M. \quad 4.21$$

Je báze prostoru  $T_p M$ , pokud se pohybujeme v  $U \subseteq M$ .

#### 4.2.11 Ověření

Pokud se jedná o bázi, tak dle definice báze, musí platit lineární nezávislost.

$$\alpha^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = 0 \quad 4.22$$

Na  $\left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$  můžeme působit libovolným zobrazením  $f \in C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ . Vezměme  $x^j$  jako jedno z těchto zobrazení, jež definujeme, že zobrazí jen  $j$ -tou složku. Pak dostáváme.

$$\begin{aligned} \alpha^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) &= \alpha^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) = \\ &= \alpha^i \partial_i (x^j \circ x^{-1})(x(p)) \end{aligned} \quad 4.23$$

Díky tomu, že pro zobrazení  $(x^j \circ x^{-1}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  platí:

$$(a^1, \dots, a^m) \mapsto a^j, \quad 4.24$$

lze pak psát.

$$\begin{aligned} \alpha^i \partial_i (x^j \circ x^{-1})(x(p)) &= \\ &= \alpha^i \partial_i (a^j)(x(p)) = \\ &= \alpha^i \delta_i^j = \alpha^i \end{aligned} \quad 4.25$$

Což ale přímo indukuje, že se jedná o lineárně nezávislé prvky. Díky libovolnosti zvolené mapy  $(U, x)$  a bodu  $p \in M$  jsme ale ukázali, že:

$$\dim T_p M = m = \dim M \quad 4.26$$

#### 4.2.12 Definice (Přechod mezi mapami)

Nechť existují dvě překrývající se mapy  $(U, x)$  a  $(V, y)$  na varietě  $M$ , pak máme dvě interpretace pro prvek  $X \in T_p M$ , kde  $p \in U \cap V$ :

$$X = X_{(x)}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = X_{(y)}^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p \quad 4.27$$

Lze ukázat, že mezi  $X_{(x)}^i, X_{(y)}^i$  existuje jednoduchý vztah, který lze dohledat např. v [4].

$$X_{(x)}^i = X_{(y)}^j \left( \frac{\partial x}{\partial y^j} \right)_p \quad 4.28$$

Opět se nejedná o nic jiného než o Jacobiho matici.

#### 4.2.13 Definice (Tečný bandl)

Nechť  $M$  je hladká varieta. Tečný bandl  $M$  je disjunktní sjednocení všech tečných prostorů na  $M$ , tzn.

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M,$$

na němž máme kanonické projekční zobrazení

$$\pi: TM \rightarrow M$$

$$X \mapsto p,$$

kde  $p$  je dáno jednoznačně z  $M$  takové, že  $X \in T_p M$ .

## 4.3 Kotečný prostor

Ve skutečnosti se jedná o duál, a proto pro konstrukci využijeme definici duálu. To vše za pomoci lineárních zobrazení.

### 4.3.1 Definice (Kotečný prostor)

Nechť  $M$  je varieta a na ní bod  $p \in M$ , pak kotečný prostor v bodě  $p$  definujeme takto:

$$T_p^* M = \{ \varphi: T_p M \rightarrow \mathbb{R} \} \quad 4.29$$

V našem kontextu dostáváme pro  $f \in C^\infty(M)$ :

$$(df)_p = T_p^* M \rightarrow \mathbb{R} \quad 4.30$$

$$X \mapsto (df)_p(X) = X[f],$$

kde  $X[f]$  je akce vektoru  $X$  na funkci  $f$ .  $X[f] = X^\mu \cdot \partial_\mu f$ . Navíc zřejmě platí  $(df)_p \in T_p^*M$ .

#### 4.3.2 Poznámka

Lze nahlédnout, že  $(df)_p$  je gradient zobrazení  $f$ . Je na místě si položit otázku, zda umíme opět v tomto prostoru nalézt jeho bázi. V další definici budeme předpokládat, že se jedná o konečně rozměrnou varietu.

#### 4.3.3 Definice (Duální báze)

Mějme bázi  $\{(\partial_i)_p\}$  na  $T_pM$ , která je indukována obecnou mapou  $(U, x)$ , pak duální bázi  $\{(dx^j)_p\}$  na  $T_p^*M$  definujeme takto.

$$(dx^j)_p [(\partial_i)_p] = \delta_i^j \quad 4.31$$

Navíc lze ukázat, že  $\dim M = m = \dim T_p^*M$  [4].

#### 4.3.4 Poznámka

Toto zobrazení  $(dx_i)_p$  se nazývá 1-forma. Zobecněný pojem  $k$ -formy uvedeme později. Navíc si je dobré povšimnout, že pro obecné prvky  $X = X^\mu \cdot \partial_\mu \in T_pM$ ,  $\omega = \omega_\mu \cdot dx^\mu \in T_p^*M$  platí:

$$(\omega)_p(X)_p = \omega_\mu X^\mu (dx^\mu)_p (\partial_\mu)_p = X^\mu \omega_\mu \quad 4.32$$

V knize [4] takovýto vztah nazývají skalární součin. To je dosti nešťastné, jelikož skalární součin je indukován z tohoto vztahu, a ne naopak. Skutečně skalární součin bere dva prvky ze stejného prostoru a přiřazuje jim číslo.

#### 4.3.5 Definice (Přechod mezi mapami)

Nechť existují dvě překrývající se mapy  $(U, x)$  a  $(V, y)$  na varietě  $M$ , pak máme dvě interpretace pro prvek  $\omega \in T_p^*M$ , kde  $p \in U \cap V$ :

$$\omega = \omega_{(x)i} (dx^i)_p = \omega_{(y)i} (dy^i)_p \quad 4.33$$

Pak lze ukázat, že mezi  $\omega_{(x)i}$ ,  $\omega_{(y)i}$  je jednoduchý vztah [4].

$$\omega_{(x)i} = \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \omega_{(y)j} \quad 4.34$$

#### 4.3.6 Poznámka

V podstatě jsme přepsali definici 4.2.12. Nejedná se o nic jiného než opětovně o Jacobiho matici. Navíc si lze všimnout, že tyto matice jsou si navzájem inverzní. To koresponduje s názvy kovariantní a kontravariantní složky [3]. Ve fyzice se běžně snažíme vytvořit invarianty, což

jsou struktury, které jsou imunní vůči volbě map  $(U, x)$ . Klasický příklad invariantu může být vektor:

$$\begin{aligned} ds &= dx^i e_i = dx^{i'} e_{i'} \\ dx^{i'} e_{i'} &= \Lambda_i^{i'} dx^i \Lambda_j^i e_i \Rightarrow \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^i = \delta_j^{i'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda \Lambda^{-1} = I \end{aligned} \quad 4.35$$

#### 4.3.7 Definice (Kotečný bandl)

Obdobně jako v 4.2.13 lze zavést kotečný bandl  $T^*M$  na  $M$  takto

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

## 4.4 Fibrovaná varieta

### 4.4.1 Definice (Podvarieta)

Podmnožinu  $N$  variety  $M$  nazveme podvarieta, pokud v každém  $x \in N$  existuje mapa  $(U_i, \varphi_i)$  v okolí bodu  $x$ , taková že:

$$\varphi_i(U_i \cap N) = \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{R}^n \times 0^{m-n} \quad 4.36$$

Všechna tato zobrazení  $\varphi_i$  nazveme mapami podvariety  $N$ . Ty přenáší všechny vlastnosti původního atlasu  $\mathcal{A}_M$  a tvoří vlastní atlas  $\mathcal{A}_N$ , [10].

### 4.4.2 Definice (Submerze)

Zobrazení  $f$  mezi dvěma varietami  $N, M$  nazveme submerzí, pokud pro každé  $x \in N$  platí, že hodnost lineárního zobrazení  $T_x f: T_x N \rightarrow T_x M$  je rovna  $\dim M$ . Tato hodnost odpovídá hodnosti Jacobiho matice  $f$  v libovolném souřadnicovém vyjádření, [10].

### 4.4.3 Definice (Imerze)

Zobrazení  $f$  mezi dvěma varietami  $N, M$  nazveme imerzí, pokud pro  $\forall x \in N$  platí, že hodnost lineárního zobrazení  $T_x f: T_x N \rightarrow T_x M$  je rovna  $\dim N$ . Tato hodnost odpovídá hodnosti Jacobiho matice  $f$  v libovolném souřadnicovém vyjádření. [10]

### 4.4.4 Definice (Embedding-Vnoření)

Hladké zobrazení  $f: M \rightarrow N$  se nazývá vnoření  $M$  do  $N$ , pokud platí, že  $f$  je imerze a  $M \cong_{top} f(M) \subseteq N$ . Pak řekneme, že  $M$  je podvarieta vnořena do  $N$ . [1]

### 4.4.5 Poznámka (Whitneyho věta)

Libovolná hladká varieta  $M$  může být [1]:

- a) Vnořena do  $\mathbb{R}^{2 \dim M}$
- b) Imerze do  $\mathbb{R}^{2 \dim M - 1}$

#### 4.4.6 Definice (Fibrovaná varieta)

Fibrovanou varietou nazveme surjektivní submerzí  $\pi: E \rightarrow M$  [10]. Dále fibrovanou varietu nazveme bandlem se standardním fibrem  $F$ , jestliže  $E$  je lokálně izomorfní s  $M \times F$ . Tím rozumíme, že pro každé  $y \in E$  existuje okolí  $U$  bodu  $x = \pi(y)$  a difeomorfismus  $f: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  takový, že  $\pi = pr_1 \circ f$ , kde  $pr_1$  je projekce součinu na první faktor.

#### 4.4.7 Poznámka

Vztah 2.9 platí lokálně pro bandl se standardním fibrem.

# 5 Maticové Lieovy grupy a jejich Lieovy algebry

Doposud jsme konstruovali matematický aparát, který nyní využijeme pro popis velmi zajímavé struktury, a tím jsou Lieovy grupy a Lieovy algebry. Lieovy algebry hrají velkou roli při odvozování různých symetrií ve vesmíru. Jedná se třeba o zákon zachování hybnosti nebo Keplerův zákon.

## 5.1 Lieova grupa

### 5.1.1 Definice (Lieova grupa)

Lieova grupa  $(G, \circ)$  musí splňovat podmínky grupy, a dále  $G$  bude hladkou varietou a funkce  $\mu, i$  budou taktéž hladké:

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \circ g_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} i: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Je dobré si povšimnout, že kartézský součin  $G \times G$  dědí vlastnost hladkosti po hladké varietě.

## 5.2 Příklady maticových Lieových grup

Uvažujme prostor  $n \times n$  matic  $M_n(\mathbb{F})$ , nad polem  $\mathbb{F}$ , kde  $\mathbb{F}$  je pole reálných  $\mathbb{R}$ , případně komplexních  $\mathbb{C}$  čísel

Pojem konvergence matic definujeme po složkách. Pro  $A_m, A \in M_n(\mathbb{C})$  řekneme, že  $A_m$  konverguje k  $A$ , pokud pro všechny její prvky platí  $(a_m)_{ij} \rightarrow a_{ij}$ .

### 5.2.1 Obecná lineární grupa $GL(n, \mathbb{F})$

Jedná se o množinu všech regulárních matic  $M_n(\mathbb{F})$ . Binární grupová operace je maticové násobení, jednotkovým prvkem je jednotková matice  $\mathbb{I}$ , inverzní prvkem je inverzní matice. Topologie je indukována prostorem  $M_n(\mathbb{F})$ .

Pak tento prostor regulárních matic tvoří grupu, kde operace na grupě odpovídá násobení a neutrální prvek.

Maticová Lieova grupa  $G$  je podgrupa  $GL(n, \mathbb{C})$ , pokud je uzavřená podgrupa vzhledem k  $GL(n, \mathbb{C})$ . Pak  $G$  je Lieova podgrupa a podvarietu  $GL(n, \mathbb{C})$ , [10].

### 5.2.2 Speciální lineární grupa $SL(n, \mathbb{F})$

Jedná se podgrupu v  $GL(n, \mathbb{C})$  tvořenou maticemi s vlastností  $\det A = 1$ . Pro tuto grupu platí, že  $SL(n, \mathbb{F}) \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ . Jelikož determinant je spojitá funkce, je vzor (preimage) funkce  $\det$  uzavřená podmnožina v  $GL(n, \mathbb{C})$  a tedy jsou maticová grupa.

### 5.2.3 Definice (Skalární součin)

Nechť  $V$  je  $n$ -dimenzionální  $\mathbb{F}$ -vektorový prostor. Pak bilineární formu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nazveme skalárním součinem, jestliže splňuje podmínky

- a)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- b)  $\langle ax + ay, z \rangle = a\langle x, z \rangle + a\langle y, z \rangle$
- c)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- d)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Pro všechna  $x, y, z \in V$  a všechna  $a \in \mathbb{F}$ .

### 5.2.4 Unitární grupy $U(n)$

Matice  $n \times n$  nazveme unitárními, pokud všechny sloupce těchto matic jsou ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu nad vektorovým prostorem  $\mathbb{C}^n$ :

$$\sum_i \overline{A_{ij}} A_{ik} = \delta_{jk} \tag{5.3}$$
$$(A^*)_{ji} A_{ik} = \delta_{jk}$$

Budeme aplikovat konvenci automatické sumace přes dva stejné indexy u sebe. Pod symbolem  $A^*$  chápeme adjungovanou matici, kde platí  $(A^*)_{ji} = \overline{A_{ij}}$ . Z toho ihned plyne:

$$A^*A = I \Rightarrow A^* = A^{-1} \tag{5.4}$$
$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = I$$
$$(A^{-1})^*A^{-1} = (AA^*)^{-1} = I$$

### 5.2.5 Speciální unitární grupy $SU(n)$

Jedná se o unitární grupy splňující vlastnost  $\det A = 1$ .

### 5.2.6 Poznámka

Uvažujme nyní klasický skalární součin, tzv. hermiteovský skalární součin,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  na  $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \tag{5.5}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \overline{x_k} y_k$$

Snadno se ověří, že:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle, \tag{5.6}$$

pro libovolné  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

Tato vlastnost ale dovoluje i jinou definici unitárních operátorů za pomoci tohoto součinu. Řekneme, že matice (obecně operátor)  $A$  je unitární, pokud zachovává skalární součin na  $\mathbb{C}^n$ .

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \tag{5.7}$$

$$\langle A^*Ax, y \rangle = \langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Navíc díky této ekvivalentní definici lze získat další vlastnost  $A$ .

$$\det(A^*A) = \det A^* \det A = |\det A|^2 = \det I = 1$$

$$|\det A| = 1$$

### 5.2.7 Ortogonální grupy $O(n)$

Jedná se o reálné, unitární matice. Odtud ihned dostáváme vlastnost  $A^* = A^T$  a vztah 5.3 se redukuje na:

$$\begin{aligned} A_{ji}A_{ik} &= \delta_{jk} \\ A^T A &= I \\ A^T &= A^{-1} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pak obdobně pro skalární součin na  $\mathbb{R}^n$  platí dle 5.7:

$$\det(A^T A) = (\det A)^2 = \det I = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

Jedná se o uzavřenou podgrupu  $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ .

### 5.2.8 Speciální ortogonální grupa $SO(n)$

Opět totožné vlastnosti jako  $O(n)$ . Navíc platí, že  $\det A = 1$ .

### 5.2.9 Poznámka

Zaměřme se na geometrickou interpretaci grup  $SO(n)$  a  $O(n)$ . Pro zvolený vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  a úhel  $\omega$  dostaneme, že  $R(\omega, v) \in SO(3)$ .  $R(\omega, v)$  odpovídá rotaci v kladném směru o úhel  $\omega$ , vzhledem k ose otáčení  $v$ . Pokud za osu otáčení zvolíme jednu z bází kartézského souřadného systému  $e_i$ , pak dostáváme matice rotace kolem rovin  $xy, xz, yz$  o úhly  $\varphi, \theta, \psi$  v kladném smyslu:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_{yz}(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_{xz}(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Obecnou rotaci lze složit z tří dílčích rotací ve tvaru  $R(\varphi, \theta, \psi) = R_{xy}(\varphi)R_{yz}(\theta)R_{xz}(\psi)$ , kde  $\varphi, \theta, \psi$  jsou Eulerovy úhly.  $O(n)$  bude obsahovat všechny rotací i jejich složení s maticí



$$P_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 5.10$$

Matici  $P_{3 \times 3}$  dostaneme složením rotace  $R_{yz}(\pi)$  a překlopením vzhledem k rovině  $yz$ . Pro libovolné  $n$  lze ukázat, že  $O(n) = SO(n) \times \mathbb{Z}_2$ , kde  $\mathbb{Z}_2 = \{I, P_{n \times n}\}$ . Odtud je vidět, že se jedná o nespojitou grupu, [11]. Zhruba řečeno,  $SO(n)$  produkuje jen rotace, kdežto  $O(n)$  dovoluje i reflexi.

### 5.2.10 Definice

Definujme bilineární formu  $(\cdot, \cdot)$  na  $\mathbb{C}^n$  jako:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x; y) &\mapsto (x, y) = x_k y_k \end{aligned} \quad 5.11$$

### 5.2.11 Komplexní ortogonální grupa $O(n, \mathbb{C})$

Tuto grupu definujeme za pomoci bilineární formy 5.11. Řekneme, že matice  $A \in O(n, \mathbb{C})$ , pokud platí, že zachovává tuto formu:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (Ax, Ay) \\ (Ax, Ay) &= (A^T Ax, y) = (x, y) \end{aligned} \quad 5.12$$

Stejná argumentace jako v 5.7, pak musí platit  $A^T A = I \Rightarrow \det A = \pm 1$ . Tato Lieova grupa není totožná s  $U(n)$ . Dále speciální komplexní ortogonální grupa  $SO(n, \mathbb{C})$  má navíc vlastnost  $\det A = 1$ .

### 5.2.12 Definice (Pseudoskalární součin)

Pseudoskalárním součinem na vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^{n+k}$  rozumíme bilineární formu  $[-, -]_{n,k}$  definovanou vztahem

$$\begin{aligned} [-, -]_{n,k}: \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto [x, y]_{n,k} = x_i y_i - x_j y_j \quad i = 1, \dots, n \quad j = n+1, \dots, n+k. \end{aligned} \quad 5.13$$

Poznamenejme, že pseudoskalárním součinem zřejmě splňuje symetrii a nedegenerativnost.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+k}: [x, y]_{n,k} &= [y, x]_{n,k} \\ \forall y \in \mathbb{R}^{n+k}: [x, y]_{n,k} &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

### 5.2.13 Zobecněné ortogonální grupy $O(n, k)$

Za prvky  $O(n, k)$  vezmeme všechny  $(n+k) \times (n+k)$  reálné matice  $A$  zachovávající pseudoskalární součin neboli splňují formuli

$$[Ax, Ay]_{n,k} = [x, y]_{n,k} \quad 5.14$$

Pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$ .

Snadno se vidí, že  $O(n, k)$  tvoří maticovou Lieovu grupu. Nechť  $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{(n+k)j})$  značí  $j$ -tý sloupec  $A$ . Ve standartní bázi  $\{e_i\}$  platí  $a_j = Ae_j$ . Pak vzhledem k 5.14 musí platit

$$[a_i, a_j]_{n,k} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & 1 \leq i = j \leq n \\ -1 & n+1 \leq i = j \leq n+k \end{cases} \quad 5.15$$

Pak pro matici  $g$  tvaru

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

dostáváme, že  $A \in O(n, k) \Leftrightarrow A^T g A = g$ , což lze ověřit přímým výpočtem. Odtud dostaneme  $\det A = \pm 1$ .

### 5.2.14 Lorentzova grupa $O(3, 1)$

Tato grupa je natolik významná, že své má vlastní jméno. Využívá se ve fyzice, především ve speciální a v obecné teorii relativity. Matice  $g$  neboli pseudometrika, která definuje tuto grupu, je signatury  $(3,1)$ . Ve vhodné ortogonální bázi má tvar

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odpovídající Minkowskému tenzoru  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ , položíme-li koeficient  $c^2$  u  $dt^2$  rovný 1.

### 5.2.15 Poznámka

Vztah v 5.2.13 lze také odvodit za pomoci invariantu a pseudometriky. Díky pseudometrice dokážeme sestavit duální vektor  $\tilde{v} = gv$ . Má-li  $v$  souřadnice  $v^i$ , pak  $\tilde{v}$  má souřadnice  $v_i = g_{ij} v^j$  (spuštění a zvedání indexů). Prvek  $\tilde{v}^T v$  neboli  $\tilde{v} \cdot v$  je invariant. Ukažme nejdříve, že se stačí zabývat pouze souřadnicemi  $v^i, v_i$ .

$$v_i e^i \cdot v^j e_j = v_i v^j e^i \cdot e_j = v_i v^j g_j^i = v_i v^j \delta_j^i = v_i v^i$$

Pro invariant musí platit nezávislost na souřadném systému, což platí, jelikož

$$v_i v^{i'} = J_i^i v_j J_j^{i'} v^j = \delta_j^i v^j v_i = v_i v^i.$$

Za pomoci metriky lze dosáhnout tvaru

$$v_i v^i = v^j g_{ij} v^i.$$

Nechť  $A$  patří do grupy transformací  $G$ . Navíc po  $A$  požadujeme, aby měla inverzi  $A^{-1}$  (v klasickém smyslu pro matice). Pokud definujeme transformační pravidla takto.

$$\begin{aligned} v &\rightarrow Av \\ \tilde{v} &\rightarrow (A^{-1})^T \tilde{v} \end{aligned}$$

Pak  $A$  zachovává invariant  $\tilde{v}^T v$ .

Důkaz.

$$\tilde{v}^T v \rightarrow ((A^{-1})^T \tilde{v})^T Av = \tilde{v}^T A^{-1} Av = \tilde{v}^T v$$

Oba objekty zachovávají invariant  $\tilde{v}^T v$ . Z toho lze vyvodit tyto vztahy

$$\begin{aligned} \tilde{v}^T v = v^i v_i = v^j g_{ij} v^i &\rightarrow a_j^k v^j g_{kn} a_i^n v^i = v^j a_j^k g_{kn} a_i^n v^i \\ \tilde{v}^T v = v^i v_i = v^j g_{ij} v^i &\rightarrow v^j g_{ij} v^i. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Kde pod  $a_j^i$  chápeme prvky matice  $A$ . Podmínka, aby  $\tilde{v}^T v$  byl invariantní vzhledem k transformaci  $A$ , je splněna právě tehdy, když

$$\begin{aligned} v^j a_j^k g_{kn} a_i^n v^i &= v^j g_{ij} v^i \\ a_j^k g_{kn} a_i^n &= g_{ij} \\ A^T g A &= g. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Běžně se využívá implikace ve směru, kde máme zadanou metriku a invariant, a snažíme se odvodit takové transformace  $A$ , které splňují vztah 5.17.

Pokud zvolíme  $g = \mathbb{I}_{3 \times 3}$ , dostáváme matice  $A$ , které tvoří Lieovu grupu  $O(3)$ . Pokud je  $\det(A) = 1 \Rightarrow A \in SO(3)$ . Klasická fyzika používá pouze transformace tohoto typu. Prvky  $SO(3)$  tvoří rotace kolem rovin  $xy, xz, yz$ .

Zvolíme-li pseudometriku  $g$  z příkladu 5.2.14 (4 rozměrný prostor), pak všechny matice  $A$ , které splňují 5.18, tvoří Lieovu grupu  $O(3,1)$ . Pokud  $\det A = 1$ , pak platí, že  $A \in SO(3,1)$ . Nyní kromě klasických rotací obdržíme i tzv. boosty. Jedná se o rotace kolem rovin  $xt, yt, zt$ , [11]. Tímto tématem se budeme zabývat podrobněji v kapitole o spinorech 7.7, ale většinu práce odvedeme v 5.8.7.

