TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN **Fakultät Physik** Physikalisches Grundpraktikum	Versuch: **TA** Aktualisiert: am 15. 11. 2019

Thermische Ausdehnung

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie den *mittleren Längenausdehnungskoeffizienten* ($\overline{\alpha} \pm \Delta\overline{\alpha}$) eines Metallstabes im Temperaturbereich zwischen Raumtemperatur und 60 °C mit Hilfe des *Hebelverfahrens*.
2. Bestimmen Sie den *mittleren Volumenausdehnungskoeffizienten* ($\overline{\gamma} \pm \Delta\overline{\gamma}$) einer Flüssigkeit im Temperaturbereich zwischen Raumtemperatur und 60 °C mit Hilfe des *Dilatometers*.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Definition des Ausdehnungskoeffizienten

Temperaturänderungen führen bei Festkörpern und Flüssigkeiten zur Änderung des Volumens V. Zur Beschreibung dieses Phänomens bedient man sich des materialspezifischen und temperaturabhängigen *Volumenausdehnungskoeffizienten* γ:

$$\gamma = \frac{1}{V_0} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p . \tag{1}$$

Für kleine Temperaturbereiche erhält man in guter Näherung eine lineare Proportionalität zwischen relativer Volumenänderung $\Delta V/V_0$ und der Temperaturänderung ΔT:

$$\overline{\gamma} = \frac{\Delta V/V_0}{\Delta T} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} \quad \text{und} \quad \Delta T = T - T_0 . \tag{2}$$

Hierbei ist $\overline{\gamma}$ der *mittlere* Volumenausdehnungskoeffizient.

Bei Festkörpern wird die Angabe des *Längenausdehnungskoeffizienten* α bevorzugt:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p . \tag{3}$$

Für isotrope Stoffe gilt $\gamma = 3\alpha$. Mit Hilfe der relativen Längenänderung $\Delta L/L_0$ findet man analog den *mittleren* Längenausdehnungskoeffizienten:

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta L/L_0}{\Delta T} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} . \tag{4}$$

2.2 Temperaturabhängigkeit des Ausdehnungskoeffizienten: Grüneisen-Beziehung

Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist eine stark temperaturabhängige Größe. Abbildung 1 zeigt am Beispiel von Kupfer einen typischen Temperaturverlauf.

Die *Grüneisen-Beziehung* gibt eine Orientierung für das Temperaturverhalten:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{\kappa_T \cdot c_V \cdot \rho} \approx \text{konstant} . \tag{5}$$

Da die isotherme *Kompressibilität* κ_T und die Dichte ρ nur schwach temperaturabhängig sind, folgt γ im wesentlichen dem Verlauf der spezifischen Wärmekapazität $c_V(T)$. Die Angabe eines konstanten Ausdehnungskoeffizienten ist demzufolge nur für sehr kleine Temperaturintervalle gerechtfertigt. Bei den im Versuch zu ermittelnden Koeffizienten $\overline{\gamma}$ bzw. $\overline{\alpha}$ handelt es sich um Mittelwerte über das entsprechende Temperaturgebiet.

