České Vysoké Učení Technické v Praze

Masarykův ústav vyšších studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Praha, 2013

Ing. Petr BUBLA

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

MASARYKŮV ÚSTAV VYŠŠÍCH STUDIÍ

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Učitelství odborných předmětů (bakalářský)

Teorie automatického řízení v příkladech

Theory of control engineering in examples

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor: Ing. Petr BUBLA

Vedoucí BP: prof. RNDr. Emanuel Svoboda CSc.

V Praze, dne XX. xxxx 2013

SEM VLOŽ ORIGINÁLNÍ ZADÁNÍ

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně a na základě konzultací s vedoucím a odborným konzultantem bakalářské práce. Veškeré podklady (literární zdroje, internetové stránky a software), které jsem v bakalářské práci využil, jsou uvedené v přiloženém seznamu.

Souhlasím s použitím této bakalářského práce jako školního díla ve smyslu §60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne ______________________ ______________________________

podpis autora

Poděkování

Na tomto místě si dovoluji poděkovat všem, kdo mi pomáhali při tvorbě této bakalářské práce, ať už přímo nebo nepřímo. Zvláště pak děkuji prof. RNDr. Emanuelovi Svobodovi CSc. A Ing. Pavlovi Votrubcovi za odborné vedení diplomové práce, vstřícný přístup a podnětné konzultace.

Velice také děkuji svým rodičům, prarodičům, sourozencům, přítelkyni a mým kamarádům za podporu a inspiraci nejen během vzniku této bakalářské práce, ale i během celého dosavadního studia.

Název

Teorie automatického řízení v příkladech

Abstrakt

Laplaceova transformace je jedním ze základních matematických nástrojů teorie automatického řízení. Umožňuje transformaci funkcí z časové oblasti do oblasti komplexní. Důsledkem je skutečnost, že složité matematické operace v okruhu diferenciálních rovnic, které bychom museli vykonat při analýze a syntéze systémů řízení, mohou být nahrazeny mnohem jednoduššími operacemi algebraickými. Pojetí bakalářské práce se zaměřuje na základy teorie automatického řízení. Důraz je kladen na praktickou část, bakalářská práce obsahuje množství příkladů, které by měly posloužit k pochopení složité problematiky Laplaceovy transformace středoškolským studentům na Střední průmyslové škole strojní a elektrotechnické, příspěvková organizace Resslova 5, 400 01 Ústí nad Labem, v oboru 26-51-M/01 Elektrotechnika, zaměření: Automatizace a počítačové aplikace v předmětu Automatizace, který se vyučuje ve třetím a čtvrtém ročníku.

Klíčová slova:

Laplaceova transformace, diferenciální rovnice, přenosová funkce, přechodová charakteristika, identifikace

Tittle

Theory of control engineering in examples

Abstract

Laplace transform is one of the basic mathematical tools of control engineering. Enables transformation function from the time domain to the complex domain. Result of is that complicated mathematical operations within of differential equations, which we had to use the analysis and synthesis of control systems can be replaced a much simpler algebraic operations. The concept of bachelor thesis is focuses on the basics of the theory control engineering. Emphasis is placed on the practical part. Bachelor thesis contains numer of examples, which should serve to understand complicated issue of the Laplace transform high school students at the High technical school of Mechanical and Electrical Engineering, contributory organisation, Resslova 5, 400 01 Ústí nad Labem, in the field 26-51-M/01 Eletrical Engineering, specialization: Automation and Computer Applications in the subject Automation, which is taught in the third and fourth year.

Key words:
Laplace transform, differential equations, transfer function, step function, identification

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

ZKRATKA	VYSVĚTLIVKA
ILT	Zpětná Laplaceova transformace
LT	Laplaceova transformace

Seznam použitých symbolů

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
$f(t)$, $g(t)$	Předmět Laplaceovy transformace	
$F(s)$, $G(s)$	Obraz Laplaceovy transformace, přenos, přenosová funkce	
p, s	Komplexní proměnná Laplaceovy transformace (operátor)	
t	Časová proměnná (funkce času)	
$\mathcal{L}\{\ldots\}$	Označení Laplaceovy transformace	
$\mathcal{L}^{-1}\{\ldots\}$	Označení zpětné Laplaceovy transformace	
$\mathbb{R}$	Obor reálných čísel	
$\mathbb{N}$	Obor přirozených čísel	
$\delta(t)$	Diracův impuls	
$H(t)$, $1(t)$	Jednotkový skok	
i, j	Imaginární (komplexní) číslo	
$A, B, C, D, E, F, G, H, I$	Koeficienty rozkladu na parciální zlomky	
D	Diskriminant kvadratické rovnice	
$s_{1,2}$	Kořeny kvadratické rovnice	
$\mathbb{S}$	Matice soustavy rovnic o více neznámých	
$\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1, \mathbb{C}_1, \mathbb{D}_1$	Matice získaná z matice $\mathbb{S}$ s nahrazeným i-tým sloupcem pravých stran soustavy rovnic	
$\lambda_{1,2}$	Kořeny charakteristické rovnice	
$\hat{x}(t)$	Partikulární řešení diferenciální rovnice	

$\tilde{x}(t)$	Obecné řešení přidružené diferenciální rovnice	
I	Jednotková matice (na diagonále jsou jedničky)	
$tr(A)$	Stopa matice	
R	Odpor	$[\Omega]$
L	Indukčnost	$[H]$
C	Kapacita	$[F]$
U_0	Velikost napěťového skoku	$[V]$
$u_C(0)$	Hodnota napětí na kondenzátoru v čase $t=0$	$[V]$
$i_L(0)$	Hodnota proudu na cívce v čase $t=0$	$[A]$
$u_1(t)$	Vstupní napětí	$[V]$
$u_2(t)$	Výstupní napětí	$[V]$
$i(t)$	Proud protékající obvodem	$[A]$

Kapitola 1

Úvod

Laplaceova transformace je jedním ze základních matematických nástrojů teorie automatického řízení. Proto je nezbytné pochopit její základy, na kterých se dá později stavět složitější analýza a syntéza regulačních obvodů. Při řešení lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav s konstantními koeficienty můžeme použít integrální transformace, které nahrazují operace derivování a integrování násobením či dělením a vlastní řešení diferenciální rovnice je převedeno na řešení soustavy lineárních rovnic. Téma bakalářské práce bylo pečlivě vybráno a konzultováno s Ing. Pavlem Votrubcem, který vyučuje předmět Automatizace na Střední průmyslové škole strojní a elektrotechnické, příspěvková organizace Resslova 5, 400 01 Ústí nad Labem. Jednotlivá témata na sebe navazují podle výchovně vzdělávacích cílů na uvedené škole.

Cílem bakalářské práce je srozumitelnou formou seznámit studenty s matematickým nástrojem pro řešení diferenciálních rovnic a jejím užitím v teorii automatického řízení. Bakalářská práce je napsána a koncipována tak, aby se z ní mohli studenti prezenční formy studia připravovat na výuku předmětu automatizace. Každá kapitola obsahuje na svém začátku teoretický rozbor probírané látky a následně je doplněna o několik typově řešených příkladů.

Předkládaná práce nemá za cíl opisovat definice s důkazy nebo vzorečky, které již byly několikrát publikovány a rozebrány do nejmenších detailů i s příslušnými důkazy. Hlavním přínosem by měla být forma jakou jsou teoretické závěry vysvětleny na nejrůznorodějších příkladech. Z vlastních zkušeností vím jaké největší problémy činí studentům teorie automatického řízení. Je potřeba si uvědomit, že studenti mají na pochopení a osvojení příslušné látky teorie automatického řízení bez příslušných matematických základů zhruba tři měsíce. Někteří studenti budou poté pokračovat ve studiu v příbuzném oboru i na vysoké škole, kde na probrání látky je i několik semestrálních kurzů. Práce si klade za cíl ukázat užití základů Lapaceovy transformace na příkladech a pomoci studentům k základnímu početnímu osvojení při práci s Laplaceovou transformací v teorii automatizačního řízení.

Bakalářská práce bude organizována následovně: v kapitole 2 bude proveden popis Laplaceovy transformace, budou definovány hlavní věty transformace a rozklad na parciální zlomky, které jsou potřeba pro zpětnou transformaci. Kapitola 3 obsahuje příklady na přímou a zpětnou Laplaceovu transformaci a příklady na praktické využití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic. V kapitole 4 jsou uvedeny základní časové charakteristiky v z teorie automatického řízení a jsou zde probrány metody identifikace přenosové funkce z přechodové charakteristiky, např. podle prof. Strejce. Kapitola 5 obsahuje teoretickou a praktickou část z konstrukce frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích. Celou práci ukončí závěr v kapitole 6.

Předkládaná práce je pouze úzkým výběrem na dané téma teorie automatického řízení a nepokrývá celou látku vyučovanou v uvedeném předmětu.

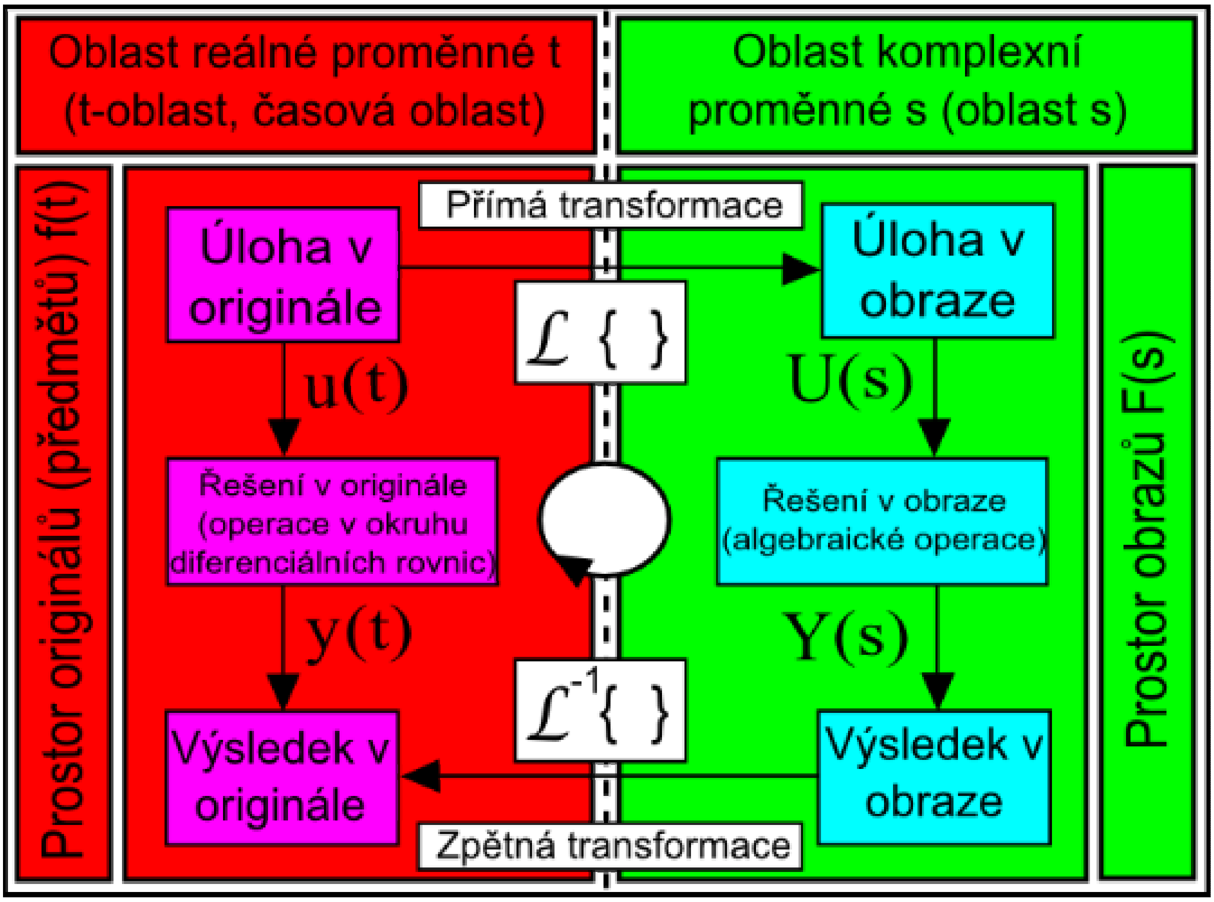
Kapitola 2

Laplaceova tranformace

Laplaceova transformace v matematice označuje jednu ze základních integrálních transformací. Je jedním ze základních matematických nástrojů nejen teorie automatického řízení. Transformaci odvodil již roku 1812 francouzský matematik Pierre Simon de Laplace (1749-1827). Již dříve 1737 však tuto transformaci použil Leonhard Euler při řešení jistých obyčejných diferenciálních rovnic. Používá se k řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic, zejména těch, jež se objevují při analýze chování elektrických obvodů, harmonických oscilátorů a optických zařízení. V technice se s ní setkáme při studiu vlastností systému spojitě pracujících v čase (v tomto smyslu je Laplaceova transformace protějškem Z-transformace pro diskrétní systémy). Výhodné užití LT spočívá v možnosti snadného převodu funkcí z časové oblasti do oblasti komplexní. Důsledkem toho se pak složité matematické operace v okruhu diferenciálních rovnic, jenž bychom museli složitě počítat při analýze a syntéze systémů řízení, mohou nahradit mnohem jednoduššími algebraickými operacemi. Jinými slovy řečeno: užitečnost Laplaceovy transformace spočívá v tom, že převádí funkce reálné proměnné na funkce komplexní proměnné způsobem, při němž se mnohé složité vztahy mezi původními funkcemi radikálně zjednoduší. Je to matematický aparát, který umožňuje poměrně snadno řešit úlohy spojité lineární regulace. Význam použití Laplaceovy transformace v teorii regulace je však hlubší. S její pomocí můžeme totiž velmi jednoduše popsat lineární spojité regulační systémy místo diferenciálních rovnic použijeme tzv. přenosové funkce. Dle obrázku (2.1) pojem transformace funkce znamená, že každé funkci $f(t)$ z jedné množiny proměnné t přiřadíme funkci $F(s)$ z množiny funkcí komplexní proměnné s. U pojmu transformace přiřadíme tzv. originálu (zde funkci času t) určitým předpisem tzv. obraz (je funkcí komplexní proměnné s). Při řešení lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav s konstantními koeficienty můžeme použít integrální transformace, které nahrazují operace derivování a integrování násobením či dělením a vlastní řešení diferenciální rovnice je převedeno na řešení soustavy lineárních rovnic.

2.1 Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon de Laplace – (23. března 1749 – 5. března 1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik, člen Francouzské akademie věd, královské společnosti v Londýně a Komise pro míry a váhy. Za sebou zanechal monumentální dílo již svým rozsahem. Zabýval se matematickou analýzou, teorií pravděpodobností, nebeskou mechanikou, teorií potenciálu, zavedl pojem Laplaceovy transformace, užil tzv. Laplaceův operátor (v parciální diferenciální rovnici pro potenciál silového pole). Je autorem teorie o vzniku sluneční soustavy z rotující mlhoviny (Kantova-Laplaceova teorie) a mnoha dalších metod s mnoha aplikacemi.



OBRÁZEK 2.1: *Schématické znázornění LT*

2.2 Matematický zápis

Nechť je funkce $f(t)$ spojitá (nebo alespoň po částech spojitá) a definována na intervalu $\langle 0,\infty)$. Pak Laplaceova transformace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ funkce $f(t)$ je definována integrálním vztahem:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{2.1}$$

kde funkce $\begin{cases} f(t): \quad \langle 0;\infty) \to \mathbb{R} & \text{je předmět,} \\ F(s); \quad s\in\mathbb{C} & \text{je obraz.} \end{cases}$

kde s je komplexní nezávislá proměnná. Je zřejmé, že vzah (2.1) se po integraci stává pouze funkcí s a dostaneme $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$. Obraz funkce $f(t)$ při Laplaceově transformaci je funkce jedné komplexní proměnné s, často ji značíme $F(s)$. Definičním oborem je oblast konvergence integrálu. Funkce $f(t)$ nazýváme originálem (předmětem) a funkci $F(s)$ obrazem funkce $f(t)$. Laplaceova transformace je integrální transformace, která konverguje jestliže existuje limita. Přiřazení $f(t)\to F(s)$ nazýváme přímou Laplaceovou transformací a budeme ji značit $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$. Inverzní transformaci $F(s)\to f(t)$ nazýváme zpětnou Laplaceovou transformací a budeme ji označovat symbolem $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Laplaceova transformace je příklad složitějšího zobrazení, než jsou funkce – obrazy a vzory nejsou čísla, ale funkce. Takovýmto zobrazením se říká operátory. Vzory v Laplaceově transformaci značíme obvykle malým a jejich obrazy příslušným velkým písmenem. Argument Laplaceovy transformace budeme uzavírat do složených závorek případně budeme používat speciální symbol „odpovídá“ $f(t)\triangleq F(s)$. Vztah mezi předmětem a obrazem budeme někdy stručněji zapisovat pomocí symbolu $\mathcal{L}$: $f(t)\mapsto F(s)$. Místo označení funkcí používáme přímo jejich vyjádření (funkční předpis), argument předmětu značíme písmenem t (a za definiční obor pokládáme interval $\langle 0,\infty)$), argument obrazu budeme v této práci značit písmenem s. Namísto operátoru s se někdy používá operátor p. Pokud bychom se podívali na použitou literaturu tak zjistíme, že operátor p se používá většinou v české literatuře [8], především v matematice a teorii elektrických obvodů. Operátor s se používá v teorii řízení a v matematice [1, 2, 7, 12].

Poznámka:

$f(t)$ reprezentace funkce v časové oblasti (vzor, předmět)

$F(s)$ reprezentace funkce v operátorové oblasti (obraz), je komplexní funkce komplexní proměnné s

Proměnná s je sice komplexní, ale při výpočtu běžných obrazů počítáme podle stejných pravidel jaká jsme používali při integrování a derivování reálných funkcí reálné proměnné. Při počítání obrazů můžeme předpokládat, že s je reálná kladná proměnná.

2.3 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Existence – i v případě, že funkce $f(t)$ je na celém intervalu $\langle 0, \infty)$ spojitá a definovaná, nemusí její obraz existovat. Jestliže totiž má mít definiční integrál konečnou hodnotu, musí $f(t)$ splňovat kritérium konvergence $\lim_{t \to \infty} |f(t)| e^{-st} = 0$. Například funkce $f(t) = e^{t^2}$ tuto podmínku nesplňuje, a proto její obraz neexistuje.

Oblast konvergence - pro danou funkci f se množina hodnot s, pro něž integrál v Laplaceově transformaci konverguje, nazývá oblast konvergence. Lze ukázat, že jestliže integrál konverguje pro f v bodě s_0, pak konverguje v každém bodě s, pro který $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$. Oblast konvergence Laplaceovy transformace je tedy $\{s; \mathrm{Re}(s) > R\}$, kde R je dáno chováním funkce $f(t)$ pro $t \to \infty$.

Vztah k inverzní Laplaceově transformaci - pro každou funkci $f(t)$ takovou, že $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existuje, platí:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\}$$

Vztah k derivaci - výhodou použití Laplaceovy transformace pro počítání diferenciálních rovnic je její vztah k derivaci:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0_+) - \cdots - s f^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$$

Vzorec lze odvodit pomocí integrace per partes a platí právě tehdy, když jednotlivé derivace existují. Tento vztah umožňuje přímé začlenění počátečních podmínek do výpočtu řešení diferenciálních rovnice.

Obvykle při řízení procesů se uvažují Laplaceovy obrazy pro takové funkce definované na $\mathbb{R}$, které jsou nulové na intervalu $(-\infty, 0)$. Nezávislá proměnná *t* jako čas nabývá vždy jen kladných hodnot. Jestliže je tedy nějaká funkce $f(t)$ definována na celém intervalu $t \in \mathbb{R}$ (např. funkce $f(t) = e^{at}$), pak funkci $f(t)$ kterou podrobujeme Laplaceově transformaci, chápeme ve smyslu $f(t) = \begin{cases} f(t) \text{ pro } t \geq 0 \\ 0 \text{ pro } t < 0 \end{cases}$.

Což se dá zapsat pomocí tzv. Heavisidovy funkce (jednotkový skok) jako $e^{at} H(t) = e^{at} 1(t)$. Obvykle se však i v takovémto případě používá (nepřesný) zápis e^{at}. Výhodou je v některých případech jednodušší popis, takže budeme tento předpoklad podle potřeby také využívat. Jinými slovy můžeme napsat, že definiční integrál Laplaceovy transformace má integrační meze 0 a ∞ tj.

$\rightarrow$ definiční obor funkce v časové oblasti je $\langle 0; \infty)$

$\rightarrow$ funkce $f(t)$ je VŽDY násobena jednotkovým skokem

Např. $F(s) = \dfrac{1}{s+a}$ je tedy obrazem funkce $f(t) = e^{-at} \cdot 1(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$ nikoliv však funkce $f(t) = e^{-at}$.

Pro dané funkce $f(t)$ a $g(t)$ a jejich příslušné Laplaceovy transformace $F(s)$ a $G(s)$ následující tabulka shrnuje vlastnosti Laplaceovy transformace:

Přímá i zpětná Laplaceova transformace je transformace lineární

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad s > \max\{s_f, s_g\} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Věta o počáteční hodnotě

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \tag{2.3}$$

Věta o konečné hodnotě

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) \tag{2.4}$$

Konvoluce funkcí $f(t), g(t)$:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= (g * f)(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \\ \mathcal{L}\{f * g\} &= F(s)G(s), \quad \text{kde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},\ \mathrm{G}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

TABULKA 2.1: *Vlastnosti LT*

Předmět	Obraz	Popis
$f(t)$	$F(s)$	
$tf(t)$	$-F'(s), \quad s > s_f$	Derivace obrazu
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f$	n-tá derivace obrazu
$(-t)^n f(t)$	$\dfrac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad s > s_f$	n-tá derivace obrazu, jiný možný zápis
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(q)\, dq, \quad s > s_f$	Integrál obrazu
$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = -\int_s^\infty F(s)\, ds$		integrační konstanta se určí z podmínky $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$
$f(t)e^{at}$	$F(s-a), \quad s > s_f + a$	Posunutí v obrazu
$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	Posunutí v originále
$f(at)$	$\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right), \quad s > a.s_f$	Změna měřítka
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+), \quad \left(s > \max\{0, s_{f'}\}\right)$	Obraz 1. derivace
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	Obraz 2. derivace
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Obraz n-té derivace
$\int_0^t f(u)\, du$	$\dfrac{F(s)}{s}, \quad \left(s > \max\{0, s_f\}\right)$	Obraz integrálu

$\int_0^t f(u).g(t-u)\,du$	$F(s).G(s)$	Obraz konvoluce
$f(t).H(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\},\quad s>s_f$	Translace, $a\geq 0$
$f(t-a).H(t-a)$	$e^{-as}F(s),\quad s>s_f$	Translace, $a\geq 0$
$f(t)$	$\dfrac{F_T(s)}{1-e^{-Tp}},\quad s>0$	Obraz periodické funkce

2.4 Výpočet obrazů z definičního integrálu

Pokud bychom chtěli spočítat jednotlivé obrazy elementárních funkcí dle definiční integrálu narazíme na vážný problém značně složitých integrálu. Z tohoto důvodu se používá tzv. Laplaceův slovník, který nám určuje jednotlivé obrazy pro elementární funkce v originále. Pro ilustraci složitosti jsou níže vypočteny obrazy pro nejpoužívanější funkce v originále.

Příklad. Určete Laplaceovy obrazy následujících funkcí pomocí definičního integrálu:

1.) $f(t)=at,\quad a\in\mathbb{R}$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty at.e^{-st}dt\left|\begin{array}{c}\begin{bmatrix} u=t & u'=1 \\ v'=e^{-st} & v=-\dfrac{e^{-st}}{s}\end{bmatrix}\\ \int u.v'\,dt=u.v-\int u'.v\,dt\end{array}\right.= \tag{2.6}$$

$$=a\left\{\left[-t\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty 1\cdot\frac{e^{-st}}{s}dt\right\}=-\frac{a}{s}\left[te^{-st}\right]_0^\infty-\frac{a}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^\infty=0+\frac{a}{s^2}=\frac{a}{s^2}$$

2.) $f(t)=e^{-at},\quad a\in\mathbb{R}$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-at}.e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt=-\frac{1}{a+s}\left[e^{-(a+s)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s+a} \tag{2.7}$$

3.) $f(t)=\sin at,\ f(t)=\cos at,\quad a\in\mathbb{R}$

Dvojím použitím metody per partes dostaneme pro každé $s\in\mathbb{R}$ rovnici pro primitivní funkci:

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\sin t.e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-st}\sin t\,dt$$

$$I(t)=\int e^{-st}.\sin t\,dt\left|\begin{bmatrix} u=e^{-st} & u'=-s.e^{-st}\\ v'=\sin t & v=-\cos t\end{bmatrix} \atop \int u.v'\,dt=u.v-\int u'.v\,dt\right|=\left[-e^{-st}.\cos t\right]-\int se^{-st}.\cos t\,dt\left|\begin{bmatrix} u=se^{-st} & u'=-s^2.e^{-st}\\ v'=\cos t & v=\sin t\end{bmatrix} \atop \int u.v'\,dt=u.v-\int u'.v\,dt\right|= \tag{2.8}$$

$$=\left[-e^{-st}.\cos t\right]-\left[se^{-st}.\sin t\right]-\int s^2e^{-st}.\sin t\,dt=-e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)-s^2I(t)$$

Řešením této rovnice je:

$$\begin{aligned} I(t)&=-e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)-s^2I(t)\\ I(t)+s^2I(t)&=-e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)\\ I(t)&=\frac{-e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)}{s^2+1}+c \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pro $p>0$ je limita $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)=\left|0.\text{omezeno}\right|=0$

Pro $p\le 0$ limita $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-st}\left(\cos t+s.\sin t\right)$ neexistuje, protože neexistuje limita $p>0$ je limita $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-sn\pi}\left(\cos n\pi+s.\sin n\pi\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-sn\pi}\left(-1\right)^n$.