### 5.2.16 Definice (Antisymetrická forma)

Nechť existuje  $2n$ -dimenzionální  $\mathbb{R}$ -vektorový prostor. Definujme antisymetrickou bilineární formu  $\omega(-, -)$  na  $\mathbb{R}^{2n}$ , pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \omega(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \omega(x, y) = x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.18}$$

### 5.2.17 Symplektické grupy $Sp(2n, \mathbb{R})$

Množina všech  $2n \times 2n$  matic  $A$ , která zachovává formu  $\omega(x, y)$ , nazýváme reálnou symplektickou grupou. To znamená, že platí

$$\omega(x, y) = \omega(Ax, Ay) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}. \quad 5.19$$

Jedná se o uzavřenou podgrupu  $Sp(2n, \mathbb{R}) \subseteq GL(2n, \mathbb{R})$  [12]. Navíc lze ukázat, že pro běžný skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  na  $\mathbb{R}^{2n}$  platí vztah

$$\omega(x, y) = \langle x, \Omega y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad 5.20$$

kde  $\Omega$  je bloková matice se čtvercovými bloky řádu  $n$ .

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem ověříme, že  $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$  právě tehdy, když

$$-\Omega A^T \Omega = A^{-1} \quad 5.21$$

Důkaz.

$$\omega(x, y) = \omega(Ax, Ay), \quad \langle x, \Omega y \rangle = \langle Ax, \Omega Ay \rangle, \quad \langle \Omega^T x, y \rangle = \langle (\Omega A)^T Ax, y \rangle$$

$$\Omega^T = A^T \Omega^T A, \quad \Omega \Omega^T A^{-1} = \Omega A^T \Omega^T A A^{-1}$$

$$-\Omega A^T \Omega = A^{-1}$$

Odtud vidíme, že  $\det A = \pm 1$  pro všechny  $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ . Navíc lze ukázat, že musí platit  $\det A = 1$ , [13].

### 5.2.18 Komplexní symplektické grupy $Sp(2n, \mathbb{C})$

Definujme obdobně antisymetrickou bilineární formu  $\omega$  na  $\mathbb{C}^{2n}$  předpisem

$$\omega(z_1, z_2) = (z_1, \Omega z_2). \quad 5.22$$

V definiční podmínce jsme oslabili definici klasického skalárního součinu, vynecháním komplexní konjugovanosti v první faktor. Grupa všech  $2n \times 2n$  matic zachovávajících formu  $\omega(-, -)$  se pak nazývá komplexní symplektická grupa  $Sp(2n, \mathbb{C})$ .

### 5.2.19 Kompaktní symplektická grupa $Sp(n)$

Jedná se o množinu takových  $2n \times 2n$  matic  $A$ , které jsou tohoto typu:

$$Sp(n) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n). \quad 5.23$$

Jedná se o matice, které zachovávají jak klasický skalární součin na  $\mathbb{C}^{2n}$ , tak i formu  $\omega$  z 5.5.

$Sp(n)$  může být chápána i jako unitární grupa nad kvaterniony  $U(n, \mathbb{H})$ , [14].

Pokusíme se tento vztah ověřit.

Uvažujme antilineární zobrazení  $J(\cdot, \cdot)$ , které definujeme takto

$$\begin{aligned} J(\cdot, \cdot) &: \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n} \\ J(a, b) &= (-\bar{b}, \bar{a}) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \quad 5.24$$

Pro  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{2n}$ , pak dostáváme

$$\begin{aligned} \omega(z_1, z_2) &= \langle Jz_1, z_2 \rangle \\ \langle Jz_1, z_2 \rangle &= -\langle Jz_2, z_1 \rangle. \end{aligned} \quad 5.25$$

Navíc pro antilineární zobrazení  $J(\cdot, \cdot)$  platí:  $J^2 = -I$ .

Jestliže  $A \in U(2n)$ , pak  $U \in Sp(n)$  právě tehdy, když  $A$  komutuje s  $J$  ( $AJ = JA$ ), [12].

Dále necht' máme kvaternionovou algebru  $\mathbb{H}$ , jež je 4-rozměrná asociativní algebra nad  $\mathbb{R}$ , kde obecný kvaternion je  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ ,  $q_i \in \mathbb{R}$ .

Vlastnosti této algebry:

Platí zde vztahy  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$ ,  $ji = -k$ ,  $kj = -i$ ,  $ij = -j$ .

Sdružený kvaternion  $\bar{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ .

Norma  $\|q\| = (q\bar{q})^{\frac{1}{2}}$ .

Pro jednotkový kvaternion  $q$  platí  $q = \frac{q}{\|q\|}$ .

Čistě imaginární kvaternion  $q = iq_1 + jq_2 + kq_3$ .

Inverzní kvaternion  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ .

Kvaternionovou algebru lze ztotožnit s  $M_2(\mathbb{C})$ , která má bázi

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad 5.26$$

Pak pro  $J$  dostáváme

$$J(iz) = -i(Jz),$$

kde  $z \in \mathbb{C}^{2n}$ . Díky libovolnosti  $z$  dostáváme  $ij = -ji$ . Ztotožněme  $K = ij$ , pak dostáváme  $K^2 = -\mathbb{I}$ . Nyní ale dostáváme, že  $ij, j, k$  se mají stejnou strukturu jako  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Následně lze  $\mathbb{C}^{2n}$  ztotožnit s vektorovým prostorem nad  $\mathbb{H}$ , když bude platit

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot z &= iz \\ \mathbf{j} \cdot z &= Jz \\ \mathbf{k} \cdot z &= ijz. \end{aligned} \quad 5.27$$

Řekneme, že  $A \in Sp(n)$  právě tehdy, když je lineární vůči kvaternionům a zachovává normu. Neboli lze nahlížet na  $Sp(n)$  jako unitární grupu nad polem kvaternionů. Celý důkaz lze dohledat v této knize [12].

### 5.2.20 Poznámka

Pokud bychom chtěli nyní ukázat izomorfismus mezi  $Sp(1)$  a  $SU(2)$ , brzy zjistíme že se jedná o dosti netriviální věc. Poskytneme, tedy pouze nástin důkazu.

Pro  $Sp(1)$  dostáváme grupu kvaternionů, jejichž norma je rovna jedné. Lieova algebra  $sp(1)$  je tvořena všemi čistě imaginárními kvaterniony, které lze zapsat takto

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow w_1 i + w_2 j + w_3 k \in \mathbb{H}.$$

Následně exponenciála těchto prvků může být zapsána takto

$$u(\theta, w) = e^{\theta w} = \cos \theta + w \sin \theta,$$

kde  $\theta \in \mathbb{R}$  a  $w$  je čistě imaginární kvaternion.

Pak lze zkonstruovat homomorfismus z  $SP(1)$  do  $SO(3)$ , tak že se bude jednat o tzv. homomorfismus 2 ku 1. Stejná vlastnost se prokáže u  $SU(2)$  (5.4.4), a odtud lze ztotožnit jednoznačně tyto Lieovy grupy. Přesné a rigorózní odvození je dosti složité a lze ho dohledat v [14].

### 5.2.21 Euklidova grupa $E(n)$

Jedná se o grupu všech transformací na  $\mathbb{R}^n$ , kde transformace je libovolné složení ortogonálních lineárních rotací a posunutí. Pro  $E(n)$  definujeme polopřímý součin grupy  $O(n)$  a translační grupy jako

$$(a_1, R_1)(a_2, R_2) = (a_1 + R_1 a_2, R_1 R_2), \quad 5.28$$

kde  $a_i \in \mathbb{R}^n$  a  $R_i \in SO(n)$  a označujeme jej  $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ . Označme prvky  $E(n)$  jako  $\{x, R\}$ , kde  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $R \in O(n)$ . Kde operace  $\{-, -\}$  je definována z 5.28. Grupa je uzavřená a existují v ní inverzní prvky pro  $\forall \{x, R\} \in E(n)$  [12].  $E(n)$  je izomorfní s uzavřenou podgrupou matic  $A \subseteq GL(n+1, \mathbb{R})$ , kde  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5.29$$

### 5.2.22 Poincarého grupa $P(n, 1)$

Jedná se o rozšíření Lorentzovy grupy, kde přidáváme navíc translaci. Kde prvky této grupy se skládají z:

$$T = T_x A$$

$x \in \mathbb{R}^{n+1}$  a  $A \in O(n, 1)$ . Předložíme k věření, že grupa je izomorfní s grupou typu  $(n+2) \times (n+2)$  matic  $\Lambda$  ve tvaru:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & A & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{n+1} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad 5.30$$

Prvky, které jsou invariantní vůči této grupě, jsou pak považovány za prvky, které mají relativistickou invarianci. Ve fyzikálním světě se jedná vlastně o Lorentzovu grupu, která navíc obsahuje všechny translace v daném prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 5.2.23 Další grupy

Mnoho známých grup lze ztotožnit za pomoci izomorfismu s některou z předchozích grup. Lieova grupa  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  je izomorfní s  $U(1)$ . Lieova grupa  $\mathbb{R}^n$  s klasickým sčítáním je izomorfní s diagonálními reálnými maticemi tvaru:

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{x_n} \end{pmatrix} \quad 5.31$$

## 5.3 Vlastnosti maticových Lieových grup

V předchozí části jsme se zajímali pouze o příklady. Ověřovali jsme, zda splňují vlastnosti grupy. V této kapitole se zaměříme na vlastnosti Lieových grup.

### 5.3.1 Definice (Kompaktnost)

O maticové Lieově grupě  $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$  řekneme, že je kompaktní, pokud pro ni platí klasická definice kompaktnosti topologického prostoru 0 pro podmnožinu  $M_n(\mathbb{C}) \cong_{iso} \mathbb{R}^{2n^2}$ .

Obdobně se dá definovat, že se jedná o kompaktní grupu právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená. Pod pojmem uzavřenosti chápeme klasický přístup limity a požadavek, aby limita byla opět v požadované grupě:

$$A_m \in G, A_m \rightarrow A \Rightarrow A \in G$$

A pojem ohraničenosti nám dává, že musí existovat konstanta  $C$  taková, že  $\forall A \in G$  musí platit  $|a_{ik}| \leq C$ .

### 5.3.2 Příklady

Triviálně odvodíme, že grupy  $O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$  jsou kompaktní. Jelikož se jedná o matice, které mají vlastnost  $|a_i| < 1$ . Zatímco grupa  $SL(n)$  5.2.2 není ohraničená. Skutečně nelze zvolit konstantu  $C$  tak, aby platilo  $|a_{ik}| \leq C$ . Zvolme matici  $A_m$  ve tvaru:

$$A_m = \begin{pmatrix} m & & & \\ & 1/m & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

### 5.3.3 Definice (Souvislost)

Nechť  $G$  je maticová Lieova grupa, pro kterou platí, že  $\forall A, B \in G$  existuje spojitá křivka (2.1.14)  $A(t)$ , která pro všechny  $t \in \langle a, b \rangle$  má vlastnost, že  $A(t) \in G$ . Navíc s předepsanou vlastností, že  $A(a) = A, A(b) = B$ . Pak řekneme, že maticová Lieova grupa je souvislá.

### 5.3.4 Poznámka

Souvislost-spojitosť 1.1.3 jsme definovali přes spojitost všech křivek na dané grupě. Tato definice je korektní, jelikož lze ukázat, že ze spojitosti křivek plyne souvislost prostoru viz. [15].

### 5.3.5 Příklad

Ukažme souvislost  $SO(2)$ . První způsob může být: Jelikož samotná maticová Lieova grupa  $GL(n, \mathbb{R})$ , díky nenulovému determinantu, tvoří podvarietu  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Tímto je vlastně důkaz hotov, pokud se odvoláme na 2.1.9. Druhý způsob: Z podmínky ortogonality víme, že  $A^T A = I$ . Z toho plyne, že máme pro čtyři parametry  $a_{ij}$  celkem 3 omezení. Z toho vyplývá, že máme jediný volný parametr. Všechny matice  $SO(2)$  lze psát ve tvaru:

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Spojité změna parametru  $\varphi$  zaručí, že pro libovolné  $A, B \in SO(2)$  existuje spojitá cesta  $A(\varphi)$ .

### 5.3.6 Definice (Souvislá komponenta jednotky $G_0$ )

Souvislá komponenta jednotky  $G_0$  je množina všech  $A \in G(n, \mathbb{R})$ , pro kterou platí, že existuje spojitá křivka  $A(t) \in G(n, \mathbb{R}), \forall t \in \langle a, b \rangle, A(a) = I, A(b) = A$ .

### 5.3.7 Poznámka

Pro maticovou Lieovu grupu  $G$  a její příslušnou  $G_0$  lze ukázat, že  $G_0$  je uzavřená normální Lieova podgrupa  $G_0$  [12]. Normální grupa má tuto vlastnost:  $\forall g \in G, \forall g_0 \in G_0: g g_0 g^{-1} \in G_0$ . Centrum grupy je normální podgrupa. U kvaternionů to jsou všechna reálná čísla.

$$r \in \mathbb{R} \mid \forall h \in \mathbb{H}, rh = hr$$

### 5.3.8 Definice (Jednoduše souvislý)

Souvislá maticová grupa  $G$  se nazývá jednoduše souvislá, jestliže každá uzavřená křivka  $A(t) \in G, \forall t \in \langle a, b \rangle, A(a) = A, A(b) = A$  je homotopicky 1.2.1 ekvivalentní k triviální bodové křivce  $A$  pro libovolný bod  $A$  z  $G$ .

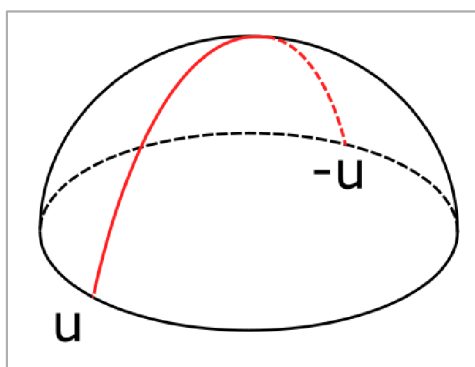
### 5.3.9 Poznámka

Maticová Lieova grupa  $SU(2)$  může být jednoznačně ztotožněna s  $S^3$  sférou v prostoru  $\mathbb{R}^4$ . Grupa  $SU(2)$  je jednoduše souvislá, jelikož je izomorfní s jednoduše souvislou  $S^3$  sférou.

Dále lze ukázat, že  $SO(3)$  není jednoduše souvislá [16]. Tento fakt se dokazuje za pomoci reálného projektivního prostoru  $\mathbb{R}P^3$ , který lze jednoznačně a spojitě ztotožnit s  $SO(3)$ . Jelikož  $\mathbb{R}P^3$  není jednoduše souvislá, pak není ani  $SO(3)$ .



Jako jednoduchý příklad vezměme  $\mathbb{R}P^2$ . Jedná se o reálnou projektovou rovinu, která může být ztotožněna s horní částí sféry, na níž identifikujeme dvojice protilehlých bodů  $u, -u$  na rovníku.



Obrázek 5-1 Protilehlé body, Zdroj: Vlastní

Jednoduše se ukáže, že lze spojit dva totožné body na rovníku uzavřenou křivkou, kterou nedokážeme spojitě deformovat do daného bodu.

## 5.4 Homomorfismus Lieových grup

### 5.4.1 Definice (Homomorfismus – Izomorfismus)

Nechť  $G, H$  jsou Lieovy grupy. Hladké zobrazení  $\varphi: G \rightarrow H$ , které je současně grupovým homomorfismem nazveme homomorfismem Lieových grup. Je-li zobrazení  $\varphi$  navíc difeomorfismem 4.1.10, hovoříme o isomorfismu Lieových grup.

$$\varphi(g_1 \circ_G g_2) = \varphi(g_1) \circ_H \varphi(g_2)$$

### 5.4.2 Poznámka

Pro maticové Lieovy grupy je dosti obtížné najít takový grupový homomorfismus, který by nebyl spojitým (většinou se jedná o uměle vykonstruované příklady).

### 5.4.3 Příklady

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow SO(2) \\ \theta &\mapsto \varphi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.32}$$

S využitím součtových vzorců lze opravdu ukázat, že se jedná o homomorfismus.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Obrázek 5-2 Součtové vzorce, Zdroj: Vlastní

Dále se budeme zabývat existencí homomorfismu (případně izomorfismu) mezi  $SO(3)$  a  $SU(2)$ .

#### 5.4.4 Věta

Existuje homomorfismus Lieových grup  $SU(2)$  do  $SO(3)$ , který je dvojnásobným nakrytím (nejedná se izomorfismus).

Důkaz.

Nejprve ověříme přímým výpočtem, že matice  $A$  je prvkem  $SU(2)$  právě tehdy, když je hermiteovská a má nulovou stopu. Poznamenejme, že  $A$  se nazývá hermiteovská je-li  $A^* = A$ . Odtud se snadno vyvodí, že každý prvek  $SU(2)$  je komplexní matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R} \quad 5.33$$

Označme symbolem  $V$  vektorový prostor všech matic tvaru 5.33. Ztotožníme-li  $V$  s  $\mathbb{R}^3$  přiřazením vektoru  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  maticím  $A$  z 5.26, lze přímým výpočtem snadno ověřit, že standardní skalární součin na  $\mathbb{R}^3$  koresponduje ve výše zmíněné identifikaci s maticovým vyjádřením tvaru

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \frac{1}{2} Tr(A_1 A_2) \quad 5.34$$

Dále přiřadíme libovolné  $U \in SU(2)$  lineární zobrazení

$$\begin{aligned}
\varphi_U : V &\rightarrow V \\
A &\mapsto \varphi_U(A) = UAU^{-1},
\end{aligned} \quad 5.35$$

pro které ukážeme, že je ortogonální transformací na  $\mathbb{R}^3$ , která bude mít navíc i determinant rovný jedné.

Nejprve ukážeme, že  $\varphi_U$  zachovává  $V$ . To se snadno ověří následující dedukcí:

$$\begin{aligned}
UAU^{-1} &= ((UAU^{-1})^*)^* = ((U^{-1})^* A^* U^*)^* = \\
&= ((U^*)^* A U^*)^* = (UAU^{-1})^*
\end{aligned} \quad 5.36$$

Nyní ověříme, že  $\varphi_U$  zachovává skalární součin, což provedeme s využitím 5.34 následovně:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_U(A_1), \varphi_U(A_2) \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\varphi_U(A_1)\varphi_U(A_2)) = \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}(UA_1U^{-1}UA_2U^{-1}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(UA_1A_2U^{-1}) = \\
&= \langle A_1, A_2 \rangle
\end{aligned} \tag{5.37}$$

To však znamená, že zobrazení  $\varphi_U$  je ortogonální transformací na  $\mathbb{R}^3$ , tedy prvkem grupy  $O(3)$ . Nakonec ukážeme, že  $\varphi_U$  je prvkem  $SO(3)$ . To ale dostaneme ihned ze souvislosti  $SU(2)$  a z toho, že přiřazení definované pomocí 5.35 je spojitým zobrazením.

Nakonec ukážeme, že zkonstruovaný homomorfismus definovaný předpisem  $U \mapsto \varphi_U$  (viz 5.36) není izomorfismem. Plyne z toho, že jádro zobrazení  $\varphi$  je tvaru

$$\ker \varphi = \{U \in SU(2) \mid \varphi_U = e_{SO(3)}\} = \{I, -I\} \tag{5.38}$$

Jde tedy o nakrytí 2 ku 1.

## 5.5 Maticová exponenciála

Nyní zavedeme pojem Lieovy algebry asociované k dané maticové Lieově grupou. Tomuto problému se budeme v plné obecnosti věnovat v kapitole 6. Vraťme se nyní k maticovým grupám a zavedme pro ně pojem maticové exponenciály, který následně spojíme s definicí Lieovy algebry. Poznamenejme, že pojem maticové exponenciály se poměrně často uplatňuje při řešení některých systémů diferenciálních rovnic.

### 5.5.1 Definice (Norma Matice)

Nechť  $A$  je reálná  $n \times n$  matice. Definujeme její normu  $\|A\|$  předpisem

$$\|A\| = \left( \sum_{ij} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{Tr}(A^*A))^{\frac{1}{2}}. \tag{5.39}$$

Je zřejmé, že 5.39 vyjadřuje vzdálenost bodu  $(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})$  od počátku v prostoru  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Druhý vztah lze získat ze skalárního součinu, který lze zavést na  $\mathbb{R}^{n^2}$ , jelikož máme euklidovskou normu. Nemusíme se omezovat pouze na reálné matice. Víme, že matice  $A$ , skládající se z prvků  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  (resp.  $a_{ij} \in \mathbb{H}$ ), lze vnořit do prostoru  $\mathbb{R}^{2n^2}$  (resp.  $\mathbb{R}^{4n^2}$ ). Pak  $\|A - B\|$  vyjadřuje velikost vzdálenosti mezi těmito dvěma maticemi.

### 5.5.2 Definice (Konvergence matic)

Uvažujme posloupnost reálných  $n \times n$  matic  $A_1, A_2, \dots$ . Řekneme, že tato posloupnost má limitu  $A$ , pokud platí následující podmínka

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 : \|A - A_n\| < \epsilon.$$

Vidíme, že pro libovolné  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , že  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ , z čehož ihned vyplývá, že potažmo  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  pro všechna  $n$ .

### 5.5.3 Definice (Maticová exponenciála)

Nechť  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Konverguje-li řada

$$\mathbb{I} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots \quad 5.40$$

ve smyslu 5.5.2, pak její součet nazveme exponenciálou matice  $A$ , kterou budeme dále označovat symbolem  $e^A$ .

$$e^A = \mathbb{I} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots \quad 5.41$$

### 5.5.4 Poznámka

Nyní se pokusíme zhruba osvětlit, proč vlastně nás zajímá exponenciála matice. Nahlédneme i trochu dále. Uvažujme matici  $R_{xy} \in SO(3)$ , která má konkrétní tvar

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 5.42$$

Jedná se o rotaci v rovině  $xy$  kolem počátku, samozřejmě v kladném smyslu. Tuto matici necháme působit na kartézské souřadnice  $(x, y, z)$ , následně obdržíme, že:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, z) = R_{xy}(x, y, z) \quad 5.43$$

Nyní ale nebude rotovat o celé  $\alpha$ , ale pouze o infinitezimálně malý úhel  $\alpha'$ . Pak dostáváme.

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= 1 - \frac{\alpha'^2}{2!} + \frac{\alpha'^4}{4!} - \dots \cong 1 \\ \sin \alpha' &= \alpha' - \frac{\alpha'^3}{3!} + \frac{\alpha'^5}{5!} - \dots \cong \alpha' \end{aligned} \quad 5.44$$

Pro tuto aproximace bude infinitezimální matice rotace  $R_{inf}$  vypadat takto

$$R_{inf} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha' & 0 \\ -\alpha' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} - i\alpha' \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 5.45$$

Pro malé úhly opravdu  $\det R_{inf} = 1 + \alpha'^2 \cong 1$ . Navíc jsme rozložili operace rotace na dva prvky. První část nepřispívá do rotace nijak, jelikož se jedná se o jednotkovou matici. Druhá část pouze přepisuje souřadnice  $(x, y)$  na  $(-y, x)$ . Druhou část chápeme jako generátor a značíme ji  $M_{xy}$ .