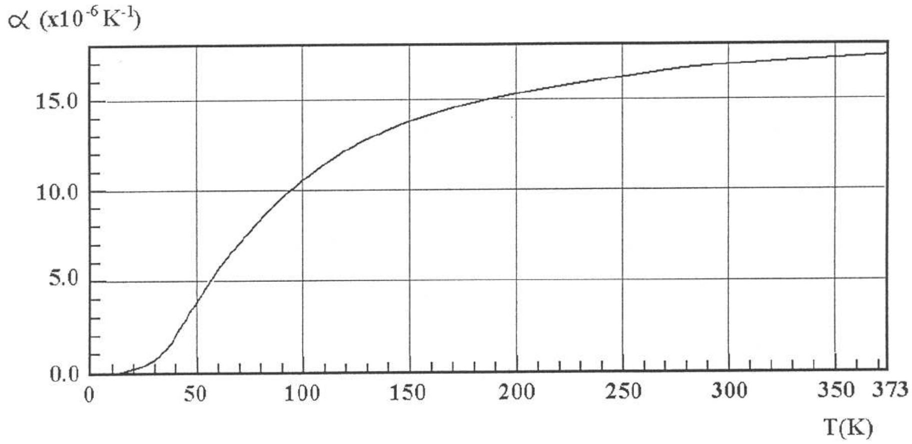
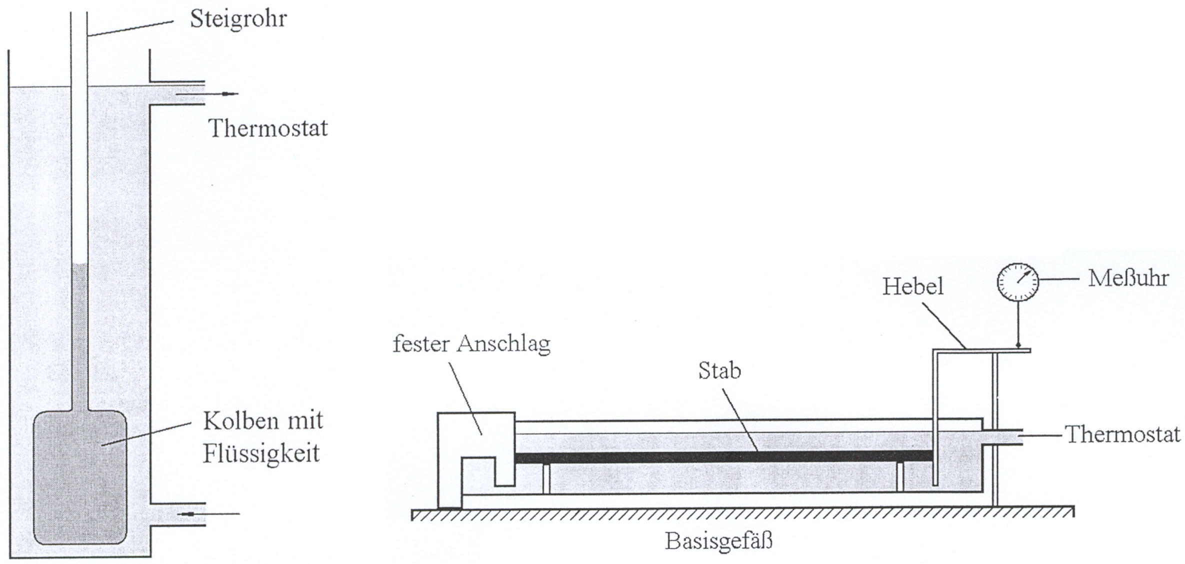


Abb. 1: Temperaturabhängigkeit des thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Kupfer

3 Experimente

3.1 Volumenausdehnung einer Flüssigkeit

Für diese Messung wird ein *Dilatometer* verwendet. Ein mit einem Steigrohr versehener Glaskolben (Leermasse des Kolbens m_K) enthält die zu untersuchende Flüssigkeit (Abb. 2(a)). Durch Wägung des gefüllten Kolbens und unter Einbeziehung der bekannten Dichte der Flüssigkeit wird deren Volumen V_0 bei der Starttemperatur T_0 ermittelt. In einem Wasserbad, dessen Temperatur mittels eines Thermostaten geregelt werden kann, werden Glasgefäß und Flüssigkeit gemeinsam erwärmt und die Volumenänderung als Funktion der Temperatur ermittelt. In einem Diagramm sind die Meßwerte der relativen Volumenänderung $\Delta V/V_0$ über der Temperaturdifferenz ΔT darzustellen.



(a) Volumenausdehnungskoeffizienten einer Flüssigkeit

(b) Längenausdehnungskoeffizienten eines Festkörpers

Abb. 2: Schematische Versuchsanordnungen zur Messung

3.2 Längenausdehnung eines Festkörpers

Ein Stab (Länge L_0 bei T_0) wird so in eine Messzelle eingebracht, dass eines seiner Enden über einen Hebel mit einem empfindlichen Längenmessgerät (Messuhr) kontaktiert wird (Abb. 2(b)). Unter Verwendung eines Thermostaten kann die Temperatur T des Stabes verändert werden und die Längenänderung T aufgezeichnet werden. In einem Diagramm sind die Messwerte der relativen Längenänderung $\Delta L/L_0$ über der Temperaturdifferenz ΔT darzustellen.