Poté dostáváme

$$\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}\left[-e^{-st}\left(\cos t+s\sin t\right)\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s^2+1}\left[0-\left(-1\right)\right]=\frac{1}{s^2+1}\quad s>0 \tag{2.10}$$

Stejným způsobem bychom spočetli i Laplaceův obraz funkce $f(t)=\cos at$

Pro výpočet Laplaceova obrazu základních goniometrických funkcí můžeme použít také Eulerovu formuli:

$$\begin{gathered} e^{jat}=\cos at+j\sin at\Rightarrow\mathcal{L}\left\{e^{jat}\right\}=\mathcal{L}\{\cos at\}+j\mathcal{L}\{\sin at\}\\ \mathcal{L}\left\{e^{jat}\right\}=\frac{1}{s-ja}=\frac{(s+ja)}{(s-ja)(s+ja)}=\frac{(s+ja)}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}+j\frac{a}{s^2+a^2} \end{gathered} \tag{2.11}$$

Srovnáme reálnou a imaginární část a dostaneme:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0 \tag{2.12}$$

2.5 Slovník Laplaceovy transformace

TABULKA 2.2: *Slovník LT*

Předmět	**Obraz**	**Předmět**	**Obraz**
$\delta(t)$	1	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad s>0,\ \omega\in\mathbb{R}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2} \quad s>0,\ \omega\in\mathbb{R}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2} \quad \omega\in\mathbb{R}$
t^2	$\frac{2}{s^2}$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2} \quad \omega\in\mathbb{R}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad n\in\mathbb{N}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad a\in\mathbb{R}$
$\frac{t^{n-1}}{n-1}$	$\frac{1}{s^n} \quad n\in\mathbb{N}$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a} \quad a\in\mathbb{R}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2} \quad a\in\mathbb{R}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \quad \omega\in\mathbb{R}$
t^2e^{at}	$\frac{2}{(s-a)^3} \quad a\in\mathbb{R}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \quad \omega\in\mathbb{R}$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad \omega, a\in\mathbb{R}$
$e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \quad \omega, a\in\mathbb{R}$

Pozn.:

Pomocí derivace obrazu můžeme spočítat některé obrazy pro dané předměty:

$$f(t) = t\sin\omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = -\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)' = -\frac{0.(s^2+\omega^2) - 2s.\omega}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{2.13}$$

$$f(t) = t\cos\omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = -\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)' = -\frac{1.(s^2+\omega^2) - s.2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{2.14}$$

2.6 Laplaceova transformace impulsu

Při hledání obrazu funkce $f(t)$, která je definována na omezeném intervalu nebo je dána několika vzorci na různých intervalech ze svého definičního oboru používáme při výpočtu přímo vzorec pro obraz a nebo používáme tvrzení o obrazu posunuté funkce. Toto tvrzení se nazývá věta o translaci. Symbolem $H(t)$ označíme funkci jednotkový skok, který je definován předpisem

$$H(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & \text{pro } t < 0 \\ 1, & \text{pro } t \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Na příkladech v další kapitole si ukážeme výpočet obrazu funkcí popsaného typu. Připomeňme, že stále předpokládáme, že uvažované předměty jsou definovány pouze pro nezápornou hodnotu argumentu.

2.7 Zpětná Laplaceova transformace

Transformace originál $\rightarrow$ obraz je přímá transformace. Existuje samozřejmě k ní zpětná transformace, tedy transformace obraz $\rightarrow$ originál, která k obrazu $F(s)$ přiřazuje opět originál $f(t)$.

Inverzní Laplaceova transformace je dána vztahem:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{\{c+ju;u\in\mathbb{R}\}} F(s)e^{st}ds \tag{2.16}$$

kde c je libovolné reálné číslo ležící v oblasti konvergence (pak celá přímka $\mathrm{Re}(s) = c$, přes níž se integruje, leží v oblasti konvergence). Vztah (2.16) znamená vyčíslování křivkového integrálu po uzavřené křivce c, která v sobě uzavírá všechny singulární body funkce $F(s)$. Toto vyčíslování je možné residuovou větou (nutná znalost komplexní analýzy), ale většinou se nepoužívá a v praxi se zpětná transformace provádí použitím slovníku Laplaceovy transformace.

Při provádění zpětné transformace (hledání $f(t)$ k danému $F(s)$) se běžně vyskytuje funkce $F(s)$ jako zlomek – racionálně lomená funkce. Takovou funkci samozřejmě nenajdeme ve slovníku a proto ji musíme rozložit nejprve v parciální zlomky a teprve pak k nim najít ve slovníku originál. Rozklad v parciální zlomky lze provádět několika způsoby, které jsou dále důkladně rozebrány a na vzorovém příkladu ukázány.

Obecný postup:

1. Vypočítat kořeny jmenovatele (póly funkce).
2. Rozložit jmenovatele na součin kořenových činitelů.
3. Rozložit funkci na parciální zlomky
4. POZOR – rozklad na parciální zlomky v případě *n*-násobného kořenu obsahuje pro tento násobný kořen *n* členů, tj. parciálních zlomků s kořenovým činitelem ve všech mocninách $0 \div n$.
5. Nalézt odezvy k jednotlivým zlomkům.
6. Aplikace věty o linearitě – celková odezva je dána součtem dílčích odezev.

Předpokládáme, že obraz $F(s)$ je ryze lomená racionální funkce a hledáme předmět

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Výpočet vzorů v LT a užití tabulek popisujících LT však vyžaduje jistou početní rutinu, kterou je nutné si alespoň v jednoduchých případech nacvičit, jak bude ukázáno dále. Při rozkladu na parciální zlomky se můžeme setkat s následujícími typy jmenovatelů, kterým musíme přiřadit správně čitatele pro rozklad. Jak je vidět z následujícího rozkladu vůbec nezáleží na tvaru čitatele původního složeného zlomku.

2.7.1 Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky se používá také u integrace racionálně lomené funkce. Racionální lomená funkce má tvar $R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, kde $P(s)$ je polynom stupně m, $Q(s)$ je polynom stupně n. Je-li navíc $m < n$ řekneme, že racionální lomená funkce je ryzí. Polynom ve jmenovateli rozložíme v reálném oboru. Každou ryzí racionálně lomenou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků, přičemž každému reálnému kořenu $s=a$ s násobností k, patří k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{s-a},\dots,\frac{A_k}{(s-a)^k} \tag{2.17}$$

Dvojici komplexně sdružených kořenů $s_{1,2}=b\pm ci$ s násobností l, patří l parciálních zlomků tvaru

$$\frac{M_1 s+N_1}{\left(s^2-2bs+b^2+c^2\right)},\dots,\frac{M_l s+N_l}{\left(s^2-2bs+b^2+c^2\right)^l} \tag{2.18}$$

Jmenovatele se snažíme rozložit na faktory co nejvíce je to možné, např.

$$\frac{P(s)}{(s-a_1)^{n_1}(s-a_2)^{n_2}\dots(s-a_N)^{n_N}\left(s^2+\alpha_1 s+\beta_1\right)^{m_1}\dots\left(s^2+\alpha_M s+\beta_M\right)^{m_M}} \tag{2.19}$$

zde již nelze kvadratické faktory dále rozložit na lineární faktory (nemají reálné kořeny) a všechny faktory v rozkladu jsou různé. Cílem je rozložit tento podíl na součet parciálních zlomků.

Funkci $F(s)$ rozložíme na parciální zlomky typu:

$$F(s)=\frac{P_n(s)}{s(s-a)(s-b)^2(s-c)^3\left((s-\lambda)^2+\mu^2\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-a}+\frac{C_1}{s-b}+\frac{C_2}{(s-b)^2}+\frac{D_1}{s-c}+\frac{D_2}{(s-c)^2}+\frac{D_3}{(s-c)^3}+ \\ +\frac{E_1(s-\lambda)+E_2}{(s-\lambda)^2+\mu^2} \tag{2.20}$$

Parciální zlomky podle nejčastějších jmenovatelů:

$$\frac{A}{(s-a)^n},\, n\in\mathbb{N};\quad \frac{As+B}{s^2+\omega^2};\quad \frac{As+B}{(s-a)^2+\omega^2};\quad \frac{As+B}{\left(s^2+\omega^2\right)^2};\quad \frac{As+B}{\left[(s-a)^2+\omega^2\right]^2} \tag{2.21}$$

V případě parciálního zlomku s kvadratickým polynomem ve jmenovateli (bez reálného kořene) upravíme tento polynom doplněním na čtverec a v čitateli doplníme případný člen o stejnou konstantu:

$$F(s)=\frac{s+A}{\left(s^2+Bs+C\right)^n}=\frac{\left(s+\frac{1}{2}B\right)+\left(A-\frac{1}{2}B\right)}{\left[\left(s+\frac{1}{2}B\right)^2+\left(C-\frac{1}{4}B^2\right)\right]^n} \tag{2.22}$$

Jak je vidět z předchozího vztahu (2.22) ne vždy nám bude rozklad na parciální zlomky činit největší potíže při zpětné LT. Při rozkladu na parciální zlomky můžeme obdržet jmenovatele, který se nedá dále rozložit na součin kořenových činitelů z důvodu, že kořenem je komplexní číslo. V tomto případě musíme alespoň vědět do jakého tvaru bychom měli zlomek upravit, tak aby nám připomínal nějaký vzor ze slovníku v nejčastějších případech goniometrické funkce násobené exponenciálou. Z tohoto důvodu si v další kapitole uvedeme několik výpočtů těchto specifických příkladů.

Nejdůležitější věc při zpětné transformaci je ta, že se musíme podívat na jmenovatele a pokusit se najít podobný výraz ve slovníku. Pokud takový výraz ve slovníku nemáme, pak musíme začít s algebraickými úpravami. Pokud si upravíme jmenovatele, zkontrolujeme v jakém tvaru je čitatel a popřípadě ho také upravíme, jestliže hledaný výraz není podobný žádnému ve slovníku.

2.7.1.1 Algoritmus pro rozklad na parciální zlomky

Krok 1.

Pro každý faktor $\left(s+a\right)^n$ přidejte do rozkladu n parciálních zlomků

$$+\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{\left(s-a\right)^2}+\cdots+\frac{A_n}{\left(s-a\right)^n} \tag{2.23}$$

Pro každý faktor $\left(s^2+\alpha s+\beta\right)^m$ přidejte do rozkladu m parciálních zlomků

$$+\frac{B_1 s+C_1}{s^2+\alpha_1 s+\beta_1}+\frac{B_2 s+C_2}{\left(s^2+\alpha_2 s+\beta_2\right)^2}+\frac{B_m s+C_m}{\left(s^2+\alpha_m s+\beta_m\right)^m} \tag{2.24}$$

V předcházejících odstavcích jsme konstanty značili pomocí indexů, ale dále budeme pro větší přehlednost značit konstanty po sobě jdoucími písmeny. Všimněte si, že počet neznámých písmen vždy odpovídá stupni jmenovatele. Všimněte si také, že čitatel $P\left(s\right)$ nemá na tvar parciálních zlomků žádný vliv.

Krok 2.

Určete neznámé konstanty $A, B, C, \ldots$ objevující se v parciálních zlomcích pomocí znalosti s.

2.7.1.2 Přehled metod pro získání koeficientů

K určení neznámých konstant je několik metod, dále pokryjeme ty nejdůležitější. Všechny zde používané metody jsou převzaty z [4]. K jejich ilustraci výpočtu použijeme následující přenosovou funkci.

$$F(s)=\frac{s+5}{s^2-2s-3} \tag{2.25}$$

Funkce je ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je menší než ve jmenovateli. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele. Použijeme buď vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, Hornerovo schéma nebo odhad součinu.

$$s^2-2s-3=(s-3)(s+1) \tag{2.26}$$

Každému kořenovému činiteli přísluší jeden parciální zlomek. Dostáváme tedy dva parciální zlomky, obecně

$$\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1} \tag{2.27}$$

Teď nám zbývá určit neznámé konstanty A, B.

2.7.1.2.1 Násobící metoda

Rovnici (2.27) danou hledaným rozkladem vynásobíme jmenovatelem zlomku, vykrátíme na pravé straně (což vždycky jde) a pak roznásobíme. Poslední krok je shromáždit stejné mocniny na pravé straně, takže tam vznikne polynom s neznámými koeficienty. Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $(s-3)(s+1)$.

$$\begin{aligned} s+5 &= \frac{A(s-3)(s+1)}{s-3}+\frac{B(s-3)(s+1)}{s+1} \\ s+5 &= A(s+1)+B(s-3) \\ s+5 &= (A+B)s+(A-3B). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Neznámé koeficienty v rozkladu vypočítáme metodou neurčitých koeficientů. Tato metoda se opírá o větu o rovnosti polynomů – dva polynomy jsou si rovny, rovnají-li se jejich koeficienty u stejných mocnin. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ A-3B &= 5. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Řešením této soustavy rovnic je $A=2, B=-1$, takže rozklad na parciální zlomky má pak tvar

$$\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}. \tag{2.30}$$

2.7.1.2.2 Dosazovací metoda

Pro určení neznámých koeficientů můžeme použít kromě porovnávání koeficientů u jednotlivých mocnin i dosazovací metodu, kterou si ukážeme na následujících řádkách (této metodě se také říká metoda zakrývací a její obměnu si ukážeme dále)

$$s+5=A(s+1)+B(s-3) \tag{2.31}$$

rovnost platí pro každé s, tedy i pro kořen $s=-1$, poté dostáváme

$$\begin{aligned} &-1+5=A(-1+1)+B(-1-3) \\ &4=-4B \Rightarrow B=-1 \end{aligned} \tag{2.32}$$

pro druhý kořen $s=3$ dostáváme

$$\begin{aligned} &3+5=A(3+1)+B(3-3) \\ &8=4A \Rightarrow A=2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

je vidět, že jsme při použití obou metod dosáhli stejných výsledků. Tímto je rozklad hotov a my můžeme přistoupit k zpětné Laplaceovy transformaci.

Tento trik je jediná opravdu spolehlivá metoda. Vždy funguje, díky čemuž je velice důležitá. Nevýhodou je, že může být velice zdlouhavá a pracná pro ruční výpočet, protože obecně je počet neznámých a počet rovnic, které obdržíme, rovný stupni jmenovatele.

2.7.1.2.3 Zakrývací metoda

Vyjdeme z původní rovnice:

$$\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1} \tag{2.34}$$

Chceme-li znát A, zakryjeme na levé straně odpovídající faktor $(s-3)$ a do vzniklého výrazu dosadíme příslušný kořen $s=3$. Dostaneme

$$A=\left.\frac{s+5}{(////)(s+1)}\right|_{x=3}=\frac{8}{4}=2. \tag{2.35}$$

Podobně zakrytím $(s+1)$ a dosazením $s=-1$ dostaneme

$$B=\left.\frac{s+5}{(s-3)(////)}\right|_{s=-1}=\frac{4}{-4}=-1. \tag{2.36}$$

Dostáváme tedy stejný rozklad jako předtím a prakticky zdarma. Toto je nejlepší metoda získávání neznámých koeficientů, zkušený rozkladač si jen napíše tu základní rovnici s obecným rozkladem, pak si v ní prstem zakrývá faktory a rovnou píše výsledky. Zkuste si to sami na následujícím příkladu:

$$\frac{2s^2-5s+5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{A\to 2}{s+1}+\frac{B\to -1}{s-1}+\frac{C\to 1}{s-2} \tag{2.37}$$

Protože toto bude evidentně naše nejoblíbenější metoda, podíváme se na ni blíže. Předpokládejme, že máme podíl polynomů $\frac{p(s)}{q(s)}$, a že $(s-a)^n$ je jeden z faktorů q. Teorie nám říká, že pak máme následující obecný rozklad

$$\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{A_1}{s-a}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{(s-a)^{n-1}}+\frac{A_n}{(s-a)^n}+\frac{P(s)}{Q(s)}. \tag{2.38}$$

Podíl P/Q tam reprezentuje součet ostatních parciálních zlomků, Q je vlastně stejný polynom jako q ale bez faktoru $(s-a)^n$. Teď tuto rovnost vynásobíme tímto faktorem a pak do výsledné rovnice dosadíme hodnotu $s=a$.

$$\begin{aligned}
\frac{p(s)(s-a)^n}{q(s)} &= A_1(s-a)^{n-1}+\cdots+A_{n-1}(s-a)+A_n+\frac{P(s)(s-a)^n}{Q(s)},\\
\left.\frac{p(s)}{\frac{q(s)}{(s-a)^n}}\right|_{s=a} &= A_1.0+\cdots+A_{n-1}.0+A_n+\frac{P(a).0}{Q(a)},\\
\left.\frac{p(s)}{\frac{q(s)}{(s-a)^n}}\right|_{s=a} &= A_n.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Napravo jsme dostali neznámý koeficient A_n, ve jmenovateli nalevo vlastně odebíráme (zakrýváme) faktor $(s-a)^n$, takže toto je vskutku princip zakrývacího triku. Tento poslední řádek tedy vlastně dává obecný vztah pro tuto metodu.

Teď také vidíme hlavní omezení této metody. První problém nastane, když je n větší než 1, protože pak nejsme schopni dostat další odpovídající konstanty. Například k získání A_{n-1} bychom měli ve jmenovateli zakrýt $(s-a)^{n-1}$, ale pak by tam pořád ve jmenovateli zůstávalo $(s-a)$ a tentokrát už není možné dosadit a za s. V těch příkladech výše byly vždy lineární faktory jen v první mocnině, což je pro zakrývací trik ten nejlepší možný případ. Teď se podíváme na něco složitějšího.

Příklad: Uvažujte následující rozklad.

$$\frac{2s^2-1}{s^3-s^2}=\frac{2s^2-1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}. \tag{2.40}$$

Všimněte si, že s^2 není ireducibilní kvadratický faktor, ale lineární člen $(s-0)$ na mocninu dva, takže jsme s ním podle toho zacházeli (ireducibilní polynom je takový polynom, který nelze rozložit na součin jednodušších polynomů). Teď určíme konstanty, začneme tím nejjednodušším způsobem, tedy zakrývací metodou. Zakrytím členu $(s-1)$ na levé straně a dosazením $s=1$ získáme $C=1$. Zakrytím s^2 a dosazením $s=0$ dostaneme $B=1$. Nelze ale zakrýt jen jedno s a dosadit nulu, neboli zakrývací metoda selže u konstanty A. Obrátíme se tedy na spolehlivou metodu násobící, ale protože už známe dvě hodnoty, tak nebudeme muset řešit systém tří rovnic, ale bude stačit pouze jedna. To nám podstatně zjednoduší práci.

$$\begin{aligned}
&\frac{2s^2-1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s-1}\\
&2s^2-1=As(s-1)+(s-1)+s^2\ (*)\\
&2s^2-1=(A+1)s^2+(1-A)s-1\\
&\Rightarrow A+1=2\Rightarrow A=1\\
&\Rightarrow\frac{2s^2-1}{s^2(s-1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s-1}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Podobně postupujeme v případě, kdy jsou i kvadratické faktory. To je druhé omezení zakrývací metody, nedá nám koeficienty odpovídající kvadratickým faktorům. Důvod je jednoduchý, není reálný kořen, který by šlo dosadit. Postup si ukážeme na příkladě níže, nejprve si to shrneme.

Algoritmus pro určování koeficientů parciálních zlomků:

Krok 1. pokud jsou tam nějaké lineární faktory, pak pro každý faktor $(s-a)^n$ najděte koeficient odpovídající parciálnímu zlomku s nejvyšší mocninou pomocí zakrývací metody:

a) zakryjte faktor $(s-a)^n$ ve jmenovateli dané funkce,

b) dosaďte $s=a$ do výrazu, který zbyl.

Pokud má daná funkce pouze lineární faktory v mocnině 1, jste hotovi.

Krok 2. pokud jste dostali nějaké koeficienty v Kroku 1, dosaďte je do obecného rozkladu, který určujete. Pak najděte zbývající koeficienty pomocí násobící metody:

a) vynásobte obě strany rozkladu společným jmenovatelem a zkraťte na pravé straně
b) přepište výraz napravo jako polynom,
c) srovnáním koeficientů polynomů nalevo a napravo odvoďte tolik rovnic, kolik zbývá určit proměnných,
d) vyřešte tyto rovnice.

Než ukážeme další příklad, ukážeme dvě pomocné metody. Není nutné je znát (ten algoritmus výše obvykle funguje velice dobře), ale někteří lidé by mohli ocenit, že usnadňují získávání rovnic při násobící metodě.

2.7.1.2.4 Dosazovací metoda – rozšíření

Při této metodě vyjdeme z rovnice, kterou jsme dostali vynásobením rozkladu při násobící metodě. V příkladě výše to je rovnice (2.41) označená $(*)$. Tato rovnice má platit pro všechna s, tudíž i pro nějakou konkrétní hodnotu, kterou si vybereme. Pokud do této rovnosti dosadíme nějaké konkrétní číslo za s, dostaneme rovnici s neznámými koeficienty. Kolik rovnic potřebujeme, tolikrát dosadíme za s nějaké číslo. Komplikace může vzniknout, pokud by některé takto vzniklé rovnice nebyly nezávislé, ale to se pozná v průběhu řešení a prostě se dosazením jiného s přidá další rovnice.

Dosazením kořenů lineárních faktorů je ekvivalentní zakrývací metodě. Pokud jsme ji tedy již před násobící metodou použili, pak je pro dosazovací metodu třeba použít jiné hodnoty než kořeny. Vraťme se k poslednímu příkladu. Když dosadíme do rovnice (2.41) $(*)$ něco jiného než 0 a 1, například $s=-1$, tak dostaneme rovnici pro A.

$$2s^2-1=As(s-1)+(s-1)+s^2\ (*) \tag{2.42}$$

$$s=-1 \Rightarrow 1=2A-2+1 \Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1 \tag{2.43}$$

2.7.1.2.5 Limitní metoda

Tato metoda začíná s původní rozkladovou rovností. Ta se skládá z racionálních lomených funkcí a my dobře víme, jak se tyto funkce chovají v nekonečnu. V rovnici jsou všechny racionální lomené funkce ryzí, takže jsou stupně v čitatelích menší než ve jmenovateli a v nekonečnu jdou podíly k nule. Nicméně jsou tam vždy některé, u nichž je stupeň v čitateli přesně o jedničku menší než ve jmenovateli. Pokud tu základní rovnici vynásobíme proměnnou s a pak přejdeme do nekonečna, určíme snadno limitu všech podílů. Ty, které mají pořád menší stupeň v čitateli, půjdou k nule, ale ty, u kterých se teď stupně srovnaly, půjdou k podílu koeficientů u nejvyšších mocnin. Zase se vrátíme k příkladu výše a vyzkoušíme to, nejprve vynásobíme všechny členy s a pak to s pošleme do nekonečna

$$\begin{aligned} & s\cdot\frac{2s^2-1}{s^2(s-1)}=s\cdot\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}\right) \\ & \frac{2s^3-s}{s^2(s-1)}=A+\frac{B}{s}+\frac{Cs}{s-1} \\ & 2=A+C \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dostali jsme rovnici skoro zadarmo, zkušený řešič to dokáže, aniž by si dokonce tu vynásobenou rovnost psal, prostě se podívá na tu původní rozkladovou a rovnou píše rovnici. Často to už stačí, i zde jsme již všechny ostatní neznámé získali zakrývačkou, takže rovnou dopočítáme i A a máme rozklad.

Jak už jsme psali, tyto dvě pomocné metody není opravdu nutné znát. Někteří studenti nelibě nesou, když se věci komplikují a musí se víc rozhodovat, vyloženě jim vyhovuje ten algoritmus výše, prostě se naučí zakrývací a násobící metodu a zvládnou tím všechno, i když třeba občas musí více počítat.

Nicméně mnozí studenti, kteří se cítí v této oblasti jistí, se často nebojí si rozhodovací postup zkomplikovat a ocení, když znají i pár triků, které dokáží někdy výrazně zkrátit výpočty. Pro ně jsme zde představili ty dvě pomocné metody, budeme je na vhodných místech používat jako alternativní postup. Triků dokonce existuje mnohem víc, několik pokročilejších, ale asi i méně praktických metod si ukážeme dále.

Uvažujme následující rozklad:

$$\frac{s^3-3s^2-3s-10}{(s-1)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B\Rightarrow -3}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}. \tag{2.45}$$

Jeden koeficient jsme dokázali najít zakrývací metodou, zakryli jsme vlevo $(s-1)$ a do zbytku dosadili $s=1$. Tím jsme ale skončili, je čas na násobící metodu. Nejprve vynásobíme společným jmenovatelem a pokrátíme rovnici:

$$s^3-3s^2-3s-10=A(s-1)(s^2+4)-3(s^2+4)+(Cs+D)(s-1)^2. \tag{2.46}$$

Standardní postup je teď vynásobit rovnici (2.46) označenou hvězdičkou jmenovatelem, roznásobit pravou stranu, přepsat ji jako polynom, pak porovnat obě strany a dostaneme čtyři rovnice, při jejíchž řešení pomůže, že už známe B:

$$s^3 - 3s^2 - 3s - 10 = (A+C)s^3 + (-A-2C+D-3)s^2 + (4A+C-2D)s + (-4A-12+D) \qquad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & = & A+C \\ -3 & = & -A-2C+D-3 \\ -3 & = & 4A+C-2D \\ -10 & = & -4A-12+D \end{bmatrix} \qquad (2.48)$$
$$\Rightarrow A=0, C=1, D=2$$

a tedy

$$\frac{s^3-3s^2-3s-10}{(s-1)^2(s^2+4)} = \frac{0}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{s+2}{s^2+4}. \qquad (2.49)$$

Kde by se tady mohl projevit dosazovací trik? Namísto roznásobování na pravé straně je možné začít s rovnicí (2.46) a dostat tři rovnice (tolik jich potřebujeme) dosazením tří hodnot za s (libovolně malých), pokud možno malých.

$$\begin{aligned} & s^3-3s^2-3s-10 = A(s-1)(s^2+4) - 3(s^2+4) + (Cs+D)(s-1)^2 \\ & s=0 \Rightarrow -10 = -4A-12+D \\ & s=-1 \Rightarrow -11 = -10A-15-4C+4D \\ & s=2 \Rightarrow -20 = 8A-24+2C+D \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & = & -4A-12+D \\ -11 & = & -10A-4C+4D-15 \\ -20 & = & 8A+2C+D-24 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (2.50)$$

Zdá se, že bylo snadnější takto získat tři rovnice, na druhou stranu tento postup často dává rovnice s velkými koeficienty, což není tak pěkné, když dojde na jejich řešení.

Další pomocná metoda používala limitu. Vynásobíme základní rovnost výrazem s a pak přejdeme do nekonečna.

$$\begin{aligned} & \frac{s^3-3s^2-3s-10}{(s-1)^2(s^2+4)} = \frac{As}{s-1} - \frac{Bs}{(s-1)^2} + \frac{Cs^2+Ds}{s^2+4} \\ & 1 = A+0+C. \end{aligned} \qquad (2.51)$$

Je to jen jedna rovnice, ale skoro zadarmo. Všimněte si, že je stejná, jako jsme dostali u násobící metody při porovnání koeficientů u nejvyšší mocniny. Není to náhoda, tak to vyjde vždycky.