Nyní bychom ale naopak chtěli získat z výše uvedené jednoduché infinitezimální rotace o úhel  $\alpha'$ , rotaci o původní úhle  $\alpha$ .

$$\alpha = n \frac{\alpha}{n}$$

Pro dosti velké  $n$  vidíme, že můžeme psát  $\alpha' \cong \frac{\alpha}{n}$ , pak dostáváme

$$\begin{aligned} R_{inf} &\cong \mathbb{I} - i \frac{\alpha}{n} \mathbb{M}_{xy} \\ R_{xy} &\cong (R_{inf})^n. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Pak ale pro skutečnou rotaci o úhel  $\alpha$  dostáváme

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} - \frac{i\alpha \mathbb{M}_{xy}}{n} \right)^n \\ R_{xy} &= e^{-i\alpha \mathbb{M}}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Odtud je vidět, že otočení o úhel  $\alpha$ , lze jednoduše realizovat za pomoci generátorové matice  $\mathbb{M}_{xy}$ . Analogicky obdržíme generátorové matice  $\mathbb{M}_{xz}, \mathbb{M}_{yz}$ , což nám umožní definovat libovolnou rotaci  $R \in SO(3)$  jako

$$R = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbb{M}}}. \tag{5.48}$$

Tento vztah zobecnil a následně i využil norský matematik Sophus Lie při definici Lieovy algebry pro jejich Lieovy grupy.

Obdobnou úvahu konstruuje prof. Petr Kulhánek v knize [6].

### 5.5.5 Poznámka (Vlastnosti exponenciály)

Nechť  $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ , pak lze psát:

- $e^0 = \mathbf{1}$
- $(e^X)^* = e^{X^*}$
- Pokud existuje inverze pro  $e^X \Rightarrow (e^X)^{-1} = e^{-X}$
- $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
- Pokud  $X, Y$  komutují, pak  $e^{(X+Y)} = e^X e^Y$
- Pokud existuje inverze pro  $C \Rightarrow e^{CX C^{-1}} = C e^X C^{-1}$

Předpoklad, že  $X, Y$  komutují, v e) nelze vynechat, což je patrné z následujícího protipříkladu:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, AB \neq BA \\ e^A &= \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & 1/e \end{pmatrix}, e^B = \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix}, e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e \\ e & 1/e \end{pmatrix} \\ e^{A+B} &= \begin{pmatrix} e & e \\ e & 1/e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2e & e^2 + 1 \\ 2 & e + 1/e \end{pmatrix} = e^A e^B \end{aligned}$$

Bod f) je přímým důsledkem:

$$(CXC^{-1})^m = (CXC^{-1}CXC^{-1})(CXC^{-1})^{m-2} = (CX^2C^{-1})(CXC^{-1})^{m-2} = CX^mC^{-1}$$

### 5.5.6 Poznámka (Další rozvoje)

Je dobré si připomenout i další rozvoje některých funkcí. Ty pak lze definovat i pro matice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

Rozvoje některých elementárních funkcí umožňují jejich zobecnění na maticové argumenty  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , a to v oblasti, kde odpovídající součty konvergují ve smyslu 5.5.2. Takto lze získat následující maticové funkce.

a)  $\ln A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-\mathbb{I})^m}{m}$  je definován a spojitý pokud  $\|A - \mathbb{I}\| < 1$

b)  $\sin A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} X^{2m+1}$

c)  $\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} X^{2m}$

d)  $\sinh A = \frac{e^X - e^{-X}}{2}$

e)  $\cosh A = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$

Maticové funkce b) – e) konvergují pro libovolné  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

Pro vztah mezi exponenciálou a přirozeným logaritmem platí

$$e^{\ln A} = A,$$

pro všechny  $A$  s vlastností  $\|A - \mathbb{I}\| < 1$ . Dále platí

$$\ln e^X = X,$$

pro všechny  $X$  s vlastnostmi  $\|X\| < \ln 2$ ,  $\|e^X - \mathbb{I}\| < 1$ , [17].

### 5.5.7 Příklad

Mějme (Pauliho) matici  $A$  a chceme napočítat  $e^A$

$$\begin{aligned} A &= a \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, A^2 = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^A &= \mathbb{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots \\ e^A &= \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots\right) \mathbb{I} + \left(a + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots\right) A = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh a & -i \sinh a \\ i \sinh a & \cosh a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.49}$$

Poznamenejme, že výsledná matice je antihermiteovská (skew-hermitean).

Uvažujme Pauliho matice  $\sigma_i$ , které jsou tvaru

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Po vzoru 5.5.4 zkusíme, zda jejich lineární kombinace nevygenerujeme nějakou Lieovu maticovou grupu.

$$A = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{M} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet exponenciály potřebujeme znát obecný předpis mocniny.

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{M})^2 = |\vec{\alpha}|^2 \mathbb{I}$$

Pokud  $\vec{\alpha}$  bude jednotkový vektor, pak máme

$$e^{i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) \mathbb{I} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \vec{\alpha} \cdot \vec{M}$$

$$e^{i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}} = \mathbb{I} \cos \theta + i\vec{\alpha} \cdot \vec{M} \sin \theta$$

Inverze matice  $e^{i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}}$  je matice  $e^{-i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}}$ .

$$A^{-1} = e^{-i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}} = \mathbb{I} \cos \theta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{M} \sin \theta = \left(e^{i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}}\right)^* = A^*$$

Vidíme, že díky 5.5.5 b) platí  $A^* = A^{-1}$ . Tuto vlastnost mají prvky  $U(2)$ . Ověřme, zda se nejedná o grupu  $SU(2)$ .

$$\det A = 1$$

$$\det e^{i\theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}} = \det(\mathbb{I} \cos \theta + i\vec{\alpha} \cdot \vec{M} \sin \theta) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos \theta + i\alpha_3 \sin \theta & i \sin \theta (\alpha_1 - i\alpha_2) \\ i \sin \theta (\alpha_1 + i\alpha_2) & \cos \theta + i\alpha_3 \sin \theta \end{pmatrix} = 1$$

Pauliho matice  $\sigma_i$  generují celou maticovou Lieovu grupu  $SU(2)$ . Pokud navíc do lineární kombinace přidáme jednotkovou matici, obdržíme  $\phi \mathbb{I} + \theta \vec{\alpha} \cdot \vec{M}$ . Tyto generátory pokryjí celé  $U(2)$ , [14].

### 5.5.8 Definice

Každou matici  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , pro kterou existuje inverze, lze vyjádřit jako  $e^X$ , kde  $X \in M_n(\mathbb{C})$ . [12]

### 5.5.9 Věta

Pro libovolnou matici  $A \in M_n(\mathbb{C})$  platí, že [12]:

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)} \qquad 5.50$$

### 5.5.10 Ověření

Věta 5.50 se dá odvodit i trochu jiným způsobem, než jak je uvede v knize [12]. Využijeme vlastnosti, že každá matice  $A$  jde rozložit na diagonalizovatelnou matici  $S$  a nilpotentní matici  $N$  [12].  $A = S + N$  a platí pro ně  $NS = SN$ .

$$\det(e^A) = \det(e^{S+N}) \stackrel{e)}{=} \det(e^S e^N) = \det e^S \det e^N \quad 5.51$$

Každá nilpotentní matice je podobná s maticí  $BUB^{-1}$ , kde  $U$  je horní trojúhelníková matice s nulami na hlavní diagonále.

$$\begin{aligned} \det e^S \det e^N &= \det e^{CDC^{-1}} \det e^{BUB^{-1}} = \\ &= \det C \det e^D \det C^{-1} \det B \det e^U \det B^{-1} = \\ &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} \end{aligned} \quad 5.52$$

Druhá část 5.50:

$$\begin{aligned} \det e^{Tr(A)} &= \det e^{Tr(S+N)} = \det e^{TrS+TrN} \stackrel{e)}{=} \det e^{TrS} \det e^{TrN} = \\ &= \det e^{Tr(CDC^{-1})} \det e^{Tr(BUB^{-1})} = \det e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)} \det e^0 = \\ &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} \end{aligned} \quad 5.53$$

### 5.5.11 Definice (Hladká křivka $e^{tX}$ )

Nechť  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , pak  $e^{tA}$  je hladkou křivkou, jelikož máme pro libovolné  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt} e^{tA} &= \frac{d^k}{dt} \left( \mathbb{I} + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} \dots \right) = \\ &= A + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = Ae^{tA} \end{aligned} \quad 5.54$$

### 5.5.12 Definice (Jednparametrická podgrupa $GL(n, \mathbb{C})$ [12])

Funkci  $A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  nazveme jednparametrickou podgrupou  $GL(n, \mathbb{C})$ , pokud pro ni platí:

- $A$  je spojitá
- $A(0) = \mathbb{I}$
- $A(s+t) = A(t)A(s), \forall s, t \in \mathbb{R}$

$A$  je dokonce hladká. Opírá se o větu, že spojitý homomorfismus Lieových grup je hladké zobrazení, a tedy v našem případě difeomorfismus. Lze tedy hovořit přímo o 1 –parametrické grupě difeomorfismů.



### 5.5.13 Definice (Jednparametrické podgrupy)

Nechť  $A(t)$  je jednparametrická podgrupa  $GL(n, \mathbb{C})$ , pak existuje jednoznačně určená matice  $X \in M_n(\mathbb{C})$  taková, že [12]:

$$A(t) = e^{tX} \quad 5.55$$

### 5.5.14 Definice

Exponenciální zobrazení je nekonečně diferencovatelné zobrazení z  $M_n(\mathbb{C})$  do  $M_n(\mathbb{C})$  [12].

## 5.6 Lieova algebra

Nyní zavedeme obecně pojem Lieovy algebry, který označíme  $\mathfrak{g}$ . Později si ukážeme, že lze přiřadit k takové algebře, nějakou Lieovu grupu  $G$ .

### 5.6.1 Definice (Lieova algebra)

Nechť  $\mathfrak{g}$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  s binární operací  $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  Lieovu závorku splňující vlastnosti  $a), b), c)$ , pro všechna  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,  $a, b \in \mathbb{F}$ :

$$\begin{array}{ll} a) \text{ Antisymetrie} & [X, Y] = -[Y, X] \\ b) \text{ Linearita} & [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \\ c) \text{ Jacobiho identitu} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \end{array} \quad 5.56$$

Pak  $\mathfrak{g}$  nazveme Lieovou algebrou.

### 5.6.2 Příklad

Obecně pro prvky  $X, Y \in \mathfrak{g}$  neplatí, že komutují. Lieova závorka tedy zhruba řečeno určuje míru nekomutativity prvků Lieovy algebry.

- 1) Vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$  s Lieovou závorkou  $[x, y]$  tvořenou standardním vektorovým součinem
- 2) Vektorový prostor všech matic  $A \in M_n(\mathbb{C})$  s komutátorem  $[\cdot, \cdot]$  definovaným předpisem  $[A, B] = AB - BA$

Ověření Jacobiho identitu je triviální, díky asociativitě maticového násobení.

$$[A, [B, C]] = [A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA$$

Odtud cyklickou záměnou dostáváme

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = ABC - ACB - BCA + CBA + \\ + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = 0.$$

- 3) Poissonova závorka  $\{ \cdot, \cdot \}$ , která je definována pro funkce  $f, g$  fázových proměnných  $q, p$  (zobecněné souřadnice a zobecněné hybnosti), jako:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Splňuje definici 5.6.1.

Pokud máme definované násobení mezi objekty, dostáváme navíc tyto zajímavé vztahy (neplatí tedy pro první příklad):

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = B[A, C] = [A, B]C$$

### 5.6.3 Definice (Strukturní koeficienty)

Pokud se dají prvky  $X, Y$  prostoru vyjádřit za pomoci báze  $E_i$ , pak dostáváme:

$$[X, Y] = [X_i E_i, Y_j E_j] = X_i Y_j [E_i, E_j] \quad 5.57$$

Stačí znát výsledky Lieovy závorky pro bázi daného prostoru. Jelikož výsledek opět padne do původního prostoru, dostaneme vztah pro strukturní koeficienty Lieovy algebry.

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k \quad 5.58$$

Tyto koeficienty postačí pro definice celé Lieovy algebry, jelikož pro libovolné prvky  $X, Y$  platí:

$$[X, Y] = C_{ij}^k X_i Y_j E_k \quad 5.59$$

Díky antisymetrii dostáváme  $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ . Jacobiho identita  $C_{im}^n C_{jk}^m + C_{jm}^n C_{ki}^m + C_{km}^n C_{ij}^m = 0$  [1].

### 5.6.4 Poznámka

Čtenář si povšiml, že zde sumuje přes všechny indexy. Sumuje zde jak podle běžné konvence, tak i podle Einsteinovy sumační konvence. Pokud bychom chtěli být pečliví, psali bychom  $[X, Y] = C_{ij}^k X^i Y^j E_k$ . [18]

### 5.6.5 Příklad

Uvažujme Pauliho matice  $\sigma_{1,2,3}$  (už jsme se setkali v 5.5.7) spolu s jednotkovou maticí  $\sigma_0$  je jednotková matice (neuvažujme-li konstantu 1/2):

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Komutátory Pauliho matic a  $\sigma_0$ :

$$[\sigma_1, \sigma_2] = i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = i\sigma_2,$$

$$[\sigma_0, \sigma_i] = 0$$

Z toho plynou strukturní koeficienty.

$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = i, \quad C_{21}^3 = C_{32}^1 = C_{13}^2 = -i$$

Vidíme, že  $\sigma_0$  komutuje s libovolnou maticí  $\sigma_i$ .  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  mají řadu význačných vlastností. Jsou hermitovské (tzn. splňují vlastnost  $\sigma_i = \sigma_i^*$ ), vzájemně „antikomutují“ (ve smyslu  $\sigma_i \sigma_j +$

$\sigma_j \sigma_i = \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2}$ ), dále jsou idempotentní (tzn.  $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$ ), vlastní čísla jsou  $\pm 1$  a jejich stopa je nulová.

### 5.6.6 Definice (Podalgebra)

Řekneme, že vektorový podprostor  $\mathfrak{h}$  reálné nebo komplexní Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  tvoří Lieovu podalgebru, jestliže je uzavřený na Lieovu závorku, tzn.:  $\forall A, B \in \mathfrak{h}: [A, B] \in \mathfrak{h}$ .

Pokud je  $\mathfrak{g}$  komplexní Lieova algebra a  $\mathfrak{h}$  je reálný podprostor, hovoříme o reálné Lieově podalgebře v  $\mathfrak{g}$ .

Podalgebru  $\mathfrak{h}$  nazveme ideálem v  $\mathfrak{g}$ , jestliže je splněna následující podmínka

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \forall B \in \mathfrak{h}: [A, B] \in \mathfrak{h}. \quad 5.60$$

Ideály  $0$  a  $\mathfrak{g}$  nazveme triviálními ideály.

Centrum Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  definujeme jako množinu všech  $A \in \mathfrak{g}$  takových, že  $[A, B] = 0$  pro všechna  $B \in \mathfrak{g}$ . Je-li  $\mathfrak{g}$  je samo centrem, pak  $\mathfrak{g}$  nazveme abelovskou.

### 5.6.7 Definice (Homomorfismus)

Nechť existují dvě Lieovy algebry  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ . Lineární zobrazení  $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  nazveme homomorfismem Lieových algeber, pokud platí:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ pro všechna } x, y \in \mathfrak{g}: \quad 5.61$$

Pokud se navíc jedná o bijekci, hovoříme o izomorfismu Lieových algeber. Je-li  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$  hovoříme o automorfismu.

### 5.6.8 Definice (Adjungovaná reprezentace)

Nechť  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra a  $X \in \mathfrak{g}$ . Adjungovanou reprezentací asociovanou s  $X$  rozumíme lineární zobrazení  $ad_X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  definované předpisem

$$ad_X(Y) = [X, Y]. \quad 5.62$$

Tato definice dovoluje alternativní zápis komutátoru  $[-, -]$ , [12]. Ku příkladu, místo abychom psali

$$[X, [X, [X, Z]]].$$

Díky 5.62 dostaneme

$$(ad_X)^3(Y).$$

### 5.6.9 Poznámka

Lze nahlédnout, že zobrazení  $ad_X$  je odvozeno od binární operace  $[-, -]$  a také splňuje Liebnizovo pravidlo. Odvození je přímočaré, ale není průhledné.

$$\begin{aligned} ad_X([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] = \\ &= [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] = [ad_X Y, Z] - [ad_X Z, Y] \end{aligned} \quad 5.63$$

### 5.6.10 Definice (Homomorfismus $ad$ )

Nechť  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra, pak zobrazení  $ad: \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$  je homomorfismem Lieových algeber.

Nechť  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra. Pak zobrazení  $ad: \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$  definované předpisem 5.63 nazveme homomorfismem  $ad$ .

$$X \mapsto ad(X) = ad_X \quad 5.64$$

Musí se ověřit korektnost definice, tedy zkontrolovat, že  $ad$  zachovává Lieovu závorku.

$$ad_{[X, Y]}(Z) \stackrel{?}{=} [ad_X, ad_Y](Z)$$

To plyne z následující posloupnosti identit

$$\begin{aligned} ad_{[X, Y]}(Z) &= [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = ad_X(ad_Y(Z)) - ad_Y(ad_X(Z)) = \\ &= [ad_X, ad_Y](Z). \end{aligned} \quad 5.65$$

### 5.6.11 Definice (Přímý součet) [12]

Mějme dvě Lieovy algebry  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ , pak přímý součet algeber je definován jako přímý součet vektorových prostorů  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ , tvořena všemi dvojicemi  $(X, Y), \forall X \in \mathfrak{g}_1, \forall Y \in \mathfrak{g}_2$  s operací:

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]) \quad 5.66$$

### 5.6.12 Poznámka

Nechť  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra a  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  jsou její podalgebry. Řekneme, že  $\mathfrak{g}$  je rozložitelná na přímý součet těchto podalgeber, jestliže  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  je přímý součet ve smyslu vektorových prostorů a  $[X, Y] = 0$  pro všechna  $X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2$  (podmínka  $[X, Y] = 0$  plyne z 5.66  $[(X, 0), (0, Y)] = [X, Y] = 0$ ).

Pak existuje izomorfismus mezi  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}_1 \oplus_{Lie} \mathfrak{g}_2$ .

### 5.6.13 Definice (Ireducibilní)

Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$  nazveme ireducibilní, pokud jediné její ideály jsou triviální. Pokud navíc  $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ , řekneme, že je jednoduchá, [12].

### 5.6.14 Poznámka

Jedno dimenzionální Lieova algebra je ireducibilní, jelikož nemá netriviální ideály. Lze nahlédnout, že bude jednat o komutativní Lieovu algebru. Jednoduchá algebra je pak ekvivalentně definována jako Lieova algebra, která je ireducibilní a nekomutativní.

### 5.6.15 Příklad

Ukažme, že Lieova algebra  $sl(2, \mathbb{C})$  je jednoduchá. Nejdříve definujme  $sl(2, \mathbb{C})$ . Jedná se o prostor matic  $M_2(\mathbb{C})$ , které mají stopu rovny nule. Pokud prostor obohatíme o klasický komutátor matic dostaneme Lieovu algebru. Pak obecná matice  $X \in sl(2, \mathbb{C})$  je tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C} \quad 5.67$$

Báze tohoto prostoru  $E$ :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad 5.68$$

Aby se jednalo o jednoduchou Lieovu algebru musíme ukázat, že neexistuje ideál  $\mathfrak{h}$ , který není netriviální.

Pro strukturní koeficienty dostáváme:

$$[E_1, E_2] = 2E_2, [E_1, E_3] = -2E_3, [E_2, E_3] = E_1 \quad 5.69$$

Dále nechť prvek  $Z \in \mathfrak{h}$  má obecně tvar  $Z = a^i E_i$ , kde alespoň jeden prvek  $a^i \neq 0$ . Postupně ukážeme, že se jedná o celé  $\mathfrak{g}$ . Nechť  $a^3 \neq 0$ , pak díky definici ideálu 5.60 platí:

$$\begin{aligned} [E_1, Z] &= [E_1, a^i E_i] = 2a^2 E_2 + 2a^3 E_3 \Rightarrow E_3 \in \mathfrak{h} \\ [E_2, E_3] &= E_1 \Rightarrow E_1 \in \mathfrak{h}, \quad [E_2, E_1] = -2E_2 \Rightarrow E_2 \in \mathfrak{h} \end{aligned}$$

Jelikož Ideál  $\mathfrak{h}$  obsahuje celou bázi, jedná se o triviální ideál.

Dále analogicky budeme ukazovat, že pro  $a^2 \neq 0, a^3 = 0$  a  $a^1 \neq 0, a^2 = 0, a^3 = 0$  ideál  $\mathfrak{h}$  bude vždy obsahovat celou bázi  $\mathfrak{g}$ . Z toho dostáváme, že  $\mathfrak{g}$  je jednoduchá.

### 5.6.16 Definice (Ideál komutátoru v $\mathfrak{g}$ )

Nechť  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra, pak ideál komutátoru v  $\mathfrak{g}$ , označen jako  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , definujeme jako prostor všech lineárních kombinací komutátorů. Jedná se o prvky  $Z$  z  $\mathfrak{g}$ , které lze vyjádřit takto

$$Z = c_1[X_1, Y_1] + \dots + c_n[X_n, Y_n], \quad 5.70$$

pro obecné konstanty  $c_i$  a  $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}$  [12].

### 5.6.17 Poznámka

Jestliže  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , pak pro libovolné  $Y \in \mathfrak{g}$  dostáváme, že  $[Y, X] \in \mathfrak{g}$ . Pak dle 5.60 dostáváme, že  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  je ideál v  $\mathfrak{g}$ .

### 5.6.18 Definice (Derivovaná řada)

Derivovaná řada Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  je definována jako posloupnost podalgeber  $\mathfrak{g}^{(i)}$ . Kde pro členy platí:  $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}], \forall i \in \mathbb{N}$ . Pokud existuje  $n \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}^{(n)} = 0$  pak tuto algebru nazveme řešitelnou.

### 5.6.19 Definice (Dolní centrální řada)

Pro libovolnou Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$  definujeme posloupnost ideálu  $\mathfrak{g}^i$  takto. Pro členy posloupnosti platí:  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}]$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Pokud existuje  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$  pak tuto algebra nazveme nilpotentní.

### 5.6.20 Definice (Horní centrální řada)

Pro libovolnou Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$  definujeme posloupnost ideálu  $\mathfrak{g}^i$  takto. Pro členy posloupnosti platí:  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Pokud existuje  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$  pak tuto algebra nazveme nilpotentní.

### 5.6.21 Poznámka a Příklad

Jelikož platí inkluze  $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$  dostáváme:  $\mathfrak{g}$  je nilpotentní  $\Rightarrow \mathfrak{g}$  řešitelná. Opačná implikace obecně neplatí.

Mějme Lieovu algebru nad maticemi  $M_3(\mathbb{R})$  tvořenou maticemi tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \quad 5.71$$

Nejdříve zkusíme ověřit, zda je nilpotentní. Tím bychom automaticky zjistili, že je řešitelná. Báze této algebry

$$E = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad 5.72$$

Strukturní koeficienty 5.6.3:

$$[E_1, E_2] = -E_3, [E_1, E_3] = E_2, [E_2, E_3] = 0 \quad 5.73$$

Triviálně vidíme, že se opravdu jedná o Lieovu algebru, jelikož je uzavřena nad operací komutátoru. Dle definice 5.6.20 platí pro libovolné  $Z = a^i E_i$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^0] = [a^i E_i, b^j E_j] = c^1 E_2 + d^1 E_3 \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] = [a^i E_i, c^1 E_2 + d^1 E_3] = c^2 E_2 + d^2 E_3 \\ \mathfrak{g}^{k+1} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = c^{k+1} E_2 + d^{k+1} E_3 \end{aligned} \quad 5.74$$

Nejedná se nilpotentní Lieovu algebru dle definice 5.6.20. Ověříme řešitelnost:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [a^i E_i, b^j E_j] = c^1 E_2 + d^1 E_3 \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = [c^1 E_2 + d^1 E_3, c^2 E_2 + d^2 E_3] = 0 \end{aligned} \quad 5.75$$

Nyní lze vidět, že obecně neplatí opačná implikace neboli řešitelnost  $\Rightarrow$  nilpotentnost.