4 Bestimmung des mittleren thermischen Ausdehnungskoeffizienten

Während beim Hebelverfahren die Temperatur des Basisgefäßes während der gesamten Messdauer nahezu konstant bleibt, muß beim *Dilatometer* die Ausdehnung des Glaskolbens (Ausdehnungskoeffizient α_K) bei der Auswertung berücksichtigt werden (Formel herleiten!)

$$\gamma = \frac{V - V_0}{V_0 \cdot (T - T_0)} + 3\alpha_K \cdot \frac{V}{V_0} \tag{6}$$

Ausgehend von den zur Berechnung von $\overline{\gamma}$ bzw. $\overline{\alpha}$ benutzten Formeln (2) bzw. (4) ist der Fehler des Ausdehnungskoeffizienten aus den Fehlern der Einzelmessungen abzuschätzen.

5 Deutung der Wärmeausdehnung von Festkörpern

Die atomaren Bausteine eines Körpers sind durch eine anziehende Kraft aneinander gebunden. Eine zweite, abstoßende Kraft sorgt für einen endlichen Abstand benachbarter Teilchen untereinander. Der Gleichgewichtsabstand r_0 liegt dort, wo die Summe dieser beiden Kräfte verschwindet. Für $T = 0$ würden sich die Teilchen in diesem Abstand voneinander in Ruhe befinden. Wären beide entgegengesetzt wirkenden Kräfte harmonisch, so würde sich in dem daraus resultierenden symmetrischen (parabolischen) Bindungspotential W_{harm} (Abb. 3) auch bei Temperaturerhöhung keine Vergrößerung des Gleichgewichtsabstandes der Teilchen ergeben.

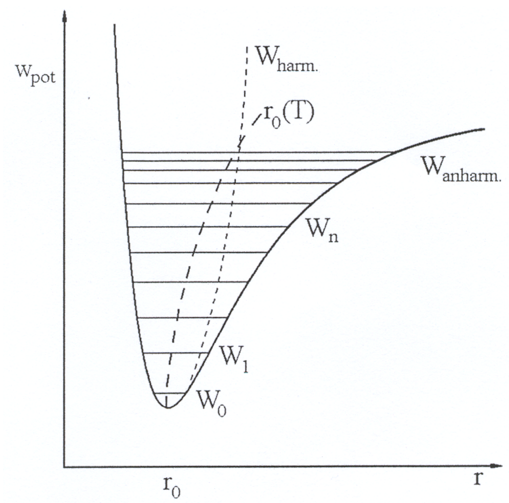


Abb. 3: Wechselwirkungspotential zwischen zwei Atomen eines Kristallgitters r_0 = mittlerer Atomabstand

Erst durch die Einführung eines asymmetrischen (anharmonischen) Potentials W_{anharm} (Abb. 3), welches sich durch die Berücksichtigung der wesentlich längeren Reichweite der anziehenden im Vergleich zur abstoßenden Kraftkomponente ergibt, nimmt mit wachsender Teilchenenergie ($W_0 < W_1 < W_2$) der mittlere Teilchenabstand zu. Dieser Effekt wird als thermische oder Wärmeausdehnung bezeichnet. Das von Grüneisen entwickelte Modell der thermischen Ausdehnung basiert auf den Vorstellungen von Debye, der für die Berechnung der spezifischen Wärmekapazität das Schwingungsverhalten der Gitterbausteine durch *harmonische Oszillatoren* beschreibt. Durch Einführung kleiner Anharmonizitäten lässt sich die Ausdehnung durch den in Gleichung (5) gegebenen Ausdruck erfassen. Diese wird für viele Materialien experimentell durch einen konstanten Grüneisenparameter Γ bestätigt. Auf Grund der stärkeren Bindung der Atome im Festkörper im Vergleich zur Flüssigkeit liegt der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeiten um rund eine Größenordnung über dem der Festkörper.

6 Auswertung (Physik Bachelor/Lehramt)

6.1 Lineare Regression

Für die rechnerische Durchführung der linearen Regression nehmen wir den folgenden funktionellen Zusammenhang an:

$$y = a + bx. \tag{7}$$

Für den vorliegenden Versuch gilt:

$$y = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{\Delta V}{V}; \quad x = \Delta T; \quad b = \alpha \quad \text{bzw.} \quad b = \gamma \tag{8}$$

Für den Parameter a erwarten wir null, insofern sollte dieser Wert letztendlich im Unsicherheitsbereich von a liegen. Die Regression unter der Bedingung $a = 0$ durchzuführen, ist möglich, kann allerdings problematisch sein, wenn systematische Messabweichungen eigentlich zu $a \neq 0$ führen.