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{s^2 - s + 4}{s^2 + 2s + 1} \tag{2.52}$$

Funkce není ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je stejný (nebo větší), než ve jmenovateli. Podělíme polynomy v čitateli a jmenovateli

$$\begin{aligned} &\left(s^2 - s + 4\right) : \left(s^2 + 2s + 1\right) = 1 + \frac{-3s + 3}{s^2 + 2s + 1} \\ &-\left(s^2 + 2s + 1\right) \\ &-3s + 3 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat pouze ryze lomený zbytek. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele a dostáváme

$$\frac{-3s + 3}{s^2 + 2s + 1} = \frac{-3s + 3}{\left(s + 1\right)^2} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{\left(s + 1\right)^2} \tag{2.54}$$

Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem $\left(s + 1\right)^2$.

$$\begin{aligned} &-3s + 3 = A\left(s + 1\right) + B = As + \left(A + B\right) \\ &-3 = A, 3 = \left(-3 + B\right) \Rightarrow B = 6 \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\frac{-3s + 3}{\left(s + 1\right)^2} = 1 - \frac{3}{s + 1} + \frac{6}{\left(s + 1\right)^2} \tag{2.56}$$

Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{s}{\left(s - 1\right)\left(s^2 + 2\right)} \tag{2.57}$$

Funkce je ryze lomená, protože stupeň polynomu v čitateli je menší, než ve jmenovateli. Jmenovatel již je rozložen na kořenové činitele, protože $s^2 + 2 = 0$ má pouze komplexní kořeny.

$$\frac{s}{\left(s - 1\right)\left(s^2 + 2\right)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2} \tag{2.58}$$

Každému kořenovému činiteli přísluší jeden parciální zlomek, nerozložitelnému kvadratickému činiteli také. Vynásobíme rovnici společným jmenovatelem.

$$s = A\left(s^2 + 2\right) + \left(Bs + C\right)\left(s - 1\right) \tag{2.59}$$

rovnost platí pro každé s, tedy i pro kořen $s = 1$

$$s = 1 : 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3} \tag{2.60}$$

další kořeny nemáme. Buď dosadíme jiné číslo nebo porovnáme koeficienty.

$$s^2 : 0 = A + B = \frac{1}{3} + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \tag{2.61}$$

zbývá vyjádřit C. Protože C se objevuje u první i nulté mocniny s, můžeme si mocninu vybrat. Vezmeme např. s.

$$s : 1 = -B + C = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3} \tag{2.62}$$

parciální rozklad pak je

$$\frac{s}{(s-1)\left(s^2+2\right)} = \frac{1}{3(s-1)} + \frac{-s+2}{3\left(s^2+2\right)} \tag{2.63}$$

Další metody budeme ilustrovat na rozkladu

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B \to -3}{(s-1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \tag{2.64}$$

Jednu konstantu jme již určili zakrývací metodou, protože ta je nejjednodušší a nemá smysl hledat k ní alternativu. Ostatní konstanty bychom standardně určili násobící metodou, což je přesně chvíle, kdybychom ocenili nějakou alternativu.

2.7.1.2.6 Lineární faktory I

Začneme s problémem nalezení A, obecně s hledáním konstant u lineárních faktorů, které se objevují ve vyšší mocnině. První zajímavá metoda je založena na selském rozumu. Pomocí zakrývací metody určíme A_n odpovídající nejvyšší mocnině jistého lineárního faktoru $(s-a)^n$. Jakmile tento koeficient známe, tak lze přesunout celý parciální zlomek nalevo a spojit s původním podílem, teď se A_{n-1} stává koeficientem s nejvyšším mocninou napravo a můžeme k jeho nalezení použít zakrývací metodu (s novou levou stranou). Jakmile tak učiníme, přesuneme zase tento zlomek doleva a pokračujeme tímto způsobem, dokud nedostaneme všechny koeficienty odpovídající tomuto lineárnímu faktoru. Pak se přesuneme k dalšímu atd., takže se takto nakonec dají určit všechny konstanty u parciálních zlomků založených na lineáře. Jak to zabere u našeho příkladu?

$$\begin{aligned} \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2\left(s^2+4\right)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} - \frac{3}{(s-1)^2} \\ \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2\left(s^2+4\right)} + \frac{3}{(s-1)^2} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{s^3-3s+2}{(s-1)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
&\frac{(s-1)(s^2+s-2)}{(s-1)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
&\frac{(s^2+s-2)}{(s-1)(s^2+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
&\Rightarrow \quad A=\left.\frac{s^2+s-2}{(/////)(s^2+4)}\right|_{s=1}=0.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Takže jsme A našli, ale úprava podílu nalevo dala asi víc práce než celá násobící metoda. Mohou ale být příklady, kde toto pomůže.

2.7.1.2.7 Lineární faktory II

Zde se pokusíme zobecnit zakrývací metodu. Připomeňme, že je založená na následujícím postupu. Vezmeme rozklad, který se soustředí na nějaký lineární faktor $(s-a)^n$, a vynásobíme jej tímto faktorem.

$$\begin{aligned}
&\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{A_1}{s-a}+\dots+\frac{A_{n-1}}{(s-a)^{n-1}}+\frac{A_n}{(s-a)^n}+\frac{P(s)}{Q(s)}\\
&\frac{p(s)(s-a)^n}{q(s)}=A_1(s-a)^{n-1}+\dots+A_{n-1}(s-a)+A_n+\frac{P(s)(s-a)^n}{Q(s)}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Pak jsme dosadili za $s=a$ a dostali A_n. Dá se nějak dostat i A_{n-1}? Ano, můžeme derivovat obě strany této rovnosti, čímž A_n zmizí a A_{n-1} tak bude jako konstanta, takže dosazení už to udělá. Zase to použijeme na náš příklad.

$$\begin{aligned}
&\frac{s^3-3s^2-3s-10}{(s-1)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
&\frac{s^3-3s^2-3s-10}{(s^2+4)}=A(s-1)-3+(s-1)^2\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
&\frac{s^4+15s^2-4s-12}{(s^2+4)^2}=A+2(s-1)\frac{Cs+D}{s^2+4}+(s-1)^2\left(\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)'\\
&s=1\Rightarrow \quad \frac{0}{5^2}=A+0\frac{D}{4}+0\left.\left(\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)'\right|_{s=1} \quad \Rightarrow \quad A=0.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Osobně bych raději volil násobící metodu. Pokud derivujeme vícekrát, dostaneme také další konstanty. To je zajímavé z teoretického hlediska, protože dostáváme obecný vzorec pro všechny konstanty u zlomků s lineárami. (Pokročilejší čtenáři mohou vidět zajímavou souvislost s rezidui a obecně Laureátovým rozvojem komplexních funkcí.)

$$A_k = \left(\frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \left[(s-a)^n \frac{p(s)}{q(s)} \right] \right) \Bigg|_{s=a} . \tag{2.69}$$

2.7.1.2.8 Kvadratické faktory I

Zde je možné použít zajímavou verzi dosazovacího triku. Konstanty u lineárních faktorů (u nejvyšších mocnin) lze získat dosazováním kořenů lineár, u konstant z kvadratických parciálních zlomků nejvyšších mocnin zase zabere dosazení komplexního kořene.
U našeho příkladu má komplexní faktor kořen $s = 2i$, jeho dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} &s^3 - 3s^2 - 3s - 10 = A(s-1)\left(s^2+4\right) + B\left(s^2+4\right) + (Cs+D)(s-1)^2 \\ &s = 2i \Rightarrow \quad 2 - 14i = (8C - 3D) - (6C + 4D)i. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Porovnáním reálné a imaginární části získáme rovnice $2 = 8C - 3D$ a $14 = 6C + 4D$, které hravě vyřešíme a dostaneme $C = 1$ a $D = 2$.
V případě, že by jeden kvadratický člen byl přítomen vícekrát, získáme zase pouze koeficienty u nejvyšší mocniny.

2.7.1.2.9 Kvadratické faktory II

Pokud vám nevadí komplexní výpočty, nabízí se ještě jeden trik. Pokud povolíme komplexní kořeny, tak lze každou ryzí racionální funkci rozložit na parciální zlomky založené na lineárních členech neboli na těch nejpříjemnějších. Vzniknou pak i komplexní koeficienty. V našem příkladě dostaneme

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2i} + \frac{D}{s+2i} \tag{2.71}$$

teď můžeme použít zakrývací trik s příslušnými kořeny a dostaneme B, C a D u posledních dvou to bude

$$C = \left. \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2 (s+2i)} \right|_{s=2i} = \frac{2-14i}{16-12i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$
$$D = \left. \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2 (s-2i)} \right|_{s=-2i} = \frac{2+14i}{16+12i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \tag{2.72}$$

Poslední konstantu $A = 0$ získáme například jednou z metod výše, takže

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 10}{(s-1)^2 (s^2+4)} = -\frac{3}{(s-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{s-2i} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{s+2i}. \tag{2.73}$$

získali jsme tak rozklad, jehož další výhodou je, že nemá kvadratické členy. Nevýhody jsou dvě. Museli jsme provádět komplexní výpočty, což možná některým nebude až tak vadit. Větším problémem je, že výsledek integrace obsahuje komplexní čísla, jenže zadaná funkce je reálná. Výsledek by tedy měl být rovněž reálný, takže se získaný komplexní výsledek ještě musí upravovat do reálného tvaru, což nemusí být jednoduché. Snad z toho důvodu se tento trik s komplexním rozkladem nepoužívá v reálném oboru.

Kapitola 3

Příklady na Laplaceovu transformaci

Na tomto místě bych rád poznamenal, že některé zde použité příklady byly převzaty ze zdrojů, které jsou uvedeny na konci této práce. Většinou se jednalo o zahraniční matematicky zaměřené weby nebo tištěné publikace. Ale byly vždy publikovány jako neřešené bez uvedení výsledků, které bylo nutné vypočítat a uvést postup řešení. Na přiloženém CD naleznete scany výpočtu jednotlivých příkladů, které byly v rámci práce vymyšleny a spočteny.

3.1 Příklady na přímou Laplaceovu transformaci

Příklady: Pomocí základních vztahů transformace a s využitím uvedených obrazů některých funkcí určete obraz $F(s)$ k předmětu $f(t)$.

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
1	$f(t)=4+2te^{-3t}-3t^2e^{-2t}$	$F(s)=\frac{4}{s}+\frac{2}{(s+3)^2}-\frac{6}{(s+2)^3}$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
&f(t)=4+2te^{-3t}-3t^2e^{-2t}\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{4+2te^{-3t}-3t^2e^{-2t}\}=\mathcal{L}\{4\}+\mathcal{L}\{2te^{-3t}\}+\mathcal{L}\{-3t^2e^{-2t}\}=\\
&=4\mathcal{L}\{1\}+2\mathcal{L}\{te^{-3t}\}-3\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\}=4\frac{1}{s}+2\frac{1}{(s+3)^2}-3\frac{2}{(s+2)^3}=\frac{4}{s}+\frac{2}{(s+3)^2}-\frac{6}{(s+2)^3}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Příklad číslo: 2	Zadání: $f(t)=2\sin 5t-3\cos 2t$	Výsledek $F(s)=\dfrac{-3s^3+10s^2-75s+40}{s^4+29s^2+100}$

Řešení:

$$f(t)=2\sin 5t-3\cos 2t$$
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{2\sin 5t-3\cos 2t\}=2\mathcal{L}\{\sin 5t\}-3\mathcal{L}\{\cos 2t\}=$$
$$=2\frac{5}{s^2+5^2}-3\frac{s}{s^2+2^2}=\frac{10}{s^2+5^2}-\frac{3s}{s^2+2^2}=\frac{10\left(s^2+4\right)-3s\left(s^2+25\right)}{\left(s^2+25\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{-3s^3+10s^2-75s+40}{s^4+29s^2+100} \tag{3.2}$$

Příklad číslo: 3	Zadání: $f(t)=3t-2\sin t$	Výsledek $F(s)=\dfrac{s^2+3}{s^4+s^2}$

Řešení:

$$f(t)=3t-2\sin t$$
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{3t-2\sin t\}=3\mathcal{L}\{t\}-2\mathcal{L}\{\sin t\}=$$
$$=3\frac{1}{s^2}-2\frac{1}{s^2+1^2}=\frac{3}{s^2}-\frac{2}{s^2+1^2}=\frac{3\left(s^2+1\right)-2s^2}{s^2\left(s^2+1\right)}=\frac{s^2+3}{s^4+s^2} \tag{3.3}$$

Příklad číslo: 4	Zadání: $f(t)=t^2-2+4e^{-t}+2\cos 2t$	Výsledek $F(s)=\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{4}{s+1}+\dfrac{2s}{s^2+2^2}$

Řešení:

$$f(t)=t^2-2+4e^{-t}+2\cos 2t$$
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{t^2-2+4e^{-t}+2\cos 2t\right\}=\mathcal{L}\left\{t^2\right\}-2\mathcal{L}\{1\}+4\mathcal{L}\left\{4e^{-t}\right\}+2\mathcal{L}\{\cos 2t\}$$
$$=\frac{2!}{s^3}-2\frac{1}{s}+4\frac{1}{s+1}+2\frac{s}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s}+\frac{4}{s+1}+\frac{2s}{s^2+2^2} \tag{3.4}$$

Příklad číslo: 5	Zadání: $f(t)=4e^t+2e^{-3t}+\sin 2t$	Výsledek $F(s)=\dfrac{6s^3+12s^2+28s+34}{s^4+2s^3+s^2+8s-12}$

Řešení:

$$f(t)=4e^t+2e^{-3t}+\sin 2t$$
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{4e^t+2e^{-3t}+\sin 2t\right\}=4\mathcal{L}\left\{e^t\right\}+2\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}+\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$
$$=4\frac{1}{s-1}+2\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{4(s+3)\left(s^2+4\right)+2(s-1)\left(s^2+4\right)+2(s-1)(s+3)}{(s-1)(s+3)\left(s^2+4\right)}= \tag{3.5}$$

$$=\frac{6s^3+12s^2+28s+34}{s^4+2s^3+s^2+8s-12}$$

Příklad číslo: 6	Zadání: $(3t+2)e^{-2t}+3\cos 3t-2\sin 4t$	Výsledek $F(s)=\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}+\frac{3s}{s^2+9}-\frac{8}{s^2+16}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&f(t)=(3t+2)e^{-2t}+3\cos 3t-2\sin 4t=3te^{-2t}+2e^{-2t}+3\cos 3t-2\sin 4t\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{3te^{-2t}+2e^{-2t}+3\cos 3t-2\sin 4t\right\}=\\
&=3\mathcal{L}\left\{te^{-2t}\right\}+2\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}+3\mathcal{L}\{\cos 3t\}-2\mathcal{L}\{\sin 4t\}=\\
&=3\frac{1}{(s+2)^2}+2\frac{1}{s+2}+3\frac{s}{s^2+3^2}-2\frac{4}{s^2+4^2}=\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}+\frac{3s}{s^2+9}-\frac{8}{s^2+16}
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Příklad číslo: 7	Zadání: $f(t)=t(2\sin 2t+4\cos 3t)$	Výsledek $F(s)=\frac{8s}{(s^2+4)^2}+\frac{4s^2-36}{(s^2+9)^2}$

Řešení:

Tento příklad můžeme řešit dvěma způsoby, ukážeme si zde jeden a u dalšího příkladu si ukážeme oba způsoby řešení (v tomto případě použijeme složitější způsob).

$$\begin{aligned}
&f(t)=t(2\sin 2t+4\cos 3t)=2t\sin 2t+4t\cos 3t\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{2t\sin 2t+4t\cos 3t\}=2\mathcal{L}\{t\sin 2t\}+4\mathcal{L}\{t\cos 3t\}=\\
&=-\left(2\frac{2}{s^2+2^2}+4\frac{s}{s^2+3^2}\right)'=-\left(\frac{4}{s^2+4}+\frac{4s}{s^2+9}\right)'=\\
&=\frac{-0+4.2s}{(s^2+4)^2}+\frac{-4(s^2+9)+4s.2s}{(s^2+9)^2}=\frac{8s}{(s^2+4)^2}+\frac{4s^2-36}{(s^2+9)^2}
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Příklad číslo: 8	Zadání: $3(t+4)\cos 2t$	Výsledek $\frac{12s^3+3s^2+48s-12}{s^4+8s^2+16}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&f(t)=3(t+4)\cos 2t=3t\cos 2t+12\cos 2t\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{3t\cos 2t+12\cos 2t\}=3\mathcal{L}\{3t\cos 2t\}+12\mathcal{L}\{\cos 2t\}
\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$=-\underbrace{\left(3\frac{s}{s^2+2^2}\right)'}_{*}+12\frac{s}{s^2+2^2}=\frac{-3\left(s^2+4\right)+3s.2s}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{12s}{s^2+4}=$$

$$*\mathcal{L}\{t\cos\omega t\}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \tag{3.9}$$

$$=\frac{3s^2-12}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{12s}{s^2+4}=\frac{3s^2-12+12s\left(s^2+4\right)}{\left(s^2+4\right)^2}=\frac{12s^3+3s^2+48s-12}{s^4+8s^2+16}$$

Příklad číslo: 9	Zadání: $3(t+4)\cos 2t$	Výsledek $\frac{12s^3+3s^2+48s-12}{s^4+8s^2+16}$

Řešení:

$$f(t)=\left(3t^2+2t-1\right)e^{-t}+(t+1)\sin 2t=3t^2e^{-t}+2te^{-t}-e^{-t}+t\sin 2t+\sin 2t$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=3\frac{2!}{(s+1)^3}+2\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{2.2.s}{\left(s^2+2^2\right)^2}+\frac{2}{s^2+2^2}= \tag{3.10}$$

$$=\frac{6}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{4s}{\left(s^2+2^2\right)^2}+\frac{2}{s^2+2^2}$$

Příklad číslo: 10	Zadání: $2te^{-2t}+(t-2)\cos 2t$	Výsledek $\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2s}{s^2+4}$

Řešení:

$$f(t)=2te^{-2t}+(t-2)\cos 2t=2te^{-2t}+t\cos 2t-2\cos 2t$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{2te^{-2t}+t\cos 2t-2\cos 2t\right\}=2\mathcal{L}\left\{te^{-2t}\right\}+\mathcal{L}\{t\cos 2t\}-2\mathcal{L}\{\cos 2t\} \tag{3.11}$$

$$=2\frac{1}{(s+2)^2}-\underbrace{\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)'}_{*}-2\frac{s}{s^2+2^2}=$$

$$*\mathcal{L}\{t\cos 2t\}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \tag{3.12}$$

$$=\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{s^2+4-s.2s}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2s}{s^2+4}=\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2s}{s^2+4}$$

Příklad číslo: 11	Zadání: $f(t)=2e^{-4t}\cos 3t$	Výsledek $\dfrac{2s+8}{s^2+8s+25}$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
&f(t)=2e^{-4t}\cos 3t\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{2e^{-4t}\cos 3t\right\}=2\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\cos 3t\right\}=\\
&=2\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}=\frac{2s+8}{(s+4)^2+9}=\frac{2s+8}{s^2+8s+25}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Příklad číslo: 12	Zadání: $e^{-t}(2\cos 3t-4\sin 5t)$	Výsledek $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+10}-\dfrac{20}{s^2+2s+26}$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
&f(t)=e^{-t}(2\cos 3t-4\sin 5t)=2e^{-t}\cos 3t-4e^{-t}\sin 5t\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{2e^{-t}\cos 3t-4e^{-t}\sin 5t\right\}=2\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 3t\right\}-4\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin 5t\right\}=\\
&=2\frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2}-4\frac{5}{(s+1)^2+5^2}=\frac{2s+2}{(s+1)^2+9}-\frac{20}{(s+1)^2+25}=\\
&=\frac{2s+2}{s^2+2s+10}-\frac{20}{s^2+2s+26}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Příklad číslo: 13	Zadání: $f(t)=2te^{-3t}-e^{-2t}\sin 4t+2$	Výsledek $\dfrac{2s^4+18s^3+90s^2+316s+360}{s^5+10s^4+33s^3+176s^2+180s}$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
&f(t)=2te^{-3t}-e^{-2t}\sin 4t+2\\
&F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{2te^{-3t}-e^{-2t}\sin 4t+2\right\}=2\mathcal{L}\left\{te^{-3t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin 4t\right\}+2\mathcal{L}\{1\}\\
&=2\frac{1}{(s+3)^2}-\frac{4}{(s+2)^2+4^2}+2\frac{1}{s}=\frac{2}{(s+3)^2}-\frac{4}{(s+2)^2+16}+\frac{2}{s}=\\
&=\frac{2}{s^2+6s+9}-\frac{4}{s^2+4s+20}+\frac{2}{s}=\frac{2s^4+18s^3+90s^2+316s+360}{s^5+10s^4+33s^3+176s^2+180s}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Příklad číslo: 14	Zadání: $f(t)=3t\sin 4t+\left(3te^{-2t}\right)'$	Výsledek $\dfrac{24s}{s^4+32s^2+256}+\dfrac{3s}{s^2+4s+4}$

Řešení:

$$f(t)=3t\sin 4t+\left(3te^{-2t}\right)'$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{3t\sin 4t+\left(3te^{-2t}\right)'\right\}=3\mathcal{L}\{3t\sin 4t\}+\mathcal{L}\left\{\left(3te^{-2t}\right)'\right\}=$$

$$=-3\underbrace{\left(\frac{4}{s^2+4^2}\right)'}_{*}+3s\frac{1}{(s+2)^2}-\lim_{t\to 0_+}\left(3te^{-2t}\right)=-3\frac{-4.2s}{\left(s^2+16\right)^2}+\frac{3s}{(s+2)^2}= \tag{3.16}$$

$$*\mathcal{L}\{t\sin\omega t\}=\frac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$=\frac{24s}{\left(s^2+16\right)^2}+\frac{3s}{(s+2)^2}=\frac{24s}{s^4+32s^2+256}+\frac{3s}{s^2+4s+4} \tag{3.17}$$

Příklad číslo: 15	Zadání: $f(t)=e^{-3t}(1-2\sin 3t)+\int_0^t e^{3t}\cos 3t\,dt$	Výsledek $\frac{1}{(s+3)}-\frac{6}{s^2+6s+18}+\frac{s-3}{s^3-6s^2+18s}$

Řešení:

$$f(t)=e^{-3t}(1-2\sin 3t)+\int_0^t e^{3t}\cos 3t\,dt=e^{-3t}-2e^{-3t}\sin 3t+\int_0^t e^{3t}\cos 3t\,dt$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{e^{-3t}-2e^{-3t}\sin 3t+\int_0^t e^{3t}\cos 3t\,dt\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}-2\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\sin 3t\right\}+\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{3t}\cos 3t\,dt\right\}= \tag{3.18}$$

$$=\frac{1}{(s+3)}-2\frac{3}{(s+3)^2+3^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{s-3}{(s-3)^2+3^2}=\frac{1}{(s+3)}-\frac{6}{s^2+6s+18}+\frac{s-3}{s^3-6s^2+18s}$$

Příklad číslo: 16	Zadání: $f(t)=2-3te^{-2t}+4t^2e^{3t}$	Výsledek $\frac{2}{s}-\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{8}{(s-3)^3}$

Řešení:

$$f(t)=2-3te^{-2t}+4t^2e^{3t}$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=2\frac{1}{s}-3\frac{1}{(s+2)^2}+4\frac{2!}{(s-3)^3}=\frac{2}{s}-\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{8}{(s-3)^3} \tag{3.19}$$

Příklad číslo: 17	Zadání: $f(t)=2\cos 2t+4\cos 3t$	Výsledek $\frac{2s^3+12s^2+18s+48}{s^4+13s^2+36}$

Řešení:

$$f(t) = 2\cos 2t + 4\cos 3t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{s}{s^2+2^2} + 4\frac{3}{s^2+3^2} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9} = \frac{2s(s^2+9)+12(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+9)} = \tag{3.20}$$

$$= \frac{2s^3+12s^2+18s+48}{s^4+13s^3+36}$$

Příklad číslo: 18	Zadání: $f(t) = 2t^3 - 2\sin 3t + 4te^{-2t}$	Výsledek $\frac{12}{s^4} - \frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{(s+2)^2}$

Řešení:

$$f(t) = 2t^3 - 2\sin 3t + 4te^{-2t}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{3!}{s^4} - 2\frac{3}{s^2+3^2} + 4\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{12}{s^4} - \frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{(s+2)^2} \tag{3.21}$$

Příklad číslo: 19	Zadání: $f(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} - 2\sin 4t$	Výsledek $\frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{8}{s^2+16}$

Řešení:

$$f(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} - 2\sin 4t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 4\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - 2\frac{4}{s^2+4^2} = \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{8}{s^2+16} \tag{3.22}$$

Příklad číslo: 20	Zadání: $f(t) = 2t(\sin 2t + \cos 3t)$	Výsledek $\frac{4s}{(s^2+4)^2} + \frac{2s^2-18}{(s^2+9)^2}$

Řešení:

$$f(t) = 2t(\sin 2t + \cos 3t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{2s}{(s^2+2^2)^2} + 2\frac{s^2-9}{(s^2+3^2)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2} + \frac{2s^2-18}{(s^2+9)^2} \tag{3.23}$$

Příklad číslo: 21	Zadání: $f(t) = 2e^{2t}(t^3+5t-2)$	Výsledek $\frac{12}{(s-2)^4} + \frac{10}{(s-2)^2} - \frac{4}{s-2}$

Řešení:

$$f(t) = 2e^{2t}\left(t^3 + 5t - 2\right) = t^3 e^{2t} + 10te^{2t} - 4e^{2t}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 2\frac{3!}{(s-2)^4} + 10\frac{1}{(s-2)^2} - 4\frac{1}{s-2} = \frac{12}{(s-2)^4} + \frac{10}{(s-2)^2} - \frac{4}{s-2} \tag{3.24}$$

Příklad číslo: 22	Zadání: $f(t) = \left(t^2+4\right)e^{-2t} - e^{-t}\cos t$	Výsledek $\frac{2}{(s+2)^3} + \frac{4}{s+2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

Řešení:

$$f(t) = \left(t^2+4\right)e^{-2t} - e^{-t}\cos t = t^2e^{-2t} + 4e^{-2t} - e^{-t}\cos t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{2!}{(s+2)^3} + 4\frac{1}{s+2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \tag{3.25}$$

Příklad číslo: 23	Zadání: $f(t) = 3e^{-2t}\sin 5t$	Výsledek $\frac{15}{s^2+4s+29}$

Řešení:

$$f(t) = 3e^{-2t}\sin 5t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 3\frac{5}{(s+2)^2+5^2} = \frac{15}{(s+2)^2+25} = \frac{15}{s^2+4s+29} \tag{3.26}$$

Příklad číslo: 24	Zadání: $f(t) = 2e^{-2t}\left(2\sin 3t + 4\cos 2t\right)$	Výsledek $\frac{12}{s^2+4s+13} + \frac{8s+16}{s^2+4s+9}$

Řešení:

$$f(t) = 2e^{-2t}\left(2\sin 3t + 4\cos 2t\right) = 4e^{-2t}\sin 3t + 8e^{-2t}\cos 2t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 4\frac{3}{(s+2)^2+3^2} + 8\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} = \frac{12}{(s+2)^2+9} + \frac{8s+16}{(s+2)^2+4} = \tag{3.27}$$

$$= \frac{12}{s^2+4s+13} + \frac{8s+16}{s^2+4s+9}$$

Příklad číslo: 25	Zadání: $f(t) = 2te^{2t}\sin 3t + te^{-3t}\cos 2t$	Výsledek $\frac{12(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} + \frac{(s+3)^2-4}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$