## 5.7 Lieova algebra Lieovy grupy

V této sekci se budeme zabývat jednou z nejdůležitějších partií teorie Lieových grup, a to korespondence Lieových grup s jejich Lieovými algebrami.

### 5.7.1 Definice (První přiblížení)

Nechť  $G$  je maticová grupa. Pak Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$  k dané  $G$  definujeme jako množinu všech matic  $X$  takových, že  $e^{tX} \in G \forall t \in \mathbb{R}$ . Vidíme, že zatím nemáme žádnou strukturu. Jedná se pouze o množinu. Operace sčítání matic a násobení skalárem zavádí operace spojené se strukturou vektorového prostoru a komutátor matic Lieovu závorku. Vše je korektní díky vlastnostem b), c) d) z 5.7.4.

### 5.7.2 Tvrzení

Nechť je  $G$  maticová grupa a necht' pro  $X$  platí 5.7.1. Pak  $e^X$  je prvkem souvislé komponenty jednotky  $G_0$  v  $G$ . Přímou plyne z 5.3.6.

### 5.7.3 Věta

Nechť je  $G$  maticová Lieova grupa a  $\mathfrak{g}$  je její Lieova algebra. Pokud  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , pak platí:

- a)  $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}, \forall A \in G$
- b)  $sX \in \mathfrak{g}, \forall s \in \mathbb{R}$
- c)  $X + Y \in \mathfrak{g}$
- d)  $XY - YX \in \mathfrak{g}$

Důkaz.

Budeme využívat vlastnosti z 5.5.5.

- a)  $e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1} \in G$ , díky tomu, že platí pro všechna  $t$ , dostáváme  $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ .
- b) Druhá vlastnost je ihned vidět  $e^{stX} = e^{rX} \in G$
- c) Vlastnost dokážeme s použitím Trotterovy násobící formule, [19], která je tvaru

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{tX}{n}} e^{\frac{tY}{n}} \right)^n.$$

Poněvadž  $e^{\frac{tX}{n}} e^{\frac{tY}{n}} \in G$  pro všechna  $n$  (plyne z toho, že  $G$  je grupa), je i  $e^{t(X+Y)} \in G$ , což dokazuje náš požadavek

- d) Tato vlastnost je stěžejní, jelikož nám dovolí definovat Lieovu závorku (komutátor) na  $\mathfrak{g}$ . S použitím 5.5.11 na  $(e^{tX}Ye^{-tX}) \in \mathfrak{g}$ . Pro všechna  $t \in \mathbb{R}$  (podle prvního vztahu)

$$\left. \frac{d}{dt} (e^{tX}Ye^{-tX}) \right|_{t=0} = (Xe^{tX}Ye^{-tX} + e^{tX}Y(-Xe^{-tX})) \Big|_{t=0} = XY - YX.$$

Jelikož platí b), c)  $\mathfrak{g}$  není nic jiného než reálný vektorový podprostor  $M_n(\mathbb{C})$ . Pak díky jeho uzavřenosti dostáváme:

$$XY - YX = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h} \right) \in \mathfrak{g} \quad 5.76$$

Pak i  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ .

#### 5.7.4 Definice

Maticovou Lieovu grupu  $G$  nazveme komplexní, pokud i její Lieova algebra  $\mathfrak{g}$  je komplexní podprostor  $M_n(\mathbb{C})$  takový, že  $iX \in \mathfrak{g}, \forall X \in \mathfrak{g}$ . [12]

#### 5.7.5 Definice

Pokud  $G$  je komutativní, pak je i  $\mathfrak{g}$  komutativní (ve smyslu nulové hodnoty Lieovy závorky). Opačná implikace platí pouze pokud  $G$  je souvislá, [12].

#### 5.7.6 Poznámka

Pokud  $G$  komutuje automaticky vyjde komutátor nulový. Plyne přímo z definice komutátoru anebo nově z 5.76.

## 5.8 Příklady provázání

Nyní se zaměříme na Lieovy grupy, které známe, a vykonstruujeme k nim dané Lieovy algebry.

#### 5.8.1 $gl(n, \mathbb{F})$

Lieova algebra  $gl(n, \mathbb{C})$  k  $GL(n, \mathbb{C})$  je prostor všech matic  $M_n(\mathbb{C})$ . Skutečně necht  $X \in M_n(\mathbb{C})$ , pak  $e^{tX} \in G$ , jelikož obsahuje i inverzi  $e^{-tX} \in G$ . Obdobně platí i pro  $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ .

#### 5.8.2 $sl(n, \mathbb{F})$

Mějme prostor všech matic  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , které navíc mají nulovou stopu. Pak lze ukázat:

$$\begin{aligned} e^{tA} \rightarrow \det(e^{tA}) &= e^{Tr(A)t} = 1 \\ Tr(A) &= \left. \frac{d}{dt} e^{tTr(A)} \right|_0 = 0 \end{aligned} \quad 5.77$$

Dostáváme tak Lieovu algebru  $sl(n, \mathbb{F})$  pro grupu  $SL(n, \mathbb{F})$ .

#### 5.8.3 $u(n), su(n)$

Lieova algebra  $u(n)$  od  $U(n)$  je tvořena všemi maticemi  $M_n(\mathbb{C})$ , pro které platí, že  $A^* = -A$ . Pokud navíc platí, že  $Tr(A) = 0$ , pak dostáváme Lieovu algebru  $su(n)$  od  $SU(n)$ .

$$\begin{aligned} e^{tA} \in U(n) &\Leftrightarrow (e^{tA})^* = (e^{tA})^{-1} \\ e^{tA^*} &= e^{-tA} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow A^* = -A \end{aligned} \quad 5.78$$

#### 5.8.4 $o(n), so(n)$

Tato algebra je jistým derivátem  $su(n)$ , jelikož pokud vyměníme pole  $\mathbb{C}$  za  $\mathbb{R}$ , dostaneme definici Lieovy algebry pro  $O(n), SO(n)$ . Podmínka z 5.8.3 přejde na  $A^t = -A$ . Podmínka nulovosti stopy matice je automaticky splněna jak pro  $o(n)$ , tak i pro  $so(n)$ .



### 5.8.5 $sp(2n, \mathbb{R})$ , $sp(2n, \mathbb{C})$ , $sp(n)$

Mějme matici  $\Omega$  z 5.20, pak všechny matice z  $M_{2n}$ , která splňují vztah:

$$\Omega A^T \Omega = A \quad 5.79$$

Jsou Lieovou algebrou Lieovy grupy  $Sp(2n, \mathbb{R})$ . Vztah 5.79 je odvozen z vlastnosti 5.21:

$$\begin{aligned} -\Omega(e^{tA})^T \Omega &= (e^{tA})^{-1} \\ e^{-t(\Omega A^T \Omega)} &= e^{-tA} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \Omega A^T \Omega = A \end{aligned} \quad 5.80$$

Pokud bychom uvažovali  $\mathbb{C}$ , dospěli bychom dosti podobnou úpravou ke stejnému vztahu, jako je 5.79.

Pro Lieovu algebru Lieovy grupy  $Sp(n)$  musí platit, že všechny prvky  $A \in sp(n)$  splňují vztah

$$\Omega A^T \Omega = A \wedge A^* = -A. \quad 5.81$$

### 5.8.6 $o(n, k)$

Pro zobecněnou ortogonální grupu 5.2.13 (speciálně 5.2.14) obdržíme obdobnou úpravou, že prvky Lieovu algebry této grupy musí splňovat:

$$g A^T g = -A \quad 5.82$$

$o(n, k)$  a  $so(n, k)$  jsou totožné.

### 5.8.7 Lorentzova grupa a algebra

Již dříve jsme ukazovali, že lze libovolný prvek z Lieovy grupy vyjádřit za pomoci vektoru generátorů 5.48. Ukázali jsme si, že to intuitivně platilo pro  $SO(3)$ . Zkusme použít stejný systém konstrukce pro Lorentzovu grupu. Zajímá nás, jak působí Lorentzovy transformace na vektory/koordináty.

Jelikož budeme pracovat s 6 rotacemi  $R_{yz}, R_{zx}, R_{xy}, B_{xt}, B_{yt}, B_{zt}$ , očekáváme 6 generátorů, které označíme  $J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$ . O rotacích kolem klasických rovin už víme, že se dají zapsat jako:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.83$$

Nyní už známek úspornější zápis, a to za pomoci strukturních koeficientů:

$$[J_j, J_k] = i \epsilon^{jkm} J_m \quad 5.84$$

Nyní se ale potřebujeme vypořádat s boosty, neboli s rotacemi kolem časové osy. Předložme k věření transformaci kolem roviny  $xt$ ,  $B_{xt}$  (speciální relativita a její transformace):

$$B_{xt} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 5.85$$

Skutečně patří do  $SO(3,1)$ , jelikož pro  $B_{xt}$  platí vztah 5.2.14 pro transformace, a determinant je roven jedné. Pak obecně lze obdržet generátor  $K_j$  ze vztahu  $B_{x_j t} = e^{i\varphi K_j}$ .

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.86$$

Ověřme, zda patří do  $so(3,1)$ . Ukážeme si to na  $K_1$ , další lze udělat analogicky.

$$\begin{aligned} gK_1^T g &= -K_1 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dále musíme ověřit, zda  $e^{t\varphi K_1}$  patří do  $SO(3,1)$ :

$$e^{t\varphi K_1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\varphi} + e^\varphi}{2} & \frac{-e^{-\varphi} + e^\varphi}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-e^{-\varphi} + e^\varphi}{2} & \frac{e^{-\varphi} + e^\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ověření transformace:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} \sinh^2 \varphi - \cosh^2 \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh^2 \varphi + \cosh^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Díky identitě  $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$  dostaneme:

$$= \begin{pmatrix} \sinh^2 \varphi - \cosh^2 \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh^2 \varphi + \cosh^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant, díky stejné identitě je roven jedné.

Nyní máme vykonstruované korektně všechny generátory. Komutátor těchto generátorů:

$$\begin{aligned} [K_j, K_k] &= -i\epsilon^{jkm} J_m \\ [J_j, K_k] &= i\epsilon^{jkm} K_m \end{aligned} \tag{5.87}$$

Slovy lze tento interpretovat jako dva boosty nám dají rotaci a rotace s boostem nám dá boost. Jakmile zavedeme pojem komplexifikace vrátíme se k tomuto objektu.

### 5.8.8 Příklad (Izomorfie mezi algebrami)

V tomto příkladu ukážeme motivaci pro zavedení další kapitoly. Ukážeme, že existuje izomorfismus Lieových algeber  $su(2)$  a  $so(3)$ . Z předchozích kapitol víme, že Lieovy grupy  $SU(2)$  a  $SO(3)$  nejsou izomorfní (existuje jen 2 ku 1 nakrytí).

Jedná se o příklad Lieových grup, které nejsou izomorfní, avšak jejich algebry jsou izomorfní.

Báze 5.6.4 (generátory) pro Lieovu algebru  $su(2)$  je tvořena maticemi (5.8.3)

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.88}$$

Dále báze Lieovy algebry  $so(3)$  je tvořena maticemi (5.8.4)

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= E_3, & F_3 &= [F_1, F_2] \\ [E_2, E_3] &= E_1, & F_1 &= [F_2, F_3] \\ [E_3, E_1] &= E_2, & F_2 &= [F_3, F_1] \end{aligned} \tag{5.90}$$

Pak jsou tyto dvě Lieovy algebry izomorfní 5.6.7.

## 5.9 Přenos homomorfismu

### 5.9.1 Definice

Nechť  $G_1, G_2$  jsou dvě maticové Lieovy grupy a  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  jsou jejich Lieovy algebry. Nechť existuje homomorfismus Lieových grup  $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ , pak existuje jednoznačně určený reálný lineární zobrazení  $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  takové, že:

$$\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}, \forall X \in \mathfrak{g}_1, \tag{5.91}$$

jedná se i o homomorfismus Lieových algeber. Není však třeba to dokazovat, protože definice Lieovy algebry je pro maticové grupy jen speciálním případem níže uvedené Definice 6.2.8, [12].

### 5.9.2 Poznámka

Zobrazení  $\varphi$  má tyto vlastnosti

- a)  $\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}, \forall A \in G_1$
- b)  $\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{tx}) \right|_0$

Z vlastnosti b) plyne, že zobrazení  $\varphi$  je derivace  $\Phi$  v identitě. Důkaz těchto tvrzení o  $\varphi$  jsou přímým důsledkem, že  $\Phi$  je spojitý grupový homomorfismus, který zavede jednoznačně lineární zobrazení  $\varphi$ . Pak jsou vlastnosti odvozeny obdobně jako v 5.7.3.

Tento směr homomorfismus jsme už viděli u Lieových grup  $SU(2), SO(3)$ . Ty totiž indukují homomorfismus na jejich Lieových algebrách  $su(2), so(3)$ , která jsou navíc izomorfní.

### 5.9.3 Definice (Skládání homomorfismů)

Nechť jsou  $G_1, G_2, G_3$  maticové Lieovy grupy a homomorfismy  $\Phi: G_1 \rightarrow G_2, \Psi: G_2 \rightarrow G_3$ , Pak pro homomorfismus  $\Lambda$ , která vznikl složením  $\Phi, \Psi$ , dostáváme, že jeho Lieova algebra  $\lambda$  je obdržena ze složení příslušných Lieových algeber  $\phi, \psi$ .

$$\lambda = \phi \circ \psi \tag{5.92}$$

### 5.9.4 Definice (Jádro)

Mějme Lieový grupový homomorfismus  $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$  a  $\varphi$  pro dané jejich algebry. Pak jádro zobrazení  $\Phi$  je uzavřená, normální podgrupa grupy  $G_1$  a navíc Lieova algebra této podgrupy je definována jako:

$$Lie(\ker(\Phi)) = \ker(\varphi) \tag{5.93}$$

Důkaz plyne přímo z definice jádra.

### 5.9.5 Definice (Adjungované zobrazení)

Uvažujme Lieovu maticovou grupu  $G$  s algebrou  $\mathfrak{g}$ . Pak  $\forall A \in G$  definujeme adjungované zobrazení  $Ad_A$  jako:

$$\begin{aligned} Ad_A: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ X &\mapsto Ad_A(X) = AXA^{-1} \end{aligned} \tag{5.94}$$

### 5.9.6 Definice

Nechť  $G$  je maticová Lieova grupa a  $\mathfrak{g}$  je její příslušná algebra. Nechť dále označíme grupu všech lineárních invertibilních transformací na  $\mathfrak{g}$  jako  $GL(\mathfrak{g})$ . Pak zobrazení  $A \mapsto Ad_A$  je homomorfismus na  $G$  do  $GL(\mathfrak{g})$ , pro který navíc platí, že  $\forall A \in G, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ :

$$Ad_A([X, Y]) = [Ad_A(X), Ad_A(Y)] \quad 5.95$$

[12].

### 5.9.7 Definice

Využijme nyní definice 5.9.6. Pak pro již dané  $Ad: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  lze jednoznačně přiřadit zobrazení na Lieově algebře  $ad$ :

$$\begin{aligned} ad: \mathfrak{g} &\rightarrow gl(\mathfrak{g}) \\ Y &\mapsto ad_X(Y) = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad 5.96$$

V Důkazu se využívá vlastnost, že  $Ad$  je spojitý a z toho plyne, že se jedná o Lieový grupový homomorfismus. Tato vlastnost zaručí, že asociované reálné lineární zobrazení  $X \rightarrow ad_X$  má vlastnost, že:

$$e^{ad_X} = Ad_{e^X}$$

[12].

## 5.10 Komplexifikace

### 5.10.1 Definice (Komplexifikace)

Nechť  $\mathfrak{g}$  je konečně rozměrná reálná Lieova algebra  $\mathfrak{g}$ . Pak definujeme její komplexifikaci  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  jako množinu všech prvků tvaru:

$$X = Y_1 + iY_2, \text{ kde } Y_i \in \mathfrak{g},$$

kde Lieova závorka na  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  je jednoznačně definována rozšířením Lieovy závorky z  $\mathfrak{g}$  pomocí definičních axiomů Lieovy algebry.

Snadno se ověří, že  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  je komplexní Lieova algebra. Procesu rozšíření Lieovy závorky z  $\mathfrak{g}$  na  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  říkáme komplexifikace. Ověření je přímočaré, verifikuje se 5.6.1 pro novou závorku na  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .

### 5.10.2 Poznámka

Jelikož komplexifikací obecné Lieovy algebry dosáhneme rozšíření této algebry, pak můžeme dostat Lieovu algebru, která bude izomorfní s některou z jiných námi známých algeber. Skutečně platí:

$$\begin{aligned} gl(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} &\cong_{izo} gl(n, \mathbb{C}), \quad u(n)_{\mathbb{C}} \cong_{izo} gl(n, \mathbb{C}), \\ su(n)_{\mathbb{C}} &\cong_{izo} sl(n, \mathbb{C}), \quad sl(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong_{izo} sl(n, \mathbb{C}), \\ so(n)_{\mathbb{C}} &\cong_{izo} so(n, \mathbb{C}), \quad sp(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong_{izo} sp(n, \mathbb{C}), \\ sp(n)_{\mathbb{C}} &\cong_{izo} sp(n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

### 5.10.3 Příklad

Navážeme nyní na příklad 5.8.7. Komplexifikací dostaneme báze, které tvoří dva ideály. Vidíme, že původní báze  $J_i, K_i$  netvoří dvě oddělené podgrupy. To odstraníme právě komplexifikací.

$$J_{+j} = \frac{1}{2}(J_j + iK_j), J_{-j} = \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \quad 5.97$$

Skutečně pak jejich algebru lze za pomoci strukturních koeficientů zapsat takto:

$$[J_{+j}, J_{+k}] = i\epsilon^{jkm}J_{+m}, \quad [J_{-j}, J_{-k}] = i\epsilon^{jkm}J_{-m}, \quad [J_{+j}, J_{-k}] = 0 \quad 5.98$$

Poblíž identity dostáváme lokální izomorfismus  $SO(3,1) \sim SO(3) \times SO(3) \sim SU(2) \times SU(2)$ . Nyní jsme obdrželi objekt, který se transformuje jinak než vektory a nazývá se spinor.

## 5.11 Exponenciální zobrazení

### 5.11.1 Definice (Exponenciální zobrazení)

Mějme Lieovu maticovou grupu  $G$  a její příslušnou algebru  $\mathfrak{g}$ , pak zobrazení:

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad 5.99$$

nazveme exponenciální.

### 5.11.2 Poznámka

Pro všechny  $X \in GL(n, \mathbb{C})$ , lze vždy nalézt matici  $A$ , která se zobrazí za pomoci  $\exp$  na tuto matici  $X$ . Obecně neplatí, že pokud máme uzavřenou podgrupu  $G_{sub} \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ , že musí existovat  $A \in \mathfrak{g}_{sub}$ , taková že se zobrazí na  $X$  [12]. To znamená, že  $\exp$  obecně nezobrazí  $\mathfrak{g}$  na  $G$ . Lokálně se toto zobrazení chová jako prosté.

### 5.11.3 Věta

Uvažujme  $\epsilon$ , které splňuje  $0 < \epsilon < \log 2$ . Nechť dále  $U_\epsilon = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| < \epsilon\}$  a nechť  $V_\epsilon = \exp U_\epsilon$ . Uvažujme Lieovu maticovou grupu  $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$  s její algebrou  $\mathfrak{g}$ . Pak existuje takové  $\epsilon \in (0, \log 2)$ , pro něž dostáváme tento vztah. Pro  $\forall A \in V_\epsilon$ , platí, že:

$$A \in G \Leftrightarrow \log A \in \mathfrak{g}.$$

Předkládáme k věření [12].

### 5.11.4 Definice

Důsledkem věty 5.11.3 je, že pro Lieovu maticovou grupu a její přidruženou algebru, existuje okolí  $U_0$   $0 \in \mathfrak{g}$  a okolí  $V_I$   $I \in G$  takové, že  $\exp$  zobrazí  $U$  na  $V$ , kde  $\exp$  je homeomorfismem mezi těmito okolími 1.1.8 [12].

### 5.11.5 Definice

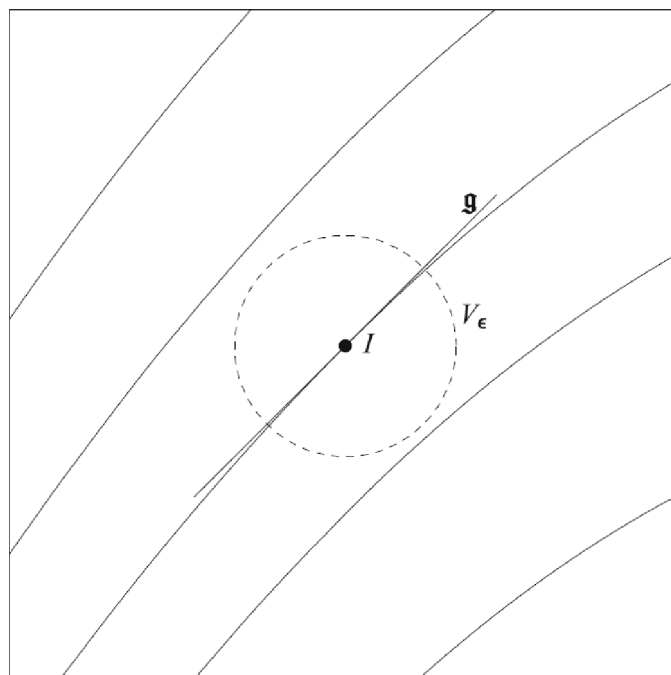
Nechť  $G$  je Lieova maticová grupa a  $\mathfrak{g}$  je její Lieova algebra. Nechť  $\dim \mathfrak{g} = k$ , kde  $\mathfrak{g}$  chápeme jako reálný vektorový prostor. Pak  $G$  je vnořená hladká podvarieta  $M_n(\mathbb{C})$  stejné dimenze  $k$  a tudíž Lieovou grupou. Plyne z lokálního homeomorfismu [12].

### 5.11.6 Definice

Mějme Lieovu maticovou grupu  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  a její Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$ . Pak matice  $A \in \mathfrak{g}$  právě tehdy, když existuje hladká křivka  $\gamma$  v  $M_n(\mathbb{C})$  s vlastností  $\gamma(t) \in G, \forall t \in \mathbb{R}$  a dále

$$\gamma(0) = I, \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_0 = A.$$

Z toho dostáváme, že  $\mathfrak{g}$  je tečný prostor prostoru  $G$  v identitě [12].



Obrázek 5-3 Tečný prostor v  $I$ , Zdroj: Brian Hall [12]

# 6 Lieovy grupy a jejich Lieovy algebry

Zatím jsme se zabývali pouze s maticovými Lieovými grupami. Nyní se neomezíme jen na maticové grupy a algebry, ale budeme konstruovat obecně. Definice, které jsme zformulovali výše pro maticový případ, budou jistě plynout z obecných definic, které nyní naformulujeme. Případný čtenář toho může využít a ověřit, zda jsou předchozí definice korektní. Definice 5.1.1 platí obecně pro Lieovy grupy.

## 6.1 Lieova grupa

### 6.1.1 Příklad

Mějme tuto Lieovu grupu  $(G, \circ)$ :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, u) \mid x, y \in \mathbb{R}, u \in S^1\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 \\ \circ &: G \times G \rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto (x_1, y_1, u_1) \circ (x_2, y_2, u_2) = \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1x_2}u_1u_2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Pro tuto Lieovu grupu nelze nalézt maticovou Lieovu grupu, která by byla s ní izomorfní [12].

### 6.1.2 Definice (Izomorfismus Lieových grup)

Nechť  $(G, \circ)$  a  $(H, *)$  jsou Lieovy grupy. Zobrazení  $\varphi: G \rightarrow H$  se nazývá isomorfismem Lieových grup, jestliže je hladkým homomorfismem Lieových grup a je bijekcí.