Für die Berechnung der statistischen und systematischen Messunsicherheiten gelten vereinfachend die folgenden Annahmen:

1. Messunsicherheiten in x-Richtung spiele keine Rolle, d.h. $\Delta y \gg b\Delta x$
2. Messunsicherheiten in y-Richtung sind konstant, d.h. $\Delta y =$ konst und unkorreliert.

Für den Anstieg b und das Absolutglied a ergeben sich nach Minimierung der quadratischen Abweichungen die folgenden Formeln:

$$b = \frac{1}{D}\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \tag{9}$$

$$a = \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right). \tag{10}$$

$$D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Für die einfache Berechnung ist es zweckmäßig, die Summen $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i y_i$, $\sum_i x_i^2$ mittels Tabellenkalkulation zu berechnen. n ist die Anzahl der Wertepaare, die in die Rechnung einbezogen werden.

Die Berechnung der statistischen Messunsicherheit des Anstiegs b und Absolutglieds a lässt sich in folgender Weise durchführen:

Berechnung der Standardabweichung der Messwerte (in y-Richtung) zur ermittelten Ausgleichsgeraden:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}\,. \tag{11}$$

Anwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (ohne Korrelation) auf die Formeln 9 und 10 liefert

$$\Delta b_{\text{stat}} = s\sqrt{\frac{n}{D}} \tag{12}$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}}\,. \tag{13}$$

Die Berechnung der systematischen Messunsicherheiten unterscheidet sich von der der statistischen aufgrund möglicher Korrelationen, die im Allgemeinen jedoch unbekannt sind. Schlussendlich bleibt nichts anderes übrig, als eine Maximalabschätzung durchzuführen. Unter der weiteren Annahme, dass die Messunsicherheiten in y-Richtung alle in der gleichen Weise miteinander korreliert sind, lässt sich die folgende Maximalabschätzung durchführen:

Die Fortpflanzung einer systematischen Unsicherheit in y-Richtung Δy_{syst} und einer anschließenden Maximalabschätzung ergibt (wird in einer Vorlesung hergeleitet):

$$\Delta b_{\text{syst}} \leq \Delta y_{\text{syst}}\sqrt{2\frac{n}{D}} \tag{14}$$

$$\Delta a_{\text{syst}} \leq \begin{cases} \Delta y_{\text{syst}}, & \text{wenn } \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D} \leq 1 \\ \Delta y_{\text{syst}}\sqrt{2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D} - 1}, & \text{wenn } \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D} > 1\,. \end{cases} \tag{15}$$

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von ... erstellt von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke und S. Majewsky, bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Fragen

1. Verschaffen Sie sich theoretische Vorstellungen zum Verständnis der thermischen Ausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten.
2. Wie kann die thermische Ausdehnung mathematisch beschrieben werden? (relative Volumen- und Längenänderung, Volumen- und Längenausdehnungskoeffizienten, Beziehungen zwischen diesen Größen)
3. Diskutieren Sie die in der Anleitung beschriebenen Verfahren: Vor- und Nachteile, Fehlerquellen, Herleitung der zur Auswertung benötigten Formeln.
4. Nennen Sie Beispiele für technische Relevanz des Effektes der thermischen Ausdehnung als nützliche bzw. störende Größe.

Literatur

[1] C. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*, Oldenbourg-Verlag, München, Wien 2006

[2] A. Recknagel, *Physik: Schwingungen, Wellen, Wärmelehre*, Technik-Verlag, Berlin 1990

[3] E. Grimsehl, *Lehrbuch der Physik, Band 4: Struktur der Materie*, Teubner-Verlag, Leipzig 1990

[4] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Akustik, Wäremlehre*, Verlag de Gruyter, Berlin 1954

[5] F. X. Eder, *Moderne Messmethoden der Physik, Band 2: Thermodynamik*, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960

[6] W. H. Westphal, *Physikalisches Praktikum*, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1974

[7] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994