Řešení:

$$f(t) = 2te^{2t}\sin 3t + te^{-3t}\cos 2t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = -2\left(\frac{3}{(s-2)^2+3^2}\right)' - \left(\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right)' =$$

$$= -2\frac{0.\left((s-2)^2+3^2\right)-3.(2s-4)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} - \frac{1.\left((s+3)^2+4\right)-(s+3)(2s+6)}{\left[(s+3)^2+4\right]^2} = \tag{3.28}$$

$$\frac{2.3.2(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} - \frac{s^2+6s+9+4-\left(2s^2+12s+18\right)}{\left[(s+3)^2+4\right]^2} = \frac{12(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} + \frac{s^2+6s+5}{\left[(s+3)^2+4\right]^2} =$$

$$= \frac{12(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]^2} + \frac{(s+3)^2-4}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

Pozn.:

Dosažený výsledek si můžeme dovolit zobecnit a dostaneme následující předpis:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{te^{at}\sin\omega t\right\} = \frac{2\omega(s-a)}{\left[(s-a)^2+\omega^2\right]^2}$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{te^{at}\cos\omega t\right\} = \frac{(s-a)^2-\omega^2}{\left[(s-a)^2+\omega^2\right]^2} \tag{3.29}$$

Příklad číslo: 26	Zadání: $f(t) = 2t' + 3t, \quad t(0) = 4$	Výsledek $2sF(s) - 8$

Řešení:

$$f(t) = 2t' + 3t,\ t(0) = 4$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\left(sF(s)-4\right) = 2sF(s) - 8 \tag{3.30}$$

Příklad číslo: 27	Zadání: $f(t) = t'' - 3t' + 4t, \quad t(0) = 1, t'(0) = 2$	Výsledek $F(s)\left(s^2-3s+4\right) - s + 1$

Řešení:

$$f(t) = t'' - 3t' + 4t, \quad t(0) = 1, t'(0) = 2$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s^2F(s) - s - 2 - 3\left(sF(s)-1\right) + 4F(s) = F(s)\left(s^2-3s+4\right) - s + 1 \tag{3.31}$$

Příklad číslo: 28	Zadání: $f(t) = t''' + 2t'' - 3t' + 2t, \quad t(0) = -1, t'(0) = 2, t'(0) = -3$	Výsledek $F(s)\left(s^3+2s^2-3s+2\right) - s^2 - 4$

Řešení:

$$\begin{aligned} & f(t) = t''' + 2t'' - 3t' + 2t, \quad t(0) = -1, t'(0) = 2, t''(0) = -3 \\ & \mathcal{L}\{f(t)\} = s^3F(s) + s^2 - 2s + 3 + 2\left(s^2F(s) + s - 2\right) - 3\left(sF(s) + 1\right) + 2F(s) = \\ & = F(s)\left(s^3 + 2s^2 - 3s + 2\right) + s^2 - 4 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Příklad číslo: 29	Zadání: $f(t) = 2t' + 3\int_0^t f(\tau)\,d\tau, \quad t(0) = 2$	Výsledek $F(s)\left(2s + \frac{3}{s}\right) - 4$

Řešení:

$$\begin{aligned} & f(t) = 2t' + 3\int_0^t f(\tau)\,d\tau, \quad t(0) = 2 \\ & \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\left(sF(s) - 2\right) + 3\frac{1}{s}F(s) = F(s)\left(2s + \frac{3}{s}\right) - 4 \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.1.1 Příklady na obraz impulsu

Příklad číslo: 30	Zadání: $f(t) = \left\langle \begin{matrix} 3 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 < t \end{matrix} \right.$	Výsledek $F(s) = \frac{3}{s}\left(1 - e^{-s}\right)$

Řešení:

$$f(t) = \left\langle \begin{matrix} 3 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 < t \end{matrix} \right. \tag{3.34}$$

Podle definice LT můžeme psát, že

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^1 3e^{-st}dt = \left[-\frac{3e^{-st}}{s}\right]_0^1 = \frac{3}{s}\left(1 - e^{-s}\right) \tag{3.35}$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu. Platí, že $f(t) = 3\left[H(t) - H(t-1)\right]$, použijeme-li vztah $\mathcal{L}\{3\} = \frac{3}{s}$ a větu o translaci $f(t-a)H(t-a) \triangleq e^{-as}F(s)$ můžeme si dovolit psát, že

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{3H(t) - 3H(t-1)\} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-s} = \frac{3}{s}\left(1 - e^{-s}\right) \tag{3.36}$$

Příklad číslo: 31	Zadání: $f(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le 3\\ 0 & 3<t\end{cases}$	Výsledek $F(s)=2\left[\frac{1}{s^2}-\frac{3e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s^2}\right]$

Řešení:

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le 3\\ 0 & 3<t\end{cases} \tag{3.37}$$

Podle definice LT můžeme psát, že

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^3 2te^{-st}dt\left\|\begin{bmatrix}u=2t & u'=2\\ v'=e^{-st} & v=-\frac{e^{-st}}{s}\end{bmatrix}\right\|=\\ &=\left[-\frac{2te^{-st}}{s}\right]_0^3+\int_0^3\frac{2e^{-st}}{s}dt=\left[-\frac{2te^{-st}}{s}\right]_0^3+\left[-\frac{2e^{-st}}{s^2}\right]_0^3=2\left[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^3=2\left[-\frac{3e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s^2}+\frac{0}{s}+\frac{1}{s^2}\right]=\\ &=2\left[\frac{1}{s^2}-\frac{3e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s^2}\right]\end{aligned} \tag{3.38}$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu. Platí, že

$$\begin{aligned}f(t)&=2t\left[H(t)-H(t-3)\right]=2tH(t)-2\left[(t-3)+3\right]H(t-3)=\\ &=2tH(t)-2(t-3)H(t-3)-6H(t-3)\end{aligned} \tag{3.39}$$

odtud plyne, že

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2}e^{-3s}-\frac{6}{s}e^{-3s}=2\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s^2}-\frac{3e^{-3s}}{s}\right] \tag{3.40}$$

V dalších úlohách budeme hledat obraz impulsu pomocí věty o translaci. Přímý výpočet z definice využívá integračních metod, především per partes, které nejsou předmětem procvičení v této práci.

Příklad číslo: 32	Zadání: $f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le 1\\ 2e^{-3t} & 1<t\le 4\\ 0 & t>4\end{cases}$	Výsledek $F(s)=\frac{2}{s+3}\left(e^{-s-3}-e^{-4s-12}\right)$

Řešení:

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le 1\\ 2e^{-3t} & 1<t\le 4\\ 0 & t>4\end{cases} \tag{3.41}$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu. Platí, že

$$f(t)=2e^{-3t}\left[H(t-1)-H(t-4)\right]=2e^{-3(t-1)-3}H(t-1)-2e^{-3(t-4)-12}H(t-4)= \\ =2e^{-3}e^{-3(t-1)}H(t-1)-2e^{-12}e^{-3(t-4)}H(t-4) \tag{3.42}$$

odtud plyne, že

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-s}\frac{2e^{-3}}{s+3}-e^{-4s}\frac{2e^{-12}}{s+3}=\frac{2}{s+3}\left(e^{-s-3}-e^{-4s-12}\right) \tag{3.43}$$

Příklad číslo: 33	Zadání: $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & t>\frac{\pi}{2}\end{cases}$	Výsledek $F(s)=\frac{1}{s^2+1}\left(1-se^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$

Řešení:

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & t>\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{3.44}$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu. Platí, že

$$f(t)=\sin t\left[H(t)-H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]=(\sin t)H(t)-\sin\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.45}$$

odtud plyne, že

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}\left(1-se^{-\frac{\pi}{2}s}\right) \tag{3.46}$$

Příklad číslo: 34	Zadání: $f(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 1 & 1<t\le 2\\ 3-t & 2<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}$	Výsledek $F(s)=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}\right)$

Řešení:

$$f(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 1 & 1<t\le 2\\ 3-t & 2<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases} \tag{3.47}$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu. Platí, že

$$\begin{aligned}
&f(t)=t\left[H(t)-H(t-1)\right]+1\left[H(t-1)-H(t-2)\right]+(3-t)\left[H(t-2)-H(t-3)\right]= \\
&=tH(t)-\left[(t-1)+1\right]H(t-1)+H(t-1)-H(t-2)+3H(t-2)-3H(t-3)-\left[(t-2)+2\right]H(t-2)+ \\
&+\left[(t-3)+3\right]H(t-3)=tH(t)-(t-1)H(t-1)-H(t-1)+H(t-1)-H(t-2)+3H(t-2)-3H(t-3)- \\
&-(t-2)H(t-2)-2H(t-2)+(t-3)H(t-3)+3H(t-3)=tH(t)-(t-1)H(t-1)-(t-2)H(t-2)+ \\
&+(t-3)H(t-3)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

odtud plyne, že

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^2}=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}\right) \tag{3.49}$$

3.2 Příklady na zpětnou Laplaceovu transformaci

Příklady: Rozložte funkci na parciální zlomky a pomocí základních vztahů transformace a s využitím uvedených obrazů některých funkcí určete předmět $f(t)$ k obrazu $F(s)$.

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
35	$F(s)=\frac{5}{s^2+9}$	$f(t)=\frac{5}{3}\sin 3t$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&F(s)=\frac{5}{s^2+9} \\
&f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3}\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=\frac{5}{3}\sin 3t
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
36	$F(s)=\frac{3}{(s+3)^3}$	$f(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}t^2$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&F(s)=\frac{3}{(s+3)^3} \\
&f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+3)^3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\frac{2!}{(s+3)^3}\right\}=\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(s+3)^3}\right\}=\frac{3}{2}e^{-3t}t^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
37	$F(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$	$f(t)=\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$$
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t \tag{3.52}$$

Příklad číslo: 38	Zadání: $F(s)=\frac{5s-31}{s^2-8s+15}$	Výsledek $f(t)=8e^{3t}-3e^{5t}$

Řešení:

Příklad (dva různé reálné kořeny)

$$F(s)=\frac{5s-31}{s^2-8s+15} \tag{3.53}$$

Jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů:

$$D=b^2-4ac=64-4.15=4$$
$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{8\pm 2}{2}=\left\langle\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right. \tag{3.54}$$

Rozklad přenosové funkce na parciální zlomky je:

$$F(s)=\frac{5s-31}{s^2-8s+15}=\frac{5s-31}{(s-3)(s-5)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s-5} \tag{3.55}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $(s-3)(s-5)$ a dostaneme:

$$5s-31=A(s-5)+B(s-3) \tag{3.56}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele a dostáváme pro:

$$\begin{aligned} s=3 \quad & 5.3-31=A(3-5)+B(3-3)\\ & -16=-2A\Rightarrow A=8\\ s=5 \quad & 5.5-31=A(5-5)+B(5-3)\\ & -6=2B\Rightarrow B=-3 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{5s-31}{s^2-8s+15}=\frac{8}{s-3}-\frac{3}{s-5} \tag{3.58}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}=8e^{3t}-3e^{5t} \tag{3.59}$$

Příklad číslo: 39	Zadání: $F(s)=\dfrac{s^2+3s-4}{s^3-s^2-2s}$	Výsledek $f(t)=2+e^{2t}-2e^{-t}$

Řešení:

Příklad (tři různé reálné kořeny)

$$F(s)=\frac{s^2+3s-4}{s^3-s^2-2s} \tag{3.60}$$

vytkneme faktor s a jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů:

$$\begin{gathered} s^3-s^2-2s=s\left(s^2-s-2\right) \\ D=b^2-4ac=1-4.(-2)=9 \\ s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{array}{l}2\\-1\end{array}\right. \end{gathered} \tag{3.61}$$

Rozklad přenosové funkce na parciální zlomky je:

$$F(s)=\frac{s^2+3s-4}{s^3-s^2-2s}=\frac{s^2+3s-4}{s(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+1} \tag{3.62}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $s(s-2)(s+1)$ a dostaneme:

$$s^2+3s-4=A(s-2)(s+1)+Bs(s+1)+Cs(s-2) \tag{3.63}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele a dostáváme pro:

$$\begin{aligned} s=0: &\quad -4=A(-2).1\Rightarrow A=8 \\ s=2: &\quad 4+6-4=B(2).(3)\Rightarrow B=1 \\ s=-1: &\quad 1-3-4=C(-1)(-3)\Rightarrow C=-2 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{s^2+3s-4}{s^3-s^2-2s}=\frac{s^2+3s-4}{s(s-2)(s+1)}=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-2}-\frac{2}{s+1} \tag{3.65}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=2+e^{2t}-2e^{-t} \tag{3.66}$$

Příklad číslo: 40	Zadání: $F(s)=\dfrac{s^2+5s-4}{s^3-4s^2}$	Výsledek $f(t)=t-1+2e^{4t}$

Řešení:

Příklad (jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný kořen)

$$F(s)=\frac{s^2+5s-4}{s^3-4s^2} \tag{3.67}$$

jmenovatel rozložíme do tvaru:

$$s^3-4s^2=s^2(s-4) \tag{3.68}$$

Rozklad přenosové funkce na parciální zlomky je:

$$F(s)=\frac{s^2+5s-4}{s^3-4s^2}=\frac{s^2+5s-4}{s^2(s-4)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-4} \tag{3.69}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $s^2(s-4)$ a dostaneme:

$$s^2+5s-4=A(s-4)+Bs(s-4)+Cs^2 \tag{3.70}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele (zde máme pouze dva různé, proto třetí číslo musíme zvolit, např. $s=2$) a dostáváme pro:

$$\begin{aligned}
&s=0: \quad -4=A(-4)\Rightarrow A=1\\
&s=4: \quad 16+20-4=C(16)\Rightarrow C=2\\
&s=2: \quad 4+10-4=A(-2)+B.2(-2)+C.4=-2-4B+8=-4B+6\Rightarrow B=-1
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{s^2+5s-4}{s^3-4s^2}=\frac{s^2+5s-4}{s^2(s-4)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-4} \tag{3.72}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=t-1+2e^{4t} \tag{3.73}$$

Příklad číslo: 41	Zadání: $F(s)=\dfrac{3s^3-10s^2+8s-2}{s^4-3s^3+3s^2-s}$	Výsledek $f(t)=2-t^2e^t-2te^t+e^t$

Řešení:

Příklad (jeden jednoduchý a jeden trojnásobný kořen)

$$F(s)=\frac{3s^3-10s^2+8s-2}{s^4-3s^3+3s^2-s} \tag{3.74}$$

jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, nejprve vytkneme faktor s a poté použijeme binomický vzorec $(a-b)^3$. Pokud bychom ve výrazu neviděli vzorec museli bychom použít Hornerovo schéma pro rozklad polynomu.

$$\begin{gathered}s^4-3s^3+3s^2-s=s\left(s^3-3s^2+3s-1\right)=s\left(s-1\right)^3\\ F(s)=\frac{3s^3-10s^2+8s-2}{s^4-3s^3+3s^2-s}=\frac{3s^3-10s^2+8s-2}{s\left(s-1\right)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{\left(s-1\right)^3}+\frac{C}{\left(s-1\right)^2}+\frac{D}{s-1}\end{gathered} \tag{3.75}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $s\left(s-1\right)^3$ a dostaneme:

$$3s^3-10s^2+8s-2=A\left(s-1\right)^3+Bs+Cs\left(s-1\right)+Ds\left(s-1\right)^2 \tag{3.76}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele (zde máme pouze dva různé, proto musíme dvě čísla zvolit, např. $s=2,\ s=3$) a dostáváme pro:

$$\begin{aligned}
s=0&: \quad -2=A\left(-1\right)^3\Rightarrow A=2\\
s=1&: \quad 3-10+8-2=B\Rightarrow B=-1\\
&\quad 24-40+16-2=A\left(1\right)^3+B.2+C.2+D.2\\
s=2&: \quad -2=2-2+2C+2D\\
&\quad -2=2C+2D\\
&\quad 81-90+24-2=8A+3B+6C+12D\\
s=3&: \quad 13=16-3+6C+12D\\
&\quad 0=6C+12D
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Nyní musíme řešit rovnici o dvou neznámých abychom dostali neznámé koeficienty C,D:

$$\begin{array}{l}
-2=2C+2D/:2\\
\underline{\ 0=6C+12D\ }\\
-1=C+D\\
\underline{0=6C+12D\Rightarrow C=-2D=-2}\\
-1=-2D+D\Rightarrow D=1
\end{array} \tag{3.78}$$

Pouze pro ilustraci si můžeme dovolit použit i jinou metodu získání neznámých koeficientů u rozkladu. Pokud roznásobíme rovnici (3.76) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$3s^3-10s^2+8s-2=A(s-1)^3+Bs+Cs(s-1)+Ds(s-1)^2$$
$$3s^3-10s^2+8s-2=A\left(s^3-3s^2+3s-1\right)+Bs+Cs^2-Cs+Ds^3-2Ds^2+Ds \tag{3.79}$$
$$3s^3-10s^2+8s-2=s^3(A+D)+s^2(-3A+C-2D)+s(3A+B-C+D)+(-A)$$

$$\begin{aligned} s^3 &: \quad 3=A+D \Rightarrow D=3-A=1 \\ s^2 &: \quad -10=-3A+C-2D \Rightarrow -10=-6+C-2 \Rightarrow C=-2 \\ s^1 &: \quad 8=3A+B-C+2D \Rightarrow 8=6+B+2+1 \Rightarrow B=-1 \\ s^0 &: \quad -2=-A \Rightarrow A=2 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte.

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{3s^3-10s^2+8s-2}{s^4-3s^3+3s^2-s}=\frac{3s^3-10s^2+8s-2}{s(s-1)^3}=\frac{2}{s}-\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1} \tag{3.81}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}=2-t^2e^t-2te^t+e^t \tag{3.82}$$

Příklad číslo: 42	Zadání: $F(s)=\dfrac{5s^2-6s+7}{s^3-1}$	Výsledek $f(t)=2e^t+\dfrac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(13\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-3\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

Řešení:

Příklad (jeden reálný a dva komplexní kořeny)

$$F(s)=\frac{5s^2-6s+7}{s^3-1} \tag{3.83}$$

jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, budeme muset použít Hornerovo schéma. Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelná čísla $a_n=-1$ tedy $a_n=\pm1$. Postupujeme od menších čísel k větším.

$$\begin{array}{r|cccc} & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3\neq 0 \end{array} \tag{3.84}$$

Kořenem je tedy číslo 1. Z třetího řádku rozkladu vyplývá, že číslo 1 je jednoduchým kořenem. Koeficienty ve třetím řádku nám pak dávají zbytek polynomu po vytknutí faktoru $s-1$

$$s^3-1=(s-1)\left(s^2+s+1\right) \tag{3.85}$$

Polynom $\left(s^2+s+1\right)$ obsahuje komplexní kořeny a nebudeme ho dále rozkládat.

$$D=b^2-4ac=1-4=-3<0$$
$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\left\langle\begin{matrix}\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right. \tag{3.86}$$

Rozklad na parciální zlomky je

$$F(s)=\frac{5s^2-6s-7}{s^3-1}=\frac{5s^2-6s-7}{(s-1)\left(s^2+s+1\right)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1} \tag{3.87}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $(s-1)\left(s^2+s+1\right)$ a dostaneme

$$5s^2-6s+7=A\left(s^2+s+1\right)+(Bs+C)(s-1) \tag{3.88}$$

Do této rovnice postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele (v tomto případě máme pouze jeden, proto musíme dvě čísla zvolit, např. $s=0, s=2$) a dostáváme pro:

$$\begin{aligned}
s=1:&\quad 5-6+7=A.3+(B+C).0\Rightarrow A=2\\
s=0:&\quad 7=A+C(-1)\Rightarrow C=-5\\
&\quad 20-12+7=A(4+2+1)+(2B+C).1\\
s=2:&\quad 15=7A+2B+C\\
&\quad 15=14-2B-5\Rightarrow B=3
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Pouze pro ilustraci si můžeme dovolit použit i jinou metodu získání neznámých koeficientů u rozkladu. Pokud roznásobíme rovnici (3.88) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned}
5s^2-6s+7&=As^2+As+A+Bs^2-Bs+Cs-C\\
5s^2-6s+7&=s^2(A+B)+s(A-B+C)+(A-C)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
s^2:&\quad 5=A+B\\
s^1:&\quad -6=A-B+C\\
s^0:&\quad 7=A-C
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Musíme řešit soustavu rovnic o třech neznámých. Pro výpočet použijeme např. Cramerovo pravidlo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{S}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5+7-6}{1+1+1} = 2 \\ B &= \frac{\det \mathbb{B}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6+5-7+5}{3} = 3 \\ C &= \frac{\det \mathbb{C}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7-6+5-7}{3} = -5 \end{aligned} \right. \tag{3.92}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte.

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s) = \frac{5s^2-6s-7}{s^3-1} = \frac{5s^2-6s-7}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{3s-5}{s^2+s+1} \tag{3.93}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-5}{s^2+s+1}\right\} \tag{3.94}$$

První výraz najdeme ve slovníku LT, ale druhý výraz budeme muset nejprve upravit. Jmenovatel musíme upravit na čtverec a do čitatele potřebujeme dostat lineární faktor ze jmenovatele.

$$\begin{aligned} \frac{3s-5}{s^2+s+1} &= \frac{3s-5}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{3\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}-5}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{13}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= 3\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{13}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{13}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.95}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-5}{s^2+s+1}\right\}=$$

$$=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}+\frac{13}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}= \tag{3.96}$$

$$=2e^t-3e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{13}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=2e^t+\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(13\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-3\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Příklad číslo: 43	Zadání: $F(s)=\dfrac{9s^2-95s+144}{s^3-11s^2+24s}$	Výsledek $f(t)=6+4e^{3t}-e^{8t}$

Řešení:

Příklad (tři různé reálné kořeny)

$$F(s)=\frac{9s^2-95s+144}{s^3-11s^2+24s} \tag{3.97}$$

vytkneme faktor s a jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů

$$s^3-11s^2+24s=s\left(s^2-11s-24\right)$$

$$D=b^2-4ac=121-4.24=25 \tag{3.98}$$

$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{11\pm5}{2}=\begin{cases}8\\3\end{cases}$$

Rozklad na parciální zlomky je:

$$F(s)=\frac{9s^2-95s+144}{s^3-11s^2+24s}=\frac{9s^2-95s+144}{s(s-8)(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{s-8} \tag{3.99}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $s(s-8)(s-3)$ a dostaneme:

$$9s^2-95s+144=A(s-3)(s-8)+Bs(s-8)+Cs(s-3) \tag{3.100}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele a dostáváme pro:

$$\begin{aligned}
s=0:&\quad 144=A(24)\Rightarrow A=6\\
s=3:&\quad 81-285+144=A.0+B(-15)+C.0\Rightarrow B=4\\
s=8:&\quad 576-760+144=A.0+B.0+C.8.5\Rightarrow C=-1
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{9s^2-95s+144}{s^3-11s^2+24s}=\frac{9s^2-95s+144}{s(s-8)(s-3)}=\frac{6}{s}+\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s-8} \tag{3.102}$$

Vytkneme konstanty před zlomky abychom obdrželi základní tvary,které snadno najdeme ve slovníku. U prvního výrazu získáme konstantu a poté dvě exponenciály, kde $a=3, a=8$. Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}=6+4e^{3t}-e^{8t} \tag{3.103}$$

Příklad číslo: 44	Zadání: $F(s)=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{3s-5}+\frac{3}{s^5}$	Výsledek $f(t)=4e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}t}+\frac{3}{24}t^4$

Řešení:

$$F(s)=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{3s-5}+\frac{3}{s^5} \tag{3.104}$$

jednotlivé zlomky musíme upravit do tvaru, které nalezneme ve slovníku.

$$F(s)=4\frac{1}{s-(-2)}-\frac{2}{3}\frac{1}{s-\frac{5}{3}}+\frac{3\frac{4!}{4!}}{s^{4+1}}=4\frac{1}{s-(-2)}-\frac{2}{3}\frac{1}{s-\frac{5}{3}}+\frac{3}{4!}\frac{4!}{s^{4+1}} \tag{3.105}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\}-\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{5}{3}}\right\}+\frac{3}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^{4+1}}\right\}=4e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}t}+\frac{3}{24}t^4 \tag{3.106}$$

Příklad číslo: 45	Zadání: $F(s)=\frac{4s-2}{s^2+25}$	Výsledek $f(t)=4\cos 5t-\frac{2}{5}\sin 5t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{4s-2}{s^2+25} \tag{3.107}$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, podle jmenovatele je vidět, že originál bude goniometrická funkce, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem:

$$F(s)=\frac{4s-2}{s^2+25}=\frac{4s}{s^2+5^2}-\frac{2}{s^2+5^2}=4\frac{s}{s^2+5^2}-\frac{2\frac{5}{5}}{s^2+5^2}=4\frac{s}{s^2+5^2}-\frac{2}{5}\frac{5}{s^2+5^2} \tag{3.108}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}-\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+5}\right\}=4\cos 5t-\frac{2}{5}\sin 5t \qquad (3.109)$$

Příklad číslo: 46	Zadání: $F(s)=\frac{5}{4s^2+12}+\frac{3}{s^2-16}$	Výsledek $f(t)=\frac{5}{4\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t-\frac{3}{4}\sinh 4t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{5}{4s^2+12}+\frac{3}{s^2-16} \qquad (3.110)$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, podle jmenovatele je vidět, že originál bude goniometrická funkce, zlomky upravíme následujícím způsobem a dostaneme:

$$F(s)=\frac{5}{4s^2+12}+\frac{3}{s^2-16}=\frac{1}{4}\frac{5}{s^2+3}+\frac{3}{s^2-16}=\frac{5}{4}\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+3\frac{\frac{4}{4}}{s^2-(4)^2}=\frac{5}{4\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{3}{4}\frac{4}{s^2-(4)^2} \qquad (3.111)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{5}{4\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right\}+\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-(4)^2}\right\}=\frac{5}{4\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t-\frac{3}{4}\sinh 4t \qquad (3.112)$$

Příklad číslo: 47	Zadání: $F(s)=\frac{3s+4}{s^2+5}$	Výsledek $f(t)=3\cos\sqrt{5}t-\frac{4}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{3s+4}{s^2+5} \qquad (3.113)$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, podle jmenovatele je vidět, že originál bude goniometrická funkce, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem:

$$F(s)=\frac{3s+4}{s^2+5}=\frac{3s+4}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=3\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+4\frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=3\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \qquad (3.114)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\right\}+\frac{4}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\right\}=3\cos\sqrt{5}t-\frac{4}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t \qquad (3.115)$$

Ne vždy dostaneme mocninu nějakého čísla jako v předcházejících příkladech.