### 6.1.3 Poznámka

Izomorfismus Lieových grup je difeomorfismus.

### 6.1.4 Věta (Lieova podgrupa)

Každá uzavřená podgrupa  $H$  Lieovy grupy  $G$  je Lieovou podgrupou [4].

### 6.1.5 Definice (Levá translace)

Nechť  $(G, \circ)$  je Lieovu grupu a dále  $g \in G$ , pak zobrazení

$$\begin{aligned} l_g &: G \rightarrow G \\ h &\mapsto l_g(h) = g \circ h \end{aligned} \tag{6.2}$$

nazveme levou translací o  $g$ . Toto zobrazení splní podmínky  $l_e(h) = h$  a  $l_g(l(k)) = l_{gh}(k)$ . Zcela analogicky můžeme definovat pravou translaci  $R_g$ .

### 6.1.6 Poznámka

Dle definic vidíme, že pokud je  $G$  komutativní grupa, pak navíc platí, že:

$$l_g(h) = gh = hg = r_h(g) \tag{6.3}$$



Levá i pravá translace jsou si rovny. Pro násobení dvou matic stejného typu toto tvrzení neplatí, jelikož  $AB \neq BA$  (obecně).

### 6.1.7 Tvrzení (Difeomorfismus)

Nechť  $G$  je Lieova grupa, pak  $\forall g \in G$  je levá translace  $l_g$  difeomorfismem, [1].

### 6.1.8 Ověření (Tvrzení 6.1.6)

Hladkost levé translace vyplývá ze skutečnosti, že  $l_g = \mu(g, -)$  a  $\mu$  je dle definice Lieovy grupy hladké. Obdobně se ukáže pro inverzi  $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ . Pro levé translace  $l_g$  platí, že jsou bijekce a odtud i difeomorfismy. Pro zajímavost vidíme, že se nejedná o izomorfismus na grupě, jelikož lze ukázat

$$l_g(hk) = ghk \neq ghgk = l_g(h)l_g(k).$$

### 6.1.9 Poznámka (Význam $\Gamma(TM)$ )

Nechť  $M$  je hladká varieta a  $\pi: TM \rightarrow M$  její tečný bandl. Vektorové pole na  $M$  pak chápeme jako hladký řez tečného bandlu, tedy zobrazení

$$\sigma: M \rightarrow TM$$

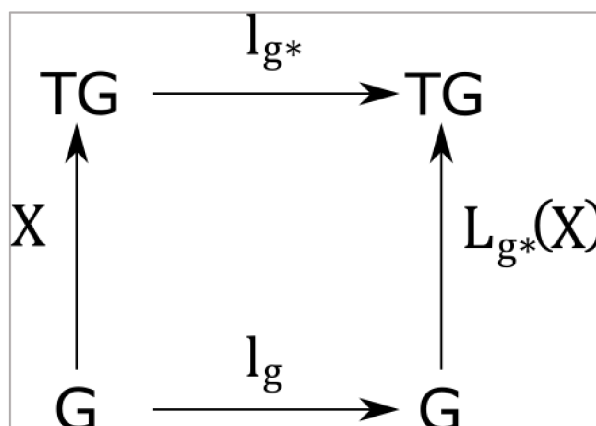
splňující  $\pi \circ \sigma = id_M$ .

$$\Gamma(TM) = \{\sigma: M \rightarrow TM \mid \sigma \text{ je hladké a } \pi \circ \sigma = id_M\}$$

### 6.1.10 Definice (Push-forward)

Díky faktu, že lze vždy vytvořit difeomorfismus  $l_g$  na  $G$ , můžeme pak vytvořit push-forward zobrazení  $(L_g)_*$ , pro libovolné vektorové pole  $X \in \Gamma(TG)$  na  $G$ .

$$(L_{g^*}X)(h) = l_{g^*}X(g^{-1}h) \text{ pro všechna } h \in G \quad 6.4$$



Obrázek 6-1 Push-forward na Lieově grupě, Zdroj: Vlastní

Bez újmy na obecnosti lze přeznačit prvek  $h$  na prvek  $gh$ . Odtud dostaneme

$$(L_{g^*}X)_{gh} = l_{g^*}X_h.$$

Pro libovolné  $g, h \in G$ , pak přímým výpočtem dostáváme

$$(L_g)_* \circ (L_h)_* = (L_{gh})_*.$$

Z funktoriality tečného bandlu dále dostaneme, že pro libovolné  $g_1, g_2, h \in G$  a  $X|_h \in T_h G$  platí

$$\left( (l_g)_* \circ (l_{g_2})_* \right) (X|_h) = (l_{g_1 g_2})_* (X|_h)$$

, [1].

## 6.2 Lieova algebra Lieových grup

### 6.2.1 Definice (Levoinvariantní pole)

Řekneme, že vektorové pole  $X$  na  $G$  je levoinvariantní, jestliže pro všechna  $g \in G$  platí

$$L_{g*} X = X. \quad 6.5$$

Jinak řečeno, pro všechna  $g, h \in G$  platí

$$l_{g*} (X|_h) = X|_{gh}, \quad 6.6$$

[1].

### 6.2.2 Poznámka

Jak víme z předchozích částí, vektory lze chápat jako operátory působící na funkce, tedy prvky  $f \in C^\infty(G)$ . Lze pak alternativně dostat, že  $X \in \Gamma(TG)$  je levoinvariantní právě tehdy, když pro  $\forall f \in C^\infty(G)$  platí

$$X(f \circ l_g) = (Xf) \circ l_g. \quad 6.7$$

### 6.2.3 Definice

Označme prostor všech levoinvariantních polí na  $G$  symbolem  $L(G)$ . Pak platí  $L(G) \subseteq \Gamma(TG)$ . Dále víme, že  $\Gamma(TG)$  je  $C^\infty(G)$  modul. Jelikož pro  $L(G)$  lze snadno ověřit jeho uzavřenost na operace  $\odot, \oplus$ , vidíme, že i  $L(G)$  je  $C^\infty(G)$  modul. Navíc lze ověřit, že na  $L(G)$  existuje struktura  $\mathbb{R}$ -vektorového prostoru, pokud redukuje okruh modulu  $\Gamma(TG)$  jen na konstantní funkce. Celý důkaz lze dohledat zde [1].

### 6.2.4 Teorém

Nechť  $G$  je Lieova grupa s neutrálním prvkem  $e \in G$ , pak  $L(G) \cong_{vec} T_e G$ . Jedná se o izomorfismus ve smyslu vektorového prostoru, [1].

### 6.2.5 Poznámka

Díky 6.2.4 dostáváme  $\dim L(G) = \dim(T_e G) = \dim G$ .

Pro dané  $X, Y \in \Gamma(TM)$  lze nadefinovat Lieovu závorku (komutátor) jako:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Pro libovolné  $f \in C^\infty(M)$ .

### 6.2.6 Věta

Nechť  $G$  je Lieova grupa. Pak  $(L(G), [\cdot, \cdot])$  je Lieova podalgebra Lieovy algebry  $(\Gamma(TG), [\cdot, \cdot])$ , [1].

### 6.2.7 Ověření

Víme, že  $L(G) \subseteq \Gamma(TG)$  a dokonce, že  $L(G)$  je  $\mathbb{R}$ -vektorovým podprostorem  $\Gamma(TG)$ . Musíme zjistit, zda  $L(G)$  je uzavřená na operaci závorka, která je zděděná z  $\Gamma(TG)$ .

$$[\cdot, \cdot]: L(G) \times L(G) \stackrel{?}{\rightarrow} L(G)$$

Důkaz.

Nechť  $X, Y \in L(G)$ , pak pro libovolné  $g \in G$  a  $f \in C^\infty(G)$  máme

$$\begin{aligned} [X, Y](f \circ l_g) &= X(Y(f \circ l_g)) - Y(X(f \circ l_g)) = \\ &= X((Yf) \circ l_g) - Y((Xf) \circ l_g) = \\ &= (X(Yf)) \circ l_g - (Y(Xf)) \circ l_g = \\ &= ([X, Y]f) \circ l_g \end{aligned}$$

Díky 6.7 víme, že  $([X, Y]f) \circ l_g \in L(G)$ .

### 6.2.8 Definice

Nechť  $G$  je Lieova grupa. Pak Lieovu algebru  $L(G)$  nazveme Lieovou algebrou grupy  $G$ .

### 6.2.9 Poznámka

Vidíme, že všechny levoinvariantní vektorové pole mohou být chápány jako vektory tečného prostoru v neutrálním prvku  $e \in G$ . Dále víme, že na  $L(G)$  máme Lieovu algebru, ihned vyvstane otázka, zda nemohu vnořit tuto závorku do  $T_e G$ , bohužel to nelze, protože do závorky v  $L(G)$  vstupují dvě vektorová pole, ty ale nemáme na  $T_e G$ . Musíme najít tedy jiný způsob, jak vytvořit izomorfismus mezi nimi.

### 6.2.10 Definice (Homomorfismus Lieových algeber)

Nechť  $L_1, L_2$  jsou dvě Lieovy algebry nad stejným polem. Pak lineární zobrazení  $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$  nazveme homomorfismem Lieových algeber pokud

$$\forall x, y \in L_1: \varphi([x, y]_{L_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L_2}. \quad 6.8$$

Když  $\varphi$  je bijekce dostáváme izomorfismus Lieových algeber  $L_1 \cong_{Lie\ alg} L_2$ .

### 6.2.11 Definice

Díky definici 6.2.11 lze jednoznačně definovat závorku na  $T_e G$  pro  $A, B \in T_e G$ .

$$[A, B]_{T_e G} = j^{-1}([j(A), j(B)]_{L(G)}) \quad 6.9$$

Kde  $j^{-1}(X) = X|_e$ . Z toho plyne že  $L(G) \cong_{Lie\ alg} T_e G$ .

### 6.2.12 Teorém

Nechť  $G$  je Lieova grupa s Lieovou algebrou  $\mathfrak{g}$ . Pokud  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  je Lieova podalgebra, pak existuje jednoznačně určená souvislá Lieova podgrupa  $H$  grupy  $G$  s danou Lieovou algebrou  $\mathfrak{h}$ .  $H$  se nazývá iniciální podvarieta, [10].

### 6.2.13 Poznámka

Je více stupňů definice podvariet. Nejslabší zavedení odpovídá imerzované podvarietě. Nejsilnějším pojem podvariety naopak odpovídá definici, kterou jsme uvedli výše. Mezi ně právě patří iniciální podvarieta.

### 6.2.14 Teorém

Nechť  $\mathfrak{g}$  je reálná Lieova algebra s konečnou dimenzí. Pak existuje souvislá Lieova grupa  $G$ , jejíž Lieova algebra je  $\mathfrak{g}$ , [10].

### 6.2.15 Teorém

Nechť  $G$  a  $H$  jsou Lieovy grupy s Lieovými algebry  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{h}$ . Nechť  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  je homomorfismus Lieových algeber. Pak homomorfismus Lieových grup  $\varphi$  je definovaný lokálně na okolí bodu  $e \in G$  jako  $\varphi' = T_e \varphi = f$ . Pokud  $G$  je jednoduše souvislá, pak existuje globálně definovaný homomorfismus Lieových grup  $\varphi: G \rightarrow H$  se stejnými vlastnostmi.

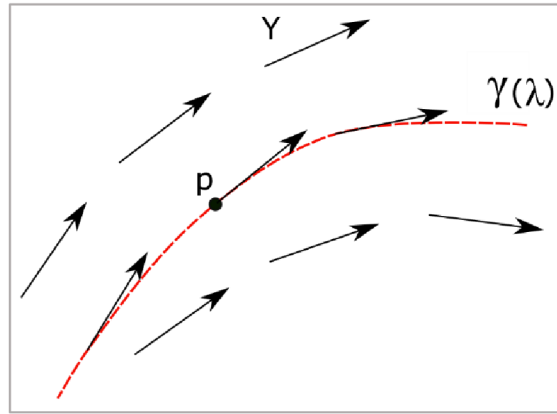
## 6.3 Rekonstrukce Lieových grup z Lieových algeber

### 6.3.1 Definice (Integrální křivky)

Nechť  $M$  je hladká varieta a nechť  $Y \in \Gamma(TM)$  je hladké vektorové pole na  $M$ . Pak hladkou křivku  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  nazveme integrální křivkou, pokud  $\forall \lambda \in (a, b)$  platí

$$X_{\gamma, \gamma(\lambda)} = Y_{\gamma(\lambda)}. \quad 6.10$$

Kde  $X_{\gamma, \gamma(\lambda)}$  je tečný vektor ke křivce  $\gamma$  v bodě  $\gamma(\lambda)$  a  $Y_{\gamma(\lambda)}$  je vektorové pole v bodě  $\gamma(\lambda)$ . Každým bodem  $M$  vede právě jedna integrální křivka daného  $Y$ . Plyne z lokální existence a jednoznačnosti řešení *ODR*, [10].



Obrázek 6-2 Integrální křivky, Zdroj: Vlastní

### 6.3.2 Definice (Úplná integrální křivka)

Integrální křivku  $\gamma$  vektorového pole  $Y$  nazveme úplnou, pokud interval  $(a, b)$  lze rozšířit na celé  $\mathbb{R}$ .

### 6.3.3 Definice

Na kompaktní varietě  $M$ , každé vektorové pole je kompletní, [1].

### 6.3.4 Definice

Každé levoinvariantní vektorové pole na Lieově grupě  $G$  je kompletní, [1].

### 6.3.5 Definice (Exponenciální zobrazení)

Nechť  $A \in T_e G$ , pak  $A$  definuje jednoznačně levoinvariantní vektorové pole  $X^A$ , kde v bodě  $g \in G$  platí

$$X_g^A = l_g^* A \quad 6.11$$

Pak necht'  $\gamma^A: \mathbb{R} \rightarrow G$  je integrální křivkou  $X^A$  skrz bod  $\gamma^A(0) = e$ . Tato konstrukce definuje exponenciální zobrazení  $exp$ .

$$\begin{aligned} \exp: T_e G &\rightarrow G \\ \exp(A) &= \gamma^A(1) \end{aligned} \quad 6.12$$

Jistě lze  $A$  volit libovolně a dostat se i do jiných bodů než  $\gamma^A(1)$ , [10].

### 6.3.6 Definice (Lokální difeomorfismus)

Zobrazení  $exp$  je hladké a lokálně difeomorfní. To znamená, že

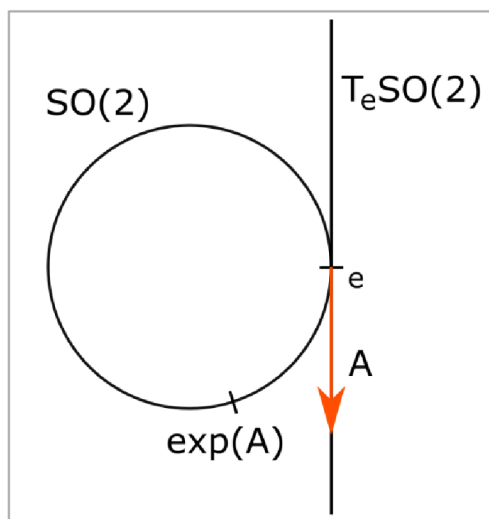
$$\exists V \subseteq T_e G, 0 \in V: \exp|_V: V \rightarrow \exp V \subseteq G, \quad 6.13$$

kde  $exp|_V$  je bijekce.  $exp|_V$  a  $(exp|_V)^{-1}$  jsou hladké zobrazení.

Pokud  $G$  je kompaktní  $\Rightarrow exp$  je surjekce.  $exp(T_e G) = G$ , [10].

### 6.3.7 Poznámka

Jistě nemůže pro  $G$  kompaktní dosáhnout globálního difeomorfismu, jelikož  $T_e G$  je nekompaktní. Tedy  $exp$  nemůže být injekce.



Obrázek 6-3 Exponenciální zobrazení, Zdroj: Vlastní

### 6.3.8 Definice (Jedno-parametrická podgrupa)

Jedno-parametrická podgrupa Lieovy grupy  $G$  je homomorfismus Lieových grup

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G, \quad 6.14$$

kde pod  $\mathbb{R}$  chápeme klasickou Lieovu grupu s klasickým sčítáním.

### 6.3.9 Definice

Nechť  $G$  je Lieova grupa, pak platí, že pro  $A \in T_e G$  je zobrazení

$$\alpha^A: \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$\lambda \mapsto \alpha^A(\lambda) = \exp(\lambda A)$$

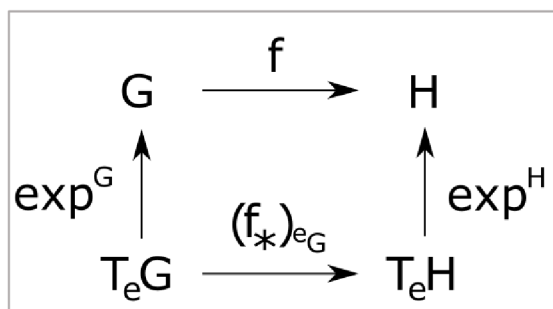
Jedno-parametrická podgrupa. Dále všechny jedno-parametrické podgrupy  $G$  mají tvar  $\alpha^A$  pro nějaké  $A \in T_e G$ , [10].

### 6.3.10 Poznámka

Pro  $\alpha^A$  z 6.3.9 musí platit  $\alpha^A(\lambda_1 +_{\mathbb{R}} \lambda_2) = \alpha^A(\lambda_1) *_G \alpha^A(\lambda_2)$ .

### 6.3.11 Poznámka

Mějme dvě Lieovy grupy  $G, H$  a máme hladké zobrazení  $f: G \rightarrow H$ , které je izomorfismem Lieových grup. Pak diagram



Obrázek 6-4 Diagram, Zdroj: Vlastní

komutuje. To nám dává vztahy  $f(\exp^G(A)) = \exp^H(f_*A)$ . Push-forward bývá často značen čistě jako derivace  $f'$ , [1].

### 6.3.12 Definice

Spojité homomorfismus  $\varphi: G \rightarrow H$  mezi dvěma Lieovými grupami je hladké, [10].

### 6.3.13 Definice

Nechť  $G, H$  jsou Lieovy grupy a necht'  $\varphi$  je spojitý bijektivní homomorfismus, pak  $\varphi$  je difeomorfismus, [10].

Pro důkaz je potřeba vložnost, že  $G$  je separabilní.

### 6.3.14 Definice (Adjungovaná reprezentace **ad**)

Reprezentace Lieovy grupy  $G$  na konečně rozměrný vektorový prostor je homomorfismus  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  Lieových grup. Díky push-forward  $\rho_*$ , který lze zkonstruovat na  $G$ , platí  $\rho^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = L(V, V)$  je homomorfismus Lieových algeber.

Pro  $a \in G$  definujeme zobrazení

$$\begin{aligned} \text{conj}_a: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto \text{conj}_a(x) = axa^{-1}, \end{aligned} \quad 6.15$$

Které se nazývá konjugace anebo také vnitřní automorfismus od  $a \in G$ . Pro  $\text{conj}_a$  obecně platí

$$\text{conj}_a(xy) = \text{conj}_a(x)\text{conj}_a(y), \text{conj}_{ab} = \text{conj}_a \circ \text{conj}_b.$$

Dále je  $\text{conj}$  hladké zobrazení pro všechny proměnné.

Pro  $a \in G$  definujeme zobrazení

$$\text{Ad}(a) = (\text{conj}_a)' = T_e(\text{conj}_a): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}. \quad 6.16$$

Díky hladkosti  $\text{conj}_a$  dostáváme, že  $\text{Ad}(a)$  je homomorfismus Lieových algeber, pak ale musí platit

$$\text{Ad}(a)[X, Y] = [\text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y].$$

Pak  $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  je reprezentace, která se nazývá adjungovaná reprezentace  $G$ , protože

$$\text{Ad}(ab) = T_e(\text{conj}_{ab}) = T_e(\text{conj}_a \circ \text{conj}_b) = T_e(\text{conj}_a) \circ T_e(\text{conj}_b) = \text{Ad}(a) \circ \text{Ad}(b)$$

Vidíme, že

$$Ad(a) = T_e(\text{conj}_a) = T_a(\rho_{a^{-1}})T_e(\lambda_a) = T_{a^{-1}}(\lambda_a)T_e(\rho_{a^{-1}}).$$

Adjungovaná reprezentace  $ad$  Lieovy algebry je definována jako

$$\begin{aligned} ad: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ ad &= Ad' = T_e Ad, \end{aligned} \tag{6.17}$$

[10].

### 6.3.15 Poznámka

Jak bylo definována  $ad$  vidíme, že  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$  platí  $ad(X)Y = [X, Y]$ .

## 6.4 Jety

Nyní se budeme zabývat jetovými grupami, které jsou podrobně studovány zejména v monografii [10]. Nejprve definujme pojem  $r$ -jetu.

### 6.4.1 Terminologie (Jet)

Zjednodušeně řečeno, jety jsou určité třídy ekvivalence hladkých zobrazení mezi varietami, které jsou reprezentovány Taylorovými polynomy.

### 6.4.2 Definice (Kontakt řádu $r$ )

Mějme dvě křivky  $\gamma, \delta: \mathbb{R} \rightarrow M$  obdobně jako v 4.2.1. Pak řekneme, že mají kontakt řádu  $r$  v bodě  $p \in M$ , pokud pro libovolné zobrazení  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  platí, že vztah  $f \circ \gamma - f \circ \delta$  se vynuluje až do  $r$ -tého řádu v bodu  $p$ . Ihned zavedeme rozklad ekvivalence  $\gamma \sim_r \delta$ , pokud mají kontakt řádu  $r$ . [10]

### 6.4.3 Poznámka

Předchozí definice je zcela ekvivalentní s tímto přístupem. Řekneme, že  $\gamma \sim_r \delta$  právě tehdy, když pro křivky  $\gamma, \delta$  platí:

$$\frac{d^k(x^p \circ \gamma)(0)}{dt^k} = \frac{d^k(x^p \circ \delta)(0)}{dt^k}$$

Kde pod  $x^p$  chápeme lokální mapu  $(U, x)$  pro daný bod  $\gamma(0) = \delta(0) = p$ .

### 6.4.4 Definice ( $r$ -jet)

Nechť existují dvě zobrazení  $\phi, \psi: M \rightarrow N$ . Pak řekneme, že definují stejný  $r$ -jet, pokud platí, že pro libovolnou křivku  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  s podmínkou  $\gamma(0) = p$ , dostaneme, že  $\phi \circ \gamma$  a  $\psi \circ \gamma$  mají kontakt řádu  $r$  v  $\gamma(0)$ . Pokud to platí, pak píšeme  $j_p^r \phi = j_p^r \psi$ . [20]

### 6.4.5 Poznámka

Opět lze zavést rozklad, kde ztotožníme všechna zobrazení  $\phi_i$ , pro která platí, že patří do stejného  $r$  jetu. Množinu všech těchto  $r$  jetů označíme jako  $J^r(M, N)$ .

Zobrazení  $j^r f: M \rightarrow J^r(M, N)$  se nazývá  $r$  jetové prodloužení  $f: M \rightarrow N$ . Dále  $J_x^r(M, N)$  resp.  $J^r(M, N)_y$  značíme všechny  $r$  jety takové, že musí procházet bodem  $x \in M$  resp.  $y \in N$ .



### 6.4.6 Definice

Kontakt řádu  $r$  pro zobrazení se zachovává při kompozici zobrazení.

$$j_x^r f \in J_x^r(M, N)_y, j_y^r g \in J_y^r(N, O)_z, f(x) = y$$

$$j_x^r f \circ j_y^r g = j_x^r(f \circ g) \in J_x^r(M, O)_z$$

Kompozice zobrazení je asociativní a taktéž  $r$  jety. Navíc vidíme, že nezávisí na volbě zobrazení. Řekneme, že  $j_x^r(*) \in J_x^r(M, N)_y$  má inverzi  $(j_x^r(*))^{-1} \in J_y^r(N, M)_x$ , pro něž platí:

$$(j_x^r(*))^{-1} \circ j_x^r(*) = j_x^r(id_M) \quad \wedge \quad j_x^r(*) \circ (j_x^r(*))^{-1} = j_y^r(id_N)$$

Taková existence jetu okamžitě implikuje, že  $\dim M = \dim N$ . Množina všech těchto invertibilních  $r$  jetů označíme jako  $\text{inv } J^r(M, N)$ . [20]

### 6.4.7 Definice

Pro dvě křivky  $\gamma, \delta: \mathbb{R} \rightarrow M$  platí vztah  $\gamma \sim_r \delta$  právě tehdy, když  $j_0^r(\gamma) = j_0^r(\delta)$  [20].

### 6.4.8 Definice

Označme  $L_{m,n}^r = J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . Prvky této struktury mohou být ztotožněny s Taylorovým rozvojem do řádu  $r$ , který je vytvořen z příslušných map  $x^i$ . Kde se nenachází absolutní člen.

$$\sum_{1 \leq \alpha \leq r} a_\alpha^p x^\alpha \tag{6.18}$$

Kde  $\alpha$  chápeme jako multiindex. Takto se dají reprezentovat  $r$ -jety.

Navíc lze zavést skládání jako:  $L_{m,n}^r \times L_{n,q}^r \rightarrow L_{m,q}^r$ , kde skládáme polynomy a všechny polynomy vyšší než  $r$  potlačíme. [10]

### 6.4.9 Definice (Lieova grupa)

Množina všech invertibilních prvků z  $L_{n,n}^r$  tvoří spolu s operací skládání Lieovu grupu  $G_n^r$ . Jedná se o  $r$ -tou diferenciální grupu, pro  $r = 1$  dostaneme námi už známou  $GL(n, \mathbb{R})$ . [10]

### 6.4.10 Definice (Jetová grupa)

Jetová grupa je označena  $G_n^k = \text{inv } J_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_0$  s multiplikativní operací skládání jetů. [10]

## 7 Využití a fyzikální aplikace

V této části využijeme poznatky, které jsme získali v předchozích kapitolách a pokusíme se je využít ve fyzikálních aplikacích. Nejdříve si připomeneme integrální principy a následně na nich vybudujeme základy kvantové fyziky, také se zaměříme na aplikace nematematických Lieových algeber v mechanice kontinua. Stěžejní bod této části práce je založen na teorému Emmy Noetherové, který vydala v roce 1916 a který říká:

**Každá symetrie v přírodě souvisí s nějakou zachovávanou fyzikální veličinou. Tato veličina se zachovává právě tehdy, když platí tato symetrie.**

Pod pojmem symetrie nechápeme matematickou symetrii (jako je např. symetrie čtverce), nýbrž nezávislost Lagranžiánu na některé z prostorových souřadnic. Z dané fyzikální symetrie následně vyvodí daný zákon zachování. Nám jsou známy zákony zachování: elektrického náboje, momentu hybnosti, parity, spinu a mnoho dalších.

Tato část bude čerpat převážně z knih pana profesora Petra Kulhánka [17, 21, 6, 18].

### 7.1 Základy teoretické mechaniky

#### 7.1.1 Definice (Hamiltonův princip)

Nechť existuje funkce  $L$ , která je funkcí času  $t$ , zobecněných souřadnic  $q$  a jejich zobecněných rychlostí  $\dot{q}$ :

$$L(t, q, \dot{q}),$$

tuto funkci nazýváme Lagrangeova funkce nebo lagranžián. Pro všechny možné závislosti  $q(t)$  se realizuje v přírodě ta, pro kterou integrál

$$I(q) = \int_a^b L(t, q, \dot{q}) dt \quad 7.1$$

nabývá minima. Jedná se o klasický variační počet, který je dobře znám.  $I(q)$  se nazývá integrál akce.

#### 7.1.2 Definice (Lagrangeovy-Eulerovy rovnice)

Nutná podmínka minima integrálu akce:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, k = 1, \dots, n \quad 7.2$$

Odvození lze dohledat v [22]. Navíc tyto rovnice jsou doplněny počátečními podmínkami anebo okrajovými podmínkami:

$$q_k(a) = \alpha_k \quad \dot{q}_k(a) = \beta_k \quad \vee \quad q_k(a) = \alpha_k \quad q_k(b) = \beta_k$$

Navíc si lze povšimnout, že i když se dva lagranžiány liší o člen typu  $df/dt$ , kde  $f(q, \dot{q})$ , tak i přes to naleznou stejné řešení. Z toho plyne, že jsou nerozlišitelné. Dále uvažujeme

nedisipativní systém. Pokud bychom chtěli postačující podmínku pro minimum, musíme zvýšit požadavek, aby druhá variace  $I_2$  byla kladná. Nebo se využívá Legendreův test [22].

Je vždy potřeba nalézt takové  $L$ , které odpovídá realitě. Pro klasickou fyziku se ukázalo, že lagranžian typu  $L(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(t, q)$  odpovídá realitě. Pro jiné systémy třeba relativistické je potřeba nalézt jiný lagranžian, který popisuje chování ve shodě s pozorovanými experimenty.

### 7.1.3 Definice (Zobecněná hybnost)

Pokud  $L$  není závislé na jednom  $q_k$ , pak ihned ze 7.2

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.} \quad 7.3$$

Veličina  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  se zachovává v tomto systému. Ze symetrie v jedné souřadnici jsme obdrželi zákon zachování. Pro dané  $q_k$  pak definujeme její zobecněnou hybnost  $p_k$  jako

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad 7.4$$

### 7.1.4 Definice (Zobecněná energie)

Pokud  $L$  není závislé na  $t$  (symetrie vůči času), pak za předpokladu platnosti rovnice 7.2 dostáváme (s využitím Einsteinovy sumační konvence) následující.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= 0 \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \frac{dL}{dt} &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right) = \\ & \frac{d}{dt} \left( -L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L &= \text{const.} \end{aligned} \quad 7.5$$

Odvodili jsme, že levá strana v poslední rovnici se zachovává. Veličinu

$$E(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$$

lze chápat jako zobecněnou energii.

Definice zobecněné energie je nezávislá na jejím zachování či nezachování a závisí pouze na symetrii daného systému (dogmaticky nelze tvrdit, že se energie zachovává). Dále vidíme, že energie která je takto definována, je závislá na  $L$ .

Vidíme, že energie nemusí být námi známa kinetická a potenciální, ale pro různé  $L$  bude mít různé tvary.

### 7.1.5 Poznámka

Vidíme, že jsme obdrželi známé zákony zachování, které známe z tradiční fyziky, ale díky obecnosti této konstrukce lze odvodit i další zákony. Necht' máme rotaci v rovině  $xy$  o úhel  $\varphi$ , jestliže dostaneme, že  $L$  je neměnné vůči  $\varphi$ , pak obdržíme zákon zachování momentu hybnosti. Homogenita prostoru zaručí zachování hybnosti. Izotropie prostoru zaručí zachování momentu hybnosti. Je-li časoprostor imunní vůči posunutí v čase, pak obdržíme zákon zachování energie. Můžeme uvažovat i další rotace, a to rotaci kolem roviny  $xt, yt, zt$ . Tento problém jsme již načali v 5.8.7 a do jisté míry i vyřešili. Nyní víme, že tyto rotace indukují zákon zachování spinů  $s_i$ . Souhrnem dostaneme deset zákonů zachování (Poincarého grupa symetrii).

|                     |   |                            |
|---------------------|---|----------------------------|
| homogenita prostoru | → | zachování hybnosti         |
| isotropie prostoru  | → | zachování momentu hybnosti |
| neměnnost v čase    | → | zachování energie          |

Obrázek 7-1 Zákony zachování, Zdroj: Petr Kulhánek, [17]

### 7.1.6 Definice (Hamiltonovy rovnice)

Hamiltonovy rovnice jsou ekvivalentní s 7.1.2:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

kde  $H(t, q, p) = E(t, q, \dot{q})$ . Přešli jsme ze systému  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu na systém  $2n$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Odvození probíhá ve smyslu, že nahradíme zobecněné rychlosti  $\dot{q}_k$  za zobecněné hybnosti  $p_k$ . A ukážeme, že takováto transformace vždy existuje a je jednoznačná [22].

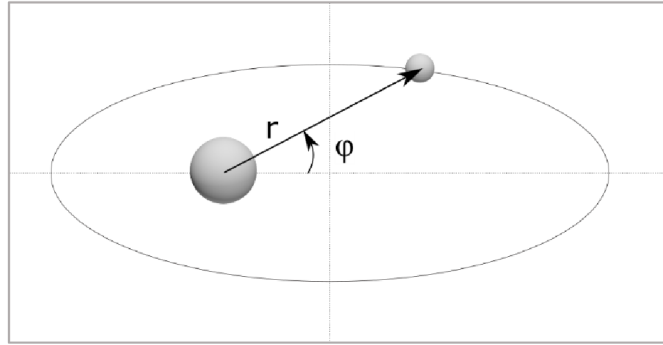
### 7.1.7 Poznámka

Transformace, která převádí 7.1.2 na 7.1.6, nazýváme Legendreovou. Existuje i další transformace, která převádí 7.1.6 na Hamilton-Jacobiho rovnici. Tato rovnice je pak parciální diferenciální rovnice prvního řádu.

### 7.1.8 Příklad

Uvažujme planetu, která obíhá kolem hvězdy. Zobecněné souřadnice toho systému jsou:

$$q_1(t) = r, \quad q_2(t) = \varphi$$



Obrázek 7-2 Planeta a hvězda, Zdroj: Vlastní

Předpokládáme, že hmotnost hvězdy  $M$  je mnohem větší než hmotnost planety  $m$ . Jedná se o klasickou fyziku a lze použít  $L = T - V$ .

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2, \quad V = -\mathcal{K} \frac{mM}{r}$$

Napočítáme  $p_k$  ze vztahu 7.4:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$$

Převod energie za pomoci Legendreovy transformace.

$$E(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - \mathcal{K} \frac{mM}{r},$$

$$H(t, q, p) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} - \mathcal{K} \frac{mM}{r}$$

Odsud dostáváme Hamiltonovy rovnice 7.6.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m}, & \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{2m r^2} \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \mathcal{K} \frac{mM}{r^2}, & \dot{p}_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Vidíme, že radiální hybnost je konstantní. Z toho dostáváme zákon zachování úhlové hybnosti. Jedná se o Keplerův zákon, který jsme zmiňovali na začátku kapitoly 5, [18].

## 7.2 Poissonova závorka

Uvažujme obecnou, tzv. dynamickou proměnou  $A(q, p)$  (souřadnice, potenciální energie atd.). Bude nás zajímat její časový vývoj.

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{7.8}$$

Všimněme si korespondence s třetím příkladem v 5.6.2. Skutečně  $\{A, H\}$  odpovídá 7.8.

### 7.2.1 Definice (Poissonova závorka)

Poissonova závorka  $\{-, -\}$  je definována pro funkce  $f, g$  fázových proměnných  $q, p$  takto.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

$f, g$  jsou z vektorového prostoru funkcí, na kterém Poissonova závorka splňuje axiomy Lieovy algebry, [17].

### 7.2.2 Poznámka

Dosaďme za  $f, g$  fázové proměnné  $p, q$ , pak obdržíme (strukturní koeficienty).

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad 7.9$$

### 7.2.3 Příklady

Navážeme na příklad 7.1.8. Budeme chtít zjistit časový vývoj **potenciální energie**  $V$  v daném systému.

$$\dot{V} = \{V, H\} = \left\{ -\mathcal{K} \frac{mM}{r}, \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \mathcal{K} \frac{mM}{r} \right\}$$

Určitě lze využít vztah 7.8 a přímo dopočítat  $\dot{V}$ .

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial V}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \mathcal{K} \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{p_r}{m} + 0 \cdot \frac{p_\varphi}{mr^2} = \mathcal{K}M \frac{p_r}{r^2} \\ \frac{\partial V}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \frac{\partial V}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial p_\varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \cdot \frac{\partial H}{\partial r} + 0 \cdot 0 = 0 \\ \dot{V} &= \mathcal{K}M \frac{p_r}{r^2} \end{aligned} \quad 7.10$$

Změna potenciální energie je proporční třem proměnným  $p_r, M, 1/r^2$ .

### Harmonický oscilátor

Pro harmonický oscilátor platí tyto Lagrangeovy rovnice.

$$L = \overbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}^T - \overbrace{\frac{1}{2} m \omega x^2}^V$$

Kde  $m$  odpovídá hmotnosti závaží,  $x(t)$  poloha v čase  $t$ ,  $\dot{x}(t)$  rychlost v čase  $t$  a  $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$  odpovídá úhlové frekvenci, kde  $k$  je tuhost daného oscilátoru. Vyřešíme tuto soustavu za pomoci kanonických-Hamiltonových rovnic.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -m\omega^2 x$$

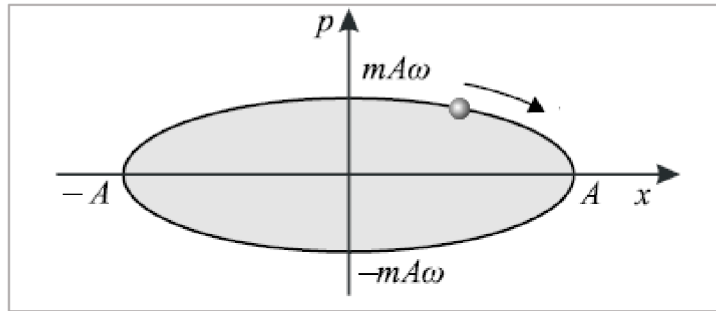
Pokud dodáme počáteční podmínky  $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ , tak obdržíme řešení ve tvaru

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad p_x(t) = -mA\omega \sin \omega t. \quad 7.11$$

Lze převést na jednu rovnici o proměnných  $x, p_x$ .

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p_x}{mA\omega}\right)^2 = 1$$

Vykresleme fázový portrét této soustavy.



Obrázek 7-3 Fázový portrét, Zdroj: Kulhánek [18]

Napočítejme nyní časový vývoj kinetické energie.

$$\dot{T} = \{T, H\}$$

Tentokrát ale využijme pouze vlastností Lieovy algebry a nikoli samotný aparát Poissonových závorek.

$$\dot{T} = \{T, H\} = \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\}$$

Využijeme vlastnosti Lieovy algebry z 5.6.2 i vztahu  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ .

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{p_x^2}{2m}, \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\} &= \left\{ \frac{p_x^2}{2m}, \frac{p_x^2}{2m} \right\} + \left\{ \frac{p_x^2}{2m}, \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\} \\ \left\{ \frac{p_x^2}{2m}, \frac{p_x^2}{2m} \right\} &= 0, \quad \left\{ \frac{p_x^2}{2m}, \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\} = - \left\{ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \frac{p_x^2}{2m} \right\} = \\ &= -\frac{1}{4}\omega^2 \{x^2, p_x^2\} = -\frac{1}{4}\omega^2 (x\{x, p_x^2\} + \{x, p_x^2\}x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\omega^2(xp_x\{x, p_x\} + x\{x, p_x\}p_x + p_x\{x, p_x\}x + \{x, p_x\}xp_x) = \\
&= -\omega^2xp_x
\end{aligned}$$

K výsledku nám stačili pouze vlastnosti Lieovy algebry, nikoli samotná definice. Obdobný postup využijeme v kvantové teorii, [18].

## 7.3 Lagrangeovy rovnice pro polní problémy

### 7.3.1 Definice (Čtyřvektor)

Jedná se o prvek Minkowského prostoru (4-rozměrný reálný vektorový prostor), který se transformuje stejně jako vektor. Může se jednat o Lorentzovu transformaci v čase a jednom ze směrů prostoru anebo o klasickou rotaci. Pokud přidáme translaci, dostáváme transformaci za pomoci Poincarého grupy.

Tyto vztahy splňují tyto čtveřice: událost  $x^\mu$ , čtyřhybnost  $p^\mu$ , vlnový čtyřvektor  $k^\mu$ , čtyřpotenciál elmag. pole  $A^\mu$  a další.

$$\begin{array}{ccc}
x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & p^\mu \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k^\mu \equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\
A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & j^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; & \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Obrázek 7-4 Čtyřvektory, Zdroj: Kulhánek, [17].

Jedním z postulátů speciální teorie relativity je, že se světlo ve všech souřadných soustavách šíří stejnou rychlostí. Z této konstrukce pak dostáváme, že invariant bude tohoto tvaru (plyne z konstantnosti  $c$ )

$$\begin{aligned}
c &= \frac{dl}{dt}, c^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} \\
-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 &= 0
\end{aligned}$$

Pravou stranu označíme  $ds^2$  a pojmenujeme ji jako interval. Tento interval je invariant, který jsme zmiňovali výše. S tímto pojmem dostáváme i Minkowského metriku  $g_{\mu\nu}$ .

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Díky metrice dokážeme pouštět a zvedat indexy.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\nu$$

Čtyřvektorové operátory



$$\begin{aligned}
a) \quad & \nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu = A^{\nu, \mu} \\
b) \quad & \nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi \\
c) \quad & \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \Leftrightarrow \square f
\end{aligned}
\tag{7.12}$$

c) se nazývá d'Alembertův operátor  $\square$ .

Lze zvolit takový systém, kde rychlost světla  $c$  bude 1 (Přirozená soustava jednotek).

### 7.3.2 Definice (Lagrangeovy rovnice)

U polních problémů musíme přejít od hledání zobecněných souřadnic  $q_k(t)$  na hledání časoprostorové závislosti polí  $\varphi_k(t, \mathbf{x})$ . Odtud přejdeme na používání hustoty Lagrangeovy funkce.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha})$$

Pro integrál akce pak platí

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^4x.$$

Pro existenci extrému opět použijeme variaci, tentokrát ale na polích.

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0$$

Obdobným odvozením jako pro obyčejné Lagrangeovy funkce dostáváme

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \tag{7.13}$$

Za předpokladu, že  $\varphi_k$  jsou nezávislá, a že integrand byl nulový skoro všude (až na množinu míry 0), [18], [17].

Povšimneme si, že oproti běžným Lagrangeovým-Eulerovým rovnicím jsou zde derivace přes všechny čtyři proměnné.

### 7.3.3 Poznámka

Stejně jako v 7.1.2 není Lagrangeova funkce určena jednoznačně. Pro tento typ integrand nerozezná dva lagranžiány, které se liší o derivaci přes čtyřvektor  $\partial_\mu K^\mu$ .

### 7.3.4 Příklad

Sestrojíme Lagrangeovy-Eulerovy rovnice pro danou Lagrangeovu funkci skalárního pole  $\varphi$ .

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) \tag{7.14}$$

Řešení dostaneme touto sekvencí identit (rozšíříme 7.15 o 1/2).

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right) = \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) \right) = \frac{1}{2} \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \left( g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \left( \delta_\mu^\alpha (\partial_\nu \varphi) + \delta_\nu^\alpha (\partial_\mu \varphi) \right) = \frac{1}{2} \partial_\alpha \left( \delta_\mu^\alpha (\partial^\mu \varphi) + \delta_\nu^\alpha (\partial^\nu \varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha \left( (\partial^\alpha \varphi) + (\partial^\alpha \varphi) \right) = \square \varphi = 0
\end{aligned}$$

Jedná se vlnovou rovnicí.

### 7.3.5 Definice (Kanonické veličiny)

Obdobně jako v 7.1.6 lze zavést kanonicky sdruženou hybnost  $\pi_k(t, \mathbf{x})$  a energii  $\mathcal{H}(t, \mathbf{x})$ .

$$\begin{aligned}
\pi_k(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,t}} \\
\mathcal{H}(t, \mathbf{x}) &= \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,t}} \varphi_{k,t} - \mathcal{L}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Zde můžeme aplikovat Poissonovy závorky 7.2.1.

$$\begin{aligned}
\{\varphi_k(t, \mathbf{x}), \varphi_l(t, \mathbf{x}')\} &= 0 \\
\{\pi_k(t, \mathbf{x}), \pi_l(t, \mathbf{x}')\} &= 0 \\
\{\varphi_k(t, \mathbf{x}'), \pi_l(t, \mathbf{x})\} &= \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Kde pod  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  chápeme Diracovu distribuci, [17].

## 7.4 Maxwellovy rovnice, elektromagnetické pole

### 7.4.1 Definice (Obecně Maxwellovy rovnice)

Elektromagnetické pole se zapisuje většinou za pomoci Maxwellových rovnic.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_Q, \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},
\end{aligned} \tag{7.18}$$

kde  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{P})$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . Vektor  $\mathbf{P}$  odpovídá polarizaci a  $\mathbf{M}$  je magnetizace.

Odvození lze nalézt zde [23].

### 7.4.2 Definice (Zavedení tenzoru elmag. pole), [18]

Elektromagnetické pole lze popsat za pomoci 6-tice  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  anebo za pomoci čtveřice  $\begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ . Pro experimenty se využívá 6-tice, ale pro práci se čtyřvektory je mnohem výhodnější druhý zápis.

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad 7.19$$

Z první rovnice plyne existence funkce  $\mathbf{A}$ , pro kterou platí

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad 7.20$$

Vidíme, že díky vztahu 3.2.14 ihned splňujeme první Maxwellovu rovnici. Funkce  $\mathbf{A}$  se nazývá vektorový potenciál. Díky ní dostaneme i další vztah (opět využijme 3.2.14), ze kterého plyne existence  $\phi$  (skalární potenciál).

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad 7.21$$

Pozastavme se nad složkovým vyjádřením  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ .

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$$

$$E_1 = -\partial_1 \phi_0 - \partial_0 A_1$$

Pak ale zjistíme, že oba vztahy se chovají ve čtyřech dimenzích úplně stejně. Musíme akorát ošetřit znaménko mínus u první složky. Z toho plyne, že  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  lze zachytit za pomoci jediné veličiny.

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad 7.22$$

Jedná se o antisymetrický tenzor elektromagnetického pole. Napočítejme si jednu jeho složku

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = E^x,$$

poté analogicky doplníme celý antisymetrický tenzor  $F^{\alpha\beta}$ .

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 1 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 1 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 1 \end{pmatrix}$$

Používáme přirozenou soustavu jednotek.

První dvě rovnice v Maxwellových rovnicích jsme již využili a implementovali do  $F^{\alpha\beta}$ . Vyjádření dvou dalších rovnic uděláme za pomoci tenzoru elektromagnetického pole.

$$F^{\alpha\beta}_{,\beta} = \mu_0 j^\alpha \quad 7.23$$

Dosáhli jsme Maxwellových rovnic, které jsou relativistické.

### 7.4.3 Lagrangeova formulace Maxwellových rovnic

Nyní se pokusíme sestavit Lagrangeovu funkci, kterou bychom mohli popsat Maxwellovy rovnice.

Máme k dispozici:

- a) Pole, které je popsané za pomoci

$$A^\mu = A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 1 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 1 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Částice, které jsou popsané za pomoci

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho_Q \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}.$$

Víme, že lagranžián musí být skalár. Poté lze jednoduše odvodit různými kombinacemi tento tvar, který se realizuje v přírodě.

Pro interakce

$$\mathcal{L}_{int} = j_\mu A^\mu = j^\mu A_\mu$$

Pro pole

$$\mathcal{L}_{pole} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Pak dostáváme, že hustota Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole je

$$\mathcal{L}_{elmag} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \quad 7.24$$

Celou konstrukci s detaily lze dohledat v [18].

#### 7.4.4 Ověření

Ukažme, že vztah 7.24 dosazený do Lagrangeových rovnic (7.13) odvodí vztah 7.23.