Příklad číslo: 48	Zadání: $F(s)=\dfrac{2-4s}{s^2+6s+12}$	Výsledek $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-3t}\left[7\sin\sqrt{3}t-2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\right]$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2-4s}{s^2+6s+12} \tag{3.116}$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, podle jmenovatele je vidět, že originál bude goniometrická funkce násobená exponenciálou, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem, jmenovatel upravíme na čtverec:

$$F(s)=\frac{2-4s}{s^2+6s+12}=\frac{2-4s}{s^2+6s+9-9+12}=\frac{2-4s}{(s+3)^2+3} \tag{3.117}$$

nyní potřebujeme upravit čitatele abychom dostali tvar $s-a$, tj. $s+3$.

$$F(s)=\frac{2-4s}{(s+3)^2+3}=\frac{2-4(s+3-3)}{(s+3)^2+3}=\frac{2-4(s+3)+12}{(s+3)^2+3}=\frac{14-4(s+3)}{(s+3)^2+3} \tag{3.118}$$

Zlomek rozdělíme a upravíme abychom dostali v čitateli ω:

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{14-4(s+3)}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{14}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{4(s+3)}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=14\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-4\frac{(s+3)}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\\&=\frac{14}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-4\frac{(s+3)}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{14}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right\}=\frac{14}{\sqrt{3}}e^{-3t}\sin\sqrt{3}t-4e^{-3t}\cos\sqrt{3}t=\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-3t}\left[7\sin\sqrt{3}t-2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\right]\end{aligned} \tag{3.120}$$

Příklad číslo: 49	Zadání: $F(s)=\dfrac{4s-3}{2s^2-6s-4}$	Výsledek $f(t)=\dfrac{e^{\frac{3}{2}t}}{\sqrt{17}}\left[2\sqrt{17}\cosh\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}t\right)+3\sinh\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}t\right)\right]$

Řešení:

$$F(s)=\frac{4s-3}{2s^2-6s-4} \tag{3.121}$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, podle jmenovatele je vidět, že originál bude goniometrická funkce násobená exponenciálou, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem, jmenovatel upravíme na čtverec.

$$F(s)=\frac{4s-3}{2s^2-6s-4}=\frac{4s-3}{2(s^2-3s-2)}=\frac{4s-3}{2\left(s^2-3s+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-2\right)}=\frac{1}{2}\frac{4s-3}{\left(s^2-3s+\frac{9}{4}-\frac{17}{4}\right)}=\frac{1}{2}\frac{4s-3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}} \tag{3.122}$$

nyní potřebujeme upravit čitatele abychom dostali tvar $s-a$, tj. $s-\frac{3}{2}$.

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{4s-3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4\left(s-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)-3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4\left(s-\frac{3}{2}\right)+6-3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4\left(s-\frac{3}{2}\right)+3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}} \tag{3.123}$$

Zlomek rozdělíme a upravíme abychom dostali v čitateli ω:

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{2}\frac{4\left(s-\frac{3}{2}\right)+3}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}=2\frac{\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}+\frac{3}{2}\frac{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}=\\&=2\frac{\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}+\frac{3}{\sqrt{17}}\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}\right\}+\frac{3}{\sqrt{17}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}\right\}=\\&=2e^{\frac{3}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)+\frac{3}{\sqrt{17}}e^{\frac{3}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}t}}{\sqrt{17}}\left[2\sqrt{17}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)+3\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)\right]\end{aligned} \tag{3.125}$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
50	$F(s)=\frac{4s^2-13s-47}{s^3-13s-12}$	$f(t)=3e^{-t}+2e^{-3t}-e^{4t}$

Řešení:

Příklad (tři různé reálné kořeny)

$$F(s)=\frac{4s^2-13s-47}{s^3-13s-12} \tag{3.126}$$

jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, budeme muset použít Hornerovo schéma. Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelná čísla $a_n=-1$ tedy $a_n=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$. Postupujeme od menších čísel k větším.

$$\begin{array}{r|cccc} & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\ & 1 & 0 & -13 & -12 \\ 1 & 1 & 1 & -12 & -24 \neq 0 \\ -1 & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array} \tag{3.127}$$

Jednonásobným kořenem je tedy číslo -1. Koeficienty ve třetím řádku nám pak dávají zbytek polynomu po vytknutí faktoru $s+1$:

$$s^3-13s-12=(s+1)\left(s^2-s-12\right) \tag{3.128}$$

Ještě musíme určit kořeny polynomu $\left(s^2-s-12\right)$, vypočteme diskriminant a určíme kořeny:

$$\begin{aligned} D &= b^2-4ac=1+48=49>0 \\ s_{1,2} &= \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 7}{2}=\left\langle \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix} \right. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Rozklad na parciální zlomky je:

$$F(s)=\frac{4s^2-13s-47}{s^3-13s-12}=\frac{4s^2-13s-47}{(s+1)\left(s^2-s-12\right)}=\frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s+3)(s-4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s-4} \tag{3.130}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $(s+1)(s+3)(s-4)$ a dostaneme:

$$4s^2-13s-47=A(s+3)(s-4)+B(s+1)(s-4)+C(s+1)(s+3) \tag{3.131}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele a dostáváme pro:

$$\begin{aligned} s=-1&: \quad 4+13-47=A.(-2)(-5)\Rightarrow A=3 \\ s=-3&: \quad 36+39-47=B(-2)(-7)\Rightarrow B=2 \\ s=4&: \quad 64-52-47=C.5.7\Rightarrow C=-1 \end{aligned} \tag{3.132}$$

klidně si můžeme dovolit dosadit číslo, které není kořenem, třeba číslo 1 (a dostaneme stejný výsledek):

$$s=1: \quad \begin{aligned} 4-13-47&=A(4)(-3)+B(2)(-3)+C.2.4 \\ -56=-12A-6B+6C&=-36-12+8C\Rightarrow C=-1 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Pouze pro ilustraci si můžeme dovolit použit i jinou metodu získání neznámých koeficientů u rozkladu. Pokud roznásobíme rovnici (3.131) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned} 4s^2-13s-47&=As^2-As-12A+Bs^2-3Bs-4B+Cs^2+4Cs+3C \\ 4s^2-13s-47&=s^2(A+B+C)+s(-A-3B+4C)+(-12A-4B+3C) \end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned} s^2&: \quad 4=A+B+C \\ s^1&: \quad -13=-A-3B+4C \\ s^0&: \quad -47=-12A-4B+3C \end{aligned} \tag{3.135}$$

Musíme řešit soustavu rovnic o třech neznámých. Pro výpočet použijeme např. Cramerovo pravidlo:

$$\left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -12 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{S}}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -47 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -13 & -3 & 4 \\ -47 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -12 & -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-210}{-70} = 3 \\ B &= \frac{\det \mathbb{B}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -13 & 4 \\ -12 & -47 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -12 & -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-140}{-70} = 2 \\ C &= \frac{\det \mathbb{C}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -13 \\ -12 & -4 & -47 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -12 & -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{70}{-70} = -1 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Zakrývací metoda:

$$\begin{aligned} A &= \left[(s+1)\frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s+3)(s-4)}\right]_{s=-1} = \frac{4+13-47}{(2)(-5)} = \frac{-30}{-10} = 3 \\ B &= \left[(s+3)\frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s+3)(s-4)}\right]_{s=-3} = \frac{36+39-47}{(-2)(-7)} = \frac{28}{14} = 2 \\ C &= \left[(s-4)\frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s+3)(s-4)}\right]_{s=4} = \frac{64-52-47}{5.7} = \frac{-35}{35} = -1 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se likloníte. Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s) = \frac{4s^2-13s-47}{s^3-13s-12} = \frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s^2-s-12)} = \frac{4s^2-13s-47}{(s+1)(s+3)(s-4)} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s-4} \tag{3.138}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=3e^{-t}+2e^{-3t}-e^{4t} \tag{3.139}$$

Příklad číslo: 51	Zadání: $F(s)=\dfrac{-s^2-8s+9}{s^3+2s^2+3s+6}$	Výsledek $f(t)=3e^{-2t}-4\cos\sqrt{3}t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{-s^2-8s+9}{s^3+2s^2+3s+6} \tag{3.140}$$

jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, budeme muset použít Hornerovo schéma. Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelná čísla $a_n=-1$ tedy $a_n=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Postupujeme od menších čísel k větším.

$$\begin{array}{r|cccc} & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\ & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 12\neq 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 4\neq 0 \\ 2 & 1 & 4 & 11 & 28\neq 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \tag{3.141}$$

Jednonásobným kořenem je tedy číslo -2. Koeficienty ve třetím řádku nám pak dávají zbytek polynomu po vytknutí faktoru $s+2$:

$$s^3+2s^2+3s+6=(s+2)(s^2+3) \tag{3.142}$$

Polynom (s^2+3) je v reálném oboru ireducibilní (dále nerozložitelný),

$$F(s)=\frac{-s^2-8s+9}{s^3+2s^2+3s+6}=\frac{-s^2-8s+9}{(s+2)(s^2+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+3} \tag{3.143}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $(s+2)(s^2+3)$ a dostaneme

$$-s^2-8s+9=A(s^2+3)+(Bs+C)(s+2) \tag{3.144}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele (dva kořeny si budeme muset libovolně zvolit, např. $s=0,2$) a dostáváme pro:

$$\begin{array}{ll} s=-2: & -4+16+9=A.7\Rightarrow A=3 \\ s=0: & 9=3A+2C\Rightarrow C=0 \\ s=2: & \begin{array}{c}-4-16+9=7A+(2B+C)4 \\ -11=21+8B\Rightarrow B=-4\end{array} \end{array} \tag{3.145}$$

V tomto případě si můžeme zkusit dosadit komplexní kořen (Metoda kvadratické faktory I)

$$s=\sqrt{3}i: \quad \begin{aligned} 3-8\sqrt{3}i+9 &= 0.A+\left(\sqrt{3}iB+C\right)\left(\sqrt{3}i+2\right) \\ 12-8\sqrt{3}i &= -3B+2\sqrt{3}iB+\sqrt{3}iC+2C \end{aligned} \tag{3.146}$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme soustavu rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme a dostaneme neznámé koeficienty

$$\begin{gathered} 12=-3B+2C \Rightarrow C=\frac{12+3B}{2}=0 \\ \underline{-8\sqrt{3}i=2\sqrt{3}iB+\sqrt{3}iC} \\ -8\sqrt{3}i=2\sqrt{3}iB+6\sqrt{3}i+\frac{3}{2}\sqrt{3}iB \\ -14\sqrt{3}i=\frac{7}{2}\sqrt{3}iB \Rightarrow B=-4 \end{gathered} \tag{3.147}$$

Pouze pro ilustraci si můžeme dovolit použít i jinou metodu získání neznámých koeficientů u rozkladu. Pokud roznásobíme rovnici (3.144) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{gathered} -s^2-8s+9=A\left(s^2+3\right)+\left(Bs+C\right)\left(s+2\right) \\ -s^2-8s+9=As^2+3A+Bs^2+2Bs+Cs+2C \\ -s^2-8s+9=s^2\left(A+B\right)+s\left(2B+C\right)+\left(3A+2C\right) \end{gathered} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned} s^2: &\quad -1=A+B \\ s^1: &\quad -8=2B+C \\ s^0: &\quad 9=3A+2C \end{aligned} \tag{3.149}$$

Musíme řešit soustavu rovnic o třech neznámých. Pro výpočet použijeme např. Cramerovo pravidlo:

$$\begin{gathered} A=\frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{S}}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-4+9+16}{4+3}=\frac{21}{7} \\ \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbb{S}}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow B=\frac{\det \mathbb{B}_1}{\det \mathbb{S}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-16-3-9}{7}=-\frac{28}{7}=-4 \end{gathered} \tag{3.150}$$

$$C=\frac{\det\mathbb{C}_1}{\det\mathbb{S}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -8\\ 3 & 0 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{18-24+6}{-7}=\frac{0}{7}=0$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte.

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{-s^2-8s+9}{s^3+2s^2+3s+6}=\frac{-s^2-8s+9}{(s+2)(s^2+3)}=\frac{3}{s+2}-\frac{4s}{s^2+3} \tag{3.151}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right\}=3e^{-2t}-4\cos\sqrt{3}t \tag{3.152}$$

Příklad číslo: 52	Zadání: $F(s)=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^5+4s^4+5s^3}$	Výsledek $f(t)=1+2t+\frac{3}{2}t^2-2e^{-2t}\cos t+e^{-2t}\sin t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^5+4s^4+5s^3} \tag{3.153}$$

Jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, nejprve vytkneme faktor s^3.

$$s^5+4s^4+5s^3=s^3\left(s^2+4s+5\right) \tag{3.154}$$

Ještě musíme určit kořeny polynomu $\left(s^2+4s+5\right)$, vypočteme diskriminant a určíme kořeny.

$$D=b^2-4ac=16+4.5=-4<0 \tag{3.155}$$

Polynom $\left(s^2+4s+5\right)$ je v reálném oboru ireducibilní (dále nerozložitelný).

$$F(s)=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^5+4s^4+5s^2}=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^3\left(s^2+4s+5\right)}=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{Ds+E}{s^2+4s+5} \tag{3.156}$$

Jelikož v tomto případě známe jen jeden reálný kořen a to $s=0$ musíme pro výpočet ostatních kořenů čtyři čísla libovolně zvolit. Z tohoto důvodu použijeme metodu srovnání koeficientů u jednotlivých mocnin a následně pro kontrolu metodu s dosazením komplexních kořenů.

Rovnici (3.156) vynásobíme jmenovatelem $s^3\left(s^2+4s+5\right)$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&-s^4+3s^3+10s^2-2s-15=A\left(s^2+4s+5\right)+Bs\left(s^2+4s+5\right)+Cs^2\left(s^2+4s+5\right)+\left(Ds+E\right)s^3\\
&-s^4+3s^3+10s^2-2s-15=As^2+4As+5A+Bs^3+4Bs^2+5Bs+Cs^4+4Cs^3+5Cs^2+Ds^4+Es^3\\
&-s^4+3s^3+10s^2-2s-15=\left(C+D\right)s^4+\left(B+4C+E\right)s^3+\left(A+4B+5C\right)s^2+\left(4A+5B\right)s+5A
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Uděláme porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin a jednoduchým způsobem vyřešíme soustavu rovnic o pěti neznámých.

$$\begin{array}{ll}
s^4: & -1=C+D\Rightarrow D=-1-C=-2\\
s^3: & 3=B+4C+E\Rightarrow E=3-B-4C=3-2-4=-3\\
s^2: & 10=A+4B+5C\Rightarrow C=\dfrac{10-A-4B}{5}=\dfrac{10+3-8}{5}=1\\
s^1: & -2=4A+5B\Rightarrow B=\dfrac{-2-4A}{5}=\dfrac{10}{5}=2\\
s^0: & -15=5A\Rightarrow A=-3
\end{array} \tag{3.158}$$

Rozklad funkce $F\left(s\right)$ na parciální zlomky má pak tvar

$$\begin{aligned}
&F\left(s\right)=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^5+4s^4+5s^2}=\frac{-s^4+3s^3+10s^2-2s-15}{s^3\left(s^2+4s+5\right)}=\frac{-3}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{-2s-3}{s^2+4s+5}=\\
&=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s^3}-\frac{2s+3}{s^2+4s+5}=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s^3}-\frac{2s+3}{\left(s+2\right)^2-4+5}=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s^3}-\frac{2\left(s+2-2\right)+3}{\left(s+2\right)^2+1}=\\
&=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s^3}-\frac{2\left(s+2\right)-1}{\left(s+2\right)^2+1}=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s^3}-\frac{2\left(s+2\right)}{\left(s+2\right)^2+1}+\frac{1}{\left(s+2\right)^2+1}
\end{aligned} \tag{3.159}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$\begin{aligned}
&f\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(s\right)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+2\right)}{\left(s+2\right)^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+2\right)^2+1}\right\}=\\
&=1+2t+\frac{3}{2}t^2-2e^{-2t}\cos t+e^{-2t}\sin t
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Příklad číslo: 53	Zadání: $F\left(s\right)=\dfrac{-s^3-8s^2-16s-13}{s^4+s^3-7s^2-13s-6}$	Výsledek $f\left(t\right)=te^{-t}+e^{-2t}-2e^{3t}$

Řešení:

$$F\left(s\right)=\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{s^4+s^3-7s^2-13s-6} \tag{3.161}$$

Jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, budeme muset použít Hornerovo schéma. Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelná čísla $a_n=-6$ tedy $a_n=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Postupujeme od menších čísel k větším.

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & s^4 & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\
 & 1 & 1 & -7 & -13 & -6 \\
1 & 1 & 2 & -5 & -18 & -24\neq 0 \\
-1 & 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & -6 & 0 & \\
-1 & 1 & -2 & -4\neq 0 & &
\end{array} \tag{3.162}$$

Dvojnásobným kořenem je tedy číslo -1. Koeficienty ve čtvrtém řádku nám pak dávají zbytek polynomu po vytknutí faktoru $(s+1)^2$

$$s^4+s^3-7s^2-13s-6=(s+1)^2\left(s^2-s-6\right) \tag{3.163}$$

Polynom $\left(s^2-s-6\right)$ dále rozložíme na součin kořenových činitelů do tvaru:

$$\begin{aligned}
&D=b^2-4ac=1-4.(-6)=25\\
&s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 5}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.
\end{aligned} \tag{3.164}$$

$$s^4+s^3-7s^2-13s-6=(s+1)^2(s-3)(s+2)$$

$$F(s)=\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{s^4+s^3-7s^2-13s-6}=\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s-3)(s+2)}=\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s-3} \tag{3.165}$$

$$A=\left[(s+1)^2\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s+2)(s-3)}\right]_{s=-1}=\frac{1-8+16-13}{1.(-4)}=1 \tag{3.166}$$

$$\begin{aligned}
B&=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s+2)(s-3)}\right]\right\}_{s=-1}=\left(\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+2)(s-3)}\right)'_{s=-1}=\\
&=\left(\frac{\left(-3s^2-16s-16\right)\left(s^2-s-6\right)-\left(-s^3-8s^2-16s-13\right)(2s-1)}{\left(s^2-s-6\right)^2}\right)_{s=-1}=\\
&=\frac{(-3+16-16)(1+1-6)-(1-8+16-13)(-2-1)}{(1+1-6)^2}=\frac{(-3)(-4)-(-4)(-3)}{(-4)^2}=\frac{12-12}{(-4)^2}=0
\end{aligned} \tag{3.167}$$

$$C=\left[(s+2)\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s+2)(s-3)}\right]_{s=-2}=\frac{8-32+32-13}{(-1)^2.(-5)}=\frac{-5}{-5}=1 \tag{3.168}$$

$$D=\left[(s-3)\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s+2)(s-3)}\right]_{s=3}=\frac{-27-72-48-13}{4^2.5}=\frac{-160}{80}=2 \tag{3.169}$$

Nebo můžeme použít dosazovací metodu. Rovnici (3.165) vynásobíme jmenovatelem $(s+1)^2(s-3)(s+2)$ a dostaneme

$$-s^3-8s^2-16s-13=A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s+2)(s-3)+C(s+1)^2(s-3)+D(s+1)^2(s+2) \tag{3.170}$$

Do této rovnici postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele (jeden si budeme muset libovolně zvolit, např. $s=0$) a dostáváme:

$$\begin{aligned}
&s=-1:\quad 1-8+16-13=A(1)(-4)\Rightarrow A=1\\
&s=-2:\quad 8-32+32-13=C(1)(-5)\Rightarrow C=1\\
&s=3:\quad -27-72-48-13=D(4)^2(5)\Rightarrow D=\frac{-160}{80}=-2\\
&s=0:\quad -13=6A-6B-3C+2D=-6-6B-3-4\Rightarrow B=0
\end{aligned} \tag{3.171}$$

Pouze pro ilustraci si můžeme dovolit použit i jinou metodu získání neznámých koeficientů u rozkladu. Pokud roznásobíme rovnici (3.170) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned}
&-s^3-8s^2-16s-13=A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s+2)(s-3)+C(s+1)^2(s-3)+D(s+1)^2(s+2)\\
&-s^3-8s^2-16s-13=s^3[B+C+D]+s^2[A-C+4D]+s[-A-B-5C+5D]+[-6A-6B-3C+2D]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^3:&\quad -1=B+C+D\\
s^2:&\quad -8=A-C+4D\\
s^1:&\quad -16=A-B-5C+5D\\
s^0:&\quad -13=-6A-6B-3C+2D
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Musíme řešit soustavu rovnic o čtyřech neznámých. Pro výpočet použijeme např. Cramerovo pravidlo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&4\\-1&-1&-5&5\\-6&-6&-3&2\end{pmatrix}}_{\mathbb{S}}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-16\\-13\end{pmatrix}\Bigg\}\Rightarrow
\begin{cases}
A=\dfrac{\det\mathbb{A}_1}{\det\mathbb{S}}=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\-8&0&-1&4\\-16&-1&-5&5\\-13&-6&-3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&4\\-1&-1&-5&5\\-6&-6&-3&2\end{vmatrix}}=\dfrac{130}{130}=1\\[2ex]
B=\dfrac{\det\mathbb{B}_1}{\det\mathbb{S}}=\dfrac{\begin{vmatrix}0&-1&1&1\\1&-8&-1&4\\-1&-16&-5&5\\-6&-13&-3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&4\\-1&-1&-5&5\\-6&-6&-3&2\end{vmatrix}}=\dfrac{0}{130}=0
\end{cases} \tag{3.173}$$

$$C=\frac{\det\mathbb{C}_1}{\det\mathbb{S}}=\frac{\begin{vmatrix}0&1&-1&1\\1&0&-8&4\\-1&-1&-16&5\\-6&-6&-13&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&4\\-1&-1&-5&5\\-6&-6&-3&2\end{vmatrix}}=\frac{18-24+6}{-7}=\frac{130}{130}=1$$

$$D=\frac{\det\mathbb{D}_1}{\det\mathbb{S}}=\frac{\begin{vmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&-8\\-1&-1&-5&-16\\-6&-6&-3&-13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&4\\-1&-1&-5&5\\-6&-6&-3&2\end{vmatrix}}=\frac{-260}{130}=-2$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte. Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{s^4+s^3-7s^2-13s-6}=\frac{-s^3-8s^2-16s-13}{(s+1)^2(s-3)(s+2)}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{0}{s+1}+\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s-3} \qquad (3.174)$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}=te^{-t}+e^{-2t}-2e^{3t} \qquad (3.175)$$

Příklad číslo: 54	Zadání: $F(s)=\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^{10}-s^9+2s^8-17s^6+25s^5-10s^4}$	Výsledek $f(t)=\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2e^t+2e^{-2t}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^{10}-s^9+2s^8-17s^6+25s^5-10s^4} \qquad (3.176)$$

jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů, nejprve vytkneme faktor s^4 a dostaneme:

$$s^{10}-s^9+2s^8-17s^6+25s^5-10s^4=s^4\left(s^6-s^5+2s^4-17s^2+25s-10\right) \qquad (3.177)$$

dále budeme muset použít Hornerovo schéma. Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být pouze dělitelná čísla $a_n=-10$ tedy $a_n=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$. Postupujeme od menších čísel k větším.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & s^6 & s^5 & s^4 & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\ & 1 & -1 & 3 & 0 & -17 & 25 & -10 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & -15 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & -10 & 0 & \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 10 & 0 & & \\ 1 & 1 & 3 & 8 & 18 \neq 0 & & & \end{array} \tag{3.178}$$

Trojnásobným kořenem je tedy číslo 1. Koeficienty v pátém řádku nám pak dávají zbytek polynomu po vytknutí faktoru $(s-1)^3$.

$$s^{10} - s^9 + 2s^8 - 17s^6 + 25s^5 - 10s^4 = s^4\left(s^6 - s^5 + 2s^4 - 17s^2 + 25s - 10\right) = s^4(s-1)^3\left(s^3 + 2s^2 + 5s + 10\right) \tag{3.179}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & s^3 & s^2 & s^1 & s^0 \\ & 1 & 2 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & 6 \neq 0 \\ 2 & 1 & 4 & 13 & 36 \neq 0 \\ -2 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \tag{3.180}$$

Jednonásobným kořenem je číslo -2. Koeficienty v pátém řádku nám dále dávají již v reálném oboru ireducibilní polynom. Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů má pak tvar:

$$s^{10} - s^9 + 2s^8 - 17s^6 + 25s^5 - 10s^4 = s^4(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right) \tag{3.181}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s^9 - 7s^8 + 20s^7 - 19s^6 + 36s^5 + 30s^4 - 68s^2 + 100s - 40}{s^4(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right)} = \\ &= \frac{A}{s^4} + \frac{B}{s^3} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s} + \frac{E}{(s-1)^3} + \frac{F}{(s-1)^2} + \frac{G}{(s-1)} + \frac{H}{(s+2)} + \frac{Is+J}{\left(s^2+5\right)} \end{aligned} \tag{3.182}$$

$$A = \left[s^4 \frac{2s^9 - 7s^8 + 20s^7 - 19s^6 + 36s^5 + 30s^4 - 68s^2 + 100s - 40}{s^4(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right)} \right]_{s=0} = \frac{-40}{-10} = 4 \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1!}\left\{ \frac{d}{ds}\left[s^4 \frac{2s^9 - 7s^8 + 20s^7 - 19s^6 + 36s^5 + 30s^4 - 68s^2 + 100s - 40}{s^4(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right)} \right] \right\}_{s=0} \\ &= \left(\frac{2s^9 - 7s^8 + 20s^7 - 19s^6 + 36s^5 + 30s^4 - 68s^2 + 100s - 40}{(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right)} \right)'_{s=0} = \\ &= \left(\frac{\left(18s^8 - 56s^7 + 140s^6 - 114s^5 + 180s^4 + 120s^3 - 136s + 100\right)(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right) - \left(2s^9 - 7s^8 + 20s^7 - 19s^6 + 36s^5 + 30s^4 - 68s^2 + 100s - 40\right)\left(6s^5 - 5s^4 + 8s^3 - 34s + 25\right)}{\left[(s-1)^3(s+2)\left(s^2+5\right)\right]^2} \right)_{s=0} = \\ &= \frac{(100)(-10) - (-40)(25)}{10} = \frac{-1000 + 1000}{100} = 0 \end{aligned} \tag{3.184}$$

$$C=\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[s^4\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right]\right\}_{s=0}$$
$$=\left(\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right)''_{s=0}=0 \tag{3.185}$$

$$D=\frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3}{ds^3}\left[s^4\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right]\right\}_{s=0}$$
$$=\left(\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right)'''_{s=0}=0 \tag{3.186}$$

$$E=\left[\left(s-1\right)^3\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right]_{s=1}=$$
$$=\frac{2-7+20-19+36+30-68+100-40}{3.6}=\frac{54}{18}=3 \tag{3.187}$$

$$F=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[\left(s-1\right)^3\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right]\right\}_{s=1}$$
$$=\left(\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right)'_{s=1}=$$
$$=\left(\frac{\left(18s^8-56s^7+140s^6-114s^5+180s^4+120s^3-136s+100\right)s^4\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)-\left(2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40\right)\left(7s^6+12s^5+25s^4+40s^3\right)}{\left[s^4\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)\right]^2}\right)_{s=1}= \tag{3.188}$$
$$=\frac{\left(252\right)\left(18\right)-\left(54\right)\left(84\right)}{324}=\frac{4536-4536}{324}=0$$

$$H=\left[\left(s+2\right)\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)\left(s^2+5\right)}\right]_{s=-2}=$$
$$=\frac{-1024-1792-2560-1216-1152+480-272-200-40}{16.\left(-27\right).\left(0\right)}=\frac{-7776}{-3888}=2 \tag{3.189}$$

Pro výpočet koeficientů I, J použijeme metodu kvadratické faktory I, rovnici (3.182) vynásobíme jmenovatelem a do vzniklé rovnice dosadíme $s=\sqrt{5}i$.

$$2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40=\left(Is+J\right)s^4\left(s-1\right)^3\left(s+2\right)$$
$$2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40=\left(Is+J\right)\left(s^8-s^7-3s^6+5s^5-2s^4\right) \tag{3.190}$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme soustavu rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme a dostaneme neznámé koeficienty. V tomto případě jsme pro výpočet museli použít výpočetní techniku a hledané kořeny jsou:

$$I=0$$
$$J=-1 \tag{3.191}$$

Rozklad funkce $F\left(s\right)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{2s^9-7s^8+20s^7-19s^6+36s^5+30s^4-68s^2+100s-40}{s^4(s-1)^3(s+2)(s^2+5)}=\\&=\frac{A}{s^4}+\frac{B}{s^3}+\frac{C}{s^2}+\frac{D}{s}+\frac{E}{(s-1)^3}+\frac{F}{(s-1)^2}+\frac{G}{(s-1)}+\frac{H}{(s+2)}+\frac{Is+J}{(s^2+5)}=\\&=\frac{4}{s^4}+\frac{3}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s+2)}-\frac{1}{(s^2+5)}\end{aligned}\tag{3.192}$$

Přenosovou funkci $F(s)$ upravíme do tvaru:

$$F(s)=\frac{4}{s^4}+\frac{3}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s+2)}-\frac{1}{(s^2+5)}=4\frac{1}{s^4}+3\frac{1}{(s-1)^3}+2\frac{1}{(s+2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\left(s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}\tag{3.193}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{\left(s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}\right\}=\\&=\frac{4}{3!}t^3+\frac{3}{2!}t^2e^t+2e^{-2t}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t=\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2e^t+2e^{-2t}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\end{aligned}\tag{3.194}$$

V předcházejících příkladech jsme si ukázali všechny probrané metody pro rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a následného získání originálu LT. V dalších příkladech budeme používat kombinace metod pro získání co nejjednoduššího výpočtu.

Příklad číslo: 55	Zadání: $F(s)=\frac{2s^2+3s-5}{s(s+3)(s+4)}$	Výsledek $f(t)=-\frac{15}{2}-\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{15}{4}e^{-4t}$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2s^2+3s-5}{s(s+3)(s+4)}\tag{3.195}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má reálné kořeny.

$$F(s)=\frac{2s^2+3s-5}{s(s+3)(s+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+4}\tag{3.196}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $s(s+3)(s+4)$ a po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned} 2s^2+3s-5 &= A(s+3)(s+4)+Bs(s+4)+Cs(s+3) \\ 2s^2+3s-5 &= A\left(s^2+7s+12\right)+Bs^2+4Bs+Cs^2+3Cs \\ 2s^2+3s-5 &= (A+B+C)s^2+(7A+4B+3C)s+12A \end{aligned} \tag{3.197}$$

Nyní si ukážeme několik možných metod řešení:

Metoda zakrývací

Podíváme se na zlomek (3.196), ve jmenovateli si postupně zakryjeme výrazy, které přísluší jednotlivým neznámým konstantám a do zbytku dosadíme příslušný kořen, pro:

$$\begin{aligned} s=0, &\quad A=\frac{-5}{3.4}=-\frac{5}{12} \\ s=-3, &\quad B=\frac{18-9-5}{-3.1}=-\frac{4}{3} \\ s=-4, &\quad C=\frac{32-12-5}{4}=\frac{15}{4} \end{aligned} \tag{3.198}$$

Metoda dosazovací

Do rovnice (3.197) postupně dosadíme všechny reálné kořeny jmenovatele a dostáváme pro:

$$\begin{aligned} s=0: &\quad \begin{array}{c} 2(0)^2+3.0-5=A(0+3)(0+4)+B.0.(0+4)+C.0.(0+3) \\ -5=12A\Rightarrow A=-\dfrac{5}{12} \end{array} \\ s=-3: &\quad \begin{array}{c} 2(-3)^2+3.(-3)-5=A(-3+3)(-3+4)+B.(-3).(-3+4)+C.(-3).(-3+3) \\ 18-9-5=-3B\Rightarrow A=-\dfrac{4}{3} \end{array} \\ s=-4: &\quad \begin{array}{c} 2(-4)^2+3.(-4)-5=A(-4+3)(-4+4)+B.(-4).(-4+4)+C.(-4).(-4+3) \\ 32-12-5=4C\Rightarrow A=\dfrac{15}{4} \end{array} \end{aligned} \tag{3.199}$$

Metoda srovnávací (porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin)

Pokud roznásobíme rovnici (3.197) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin, dostaneme soustavu lineárních rovnic o třech neznámých.

$$2s^2+3s-5=(A+B+C)s^2+(7A+4B+3C)+12A$$

$$\begin{array}{l} s^2: \quad 2=A+B+C \\ s^1: \quad 3=7A+4B+3C \\ s^0: \quad -5=12A\Rightarrow A=-\dfrac{5}{12} \\ \hline 2+\dfrac{5}{12}=B+C\Rightarrow B=\dfrac{29}{12}-C=\dfrac{29}{12}-\dfrac{15}{4}=\dfrac{29}{12}-\dfrac{45}{12}=-\dfrac{16}{12}=-\dfrac{4}{3} \\ 3+\dfrac{35}{12}=4B+3C=\dfrac{29}{3}-4C+3C\Rightarrow -C=\dfrac{71}{12}-\dfrac{116}{12}=-\dfrac{45}{12}\Rightarrow C=\dfrac{15}{4} \end{array} \tag{3.200}$$

Musíme řešit soustavu rovnic o třech neznámých. Pro výpočet můžeme použit i např. Cramerovo pravidlo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{S}}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-15+20}{36-48} = -\frac{5}{12} \\ B &= \frac{\det \mathbb{B}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 12 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{72-35-36+15}{-12} = \frac{16}{-12} = -\frac{4}{3} \\ C &= \frac{\det \mathbb{C}_1}{\det \mathbb{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-20+36-96+35}{-12} = \frac{-45}{-12} = \frac{15}{4} \end{aligned} \tag{3.201}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte.

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s) = \frac{2s^2+3s-5}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} = -\frac{15}{2}\frac{1}{s} - \frac{4}{3}\frac{1}{s+3} + \frac{15}{4}\frac{1}{s+4} \tag{3.202}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{15}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{15}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = -\frac{15}{2} - \frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{15}{4}e^{-4t} \tag{3.203}$$

Příklad číslo: 56	Zadání: $F(s) = \dfrac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}$	Výsledek $f(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}(1-16t)$

Řešení:

$$F(s) = \frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2} \tag{3.204}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má reálné kořeny.

$$F(s)=\frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+3)^2}+\frac{C}{s+3} \tag{3.205}$$

tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem $(s+1)(s+3)^2$ a po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{gathered}3s^2+5=A(s+3)^2+B(s+1)+C(s+1)(s+3)\\3s^2+5=A\left(s^2+6s+9\right)+Bs+B+C\left(s^2+4s+3\right)\\3s^2+5=(A+C)s^2+(6A+B+4C)s+(9A+B+3C)\end{gathered} \tag{3.206}$$

Nyní si ukážeme několik možných metod řešení:

Podíváme se na zlomek (3.205), ve jmenovateli si postupně zakryjeme výrazy, které přísluší jednotlivým neznámým konstantám a do zbytku dosadíme příslušný kořen, pro:

$$\begin{aligned}s&=-1, \quad A=\frac{3+5}{2^2}=\frac{8}{4}=2\\s&=-3, \quad B=\frac{27+5}{-2}=-16\end{aligned} \tag{3.207}$$

Do rovnice (3.206) bychom mohli postupně dosadit všechny reálné kořeny jmenovatele (v tomto případě máme jenom dva kořeny, ale tři neznámé koeficienty z tohoto důvodu musíme jeden kořen libovolně zvolit např. $s=0$) a dostali by jsme stejné koeficienty jako jsme získali výše. Zaměříme se nyní jen na získání koeficientu C, který vypočteme několika způsoby:

$$\begin{aligned}s=0:&\quad 3s^2+5=A(s+3)^2+B(s+1)+C(s+1)(s+3)\\s=0:&\quad 5=A(0+3)^2+B(0+1)+C(0+1)(0+3)=2.9-16+3C\Rightarrow C=1\end{aligned} \tag{3.208}$$

Nebo neznámý koeficient C získáme porovnáním koeficientů u některé mocniny proměnné s. Připomeňme, že volíme nejvyšší nebo nejnižší mocniny. Ty obvykle mají jednodušší vyjádření. Zvolíme z rovnice (3.206) podmínku rovnosti pro s^2 a dostaneme:

$$s^2: \quad 3=A+C\Rightarrow C=3-A=1 \tag{3.209}$$

Poslední použitá metoda pro získání neznámých koeficientů je následující:

$$\begin{aligned}A&=\left[(s+1)\frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}\right]_{s=-1}=\frac{3+5}{2^2}=2\\B&=\left[(s+3)^2\frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}\right]_{s=-3}=\frac{27+5}{(-2)}=-16\end{aligned} \tag{3.210}$$

$$C=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+3)^2\frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}\right]\right\}_{s=-3}=\left(\frac{3s^2+5}{(s+1)}\right)'_{s=-3}=\left(\frac{6s(s+1)-(3s^2+5).1}{(s+1)^2}\right)_{s=-3}=$$
$$=\frac{6.(-3)(-2)-(27+5)}{(-2)^2}=\frac{36-32}{4}=1 \tag{3.211}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na jakém z Vás, ke které metodě se přikloníte. Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{3s^2+5}{(s+1)(s+3)^2}=\frac{2}{s+1}-\frac{16}{(s+3)^2}+\frac{1}{s+3} \tag{3.212}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-16\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=2e^{-t}+e^{-3t}(1-16t) \tag{3.213}$$

Příklad číslo: 57	Zadání: $F(s)=\dfrac{4s+3}{(s+2)(s^2+4)}$	Výsledek $f(t)=-\dfrac{5}{8}e^{-2t}+\dfrac{5}{8}\cos 2t+\dfrac{11}{8}\sin 2t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{4s+3}{(s+2)(s^2+4)} \tag{3.214}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má jeden reálný kořen a dvojici komplexně sdružených z tohoto důvodu musíme zvolit následující rozklad.

$$F(s)=\frac{4s+3}{(s+2)(s^2+4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{(s^2+4)} \tag{3.215}$$

Podíváme se na zlomek (3.215), ve jmenovateli si postupně zakryjeme výraz, který přísluší neznámé konstantě A a do zbytku dosadíme příslušný kořen, pro:

$$s=-2,\quad A=\frac{-8+3}{4+4}=-\frac{5}{8} \tag{3.216}$$

Zbývající koeficienty určíme např. porovnáním koeficientů u vhodné mocniny proměnné s v následující rovnici. Rovnici (3.215) vynásobíme jmenovatele $(s+2)(s^2+4)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 4s+3 &= A\left(s^2+4\right)+\left(Bs+C\right)\left(s+2\right) \\ 4s+3 &= As^2+4A+Bs^2+2Bs+Cs+2C \\ 4s+3 &= \left(A+B\right)s^2+\left(2B+C\right)s+\left(4A+2C\right) \end{aligned} \tag{3.217}$$

$$\begin{aligned} &s^2: \quad 0 = A+B \Rightarrow B = -A = \frac{5}{8} \\ &s^0: \quad 3 = 4A+2C \Rightarrow C = \frac{3-4A}{2} = \frac{\frac{24}{8}+\frac{20}{8}}{2} = \frac{\frac{44}{8}}{2} = \frac{44}{16} = \frac{11}{4} \end{aligned} \tag{3.218}$$

Nebo jsme mohli použít metodu kvadratické faktory I. Dosadíme do rovnice (3.217) komplexní kořen. V našem případě je $s = 2i$ a dosazením získáme

$$\begin{aligned} 4s+3 &= A\left(s^2+4\right)+\left(Bs+C\right)\left(s+2\right) \\ 8i+3 &= -4B+4Bi+2Ci+2C \\ 3+8i &= \left(-4B+2C\right)+\left(4B+2C\right)i \end{aligned} \tag{3.219}$$

Porovnáním reálné a imaginární části získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou hravě vyřešíme a dostaneme neznámé koeficienty.

$$\begin{aligned} &\left.\begin{array}{l} 3 = -4B+2C \\ 8 = 4B+2C \end{array}\right\} - \Rightarrow 3 = -\frac{5}{2}+2C \Rightarrow C = \frac{\frac{6}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{11}{4} \\ &-5 = -8B \Rightarrow B = \frac{5}{8} \end{aligned} \tag{3.220}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte. Rozklad funkce $F\left(s\right)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$\begin{aligned} F\left(s\right) &= \frac{4s+3}{\left(s+2\right)\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{\left(s^2+4\right)} = \frac{-\frac{5}{8}}{s+2}+\frac{\frac{5}{8}s+\frac{11}{4}}{\left(s^2+4\right)} = -\frac{5}{8}\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{5}{8}s}{\left(s^2+2^2\right)}+\frac{\frac{11}{4}}{\left(s^2+2^2\right)} = \\ &= -\frac{5}{8}\frac{1}{s+2}+\frac{5}{8}\frac{s}{\left(s^2+2^2\right)}+\frac{\frac{11}{4}\cdot\frac{2}{2}}{\left(s^2+2^2\right)} = -\frac{5}{8}\frac{1}{s+2}+\frac{5}{8}\frac{s}{\left(s^2+2^2\right)}+\frac{11}{8}\frac{2}{\left(s^2+2^2\right)} \end{aligned} \tag{3.221}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(s\right)\right\} = -\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+2^2\right)}\right\}+\frac{11}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{\left(s^2+2^2\right)}\right\} = \\ &= -\frac{5}{8}e^{-2t}+\frac{5}{8}\cos 2t+\frac{11}{8}\sin 2t \end{aligned} \tag{3.222}$$

Příklad číslo: 58	Zadání: $F(s)=\frac{2s+6}{(s+2)^4}$	Výsledek $f(t)=t^2e^{-2t}\left(1+\frac{1}{3}t\right)$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2s+6}{(s+2)^4} \tag{3.223}$$

zlomek musíme upravit do tvaru, který nalezneme ve slovníku.

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{2s+6}{(s+2)^4}=\frac{2(s+3)}{(s+2)^4}=\frac{2(s+3-1+1)}{(s+2)^4}=\frac{2(s+2)+2}{(s+2)^4}=2\frac{(s+2)}{(s+2)^4}+2\frac{1}{(s+2)^4}=\\&=2\frac{1}{(s+2)^3}+2\frac{1}{(s+2)^4}\end{aligned} \tag{3.224}$$

Originál pak je:

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4}\right\}=\frac{2}{(3-1)!}t^{3-1}e^{-2t}+\frac{2}{(4-1)!}t^{4-1}e^{-2t}=\\&=t^2e^{-2t}+\frac{1}{3}t^3e^{-2t}=t^2e^{-2t}\left(1+\frac{1}{3}t\right)\end{aligned} \tag{3.225}$$

Příklad číslo: 59	Zadání: $F(s)=\frac{2s^2}{(s+1)^3}$	Výsledek $f(t)=e^{-t}\left(2-4t+t^2\right)$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2s^2}{(s+1)^3} \tag{3.226}$$

zlomek musíme upravit do tvaru, který nalezneme ve slovníku.

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{2s^2}{(s+1)^3}=2\frac{\left(s^2+2s+1\right)-2s-1}{(s+1)^3}=2\frac{\left(s^2+1\right)^2-2(s+1)+1}{(s+1)^3}=2\frac{\left(s^2+1\right)^2}{(s+1)^3}-4\frac{(s+1)}{(s+1)^3}+2\frac{1}{(s+1)^3}=\\&=2\frac{1}{(s+1)}-4\frac{1}{(s+1)^2}+2\frac{1}{(s+1)^3}\end{aligned} \tag{3.227}$$

Originál pak je:

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}=\\&2e^{-t}-\frac{4}{(2-1)!}t^{2-1}e^{-t}+\frac{2}{(3-1)!}t^{3-1}e^{-t}=2e^{-t}-4te^{-t}+t^2e^{-t}=e^{-t}\left(2-4t+t^2\right)\end{aligned} \tag{3.228}$$

Příklad číslo: 60	Zadání: $F(s)=\dfrac{2}{s(s+3)^2}$	Výsledek $f(t)=\dfrac{1}{9}\left(2-6te^{-3t}-2e^{-3t}\right)$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2}{s(s+3)^2} \tag{3.229}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má tři reálné kořeny a rozklad bude vypadat následovně:

$$F(s)=\frac{2}{s(s+3)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+3)^2}+\frac{C}{(s+3)} \tag{3.230}$$

Podíváme se na zlomek (3.230), ve jmenovateli si postupně zakryjeme výraz, který přísluší neznámé konstantě A, B a do zbytku dosadíme příslušný kořen, pro:

$$\begin{aligned} s=0, &\quad A=\frac{2}{9} \\ s=-3, &\quad B=-\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{3.231}$$

Zbývající koeficient určíme např. dosazením libovolné konstanty v tomto případě zvolíme $s=1$. Rovnici (3.230) vynásobíme jmenovatele $s(s+3)^2$ a dostaneme:

$$2=A(s+3)^2+Bs+Cs(s+3)$$

$$s=1:\quad 2=A(4)^2+B+4C\Rightarrow C=\frac{2-16A-B}{4}=\frac{2-\frac{32}{9}+\frac{2}{3}}{4}=\frac{\frac{18}{9}-\frac{32}{9}+\frac{6}{9}}{4}=\frac{\frac{18}{9}-\frac{32}{9}+\frac{6}{9}}{4}= \tag{3.232}$$

$$=\frac{-\frac{8}{9}}{4}=-\frac{8}{36}=-\frac{2}{9}$$

nebo jsme mohli porovnat koeficienty u nejvyšší mocniny:

$$s^2:\quad 0=A+C\Rightarrow C=-A=-\frac{2}{9} \tag{3.233}$$

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte. Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{2}{s(s+3)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+3)^2}+\frac{C}{(s+3)}=\frac{\frac{2}{9}}{s}-\frac{\frac{2}{3}}{(s+3)^2}-\frac{\frac{2}{9}}{(s+3)} \tag{3.234}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} - \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\} = \\ &= \frac{2}{9} - \frac{2}{3}te^{-3t} - \frac{2}{9}e^{-3t} = \frac{1}{9}\left(2 - 6te^{-3t} - 2e^{-3t}\right) \end{aligned} \tag{3.235}$$

Úlohu můžeme také řešit jinak, jestliže použijeme vztah $\frac{1}{s}F(s) = \int_0^t f(u)\,du$ můžeme si dovolit psát:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{s(s+3)^2} = \frac{1}{s}\underbrace{\frac{2}{(s+3)^2}}_{F(s)} = 2\int_0^t ue^{-3u}du \left| \begin{matrix} u = u & u' = 1 \\ v = e^{-3u} & v = -\dfrac{e^{-3u}}{3} \end{matrix} \right. = 2\left[-u\frac{e^{-3u}}{3}\right]_0^t + 2\int_0^t \frac{e^{-3u}}{3}du = \\ &= 2\left[-u\frac{e^{-3u}}{3}\right]_0^t + \frac{2}{3}\int_0^t e^{-3u}du = \frac{2}{3}\left[-ue^{-3u}\right]_0^t - \frac{2}{9}\left[e^{-3u}\right]_0^t = -\frac{2}{3}te^{-3t} - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}\left(2 - 6te^{-3t} - 2e^{-3t}\right) \end{aligned} \tag{3.236}$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
61	$F(s) = \dfrac{4s-3}{s^2-2s+5}$	$f(t) = \dfrac{1}{2}e^t\left(8\cos 2t + \sin 2t\right)$

Řešení:

$$F(s) = \frac{4s-3}{s^2-2s+5} \tag{3.237}$$

Jmenovatele přenosové funkce zkusíme vyjádřit v součinu kořenových činitelů.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = 4 - 4.(5) = -16 \\ s_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1+2i \\ 1-2i \end{matrix} \right. \end{aligned} \tag{3.238}$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, jmenovatele budeme muset upravit do tvaru, ze kterého bude vidět Laplaceův obraz goniometrická funkce násobené exponenciálou, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{4s-3}{s^2-2s+5} = \frac{4s-3}{(s-1)^2-1+5} = \frac{4s-3}{(s-1)^2+4} = \frac{4(s-1+1)-3}{(s-1)^2+(2)^2} = \frac{4(s-1)+4-3}{(s-1)^2+(2)^2} = \frac{4(s-1)+1}{(s-1)^2+(2)^2} = \\ &= \frac{4(s-1)}{(s-1)^2+(2)^2} + \frac{1}{(s-1)^2+(2)^2} = 4\frac{(s-1)}{(s-1)^2+(2)^2} + \frac{\frac{2}{2}}{(s-1)^2+(2)^2} = 4\frac{(s-1)}{(s-1)^2+(2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^2+(2)^2} \end{aligned} \tag{3.239}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+(2)^2}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+(2)^2}\right\}=4e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t= \\ =\frac{1}{2}e^t(8\cos 2t+\sin 2t) \tag{3.240}$$

Příklad číslo: 62	Zadání: $F(s)=\dfrac{2s+3}{(s^2+4)^2}$	Výsledek $f(t)=\dfrac{1}{16}(-6t\cos 2t+3\sin 2t+8t\sin 2t)$

Řešení:

$$F(s)=\frac{2s+3}{(s^2+4)^2} \tag{3.241}$$

Ve jmenovateli jsou komplexní kořeny, jmenovatele budeme muset upravit do tvaru, ze kterého bude vidět Laplaceův obraz goniometrická funkce násobená proměnnou t, zlomek rozdělíme a upravíme následujícím způsobem (při řešení tohoto typu příkladu už předem musíme znát do jakého tvaru potřebujeme dostat přenosovou funkci), stačí nám upravit jmenovatele a získat tam takové faktory, které se nám podaří po rozdělení přenosové funkce vykrátit se jmenovatelem:

$$F(s)=\frac{2s+3}{(s^2+4)^2}=\frac{8}{8}\frac{2s+3}{(s^2+4)^2}=\frac{16s+24+3s^2-3s^2}{8(s^2+4)^2}=\frac{-3(s^2-2^2)+16s+3s^2+12}{8(s^2+2^2)^2}= \\ =\frac{-3(s^2-2^2)+3(s^2+2^2)+16s}{8(s^2+2^2)^2}=-\frac{3}{8}\frac{(s^2-2^2)}{(s^2+2^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{(s^2+2^2)}{(s^2+2^2)^2}+\frac{1}{8}\frac{16s}{(s^2+2^2)^2}= \\ =-\frac{3}{8}\frac{(s^2-2^2)}{(s^2+2^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{(s^2+2^2)}+\frac{4}{8}\frac{2s.2}{(s^2+2^2)^2} \tag{3.242}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=-\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s^2-2^2)}{(s^2+2^2)^2}\right\}+\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{2}}{(s^2+2^2)}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s.2}{(s^2+2^2)^2}\right\}= \\ =-\frac{3}{8}t\cos 2t+\frac{3}{16}\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t=\frac{1}{16}(-6t\cos 2t+3\sin 2t+8t\sin 2t) \tag{3.243}$$

Příklad číslo: 63	Zadání: $F(s)=\dfrac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}$	Výsledek $f(t)=-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{23}{4}-7te^{-t}-3e^{-t}-\dfrac{11}{4}e^{-2t}$

Řešení:

$$F(s)=\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)} \tag{3.244}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má reálné kořeny.

$$F(s)=\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{D}{(s+1)}+\frac{E}{s+2} \tag{3.245}$$

$$A=\left[s^2\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}\right]_{s=0}=\frac{-3}{2} \tag{3.246}$$

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}\right]\right\}_{s=0}=\left(\frac{4s-3}{\underbrace{(s+1)^2(s+2)}_{s^3+4s^2+5s+2}}\right)'_{s=0}=\left(\frac{4(s+1)^2(s+2)-(4s-3)(3s^2+8s+5)}{\left[(s+1)^2(s+2)\right]^2}\right)_{s=0}=\\&=\frac{4.2-(-3)(5)}{(2)^2}=\frac{8+15}{4}=\frac{23}{4}\end{aligned} \tag{3.247}$$

$$C=\left[(s+1)^2\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}\right]_{s=-1}=\frac{-7}{1}=-7 \tag{3.248}$$

$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}\right]\right\}_{s=-1}=\left(\frac{4s-3}{\underbrace{s^2(s+2)}_{s^3+2s^2}}\right)'_{s=-1}=\left(\frac{4s^2(s+2)-(4s-3)(3s^2+4s)}{\left[s^2(s+2)\right]^2}\right)_{s=-1}=\\&=\frac{4.1-(-7)(3-4)}{1}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned} \tag{3.249}$$

$$E=\left[(s+2)\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}\right]_{s=-2}=\frac{-11}{4} \tag{3.250}$$

Samozřejmě konstanty jsme mohli určit i jinou metodou. Pro někoho kdo nemá rád derivace by byla přijatelnější metoda kdybychom rovnici (3.245) vynásobili jmenovatelem a do vzniklé rovnice dosadili za operátor s libovolné koeficienty a nebo by jsme vzniklou rovnici roznásobili a srovnali koeficienty u jednotlivých mocnin. To už si můžete vyzkoušet každý sám.

Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s)=\frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}=\frac{-\frac{3}{2}}{s^2}+\frac{\frac{23}{4}}{s}-\frac{7}{(s+1)^2}-\frac{3}{(s+1)}-\frac{\frac{11}{4}}{s+2} \tag{3.251}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$\begin{aligned}&f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=-\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{23}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}-\frac{11}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}=\\&=-\frac{3}{2}t+\frac{23}{4}-7te^{-t}-3e^{-t}-\frac{11}{4}e^{-2t}\end{aligned} \tag{3.252}$$

Příklad číslo: 64	Zadání: $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$	Výsledek $f(t)=t-\sin t$

Řešení:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)} \tag{3.253}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má reálné i imaginární kořeny a rozklad bude vypadat následovně:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)} \tag{3.254}$$

$$A=\left[s^2\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right]_{s=0}=1 \tag{3.255}$$

Zbývající koeficienty určíme např. porovnáním koeficientů u vhodné mocniny proměnné s v následující rovnici. Rovnici (3.254) vynásobíme jmenovatelem $s^2(s^2+1)$ a dostaneme

$$\begin{aligned}1&=A(s^2+1)+Bs(s^2+1)+(Cs+D)s^2\\1&=As^2+A+Bs^3+Bs+Cs^3+Ds^2\\1&=(B+C)s^3+(A+D)s^2+Bs+A\end{aligned} \tag{3.256}$$

$$\begin{aligned}s^3:&\quad 0=B+C\Rightarrow C=-B=0\\s^2:&\quad 0=A+D\Rightarrow D=-A=-1\\s^1:&\quad 0=B\\s^0:&\quad 1=A\end{aligned} \tag{3.257}$$

Nebo jsme mohli použít metodu kvadratické faktory I. Dosadíme do rovnice (3.256) komplexní kořen. V našem případě $s=i$ a dosazením získáme:

$$\begin{aligned}
&1 = A\underbrace{\left(s^2+1\right)}_{=0} + Bs\underbrace{\left(s^2+1\right)}_{=0} + \left(Cs+D\right)s^2 \\
&1+0i = Cs^3 + Ds^2 \\
&1+0i = -Ci - D
\end{aligned} \tag{3.258}$$

Porovnáním reálné a imaginární části získáme koeficient $D=-1$.