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} &= 0, & \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta_{,\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} &= 0, \\ -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\alpha \left( \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial A^\beta_{,\alpha}} \right) - \frac{\partial (j_\mu A^\mu)}{\partial A^\beta} &= 0, & -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\alpha g^{\alpha\xi} g_{\xi\alpha} \left( \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial A^\beta_{,\alpha}} \right) - j_\mu \delta^\mu_\beta &= 0, \\ -\frac{1}{4\mu_0} \partial^\xi \left( \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial A^{\beta,\xi}} \right) - j_\mu \delta^\mu_\beta &= 0, & -\frac{1}{4} \partial^\alpha \left( \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A^{\beta,\alpha}} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial A^{\beta,\alpha}} \right) &= \mu_0 j_\beta, \\ -\frac{1}{4} \partial^\alpha \left( 2F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A^{\beta,\alpha}} \right) &= \mu_0 j_\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\partial^\alpha \left( (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{\partial}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right) &= \mu_0 j_\beta, \\
-\frac{1}{2}\partial^\alpha \left( (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu) \right) &= \mu_0 j_\beta, \\
-\frac{1}{2}\partial^\alpha (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) &= \mu_0 j_\beta, \\
-\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \mu_0 j_\beta, \quad -g^{\alpha\xi} g_{\xi\alpha} g^{\beta\zeta} \partial^\alpha F_{\alpha\beta} &= g^{\beta\zeta} \mu_0 j_\beta, \\
-F^{\xi\zeta}_{,\xi} = \mu_0 j^\beta, \quad F^{\beta\alpha}_{,\alpha} &= \mu_0 j^\beta
\end{aligned}$$

## 7.5 Diracova symbolika

Taktéž je známá jako braketová symbolika nebo taky brakety. Jedná se o slovní hříčku, kde prvkům vektorového prostoru přiřazuje kety  $|f\rangle$  a jejich duálům  $\langle g|$  říkáme bra. Z toho plyne pojmenování brakety. Dohromady tvoří skalár  $\langle f|g\rangle$ . Tato operace je definována na unitárním prostoru jako skalární součin, který jsme již definovali v 5.2.3.

### 7.5.1 Příklad

Prostor komplexních posloupností  $\mathcal{L}^2$  je dobře známý, proto nám z něj plynou tyto vztahy.

$$|f\rangle = \{f_1, f_2, \dots\} = \{f_i\}_{i=1}^\infty$$

Skalární součin je tedy definován takto

$$\langle g|f\rangle = g_i^* f_i.$$

Díky tomu, že prostor  $\mathcal{L}^2$  je tvořen prvky, pro které platí  $\|f\| < \infty$ , poté je skalární součin korektně definován.

Plyne z Cauchy-Schwarzovi nerovnosti

$$\langle g|f\rangle \leq \|f\| \|g\| < \infty$$

Další příklad může být prostor komplexních funkcí reálné proměnné  $\mathcal{L}^2$  (obdobně platí známé vztahy).

$$|f\rangle = f(x)$$

A skalární součin se stane integrálem.

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

Meze odpovídají intervalu, který jsme zvolili jako definice prostoru. Nyní se tedy pohybujeme na prostoru  $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$

Diracova symbolika výrazně zjednodušuje zápis při popisu mikrosvěta, projekčních operátorů atd.

### 7.5.2 Operátory [17]

Nechť  $V$  je unitární prostor. Pod operátorem  $\hat{A}$  chápeme zobrazení  $\hat{A}: V \rightarrow V$ , kde každému  $f \in V$  přiřadíme jiný prvek  $g \in V$ .

$$\hat{A}|f\rangle = |g\rangle$$

### 7.5.3 Příklad

Vezměme si prostor  $L^2(-\infty, \infty)$ .  $\hat{D} = \frac{d}{dx}$  je operátor na tomto prostoru. Ukažme na příkladu

$$|f\rangle = xe^{-x^2}$$

$$\hat{D}|f\rangle = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Vidíme, že  $f, g$  patří do prostoru  $L^2(-\infty, \infty)$ .

Jednotkový operátor pro  $N$ -tice odpovídá operátoru, který má pouze jedničky na diagonále  $(\delta_j^i)$ .

### 7.5.4 Funkce operátorů

Vidíme, že operátory dobře známe z kapitoly 5.5. Lze je tedy rozvinout do libovolných funkcí, pokud ohlídáme podmínky konvergence. Takto lze nadefinovat například i  $\sin d/dx$ .

### 7.5.5 Inverze operátoru

K danému operátoru  $\hat{A}$  lze nalézt inverzní operátor  $\hat{A}^{-1}$ , pokud platí vztah

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}.$$

### 7.5.6 Sdružený operátor

Nechť  $\hat{A}$  je operátor, pak operátor  $\hat{A}^*$  nazveme sdružený, pokud platí

$$\langle f|\hat{A}g\rangle = \langle \hat{A}^*f|g\rangle.$$

### 7.5.7 Poznámka

Vidíme, že s touto strukturou umíme velmi dobře pracovat díky předchozím kapitolám. Jediné, co je nové, je samotná Diracova symbolika.

### 7.5.8 Příklad

Nechť máme operátor  $\hat{A} \in M_2(\mathbb{C})$ , který je tvaru

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem lze ověřit, že inverzní a sdružený operátor je tvaru

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \hat{A}^*.$$

### 7.5.9 Lieova algebra

Vidíme, že lze triviálně zavést komutátor.

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Díky tomu ihned dostaneme Lieovu algebru.

### 7.5.10 Příklad

Nechť  $\hat{A}, \hat{B}$  jsou operátory nad  $L^2$ , kde  $\hat{A} = d/dx$  a  $\hat{B} = x$ . Určeme jejich komutátor.

$$[\hat{A}, \hat{B}]|f\rangle = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|f\rangle$$

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}|f\rangle = f(x) + xf'(x) - xf'(x) = f(x)$$

Odtud dostáváme, že komutátor  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{1}$  ( $[\hat{B}, \hat{A}] = -\hat{1}$ ).

### 7.5.11 Unitární a Hermitovy operátory [17]

Pro unitární operátor platí  $\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}$ . Například na prostoru  $L^2$  je unitární operátor  $e^{ix}$ .

Řekneme, že  $\hat{A}$  je Hermitův operátor, pokud platí

$$\langle \hat{A}f | g \rangle = \langle f | \hat{A}g \rangle.$$

Hermitův operátor působí tedy na obě složky stejně. Proto bývá běžně používán tento zápis (Diracův sendvič)

$$\langle f | \hat{A} | g \rangle. \quad 7.25$$

Příkladem Hermitova operátoru na  $L^2$  je  $i\frac{d}{dx}$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} -i \frac{df^*}{dx} g dx = -i[f^*g]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{dg}{dx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left( i \frac{dg}{dx} \right) dx = \langle f | \hat{A}g \rangle \end{aligned}$$

### 7.5.12 Projekční operátor [17]

Projekční operátor  $\hat{P}$  hraje velmi důležitou roli v kvantové teorii, ale taktéž při rozvoji do různých typů řad (například Fourierových řad). Řady jsou tedy projekce daného vektoru do jejich báze.

Operátor  $\hat{P}$  je projekční operátor, pokud platí, že je lineární, hermitovský a

$$\hat{P}^2 = \hat{P}.$$

Obecně je pak tvaru

$$\hat{P} = \frac{|a\rangle\langle a|}{\langle a|a\rangle}, \quad 7.26$$

kde  $|a\rangle$  odpovídá prvku do kterého chceme promítat. Vidíme, že se jedná pouze o naznačenou operaci (obdobně jako u operátoru  $\frac{d}{dx}$ ). Teprve až projekční operátor začne působit na prvek  $|f\rangle$ , obdržíme smysluplnou formulaci.

$$\hat{P}|f\rangle = |a\rangle \frac{\langle a|f\rangle}{\langle a|a\rangle}$$

Ověření, zda obecný tvar splňuje třetí vlastnost.

$$\hat{P}^2 = \hat{P}$$

$$\hat{P}^2 = \frac{|a\rangle\langle a| |a\rangle\langle a|}{\langle a|a\rangle \langle a|a\rangle} = \frac{|a\rangle\langle a| |a\rangle\langle a|}{\langle a|a\rangle \langle a|a\rangle} = \frac{|a\rangle\langle a|}{\langle a|a\rangle} = \hat{P}$$

### 7.5.13 Rozvoj prvků do báze

Nechť  $\{|e_i\rangle\}$  je spočetná báze v unitárním prostoru. Třeba za pomoci Gramova–Schmidtova ortogonalizace lze vždy převést danou bázi na ortonormální bázi  $|k\rangle$ . Ty pak splňují tyto dvě podmínky.

$$\begin{aligned} \langle k|l\rangle &\geq \delta_{kl} \\ |k\rangle\langle k| &= \hat{1} \end{aligned} \tag{7.27}$$

Pro neseparabilní prostor musíme využít Diracovi distribuce a díky ní přepíšeme vztah 7.27 na

$$\begin{aligned} \langle x|y\rangle &= \delta(x-y) \\ \int |x\rangle\langle x| dx &= \hat{1} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Díky Diracově symbolice je rozklad  $|f\rangle$  do báze  $|k\rangle$  trivialita.

$$|f\rangle = \hat{1}|f\rangle = |k\rangle\langle k|f\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \tag{7.29}$$

Kde  $c_k$  odpovídá skalárnímu součinu  $\langle k|f\rangle$ .

Nejnámější příkladem báze na prostoru  $L^2(0,2\pi)$  jsou funkce tvaru  $|f_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ . Jedná o jistě o Furierovu řadu, kde pro  $c_k$  platí

$$c_k = \langle k|f\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) dx$$

### 7.5.14 Spektrální teorie [17]

Pro operátory je důležité najít směry, které se při působení operátoru  $\hat{A}$  na prvek Hilbertova prostoru projeví pouze jako natáhnutí.

$$\hat{A}|f\rangle = \lambda|f\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Pak  $|f\rangle$  nazveme vlastním vektorem a  $\lambda$  vlastním číslem. Pro separabilní prostory dostáváme, že maximální počet vlastních čísel a vlastních vektorů je nejvýše roven dimenzi prostoru. Pro separabilní prostory dostáváme



$$\hat{A}|f_k\rangle = \lambda_k|f_k\rangle, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Množinu  $\{\lambda_i\}$  nazýváme spektrum operátoru  $\hat{A}$ .

Když v pevnosti a pružnosti hledáme hlavní směry tenzoru napětí, tak využíváme spektrální teorii. Také ji lze využít při řešení diferenciálních rovnic.

### 7.5.15 Vlastní čísla a vektory unitárního operátoru [17]

Všechna vlastní čísla unitárního operátoru  $\hat{U}$  leží na komplexní jednotkové kružnici a nejdůležitější vlastnost je, že vlastní vektory jsou si navzájem kolmé.

Ověření.

Použijeme definice unitárních operátorů a jejich spektrálního rozvoje.

$$\langle f_k|f_k\rangle = \langle \hat{U}f_k|\hat{U}f_k\rangle = \lambda^*\lambda \langle f_k|f_k\rangle$$

Což nám dává vztah  $\lambda^*\lambda = 1$  a odtud  $|\lambda| = 1$ .

Dále pro unitární operátor platí (pro různá  $k$  a  $l$ )

$$\lambda_l \langle f_k|f_l\rangle = \langle f_k|\hat{U}f_l\rangle = \langle \hat{U}^*f_k|f_l\rangle = \langle \hat{U}^{-1}f_k|f_l\rangle = \frac{1}{\lambda_k^*} \langle f_k|f_l\rangle.$$

To ale s využitím vztahu  $\lambda^*\lambda = 1$  dostáváme

$$(\lambda_l - \lambda_k) \langle f_k|f_l\rangle = 0 \Rightarrow \langle f_k|f_l\rangle = 0$$

### 7.5.16 Vlastní čísla a vektory Hermitova operátoru [17]

O Hermitově operátoru tvrdíme, že má reálná vlastní čísla a vlastní vektory dvou různých vlastních čísel jsou navzájem kolmé.

Ověření.

Použijeme definice Hermitova operátoru a jeho spektrálního rozvoje.

$$\lambda_k^* \langle f_k|f_k\rangle = \langle \hat{A}f_k|f_k\rangle = \langle f_k|\hat{A}|f_k\rangle = \langle f_k|\hat{A}f_k\rangle = \lambda_l \langle f_k|f_k\rangle$$

Z toho dostáváme  $\lambda_k^* = \lambda_k \Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}$ .

Nyní ověříme kolmost dvou různých vlastních vektorů.

$$\lambda_k^* \langle f_k|f_l\rangle = \langle \hat{A}f_k|f_l\rangle = \langle f_k|\hat{A}|f_l\rangle = \langle f_k|\hat{A}f_l\rangle = \lambda_l \langle f_k|f_l\rangle$$

Pak ale díky vztahu  $\lambda_k^* = \lambda_k$  obdržíme

$$(\lambda_k - \lambda_l) \langle f_k|f_l\rangle = 0 \Rightarrow \langle f_k|f_l\rangle = 0.$$

### 7.5.17 Tvrzení o spektrálním rozvoji [18]

Nechť  $\hat{A}$  je lineární operátor, jehož množina vlastních vektorů  $|f_k\rangle$  tvoří úplnou bázi v Hilbertově prostoru, pak můžeme pro analytickou funkci operátoru, definovanou Taylorovým rozvojem, psát

$$f(\hat{A}) = \sum_k f(\lambda_k) |k\rangle\langle k| = \sum_k f(\lambda_k) \hat{P}_k.$$

Ověření.

$$f(\hat{A})|f_k\rangle = \sum_k c_k \hat{A}^k |f_k\rangle = \sum_k c_k \lambda^k |f_k\rangle = f(\lambda_k) |f_k\rangle.$$

Díky rozkladu do báze lze pro obecný prvek  $|g\rangle$  Hilbertova prostoru psát

$$f(\hat{A})|g\rangle = \sum_k f(\hat{A}^k) |k\rangle\langle k|g\rangle = \sum_k f(\lambda_k) |k\rangle\langle k|g\rangle.$$

### 7.5.18 Příklad

Napočítejme znovu exponenciálu matice  $A$  z příkladu 5.5.4, tentokrát za pomoci spektrálního rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla obdržíme z

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

odtud  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ . Vlastní vektory pak dopočítáme zpětným dosazením do matice  $A$ .

$$|f_1\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |f_2\rangle = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, |f_3\rangle = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dále napočítáme projekční operátory  $P_i$ , dle vztahu 7.26.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme vše potřebné k výpočtu exponenciály  $A$ .

$$e^A = e^{\lambda_1} P_1 + e^{\lambda_2} P_2 + e^{\lambda_3} P_3$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i} & ie^{-i} & 0 \\ -ie^{-i} & e^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^i & -ie^i & 0 \\ ie^i & e^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^i + e^{-i}}{2} & -i \frac{e^i - e^{-i}}{2} & 0 \\ i \frac{e^i - e^{-i}}{2} & \frac{e^i + e^{-i}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 & 0 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jedná se přesně o stejný výsledek jako v 5.5.4.

### 7.5.19 Příklad (Řešení rovnice difúze) [18]

Máme za úkol nalézt časový vývoj průběhu teploty tyče délky  $L$ , jejíž oba konce jsou udržovány na konstantní teplotě. Počáteční teplota tyče je dána funkcí  $T_0(x)$ . Hledáme řešení rovnice teplotní difúze.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T = T(t, x) \quad 7.30$$

Kde počáteční a okrajové podmínky jsou dány jako

$$T(0, x) = T_0(x), \quad T(t, 0) = 0 = T(t, L).$$

Řešení budeme hledat v tomto Hilbertově prostoru.

$$\mathcal{H} = \{f(x): f \in L^2(0, L), f(0) = f(L) = 0\}$$

Počáteční podmínku jsme vnořili ihned do konstrukce Hilbertova prostoru. Přepis do Diracovi symboliky.

$$\frac{d|T\rangle}{dt} = -\kappa \hat{A}|T\rangle, \quad |T\rangle \in \mathcal{H}, \hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

Zvolili jsme operátor  $\hat{A}$  takto, protože víme, že se jedná o hermitovský operátor. Řešení lze zformulovat ihned.

$$|T(t)\rangle = e^{-\kappa \hat{A}t}|T(0)\rangle$$

Sice o pravé straně nic nevíme, ale vidíme, že se opravdu jedná o řešení. Jelikož počáteční podmínka

$$e^{-\kappa \hat{A}t}|T(0)\rangle|_0 = |T(0)\rangle = 0$$

a i původní rovnici

$$\frac{d}{dt} e^{-\kappa \hat{A}t}|T(0)\rangle = -\kappa \hat{A} e^{-\kappa \hat{A}t}|T(0)\rangle = -\kappa \hat{A}|T\rangle$$

platí.

Nyní musíme napočítat, čemu odpovídá  $e^{-\kappa \hat{A}t}$ .

1) Vlastní čísla

$$\hat{A}|f\rangle = \lambda|f\rangle$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lambda f(x)$$

$$f(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Toto je obecné řešení. My ale víme, že musíme vzít pouze ta řešení, která splňují podmínky Hilbertova prostoru.

$$f(0) = 0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$f(L) = 0 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Odtud dostaneme  $\lambda_k$

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$$

2) Vlastní směry

$$|f\rangle = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Jedná se o nejpřirozenější bázi řešení. Sám operátor nám vnucuje použít Fourierovu řadu (pro válcový problém bychom dostali Besselovy řady atd.).

3) Normované

$$|k\rangle = \frac{|f_k\rangle}{\sqrt{\langle f_k | f_k \rangle}} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\left(\int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Pro řešení integrálu využijeme vztahy  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  a  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ .

Nyní již dostaneme řešení je tvaru

$$\begin{aligned} |T(t)\rangle &\geq e^{-\kappa \hat{A}t} |T(0)\rangle \geq \sum_k e^{-\kappa \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} |k\rangle \langle k | T_0 \rangle = \\ &= \sum_k e^{-\kappa \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} c_k |k\rangle \end{aligned}$$

Řešení zapsané v klasickém stylu

$$T(t, x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k c_k e^{-\kappa \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

kde  $c_k$  má tvar

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) T_0(x) dx.$$

## 7.6 Kvantová teorie

V této části se pokusíme nastínit využití Lieovy algebry v kvantové teorii. Rozhodně se nejedná o žádný úvod nebo pokus o vysvětlení kvantové teorie.

Z experimentů bylo prokázáno, že klasická mechanika naprosto selhává při popisu dějů mikrosvěta, viz. dvouštěřbinový experiment nebo samotná existence atomu.

Kvantová teorie je založena na faktu, že neplatí komutativita  $AB \neq BA$ . Tenhle fakt jsme ale už dobře prozkoumali a jsme dokonce schopni i zachytit, jak moc dané objekty nekomutují.

Celá část je citována z [17].

### 7.6.1 Základní principy kvantové teorie

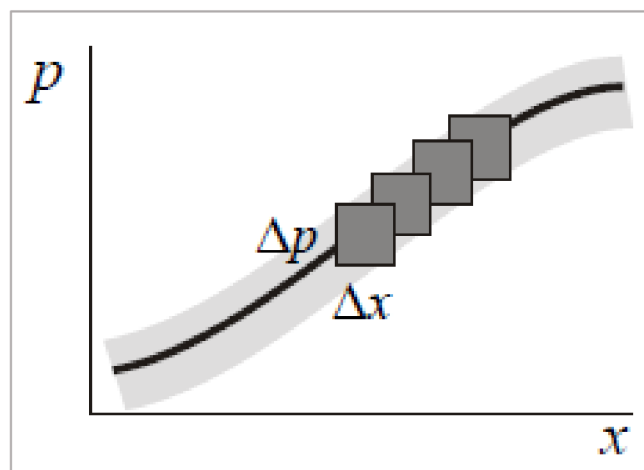
Systém je cokoli, co chceme pozorovat (popisovat). Jako je hmotný bod, planeta atd. V teoretické mechanice jsme ze zadané počáteční polohy a hybnosti, byli schopni napočítat časový vývoj těchto proměnných.

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{p}(0) \rightarrow \mathbf{p}(t)$$

Stav systému je tedy dán šestící hodnot.

V kvantové teorii jsme na tom mnohem hůře, jelikož akt měření poškozuje systém. Neboli změření polohy nám zlikviduje informaci o hybnosti a naopak.



Obrázek 7-5 Relace neurčitosti, Zdroj: Petr Kulhánek, [18]

Vnímáme je tedy jen s přesností danou relací neurčitosti.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

V kvantové teorii tedy bude stav jen to, co dokážeme změřit. Musíme zavést pojem kompatibilní proměnné. Jedná se o dvě dynamické proměnné, které mohu změřit současně a navzájem se neovlivní.

Takovéto kompatibilní proměnné jsou.

$$(x, y, z), \quad (p_x, p_y, p_z), \quad (E, L^2, L_3) \quad 7.31$$

Nekompatibilní proměnné je třeba položit se svojí hybností  $(x, p_x)$ .

Mezi vlastnosti kompatibility patří, že je symetrická, ale nikoli tranzitivní.

Úplná množina pozorovatelných je maximální množina dynamických proměnných, které jsou nezávislé a můžeme je změřit současně. Tu jsme popsali v 7.30. Pod  $L^2$  rozumíme kvadrát momentu hybnosti a  $L_3$  je libovolná komponenta momentu hybnosti.

## 7.6.2 Základní konstrukce kvantové teorie

Kvantová teorie je vystavěna na nekomutujících prvcích.

Dynamické proměnné přiřadíme operátor.

$$A \rightarrow \hat{A}, \quad X \rightarrow \hat{X}, \quad L_2 \rightarrow \hat{L}_2$$

Nekomutující svět bude svět operátoru v Hilbertově prostoru. Vidíme, že se zatím jedná pouze o nástin konstrukce a mnoho vlastností se musí definovat.

Výsledkem měření jsou vždy reálné hodnoty. Tyto hodnoty mohou být spojité, ale i diskrétní (elektron v blízkosti protonu má energetické hladiny spojité i diskrétní). Tyto hodnoty dostaneme z operátoru jako jeho spektrum (pro některé diferenciální operátory platí, že jejich spektrum je v určité části spojité a jinde diskrétní). V přírodě tedy budeme měřit spektrum daného operátoru.

### 1. Postulát

Každé dynamické proměnné přiřadím hermitovský operátor v Hilbertově prostoru.

### 2. Postulát

Systém nahradím Hilbertovým prostorem (Hilbertův prostor reprezentuje daný systém).

Každý systém bude mít svůj Hilbertův prostor – Hilbertův prostor elektronu, Hilbertův prostor vodíkového atomu atd.

Již jsme ukazovali, že akt měření změní stav systému  $\hat{A}|f\rangle = |g\rangle$ . Jelikož jsme nad lineárními operátory, pak celý paprsek  $|f\rangle$  je jeden stav systému.

### 3. Postulát

Stav je paprsek  $|\psi\rangle$  v Hilbertově prostoru.

Vidíme, že existují vlastní stavy, které dané měření nezmění  $\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ . Obecně, ale dostaneme jiný prvek Hilbertova prostoru.

Pro lineární teorii musí platit, že je-li  $|\psi\rangle$  a  $|\phi\rangle$  stav systému, pak i  $\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle$  musí být také realizovatelný stav systému.

### 7.6.3 Měření v kvantové teorii

#### 4. Postulát

Při měření dostáváme spektrum daného operátoru  $\hat{A}$ .

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

Jistě můžeme dostat i spojité spektrum, pak neuvažujeme  $a_n$ , ale bereme ho jako spojitou proměnou  $a$ .

#### 5. Postulát

Provedeme-li akt měření na systému připraveném ve vlastním stavu dynamické proměnné, jako výsledek může být jen vlastní číslo příslušící danému stavu.

$$\hat{A}|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$$

#### 6. Postulát

Opakovaná měření pro obecný stav  $|\psi\rangle$  nám dává různé hodnoty.