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte. Rozklad funkce $F(s)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F(s) = \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{\left(s^2+1\right)} \tag{3.259}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\right\} = t - \sin t \tag{3.260}$$

Příklad číslo: 65	Zadání: $F(s) = \frac{2s-3}{s^2\left(s^2+1\right)}$	Výsledek $f(t) = 3t^2 + 2 - 2\cos t + 3\sin t$

Řešení:

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2\left(s^2+1\right)} \tag{3.261}$$

jmenovatel je již rozložený na součin kořenových činitelů, provedeme rozklad přenosové funkce na parciální zlomky a určíme neznámé koeficienty. Přenosová funkce má reálné i imaginární kořeny a rozklad bude vypadat následovně:

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)} \tag{3.262}$$

$$A = \left[s^2\,\frac{2s-3}{s^2\left(s^2+1\right)}\right]_{s=0} = \frac{-3}{1} = -3 \tag{3.263}$$

Zbývající koeficienty určíme např. porovnáním koeficientů u vhodné mocniny proměnné s v následující rovnici. Rovnici (3.262) vynásobíme jmenovatele $s^2\left(s^2+1\right)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} 2s-3 &= A\left(s^2+1\right)+Bs\left(s^2+1\right)+\left(Cs+D\right)s^2 \\ 2s-3 &= As^2+A+Bs^3+Bs+Cs^3+Ds^2 \\ 2s-3 &= \left(B+C\right)s^3+\left(A+D\right)s^2+Bs+A \end{aligned} \tag{3.264}$$

$$\begin{aligned} s^3 &: \quad 0=B+C \Rightarrow C=-B=-2 \\ s^2 &: \quad 0=A+D \Rightarrow D=-A=3 \\ s^1 &: \quad 2=B \\ s^0 &: \quad -3=A \end{aligned} \tag{3.265}$$

Nebo jsme mohli použít metodu kvadratické faktory I. Dosadíme do rovnice (3.264) komplexní kořen. V našem případě je $s=i$ a dosazením získáme:

$$\begin{aligned} 2s-3 &= A\underbrace{\left(s^2+1\right)}_{=0}+Bs\underbrace{\left(s^2+1\right)}_{=0}+\left(Cs+D\right)s^2 \\ -3+2i &= Cs^3+Ds^2 \\ -3+2i &= -Ci-D \end{aligned} \tag{3.266}$$

Porovnáním reálné a imaginární části získáme koeficient $C=-2, \quad D=3$.

Dospěli jsme ke stejnému závěru a je na každém z Vás, ke které metodě se přikloníte.

Rozklad funkce $F\left(s\right)$ na parciální zlomky má pak tvar:

$$F\left(s\right)=\frac{2s-3}{s^2\left(s^2+1\right)}=-\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}+\frac{-2s+3}{\left(s^2+1\right)}=-3\frac{1}{s^2}+2\frac{1}{s}-2\frac{s}{\left(s^2+1\right)}+3\frac{1}{\left(s^2+1\right)} \tag{3.267}$$

Po zpětné transformaci dostáváme originál ve tvaru (užijeme větu o linearitě a konstanty vytkneme před závorky).

$$f\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(s\right)\right\}=-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\right\}=3t^2+2-2\cos t+3\sin t \tag{3.268}$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
66	$F\left(s\right)=\frac{4}{\left(s+3\right)^6}$	$f\left(t\right)=\frac{1}{30}t^5e^{-3t}$

<u>Řešení:</u>

$$F\left(s\right)=\frac{4}{\left(s+3\right)^6} \tag{3.269}$$

jednotlivé zlomky musíme upravit do tvaru, které nalezneme ve slovníku.

$$F\left(s\right)=4\frac{1}{\left(s-\left(-3\right)\right)^6}=4\frac{\frac{6!}{6!}}{\left(s-\left(-3\right)\right)^{5+1}}=\frac{4}{6!}\frac{6!}{\left(s-\left(-3\right)\right)^{5+1}}=\frac{4}{120}\frac{6!}{\left(s-\left(-3\right)\right)^{5+1}}=\frac{1}{30}\frac{6!}{\left(s-\left(-3\right)\right)^{5+1}} \tag{3.270}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{\left(s-(-3)\right)^{5+1}}\right\}=\frac{1}{30}t^{5}e^{-3t} \qquad (3.271)$$

3.2.1 Zpětná transformace obrazů impulsů

Při hledání předmětu k funkcím, které obsahují výraz e^{-as}, používáme větu o translaci, kterou interpretujeme následovně:

Rozdělíme danou funkci na součet členů tvaru $F(s)e^{-as}$, kde k funkci $F(s)$ známe předmět. Je-li $f(t)\triangleq F(s)$, pak hledaný předmět k funkci $F(s)e^{-as}$ je funkce $f(t-a)H(t-a), t\geq 0$. Výraz e^{-as} je pouze v tomto případě informativní, který nás upozorňuje na to, že v získaném předmětu provedeme posunutí. Ukážeme si způsob výpočtu na níže uvedených příkladech.

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
67	$F(s)=\frac{3}{s^2}e^{-2s}$	$f(t)=\begin{cases}0 & 0\leq t\leq 2\\ 3t & t>0\end{cases}$

Řešení:

$$F(s)=\frac{3}{s^2}e^{-2s} \qquad (3.272)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}e^{-2s}\right\}=3(t-2)H(t-2), t\geq 0 \qquad (3.273)$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat jako:

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\leq t\leq 2\\ 3t & t>0\end{cases} \qquad (3.274)$$

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
68	$F(s)=\frac{1}{s^2}\left(2-2e^{-s}+2se^{-3s}\right)$	$f(t)=\begin{cases}2t & 0\leq t\leq 1\\ 2 & 1<t\leq 3\\ 0 & t>3\end{cases}$

Řešení:

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\left(2-2e^{-s}+2se^{-3s}\right)=\frac{2}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-3s}}{s} \qquad (3.275)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-3s}}{s}\right\}=2tH(t)-\left[2(t-1)+2\right]H(t-1)+2H(t-1)-2H(t-3) \tag{3.276}$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat jako:

$$f(t)=\begin{cases} 2t & 0\le t\le 1 \\ 2 & 1<t\le 3 \\ 0 & t>3 \end{cases} \tag{3.277}$$

Příklad číslo: 69	Zadání: $F(s)=\frac{1}{s+1}\left(e^{-s-1}-e^{-2s-2}\right)$	Výsledek $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t\le 1 \\ e^{-t} & 1<t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$

<u>Řešení:</u>

$$F(s)=\frac{1}{s+1}\left(e^{-s-1}-e^{-2s-2}\right)=\frac{e^{-s-1}}{s+1}-\frac{e^{-2s-2}}{s+1} \tag{3.278}$$

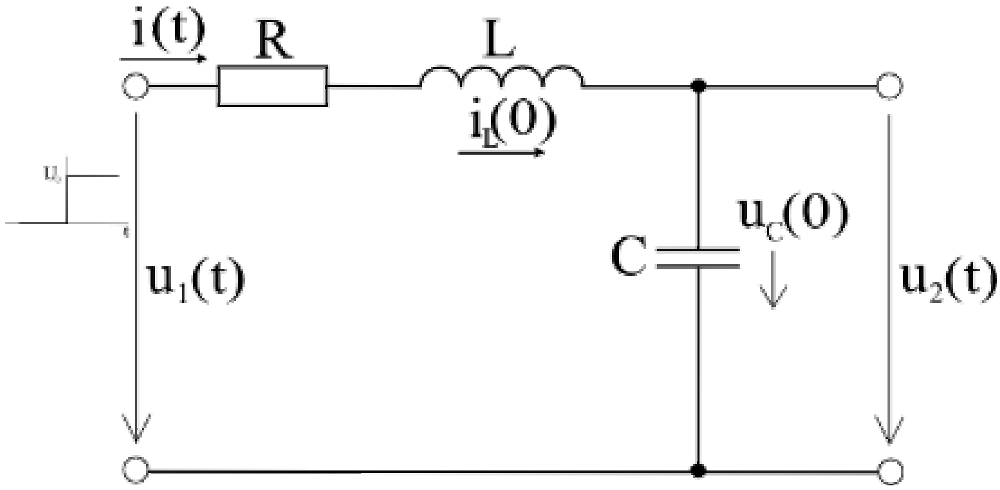
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s-1}}{s+1}-\frac{e^{-2s-2}}{s+1}\right\}=e^{-1}e^{-(t-1)}H(t-1)-e^{-2}e^{-(t-2)}H(t-2),\, t\ge 0 \tag{3.279}$$

Funkci $f(t)$ lze také zapsat jako:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t\le 1 \\ e^{-t} & 1<t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases} \tag{3.280}$$

3.3 Praktické užití LT (řešení diferenciálních rovnic)

Níže si uvedeme ilustrační příklad na řešení diferenciální rovnice přechodného děje klasického RLC článku. Jako první metodu použijeme klasické řešení diferenciální rovnice. Druhá metoda bude spočívat v řešení algebraické operátorové rovnice, kterou dostaneme z diferenciální za použití Laplaceovy transformace. Každý čtenář nechť si udělá sám obraz o jednoduchosti řešení následující diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace. Nechť máme RLC článek s uvedenými konstantami a chceme znát časový průběh napětí na výstupu poté co na vstup přivedeme jednotkový skok. Všechny zde uváděné pojmy při řešení diferenciálních rovnic daleko přesahují rámec učebních osnov pro střední školy a mají sloužit pouze pro ilustraci složitosti řešení diferenciálních rovnic.



OBRÁZEK 3.1: *RLC článek – časová oblast*

Parametry RLC článku:

$$\begin{array}{ll} R=1000[\Omega] & U_0=10[V] \\ L=1[H] & u_c(0)=5[V] \\ C=8[\mu F] & i_L(0)=5[mA] \end{array} \tag{3.281}$$

Pro sestavení integrodiferenciální rovnice použijeme druhý Kirchhoffův zákon, který nám pro elektrické obvody formuluje zákon zachování energie, a říká nám, že součet úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené části obvodu (smyčce) rovná součtu elektromotorických napětí zdrojů v této části obvodu. Jinými slovy též – algebraický součet napětí ve smyčce se rovná nule.

Integrodiferenciální obvodová rovnice:

$$Ri+L\frac{di}{dt}+u_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau-U_0=0 \tag{3.282}$$

Celou rovnici derivujeme o dostaneme diferenciální homogenní rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty, která se řeší pomocí charakteristického polynomu a charakteristických čísel, z nichž se získá fundamentální systém a obecné řešení homogenní rovnice.

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0 \tag{3.283}$$

Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice má po jednoduché úpravě tvar

$$LC\lambda^2+RC\lambda+1=0 \tag{3.284}$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC} \tag{3.285}$$

po vyčíslení dostáváme jednotlivé kořeny ve tvaru

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -146,4 \\ \lambda_1 &= -853,6 \end{aligned} \tag{3.286}$$

Fundamentální systém řešení (báze množiny řešení homogenní lineární rovnice) je tedy například $\left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\}$, $\lambda_{1|2}$ určují pouze obecné řešení pro $i(t)$ i $u_2(t)$, obecné řešení této diferenciální rovnice se dá vyjádřit ve tvaru $u_2(t) = \hat{u}_2(t) + \tilde{u}_2(t)$, kde funkce $\hat{u}_2(t)$ je jedno (partikulární) řešení dané diferenciální rovnice a funkce $\tilde{u}_2(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice. Pro náš příklad dostáváme:

$u_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + U_0$, vyjádříme první derivaci a dosadíme počáteční podmínky

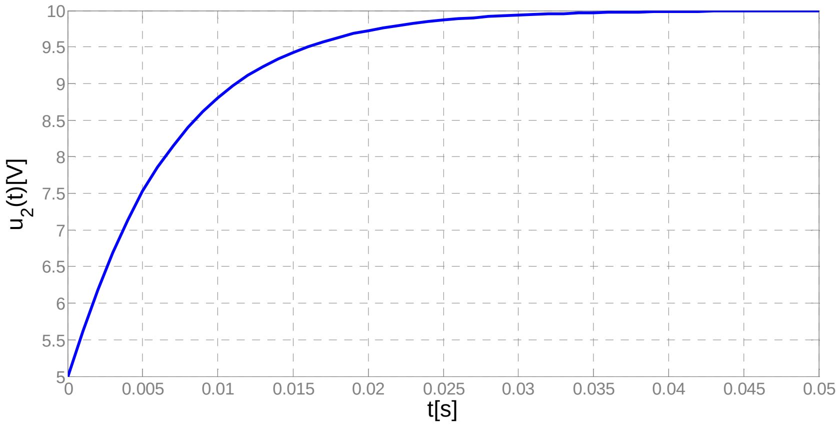
$u_2'(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$, po dosazení počátečních podmínek dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých.

$$\begin{gathered} u_2(0) = u_C(0) = 5[V] \\ u_2'(0) = u'(0) = \frac{i_L(0)}{C} = 625 \\ \left(i_C(t) = i_L(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \right) \end{gathered} \tag{3.287}$$

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 + c_2 + 10 \\ 625 &= -146,4c_1 - 853,6c_2 \end{aligned} \tag{3.288}$$

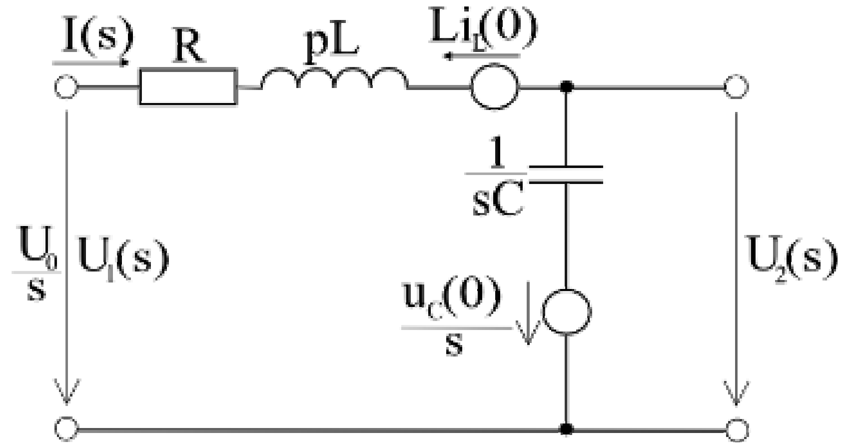
Řešením soustavy lineárních algebraických rovnice je $(c_1, c_2) = (0{,}152; 5{,}152)$, hledané řešení diferenciální rovnice je ve tvaru:

$$u_2(t) = -5{,}152 e^{-146,4t} + 0{,}152 e^{-853,6t} + 10 \tag{3.289}$$



OBRÁZEK 3.2: *Časový průběh výstupního napětí RLC článku po odeznění přechodového děje*

Při řešení této úlohy s RLC článkem pomocí Laplaceovy transformace můžeme postupovat dvěmi způsoby řešení. Za prvé si můžeme obrázek (Obr. 3.1) překreslit z časové oblasti do operátorové oblasti a sestavit si algebraickou obvodovou rovnici pro napětí $U_2(s)$, spíše spočítáme přímo $U_2(s)$ přes napěťový dělič. A nebo použijeme již diferenciální rovnici (3.282), kterou vyřešíme pomocí Laplaceovy transformace a při použití zpětné Laplaceovy transformace získáme časový průběh proudu $i(t)$ v RLC článku.



OBRÁZEK 3.3: *RLC článek – operátorová oblast*

Mějme tedy diferenciální rovnici $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+R\dfrac{di}{dt}+\dfrac{i}{C}=0$ s počátečními podmínkami $i(0)=0, i'(0)=i_L(0)=0,005$ a jednotkový skok o hodnotě $1[mA]$. Použijeme vzorec pro obraz druhé derivace a větu o linearitě. Nechť $\mathcal{L}\{i(t)\}=I(s)$, poté musí platit, že

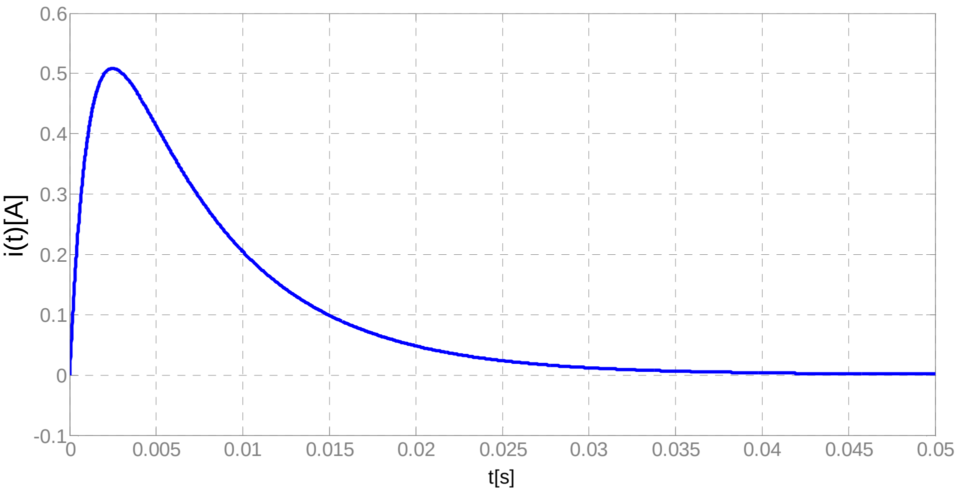
$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left\{L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}\right\}=L\left(s^2I(s)-i(0)s-i'(0)\right)+R\left(sI(s)-i(0)\right)+\frac{1}{C}I(s)=\frac{0,001}{s}\\&I(s)\left[Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right]=\frac{0,001}{s}+i(0)s+i'(0)+Ri(0)\end{aligned}\tag{3.290}$$

Pomocí vztahů mezi obrazem funkce a obrazem jejich derivací jsme převedli diferenciální rovnici na lineární rovnici pro obraz. Obrazem řešení bývá obvykle racionální funkce jak si ukážeme níže. Po dosazení počátečních podmínek a jednoduchých úpravách dostáváme

$$I(s)=\frac{\frac{0,001}{s}+i(0)s+i'(0)+Ri(0)}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}=\frac{0,001+i(0)s^2+\left(i'(0)+Ri(0)\right)s}{LCs(s+853,6)(s+146,4)}=\frac{0,005s+0,001}{8.10^{-6}s(s+853,6)(s+146,4)}=\tag{3.291}$$

Po rozkladu na parciální zlomky, při použití zakrývacího pravidla a zpětné Laplaceovy transformace dostáváme časový průběh proudu $i(t)$.

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=0,8826e^{-146,4t}-0,8836e^{-853,6}+0,001\tag{3.292}$$



OBRÁZEK 3.4: *Časový průběh proudu RLC článku po odeznění přechodového děje*

je vhodné zdůraznit, že platí $\lambda_{1|2} = s_{1|2}$, tzn. póly přenosové funkce jsou totožné s vlastním čísly charakteristického polynomu.

Nyní spočítáme časový průběh výstupního napětí podle obrázku (Obr.3.2). Algebraická operátorová obvodová rovnice má tvar

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_2(0)}{s} - \frac{U_0}{s} = 0 \tag{3.293}$$

Výstupní napětí určené přes napěťový dělič:

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \left(\frac{U_0}{s} + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{s}\right)\frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} + \frac{u_C(0)}{s} = \left(\frac{U_0}{s} + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{s}\right)\frac{1}{LC(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{u_C(0)}{s} = \\ &= \frac{u_C(0)}{s} + \frac{Li_L(0)}{LC(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{U_0 - u_C(0)}{LCs(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{Li_L(0)s + U_0 - u_C(0)}{LCs(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{u_C(0)}{s} \end{aligned} \tag{3.294}$$

Po vyčíslení konstant, dostáváme rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{0{,}005s + 10 - 5}{8.10^{-6}s(s+853{,}6)(s+146{,}4)} + \frac{5}{s} = \frac{5}{s} + \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+853{,}6)} + \frac{C}{(s+146{,}4)} = \\ &= \frac{5}{s} + \frac{5}{s} + \frac{0{,}152}{(s+853{,}6)} - \frac{5{,}152}{(s+146{,}4)} \end{aligned} \tag{3.295}$$

Při použití zpětné Laplaceovy transformace dostáváme časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$.

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} = 10 - 5{,}152e^{-146{,}4t} + 0{,}152e^{-853{,}6} \tag{3.296}$$

Jak je vidět z (3.296) dospěli jsme ke stejnému výsledku jako při řešení přes charakteristický polynom.

Nalezení fundamentálního systému řešení homogenní lineární diferenciální rovnice může být značně obtížné, jak si ukážeme na dalších příkladech. Další příklady již nebudou založeny na fyzikálních podkladech, slouží pouze pro ilustraci řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace. Druhý příklad bude o něco náročnější jelikož se bude jednat o nehomogenní diferenciální rovnici ve tvaru:

Příklad číslo:	Zadání:	Výsledek
70	$\ddot{x}(t)' - 2\dot{x}(t) + x(t) = \frac{e^t}{t}, \quad x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = e$	$x(t) = te^t \ln\lvert t\rvert$

Řešení:

Rovnici budeme řešit metodou variací konstant (Lagrangeova metoda), která spočívá v nalezení fundamentálního systému řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice. Obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice lze pak zapsat ve tvaru:

$$\tilde{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{3.297}$$

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(t) = e^{\lambda t} \\ \lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow x_1(t) = e^t,\ x_2(t) = te^t \end{gathered} \tag{3.298}$$

Obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice je:

$$\tilde{x}(t) = c_1 e^t + c_2 te^t \tag{3.299}$$

Partikulární řešení hledáme ve stejném tvaru, místo konstant $c_1, c_2 \in R$ uvažujeme funkce proměnné t.

$$\hat{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t \tag{3.300}$$

Vyjádříme derivace funkce $\hat{x}(t)$ až do řádu n, v našem případě 2. U derivací až do řádu $n-1$ položíme výraz, který obsahuje derivace funkcí $c_i(t)$, roven nule – zjednodušíme tak výpočet derivace následujícího řádu.

$$\begin{gathered} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{c_1'(t)e^t}_{=0} + c_1(t)e^t + \underbrace{c_2'(t)te^t}_{=0} + c_2(t)\left[e^t + te^t\right] \\ \ddot{\hat{x}}(t) = c_1'(t)e^t + c_1(t)e^t + c_2'(t)e^t + c_2(t)e^t + c_2'(t)te^t + c_2(t)\left[e^t + te^t\right] \end{gathered} \tag{3.301}$$

Tato vyjádření dosadíme do diferenciální rovnice a dostaneme:

$$\begin{gathered}
\ddot{\hat{x}}(t)-2\dot{\hat{x}}(t)+\hat{x}(t)=\frac{e(t)}{t} \\
c_1'(t)e^t+c_1(t)e^t+c_2'(t)e^t+c_2(t)e^t+c_2'(t)te^t+c_2(t)\left[e^t+te^t\right]- \\
-2\left\{c_1(t)e^t+c_2(t)\left[e^t+te^t\right]\right\}+c_1(t)e^t+c_2(t)te^t=\frac{e(t)}{t} \\
c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^t+c_2'(t)te^t=\frac{e(t)}{t}
\end{gathered} \tag{3.302}$$

Spolu s rovnosti, které jsme zavedli v průběhu derivování dostaneme soustavu dvou algebraických rovnic pro dvě neznámé funkce $c_1(t), c_2(t)$. Řešíme tedy soustavu algebraických rovnice:

$$\begin{gathered}
c_1'(t)e^t+c_2'(t)te^t=0 \\
c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^t+c_2'(t)te^t=\frac{e(t)}{t}
\end{gathered} \tag{3.303}$$

Determinant této soustavy se nazývá Wronskián a je nenulový, tudíž soustava má právě jedno řešení. Řešení této soustavy můžeme najít například použitím Cramerova pravidla. Spočítáme determinant matice soustavy a determinanty pro jednotlivé neznámé:

$$D=\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & \left(e^t+te^t\right) \end{vmatrix}=e^{2t} \tag{3.304}$$

$$D_{c_1'(t)}=\begin{vmatrix} 0 & te^t \\ \frac{e^t}{t} & \left(e^t+te^t\right) \end{vmatrix}=-e^{2t} \tag{3.305}$$

$$D_{c_2'(t)}=\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{t} \end{vmatrix}=\frac{e^{2t}}{t} \tag{3.306}$$

Funkce $c_1(t), c_2(t)$ spočteme integrací a dosadíme do vyjádření funkce $\hat{x}(t)$.

$$\begin{gathered}
c_1(t)=\int c_1'(t)dt=\int \frac{D_{c_1'(t)}}{D}dt=\int -1dt=-t \\
c_2(t)=\int c_2'(t)dt=\int \frac{D_{c_2'(t)}}{D}dt=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|
\end{gathered} \tag{3.307}$$

Partikulární řešení diferenciální rovnice je tedy:

$$\hat{x}(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)te^t=-te^t+te^t\ln|t|=te^t\left(\ln|t|-1\right),\quad t\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{3.308}$$

Obecné řešení dané nehomogenní diferenciální rovnice lze pak zapsat ve tvaru a určíme jeho derivaci. Počáteční podmínky dosadíme do daného obecného řešení a vyřešíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2.

$$\begin{gathered}
x(t;c_1,c_2) = \tilde{x}(t) + \hat{x}(t) = c_1e^t + c_2te^t + te^t(\ln|t|-1) \\
\dot{x}(t) = c_1e^t + c_2e^t + c_2te^t - e^t - te^t + e^t\ln|t| + te^t\ln|t| + e^t \\
c_1e^t + c_2te^t + te^t(\ln|t|-1) \\
c_1e^t + c_2e^t + c_2te^t - te^t + e^t\ln|t| + te^t\ln|t| \\
0 = c_1e + c_2e - e \\
e = c_1e + 2c_2e - e \\
\left.\begin{aligned} c_1e + c_2e &= e \\ c_1e + 2c_2e &= 2e \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 1 \\
x(t) = te^t + te^t(\ln|t|-1) = te^t\ln|t|
\end{gathered} \tag{3.309}$$

Pokud bychom chtěli řešit diferenciální rovnici pomocí Laplaceovy transformace narazíme na problém, který se skrývá v transformaci pravé strany. Pro přímou i inverzní transformaci musíme umět pracovat s Eulerovo Gama funkcí a Eulerovou konstantou laplaceovým obrazem přirozeného logaritmu. Níže si ukážeme pouze některé kroky řešení diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\ddot{x}(t)' - 2\dot{x}(t) + x(t) = \frac{e^t}{t}, \quad x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = e \tag{3.310}$$

Označme $X(s)$ obraz hledaného řešení $x(t)$ a zobrazme rovnici v Laplaceově transformaci. Použijeme větu obrazu derivace a větu o linearitě a dostaneme:

$$s^2X(s) - e - 2X(s) + X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^t}{t}\right\} \tag{3.311}$$

Laplaceova transformace pravé strany je následující, pro výpočet integrálu použijeme substituční metodu a nesmíme zapomenout na přepočítání mezí integrálu. Díky horní mezi se jedná o nevlastní integrál a jeho určení není jednoduché a proto zde bude uveden pouze výsledný tvar.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t}{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds = \int_s^\infty \mathcal{L}\{e^t\}\,ds = \int_s^\infty \frac{1}{s-1}\,ds = \left|\begin{array}{c} t = s-1 \\ dt = ds \\ s_1 = s \Rightarrow t_1 = s-1 \\ s_2 = \infty \Rightarrow t_1 = \infty \end{array}\right| = \int_{s-1}^\infty \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln(t)\right]_{s-1}^\infty = -\ln(s-1) \tag{3.312}$$

Algebraickými úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} s^2X(s)-e-2X(s)+X(s)&=-\ln(s-1) \\ X(s)\left[s^2-2+1\right]&=e-\ln(s-1) \\ X(s)=\frac{e-\ln(s-1)}{s^2-2+1}&=\frac{e-\ln(s-1)}{(s-1)^2} \end{aligned} \tag{3.313}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme:

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=te^t\ln(t)\quad t\in(0,\infty) \tag{3.314}$$

Jak je vidět, ne vždy nám použití Laplaceovy transformace přinese zjednodušení.