Pro střední hodnotu operátoru  $\hat{A}$  a stavu definujeme jako

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle,$$

kde  $|\psi\rangle$  je normovaný k jedné. Nad prostorem funkcí bychom dostali

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3x.$$

### 7.6.4 Rozvinutí stavového vektoru do ortonormální báze

Nechť  $\hat{A}$  je hermitovský operátor, který tvoří bázi v Hilbertově prostoru  $\{|j\rangle\}$ . Pak pro systém  $|\psi\rangle$  dostáváme.

$$|\psi\rangle = \hat{1}|\psi\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |k\rangle$$

Obecný stav je superpozicí všech vlastních stavů.

$$\sum_k \psi_k^* \psi_k = \sum_k \langle \psi | k \rangle \langle k | \psi \rangle = 1$$

Pak  $w_k = \psi_k^* \psi_k$  nám dává pravděpodobnost výskytu obecného stavu ve stavu  $k$  a naměření hodnoty  $a_k$ .

Obdobně lze ukázat pro spojité spektrum.

### 7.6.5 Princip korespondence [17]

Posledním krok pro vykonstruování základních principů kvantové teorie je princip korespondence. Popisuje nám, které části z teoretické mechaniky lze převzít do kvantové teorie.

#### 7. Postulát

Algebraické výrazy budou mít stejný tvar v obou dvou teoriích a mohou se lišit maximálně pořadím.

V klasické fyzice moment hybnosti je

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$$

Pak v kvantové teorii máme dvě možnosti, jak zavést operátor  $\hat{L}_1$

$$\hat{L}_1 = \begin{cases} \hat{x}_2 \hat{p}_3 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \hat{x}_2 - \hat{p}_2 \hat{x}_3 \end{cases}$$

Víme, že v reálném světě se realizuje první případ. Opravdu z klasické fyziky lze přebrat vztahy, ale musíme prokázat, který stav se realizuje v přírodě.

#### 8. Postulát

Struktura Poissonových závorek v teoretické mechanice je identická se strukturou komutátorů v kvantové teorii.

Poissonovy závorky nám pro dvě proměnné dají novou dynamickou proměnnou. Tato struktura je nekomutativní a nemusíme tedy hlídat, kterou možnost zvolíme.

$$\{A, B\} = C \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$$

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]$$

Konstanta  $\hbar$  plyne z podmínky, že  $\hat{A}, \hat{B}$  jsou hermitovské z toho plyne, že  $i\hat{C}$  musí být hermitovský. Velikost  $\hbar$  nám určuje, jak moc dané prvky nekomutují. Tato hodnota byla experimentálně naměřena  $\hbar \cong 1,054 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$  a je pojmenovaná jako redukovaná Planckova konstanta.

Nyní jsme vybudovali základní postuláty kvantové teorie.

### 7.6.6 Kompatibilita měření a Heisenbergovy relace

Dle principu korespondence komutační relace dostáváme vztahy pro tyto operátory.

$$[\hat{X}_k, \hat{X}_l] = 0, \quad [\hat{P}_k, \hat{P}_l] = 0, \quad [\hat{X}_k, \hat{P}_l] = i\hbar \delta_{kl} \hat{1} \quad 7.32$$

Vidíme, že jediná měření, která se ovlivňují, jsou měření zobecněné souřadnice a jí příslušné zobecněné hybnosti.



Nyní budeme používat pouze vlastností Poissonových závorek a 7.31 (pro definici nám stačí strukturní koeficienty).

Odvoďme komutační relace mezi první a druhou komponentou momentu hybnosti.

V našem vesmíru se realizoval moment hybnosti pro komponenty takto

$$\hat{L}_1 = \hat{x}_2 \hat{p}_3 - \hat{x}_3 \hat{p}_2$$

$$\hat{L}_2 = \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_1 \hat{p}_3$$

$$\hat{L}_3 = \hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_2 \hat{p}_1.$$

Ukažme komutační relace  $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ .

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = [\hat{x}_2 \hat{p}_3 - \hat{x}_3 \hat{p}_2, \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_1 \hat{p}_3]$$

Většina členů po využití Lieovy algebry jsou nulové, až na

$$\begin{aligned} [\hat{L}_1, \hat{L}_2] &= -\hat{x}_2 [\hat{x}_3, \hat{p}_3] \hat{p}_1 + \hat{x}_1 [\hat{x}_3, \hat{p}_3] \hat{p}_2 = -i\hbar \hat{x}_2 \hat{1} \hat{p}_1 + i\hbar \hat{x}_1 \hat{1} \hat{p}_2 = \\ &= i\hbar \hat{L}_3 \end{aligned}$$

Pak cyklickou záměnou dostáváme.

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar \hat{L}_3$$

$$[\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar \hat{L}_1$$

$$[\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar \hat{L}_2$$

Pak vidíme, že není možné současně měřit žádné dvě komponenty momentu hybnosti.

Pro kvadrát momentu hybností  $\hat{L}^2$  s libovolnou komponentou momentu hybnosti  $\hat{L}_i$  dostaneme.

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$$

Vždy tedy lze změřit kvadrát a jednu komponentu.

Pro střední kvadratickou odchylku dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\Delta \hat{A})^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | (\hat{A} - \bar{a} \hat{1})^2 | \psi \rangle = & 7.33 \\ \langle \psi | \hat{A}^2 - 2\hat{A} + \bar{a}^2 \hat{1} | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \bar{a}^2 = \\ &= \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle^2) \end{aligned}$$

Odsud už plyne Heisenbergovy relace neurčitosti, jak je známe.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

### 7.6.7 Schrödingerova rovnice [17]

Pro energie podle principu korespondence píšeme.

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow \hat{H}$$

Kde

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z}{2m} + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}).$$

Nalezněme spektrum operátoru  $\hat{H}$ .

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad 7.34$$

Pokud známe vztahy 7.32.

Musíme tedy zvolit operátory tak, aby pro ně platily komutační pravidla. Rovnici 7.34 nazýváme Schrödingerovou rovnicí.

Ukažme si řešení na  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Zvolme první operátory jako operátory souřadnic

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z \quad 7.35$$

Teď musíme nalézt takové operátory  $\hat{\mathbf{p}}$ , pro které budou platit komutační pravidla 7.32.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad 7.36$$

Tato reprezentace  $\hat{\mathbf{x}}$  a  $\hat{\mathbf{p}}$  splňuje komutační vztahy

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{x} \cdot$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{P}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

Následně to vede na slavnou Schrödingerovou rovnici v dané reprezentaci.

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z}{2m} |\psi\rangle + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) |\psi\rangle = E |\psi\rangle \\ & \frac{-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial}{\partial z^2}}{2m} \psi(x, y, z) + V(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \\ & \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi = E \psi \end{aligned}$$

Schrödingerova rovnice

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right)\psi_n(\mathbf{x}) = E_n\psi_n(\mathbf{x}). \quad 7.37$$

## 7.7 Spiny

Tímto pojmem jsme se již dosti zabývali v 5.8.7. Víme, že v časoprostoru kromě klasických rotací dostáváme i boosty-rapidity (rotace, kde jedna složka je čas).

Rotační symetrii odpovídá moment hybnosti  $\mathbf{L}$  a Lorentzově symetrii odpovídá právě spin  $\mathbf{S}$ . Spin má podobné vlastnosti jako má moment hybnosti, ale už se nedá intuitivně představit. Jejich celkový rotační vztah je pak dán jako součet obou veličin. Tyto veličiny můžeme skládat, jak bylo ukázáno v 5.8.7.

Pro operátor spinu, pak dostáváme

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1, \hat{S}_2] &= i\hbar\hat{S}_3 \text{ a cyklické záměny} \\ [\hat{S}^2, \hat{S}_i] &= 0 \end{aligned} \quad 7.38$$

Obdobně jako u momentu hybnosti, zavádíme spinové číslo  $s$  a magnetické spiové číslo  $m_s$ . Lze ukázat, [14], že platí vztahy

$$\begin{aligned} |S| &= \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ S_3 &= m_s\hbar, \quad m_s = -s, -s+1, \dots, s \end{aligned} \quad 7.39$$

Částice, která nemají nulový spin a mají nulový orbitální moment hybnosti, vykazují magnetický moment v prostředí, kde se nachází nehomogenní magnetické pole. Tento jev byl poprvé pozorován při Sternově-Gerlachově experimentu.

| Spin některých částic                                       |     |
|---|-----|
| leptony (elektron, tauon, mion, neutrina)                   | 1/2 |
| kvarky ( $d, u, s, c, b, t$ )                               | 1/2 |
| skalární mezony ( $\pi$ , kaony)                            | 0   |
| vektorové mezony ( $\rho$ , kaony)                          | 1   |
| hadrony (neutron, proton, $\Delta$ hyperon)                 | 1/2 |
| hadrony ( $\Delta$ , $\Omega$ )                             | 3/2 |
| intermediální bosony ( $\gamma$ , $W^\pm$ , $Z^0$ , gluony) | 1   |
| gravitony   | 2   |

Obrázek 7-6 Spiny částic, Zdroj: Petr Kulhánek, [17]

Tato problematika je mnohem bohatší a složitější. Pro tuto práci je postačující, když jsme ukázali využití Lieovy algebry. Každopádně pro hlubší studium doporučuji [17].

## 7.8 Mechanika kontinua – grupa symetrií

V následujícím odstavci nastíníme roli jetových grup v některých modelech v mechanice kontinua, zejména pokud jde o pojmy materiálové isomorfie a grupy symetrií.

Uvažujme hyperelastické těleso  $\mathcal{B}$ , tedy těleso s konstitutivní rovnicí  $\Psi = \Psi(F, X)$ , kde  $F$  značí gradient deformace řádu  $r$ , a kde  $X \in \mathcal{B}$  je libovolný bod.  $\Psi$  je elastická energie vztažená k jednotkovému objemu. Body budeme uvažovat spolu s umístěním  $j_0^r \mu \in J_{0X}^r(B, \mathbb{R}^3)$ , kde  $X \in B$ , [24].

Ve smyslu [24] budeme uvažovat i následující pojmy materiálového isomorfismu a grupy symetrií. Materiálový izomorfismus mezi body  $X_1$  a  $X_2$  lze chápat jako  $r$ -jet  $j_{X_1}^r p_{12}$  (pro lokální difeomorfismus na  $\mathcal{B}$  splňující  $p_{12}(X_1) = X_2$ ), který splňuje identitu

$$\Psi(j_{X_2}^r \mathcal{K} \circ j_{X_1}^r p_{12}) = \psi(j_{X_2}^r \mathcal{K}), \quad 7.40$$

pro libovolnou konfiguraci  $\mathcal{K}$  ( $j_{X_2}^r \mathcal{K}$  odpovídá gradientu  $F$  řádu  $r$ ).

Jsou-li všechny body vzájemně lokálně izomorfní, pak hovoříme o uniformním tělese.

Archetypem budeme rozumět vybraný bod  $X_0 \in \mathcal{B}$  spolu jeho umístěním do tzv. fyzikálního prostoru  $E_3$  prostřednictvím  $r$ -jetu vhodné referenční konfigurace  $j_{X_0}^r \mathcal{K}$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$  takovým, že  $j_{X_0}^r \mathcal{K}$  patří do  $J^r(X_0, \mathbb{R}^3)_0$ . Je zřejmé, že inverzní jet k  $j_{X_0}^r \mathcal{K}$  odpovídá reperu  $j_0^r \Phi \in P_{X_0}^r \mathcal{B}$ .

Implantem budeme rozumět materiálový izomorfismus  $j_0^r p_X$  pro lokální difeomorfismus  $p_X$ .

$$\begin{aligned} p_X: \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} \\ p_X(X_0) &= X \end{aligned} \quad 7.41$$

Grupou symetrií  $\mathcal{G}_X$  v bodě  $X \in \mathcal{B}$  budeme rozumět grupu materiálových izomorfismů zachovávajících bod  $X$  ve smyslu  $(p(X) = X$ .

Grupy symetrií v jednotlivých bodech jsou navzájem konjugované (izomorfní). Je-li totiž  $j_{X_1}^r p_{12}$  materiálový izomorfismus z  $X_1$  do  $X_2$ , pak pro grupy symetrií  $\mathcal{G}_{X_1}, \mathcal{G}_{X_2}$  v bodech  $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$  platí vztah

$$\mathcal{G}_{X_2} = j_{X_1}^r p_{12} \circ \mathcal{G}_{X_1} \circ (j_{X_1}^r p_{12})^{-1}.$$

Jedná se o tzv. Nollovo pravidlo.

Uniformní těleso lze modelovat jako redukcí hlavního bandlu reperů (frame bundle)  $P^r \mathcal{B}$ , [10] k nějaké podgrupě  $G_0$  jetové grupy  $G_0 \subseteq G_3^r$ . Ověřme, zda platí:

Umístěním archetypu  $X_0 \in \mathcal{B}$  v referenční konfiguraci do fyzikálního prostoru  $E_3$  pomocí reperu  $j_0^r \Phi$  ( $\phi$  je lokální difeomorfismus,  $\Phi(0) = X_0$ ) lze chápat body  $X \in \mathcal{B}$  jako prvky získané složením materiálových izomorfismů  $j_0^r p_X: \mathcal{B}_{X_0} \rightarrow \mathcal{B}_X$  (tzv. implantů) s reperem  $j_0^r \Phi$ , odpovídajícím archetypu, čímž dostaneme prvek z  $P_X^r \mathcal{B}$ . Implanty odpovídají prvkům  $P_{X_0}^r p_X$ , přičemž obecně je zobrazení  $P^r f$  pro hladké zobrazení variet  $f: M \rightarrow N$  definováno předpisem

$$\begin{aligned}
& P^r f: P^r M \rightarrow P^r N \\
j_0^r \varphi & \mapsto P^r f(j_0^r \varphi) = j_X^r f \circ j_0^r \varphi = j_0^r (f \circ \varphi),
\end{aligned}
\tag{7.42}$$

kde  $\varphi(0) = X$ . Jedná se o morfismus hlavních bandlů, [10], [24].

Pokud jde o grupu symetrií  $\mathcal{G}_X$ , lze prostřednictvím archetypu a konjugování převést grupy symetrií v jednotlivých bodech k podgrupě  $G_0 \subseteq G_3^r$  definované vztahem

$$\begin{aligned}
G_0 &= (j_0^r \Phi)^{-1} \circ (j_{X_0}^r p_X)^{-1} \circ \mathcal{G}_X \circ j_{X_0}^r p_X \circ j_0^r \Phi = \\
&= \text{conj}((j_0^r p_X \circ j_0^r \Phi)^{-1})(\mathcal{G}_X),
\end{aligned}
\tag{7.43}$$

Příčemž opačný přechod je tvaru

$$\mathcal{G}_X = \text{conj}((j_0^r p_X \circ j_0^r \Phi)^{-1})(G_0).$$

# Závěr

V této práci jsem se zabíral Lieovými grupami, Lieovými algebry a jejich aplikacemi ve fyzice. Taktéž jsem věnoval pozornost jetovým grupám a teorii bandlů. Na začátku jsem musel podrobně nastudovat aparát moderní diferenciální geometrie. Pro důkladné porozumění jsem připojil i konstrukci samotné topologie a topologické variety.

V prvních čtyřech kapitolách jsem se snažil shrnout základní pojmy, které byly potřeba pro konstrukci Lieových grup a Lieových algeber. Vždy jsem se snažil k dané problematice přiložit názorný příklad, aby čtenář mohl lépe proniknout do daného problému.

V dalších částech práce jsem již využíval získané pojmy a postupně utvářel pojem Lieovy grupy. Nejdříve jsem začal s maticovými Lieovými grupami, pro které jsem postupně odvodil jejich vlastnosti. Dále jsem definoval maticové Lieovy algebry. Zde jsem definoval Lieovu závorku, a co vlastně chápeme pod pojmem exponenciála matice. Následně jsem ukázal, že existuje provázání mezi maticovými Lieovými algebry a maticovými Lieovými grupami. Provázání je definováno za pomoci prvku  $e$  v dané Lieově grupě a za pomoci exponenciály. Tento vztah nám pak dovolil za pomoci generátoru z Lieovy algebry vytvořit celou Lieovu grupu. Nastínil jsem i prvotní náhled, jak tento vztah vznikl. V průběhu práce jsem se pokusil některé věty dokázat či ověřit. Doufám, že čtenář ocení ideje důkazů či ověření.

V šesté kapitole jsem definoval Lieovy grupy a algebry zcela obecně. Jedná se tedy o část, ve které jsem se věnoval rigoróznímu odvození. Postupně jsem definoval Lieovu grupu, Lieovu závorku na vektorových polích a následně jsem ukázal, že existuje vektorový izomorfismus mezi levoinvariantním polem a tečným prostorem v neutrálním prvku Lieovy grupy. Následně jsem ukazoval, jak rekonstruovat Lieovy grupy z jejich Lieových algeber. Poslední část této kapitoly jsem věnoval jetům a terminologii, která se u nich používá.

Poslední kapitola je pro tuto práci velice důležitá. Právě v této části jsem demonstroval využití Lieových grup a Lieových algeber v mechanice, kvantové teorii, v Maxwellových rovnicích a mechanice kontinua. Zjistil jsem, že bez transformací, které jsou generovány právě Lieovými grupami, nelze konstruovat žádné zákony zachování, a že právě díky nim jsem schopný nalézt nové symetrie a s tím spojené zákony zachování. Lieova algebra hrála velikou roli v teoretické mechanice a následně díky Poissonově závorce jsem byl schopen vykonstruovat základy kvantové teorie a odvodit Schrödingerovu rovnici a spiny. V poslední části jsem využil jetových grup v mechanice kontinua a odvodil, že uniformní těleso lze modelovat jako redukci hlavního bandlu reperů. Poslední kapitola mi tedy posloužila jako ohlédnutí za celou práci, jelikož jsem zde používal odvozené vztahy z minulých kapitol.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] D. F. P. Schuller, *Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics [Přednášky]*, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg: Záznam dostupný z: [https://www.youtube.com/playlist?list=PLPH7f\\_7ZlzxTi6kS4vCmv4ZKm9u8g5yic](https://www.youtube.com/playlist?list=PLPH7f_7ZlzxTi6kS4vCmv4ZKm9u8g5yic), 2013/2014.
- [2] G. E. BREDON, *Topology and geometry*, New York: N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
- [3] P. Grinfeld, *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving surfaces*, New York: Springer Science+Business Media, 2013.
- [4] M. NAKAHARA, *Geometry, topology and physics*, Londýn: CRC Press, 2003.
- [5] I. Kolář, *Úvod do globální analýzy*, Brno: Masarykova univerzita, 2003.
- [6] P. Kulhánek, *„O vztahu matematiky a fyziky,“* Praha, 2018.
- [7] S. CAÑEZ, *„NOTES ON DUAL SPACES,“* [Online]. Available: <https://sites.math.northwestern.edu/~scanez/courses/334/notes/dual-spaces.pdf>.
- [8] M. Doupovec, *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*, Brno: PC-DIR Real, 1999.
- [9] R. H. WASSERMAN, *Tensors and manifolds: with applications to mechanics and relativity*, New York: Oxford University Press, 1992.
- [10] I. KOLÁR, J. SLOVÁK a P. W. MICHOR, *Natural operations in differential geometry*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [11] A. Flournoy, *„Inside Mines,“* 2020. [Online]. Available: <http://inside.mines.edu/~aflourno/Particle/423.shtml>.
- [12] B. Hall, Hall, Brian. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction.*, Springer, 2015.
- [13] D. RIm, *„Cornell University,“* [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1505.04240>.
- [14] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations:*, Springer, Cham, 2017.
- [15] A. Freire, *„The University of Tennessee, Knoxville,“* [Online]. Available: <http://www.math.utk.edu/~freire/teaching/m447f16/connectedness.pdf>.
- [16] A. Hatcher, *„Algebraic Topology,“* Cambridge University Press, 2002. [Online]. Available: [www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf](http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf).

- [17] P. Kulhánek, „Kvantová teorie,“ FEL ČVUT, Praha, 2001.
- [18] P. Kulhánek, „Teoretická mechanika,“ AGA 2019, [Online]. Available: <https://aries.feld.cvut.cz/studium/mechanika.pdf>.
- [19] J. E. Cohen, S. Friedland, T. Kato a F. P. Kelly, Linear Algebra and its Applications, New York: Elsevier Science Publishing Co, 1982.
- [20] D. Saunders, The geometry of jet bundles, Cambridge University Press, 1989.
- [21] P. Kulhánek, „Statistická fyzika,“ FEL ČVUT, Praha, 2002.
- [22] M. KUREŠ, Variační počet, Brno: PC DIR - Real, 2000.
- [23] P. Kulhánek, TF4: Teorie elektromagnetického pole, Praha: AGA, 2020.
- [24] M. E. Marcelo Epstein, Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach, Springer Science & Business Media, 2007.
- [25] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON a M. SANDS, The Feynman lectures on Physics, vol. 1.-3. Reading, Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008.
- [26] O. W. D.H. Sattinger, Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics, New York: Springer, 1986.
- [27] J. Stillwell, Naive Lie Theory, New York: Springer Science+Business Media, 2008.



# Seznam obrázků

|   |     |
|---|-----|
| Obrázek 2-1 Reprezentace 3D-4D objektů v rovině, Zdroj: Vlastní ..... | 19  |
| Obrázek 2-2 Přejchod mezi mapami, Zdroj: Vlastní .....                | 19  |
| Obrázek 2-3 Vizualizace příkladu, Zdroj: Vlastní .....                | 21  |
| Obrázek 2-4 Křivka gama, Zdroj: Vlastní .....                         | 22  |
| Obrázek 2-5 Möbiova páska, Zdroj: Vlastní .....                       | 23  |
| Obrázek 2-6 Izomorfismus, Zdroj: [1], Lec 06 – 54:39 .....            | 24  |
| Obrázek 2-7 PullBack, Zdroj: Vlastní .....                            | 25  |
| Obrázek 3-1 Bijektivní lineární zobrazení, Zdroj: Vlastní .....       | 30  |
| Obrázek 3-2 Souřadné systémy, Zdroj: Vlastní .....                    | 31  |
| Obrázek 4-1 Diferencovatelné zobrazení, Zdroj: Vlastní.....           | 38  |
| Obrázek 4-2 Křivka na Varietě, Zdroj: Vlastní .....                   | 39  |
| Obrázek 5-1 Protilehlé body, Zdroj: Vlastní .....                     | 59  |
| Obrázek 5-2 Součtové vzorce, Zdroj: Vlastní.....                      | 60  |
| Obrázek 5-3 Tečný prostor v $I$ , Zdroj: Brian Hall [12] .....        | 81  |
| Obrázek 6-1 Push-forward na Lieově grupě, Zdroj: Vlastní.....         | 83  |
| Obrázek 6-2 Integrální křivky, Zdroj: Vlastní .....                   | 87  |
| Obrázek 6-3 Exponenciální zobrazení, Zdroj: Vlastní .....             | 88  |
| Obrázek 6-4 Diagram, Zdroj: Vlastní .....                             | 89  |
| Obrázek 7-1 Zákony zachování, Zdroj: Petr Kulhánek, [17] .....        | 94  |
| Obrázek 7-2 Planeta a hvězda, Zdroj: Vlastní.....                     | 95  |
| Obrázek 7-3 Fázový portrét, Zdroj: Kulhánek [18] .....                | 97  |
| Obrázek 7-4 Čtyřvektory, Zdroj: Kulhánek, [17].....                   | 98  |
| Obrázek 7-5 Relace neurčitosti, Zdroj: Petr Kulhánek, [18] .....      | 111 |
| Obrázek 7-6 Spiny částic, Zdroj: Petr Kulhánek, [17] .....            | 117 |