Jak jsme si ukázali, řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty metodou variací konstant může být značně pracné. Ve speciálních případech pro pravou stranu se dá výpočet zjednodušit pomocí kvazipolynomů. Místo řešení soustavy algebraických rovnic pro neznámé funkce $c_1(t), c_2(t)$ a integrování těchto funkcí stačí řešit soustavu lineárních algebraických rovnic pro vhodná neznámá čísla. Při hledání partikulárního řešení zapíšeme polynom s neurčitými koeficienty a dosadíme do diferenciální rovnice. Dostaneme rovnost dvou funkcí. Exponenciální funkce se zkrátí, porovnáme polynomy u stejných goniometrických funkcí (tedy koeficienty u jednotlivých mocnin těchto polynomů) a vyřešíme vzniklou soustavu lineárních algebraických rovnic.

Příklad číslo: 71	Zadání: $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=3e^{-t}\sin t$ $x(0)=3,\ \dot{x}(0)=-2$	Výsledek $x(t)=3e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin t$

Řešení:

Mějme nehomogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, na které si ukážeme tři metody určení jejího řešení.

$$\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=3e^{-t}\sin t\quad x(0)=3,\ \dot{x}(0)=-2 \tag{3.315}$$

Jako první metoda řešení bude použita již zde ukázaná metoda variací konstant. Řešení přidružené homogenní rovnice (asociovaná homogenní rovnice) je:

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=0,\quad x(t)=e^{\lambda t} \\ \lambda^2e^{\lambda t}+2\lambda e^{\lambda t}+5e^{\lambda t}=0 \\ \lambda^2+2\lambda+5=0 \\ \lambda_{1,2}=-1\pm 2j\Rightarrow x_1(t)=e^{-t}\cos 2t,\ x_2(t)=e^{-t}\sin 2t \end{gathered} \tag{3.316}$$

Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny. Obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice je (fundamentální systém):

$$\tilde{x}(t)=c_1e^{-t}\cos 2t+c_2e^{-t}\sin 2t \tag{3.317}$$

Partikulární řešení hledáme ve stejném tvaru, místo konstant $c_1, c_2 \in R$ uvažujeme funkce proměnné t.

$$\hat{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = c_1(t)e^{-t}\cos 2t + c_2(t)e^{-t}\sin 2t \tag{3.318}$$

Vyjádříme derivace funkce $\hat{x}(t)$ až do řádu n, v našem případě 2. U derivací až do řádu $n-1$ položíme výraz, který obsahuje derivace funkcí $c_i(t)$, roven nule – zjednodušíme tak výpočet derivace následujícího řádu.

$$\begin{gathered}\dot{\hat{x}}(t) = \Big(\underbrace{c_1'(t)e^{-t}}_{=0} - c_1(t)e^{-t}\Big)\cos 2t - 2c_1(t)e^{-t}\sin 2t + \Big(\underbrace{c_2'(t)e^{-t}}_{=0} - c_2(t)e^{-t}\Big)\sin 2t + 2c_2(t)e^{-t}\cos 2t \\ \ddot{\hat{x}}(t) = \cos 2t\left[-c_1'(t)e^{-t} + 2c_2'(t)e^{-t} - 3c_1(t)e^{-t} - 4c_2(t)e^{-t}\right] + \\ + \sin 2t\left[-2c_1'(t)e^{-t} - c_2'(t)e^{-t} + 4c_1(t)e^{-t} - 3c_2(t)e^{-t}\right]\end{gathered} \tag{3.319}$$

Tato vyjádření dosadíme do původní diferenciální rovnice a dostaneme

$$\begin{gathered}\ddot{\hat{x}}(t) + 2\dot{\hat{x}}(t) + 5\hat{x}(t) = 3e^{-t}\sin t \\ c_1'(t)\left[-e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t\right] + c_2'(t)\left[2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t\right] = 3e^{-t}\sin t\end{gathered} \tag{3.320}$$

Spolu s rovnosti, které jsme zavedli v průběhu derivování dostaneme soustavu dvou algebraických rovnic pro dvě neznámé funkce $c_1(t), c_2(t)$. Řešíme tedy soustavu algebraických rovnice:

$$\begin{gathered}c_1'(t)e^{-t}\cos 2t + c_2'(t)e^{-t}\sin 2t = 0 \\ c_1'(t)\left[-e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t\right] + c_2'(t)\left[2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t\right] = 3e^{-t}\sin t\end{gathered} \tag{3.321}$$

Determinant této soustavy se nazývá Wronskián a je nenulový, tudíž soustava má právě jedno řešení. Řešení této soustavy můžeme najít například použitím Cramerova pravidla. Spočítáme determinant matice soustavy a determinanty pro jednotlivé neznámé:

$$D = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t & 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t\end{vmatrix} = 2e^{-2t} \tag{3.322}$$

$$D_{c_1'(t)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-t}\sin 2t \\ 3e^{-t}\sin t & 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t\end{vmatrix} = -3e^{-2t}(\sin t)(\sin 2t) \tag{3.323}$$

$$D_{c_2'(t)} = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos 2t & 0 \\ -e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t & 3e^{-t}\sin t\end{vmatrix} = 3e^{-2t}(\cos 2t)(\sin t) \tag{3.324}$$

Funkce $c_1(t), c_2(t)$ spočteme integrací a dosadíme do vyjádření funkce $\hat{x}(t)$. Pro výpočet integrálů musíme použít vzorce pro goniometrické funkce:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right] \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \end{aligned} \tag{3.325}$$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int c_1'(t)dt = \int \frac{D_{c_1'(t)}}{D}dt = \int -\frac{3}{2}(\sin t)(\sin 2t)dt = -\frac{3}{2}\int\left(\frac{\cos t}{2}-\frac{\cos 3t}{2}\right)dt = \frac{\sin 3t - 3\sin t}{4} \\ c_2(t) &= \int c_2'(t)dt = \int \frac{D_{c_2'(t)}}{D}dt = \int \frac{3}{2}(\sin t)(\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}\int\left(-\frac{\sin t}{2}+\frac{\sin 3t}{2}\right)dt = \frac{3\cos t - 3\cos 3t}{4} \end{aligned} \tag{3.326}$$

Partikulární řešení diferenciální rovnice po dosazení a úpravách tedy je:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= c_1(t)e^{-t}\cos 2t + c_2(t)e^{-t}\sin 2t = \frac{\sin 3t - 3\sin t}{4}e^{-t}\cos 2t + \frac{3\cos t - 3\cos 3t}{4}e^{-t}\sin 2t = \\ &= e^{-t}\sin t, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.327}$$

Obecné řešení dané nehomogenní diferenciální rovnice lze pak zapsat ve tvaru:

$$x(t;c_1,c_2) = \tilde{x}(t)+\hat{x}(t) = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\sin 2t + e^{-t}\sin t \tag{3.328}$$

Nyní řešíme počáteční úlohu, určíme derivaci obecného řešení. Počáteční podmínky dosadíme do daného obecného řešení a vyřešíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2.

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = -c_1e^{-t}\cos 2t - 2c_1e^{-t}\sin 2t - c_2e^{-t}\sin 2t + 2c_2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \\ 3 = c_1 \\ -2 = -c_1 + 2c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 0 \end{gathered} \tag{3.329}$$

Řešení soustavy lineárních rovnic je $[c_1 = 3,\ c_2 = 0]$. Dosazením vypočtených hodnot do obecného řešení získáme partikulární řešení zadané diferenciální rovnice.

$$x(t) = 3e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin t \tag{3.330}$$

Nyní stejnou nehomogenní diferenciální rovnici se zadanými počátečními podmínkami díky speciální pravé straně vyřešíme použitím kvazipolynomu. Nejprve nalezneme obecné řešení rovnice a potom použijeme počáteční podmínky pro nalezení řešení partikulárního. Obecné řešení asociované homogenní diferenciální rovnice se určí stejným způsobem jako v předchozím řešení. Fundamentální systém řešení je například (dvě lineárně nezávislá řešení)

$$\left\{e^{-t}\cos 2t,\ e^{-t}\sin 2t\right\} \tag{3.331}$$

$$\tilde{x}(t) = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\sin 2t \tag{3.332}$$

Pravá strana původní diferenciální rovnice má tvar kvazipolynomu:

$$P(t)e^{\alpha t}\sin\beta t + Q(t)e^{\alpha t}\sin\beta t\text{, kde } \alpha=-1,\ \beta=1,\ P(t)=3,\ Q(t)=0\text{,}$$

kořen $\lambda = \alpha \pm \beta j$ je komplexní číslo $\lambda = -1 \pm j$ a toto číslo není kořenem původní charakteristické rovnice asociované homogenní diferenciální rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru:

$$\hat{x}(t) = e^{-t}\left(A\sin t + B\cos t\right) \tag{3.333}$$

První a druhá derivace partikulárního řešení po úpravě je:

$$\begin{gathered} \dot{\hat{x}}(t) = \left[-Ae^{-t} - Be^{-t}\right]\sin t + \left[Ae^{-t} - Be^{-t}\right]\cos t \\ \ddot{\hat{x}}(t) = -2e^{-t}A\cos t + 2e^{-t}B\sin t \end{gathered} \tag{3.334}$$

Dosazením do původní rovnice (3.315) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$3e^{-t}A\sin t + 3e^{-t}B\cos t = 3e^{-t}\sin t \tag{3.335}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých polynomů získáme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{gathered} 3A\sin t + 3B\cos t = 3\sin t \\ 3A = 3 \Rightarrow A = 1 \\ 3B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{gathered} \tag{3.336}$$

Řešení této soustavy rovnic je $(A, B) = (1, 0)$, partikulární řešení rovnice je

$$\hat{x}(t) = e^{-t}\sin t \tag{3.337}$$

Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice je součtem partikulárního řešení a obecného řešení asociované homogenní rovnice

$$x(t; c_1, c_2) = \tilde{x}(t) + \hat{x}(t) = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\sin 2t + e^{-t}\sin t \tag{3.338}$$

Nyní řešíme počáteční úlohu $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 3e^{-t}\sin t \quad x(0) = 3, \dot{x}(0) = -2$, určíme derivaci obecného řešení. Dosazením počátečních podmínek dostáváme soustavu lineárních rovnic, tuto soustavu lineárních algebraických rovnic vyřešíme pro neznámé koeficienty c_1, c_2.

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = -c_1e^{-t}\cos 2t - 2c_1e^{-t}\sin 2t - c_2e^{-t}\sin 2t + 2c_2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \\ 3 = c_1 \\ -2 = -c_1 + 2c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 0 \end{gathered} \tag{3.339}$$

Řešení soustavy lineárních rovnic je $\left[c_1 = 3,\ c_2 = 0\right]$. Dosazením vypočtených hodnot do obecného řešení získáme partikulární řešení zadané diferenciální rovnice.

$$x(t) = 3e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin t \tag{3.340}$$

Jinou použitou metodou pro řešení nehomogenní diferenciální rovnice jsme dospěli ke stejnému závěru. Nyní budeme stejnou rovnici řešit za použití Laplaceovy transformace. Mějme nehomogenní diferenciální rovnici s počátečními podmínkami:

$$\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=3e^{-t}\sin t \quad x(0)=3,\ \dot{x}(0)=-2 \tag{3.341}$$

Označme $X(s)$ obraz hledaného řešení $x(t)$ a zobrazme rovnici v Laplaceově transformaci. Použijeme větu obrazu derivace a větu o linearitě a dostaneme:

$$\begin{gathered}
s^2X(s)-3s+2+2X(s)-6+5X(s)=\mathcal{L}\left\{3e^{-t}\sin t\right\}=\frac{3}{(s+1)^2+1}\\
X(s)\left[s^2+2s+5\right]-3s-4=\frac{3}{(s+1)^2+1}\\
X(s)\underbrace{\left[s^2+2s+5\right]}_{\Downarrow}=3s+4+\frac{3}{(s+1)^2+1}\\
s^2+2s+5=s^2+2s+1+4=(s+1)^2+4\\
X(s)=\frac{3s+4}{(s+1)^2+4}+\frac{3}{\left[(s+1)^2+1\right]\left[(s+1)^2+4\right]}
\end{gathered} \tag{3.342}$$

Jak je vidět jmenovatel, který vznikl vydělením levé strany má stejné póly jako jsou kořeny charakteristické rovnice. Pro použití Laplaceova slovníku musíme rozložit poslední rovnici na součet parciálních zlomků. První člen rozložíme na součet dvou zlomků, které jednoduše najdeme ve slovníku pro zpětnou transformaci. Tvar čitatele jsme zvolili podle jmenovatele, který se skládá z komplexně sdružených kořenů.

$$X(s)=\frac{3s+4}{(s+1)^2+4}+\frac{3}{\left[(s+1)^2+1\right]\left[(s+1)^2+4\right]}=\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}+\frac{As+B}{(s+1)^2+1}+\frac{Cs+D}{(s+1)^2+4} \tag{3.343}$$

Pro první dva členy výrazu snadno nalezneme obraz v časové oblasti. Pro určení neznámých koeficientů použijeme násobící metodu:

$$\begin{gathered}
\frac{3}{\left[(s+1)^2+1\right]\left[(s+1)^2+4\right]}=\frac{As+B}{(s+1)^2+1}+\frac{Cs+D}{(s+1)^2+4}\\
3=(As+B)\left[(s+1)^2+4\right]+(Cs+D)\left[(s+1)^2+1\right]\\
3=s^3(A+C)+s^2(B+D)+s(5A+2B+2C+2D)+5B+2D
\end{gathered} \tag{3.344}$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů od nejvyšší mocniny dostaneme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých, kterou hravě vyřešíme např. Cramerovým pravidlem.

$$\left.\begin{array}{lllllll} A+ & & C & & = & 0 \\ 2A+ & B+ & 2C+ & D & = & 0 \\ 5A+ & 2B+ & 2C+ & 2D & = & 0 \\ & 5B+ & & 2D & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} A = \dfrac{\det D_1}{\det D} = 0 \\ B = \dfrac{\det D_2}{\det D} = 1 \\ C = \dfrac{\det D_3}{\det D} = 0 \\ D = \dfrac{\det D_4}{\det D} = -1 \end{array} \tag{3.345}$$

Po dosazení vypočtených konstant dostáváme

$$\begin{gathered} X(s) = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+4} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\ x(t) = 3e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin t \end{gathered} \tag{3.346}$$

Při vynaloženém minimu úsilí jsme dospěli ke stejným výsledkům jako při řešení nehomogenní diferenciální rovnice variací konstant a nebo použitím kvazipolynomů.

Příklad číslo: 72	Zadání: $\dot{x}_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t), \quad x_1(0) = 1$ $\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t), \quad x_2(0) = -1$	Výsledek $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t + e^t \sin 3t \\ e^t \sin 3t - e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

<u>Řešení:</u>

Poslední příklad, který si uvedeme v této kapitole bude na řešení soustavy diferenciálních rovnic. Řešte soustavu diferenciální rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - 3x_2(t), \quad x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + x_2(t), \quad x_2(0) = -1 \end{aligned} \tag{3.347}$$

Rovnici můžeme řešit třemi způsoby, všechny si zde přehledně ukážeme. Najdeme odpovídající lineární diferenciální rovnici 2.řádu pro funkci $x_1(t)$. Z první diferenciální rovnice vyjádříme funkci $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \frac{-\dot{x}_1(t) + x_1(t)}{3} \tag{3.348}$$

a toto vyjádření dosadíme do druhé diferenciální rovnice. Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{gathered}\left(\frac{-\dot{x}_1(t)+x_1(t)}{3}\right)' = 3x_1(t)+\frac{-\dot{x}_1(t)+x_1(t)}{3}\\ -\frac{\ddot{x}_1(t)}{3}+\frac{\dot{x}_1(t)}{3} = 3x_1(t)+\frac{-\dot{x}_1(t)+x_1(t)}{3}\\ \ddot{x}_1(t)-2\dot{x}_1(t)+10x_1(t)=0.\end{gathered} \tag{3.349}$$

Dosazením bodu 1 do první diferenciální rovnice dopočítáme počáteční podmínku:

$$\dot{x}_1(0)=x_1(0)+3x_2(0)=1+3=4 \tag{3.350}$$

Dostáváme tedy diferenciální rovnici 2. řádu s počátečními podmínkami,

$$\ddot{x}_1(t)-2\dot{x}_1(t)+10x_1(t)=0,\quad x_1(0)=1,\quad \dot{x}_1(0)=5 \tag{3.351}$$

která má řešení:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1(t)-2\dot{x}_1(t)+10x_1(t)=0,\quad x_1(t)=e^{\lambda t}\\ \lambda^2e^{\lambda t}-2\lambda e^{\lambda t}+10e^{\lambda t}=0\\ \lambda^2-2\lambda+10=0\\ \lambda_{1,2}=1\pm 3j \Rightarrow x_1(t)=c_1e^t\cos 3t+c_2e^t\sin 3t,\quad t\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{3.352}$$

Konstanty c_1 a c_2 určíme dosazením počátečních podmínek do rovnice $x_1(t)$ a $\dot{x}_1(t)$. Derivace rovnice $x_1(t)=c_1e^t\cos 3t+c_2e^t\sin 3t$ je

$$\dot{x}_1(t)=c_1e^t\cos 3t-3c_1e^t\sin 3t+c_2e^t\sin 3t+3c_2e^t\cos 3t \tag{3.353}$$

dosazením počátečních podmínek získáme rovnici o dvou neznámých pro hledané konstanty c_1 a c_2,

$$\begin{gathered}1=c_1\\ 4=c_1+3c_2 \Rightarrow c_2=1\end{gathered} \tag{3.354}$$

Řešením rovnice je:

$$x_1(t)=e^t\cos 3t+e^t\sin 3t \tag{3.355}$$

Funkci $x_2(t)$ dopočítáme dosazením do jejího vyjádření (které jsme použili na začátku pro její eliminaci):

$$x_1(t)=e^t\cos 3t+e^t\sin 3t \tag{3.356}$$

$$\begin{gathered}x_2(t)=\frac{-\dot{x}_1(t)+x_1(t)}{3}=\frac{-\left(e^t\cos 3t-3e^t\sin 3t+e^t\sin 3t+3e^t\cos 3t\right)+e^t\cos 3t+e^t\sin 3t}{3}=\\ =\frac{3e^t\sin 3t-3e^t\cos 3t}{3}=e^t\sin 3t-e^t\cos 3t,\quad t\in\mathbb{R}\end{gathered} \tag{3.357}$$

Vektorový zápis řešení soustavy diferenciálních rovnic je:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t \sin 3t + e^t \cos 3t \\ e^t \sin 3t - e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.358}$$

Při řešení předcházející úlohy jsme nemuseli dopočítávat počáteční podmínku $\dot{x}_1(0)$. Mohli jsme najít obecné řešení pro funkci $x_1(t)$, vyjádřit obecné řešení pro funkci $x_2(t)$ (dostali bychom obecné řešení soustavy) a až poté dosazovat počáteční podmínky, jak si ukážeme níže. Vektorový zápis obecného řešení je:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \sin 3t \\ c_1 e^t \sin 3t - c_2 e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.359}$$

dosazením počátečních podmínek dostáváme vektorový zápis rovnice pro výpočet konstanty c_1 a c_2:

$$\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.360}$$

Dosazením těchto konstant do rovnice (3.359) dostaneme stejný výsledek jako (3.354).

Druhá metoda spočívá v řešení charakteristické rovnice matice soustavy a v nalezení vlastních vektorů příslušných vlastních čísel. Budeme tedy řešit stejnou soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami. Charakteristická rovnice matice soustavy je:

$$\begin{gathered}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \\ \det\left|\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|=0 \\ \det\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)^2+9=\lambda^2-2\lambda+10=0\end{gathered} \tag{3.361}$$

Pro matice velikosti 2x2 můžeme psát $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\lambda^2-tr\mathbf{A}\lambda+\det|\mathbf{A}|$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice příslušné dimenze, $tr\mathbf{A}$ je stopa matice soustavy (součet prvků na hlavní diagonále). Výsledný polynom se nazývá charakteristickým polynomem dané matice. Kořeny charakteristické rovnice se nazývají vlastní čísla dané matice. Pro každé vlastní číslo matice A nazýváme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{c}=\mathbf{0} \tag{3.362}$$

charakteristickou soustavou a její nenulová řešení vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ příslušnými vlastnímu číslu λ.

Matice charakteristické soustavy je singulární, tato soustava má tedy nenulová řešení, takže každému vlastnímu číslu existují vlastní vektory.

Vlastní čísla charakteristické matice soustavy jsou $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j$. Stačí uvažovat jedno z dvojice komplexně sdružených čísel $\lambda_1 = 1+3j$. Sestavíme charakteristickou soustavu a najdeme bázi jejího řešení:

$$\lambda_1 = 1+3j \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3j & -3 & 0 \\ 3 & -3j & 0 \end{array}\right) \tag{3.363}$$

vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu λ_1 je $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}\right\}$. Příslušné řešení soustavy diferenciálních rovnice uvažujeme v komplexním oboru:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{(1+3j)t} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t + je^t \sin 3t \\ -je^t \cos 3t + e^t \sin 3t \end{pmatrix} \tag{3.364}$$

Fundamentální matice řešení obsahuje za jednotlivé sloupce reálnou a imaginární část této vektorové funkce. Obecné řešení dostaneme jejich lineárními kombinacemi:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t & e^t \sin 3t \\ e^t \sin 3t & -e^t \cos 3t \end{pmatrix} \tag{3.365}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t).\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \sin 3t \\ c_1 e^t \sin 3t - c_2 e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \tag{3.366}$$

dosazením počátečních podmínek dostáváme vektorový zápis rovnice pro výpočet konstanty c_1 a c_2:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.367}$$

dosazením do obecného řešení dostáváme konečné řešení soustavy diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t + e^t \sin 3t \\ e^t \sin 3t - e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.368}$$

Poslední způsob řešení je pomocí Laplaceovy transformace. Označme $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$, $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$ a za použití věty o linearitě a obrazu derivace zobrazíme soustavu v Laplaceově transformaci. Dostaneme

$$\begin{aligned} sX_1(s) - 1 &= X_1(s) - 3X_2(s) \\ sX_2(s) + 1 &= 3X_1(s) + X_2(s) \end{aligned} \tag{3.369}$$

Po úpravě dostaneme soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} (s-1)X_1(s)+3X_2(s)&=1 \\ -3X_1(s)+(s-1)X_2(s)&=-1 \end{aligned} \tag{3.370}$$

Přepsáním soustavy rovnic do maticové podoby a použitím Cramerova pravidla dostáváme řešení této soustavy ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} p-1 & 3 \\ -3 & p-1 \end{pmatrix}\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_1(s)&=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 3 \\ -3 & p-1 \end{vmatrix}}=\frac{p-1+3}{(p-1)^2+9}=\frac{p-1}{(p-1)^2+9}+\frac{3}{(p-1)^2+9} \\ X_2(s)&=\frac{\begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 3 \\ -3 & p-1 \end{vmatrix}}=\frac{p-1-3}{(p-1)^2+9}=\frac{p-1}{(p-1)^2+9}-\frac{3}{(p-1)^2+9} \end{aligned} \tag{3.371}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostaneme:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left\{X_1(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^t\cos 3t+e^t\sin 3t\right\} \\ x_1(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left\{X_1(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^t\sin 3t-e^t\cos 3t\right\} \\ \mathbf{x}(t)&=\begin{pmatrix} e^t\cos 3t+e^t\sin 3t \\ e^t\sin 3t-e^t\cos 3t \end{pmatrix},\quad t\in\left\langle 0,\infty\right) \end{aligned} \tag{3.372}$$

Výsledek se opět shoduje s předešlými výsledky z různých způsobů řešení.

Jak je vidět při řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace nemusíme nic vědět o fundamentálním systému nebo vektorovém prostoru. Stačí nám pouze znalosti ohledně řešení kvadratických rovnic, soustav rovnic o více neznámých a rozkladu racionálních funkcí na parciální zlomky. Více o řešení diferenciálních rovnice se lze dočíst v [8].

Není nutné umět řešit diferenciální rovnice tolika způsoby jelikož jejich řešení není zahrnuto v rámcových vzdělávacích programech pro Váš studijní obor. Tato podkapitola měla za cíl ukázat jednoduchost použití Laplaceovy transformace při řešení určitých typů diferenciálních rovnic oproti klasickému řešení.

Kapitola 4

Časové charakteristiky

V této kapitole bude nejprve probrána přenosová funkce a v dalších podkapitolách na ní navážou časové charakteristiky jako je impulsní a přechodová charakteristika. Hlavní náplní této kapitoly je získání aproximačního přenosu z naměřené přechodové charakteristiky. Pro porozumění dané problematiky aproximace přechodové charakteristiky je však nutná znalost základních vztahů a výrazů, které popisují přechodovou charakteristiku, ale dají se i odečíst z přenosové funkce.

4.1 Přenosová funkce

4.2 Impulsní charakteristik

4.3 Přechodová charakteristika

4.4 Identifikace přenosu z přechodové charakteristiky

Pro analýzu a syntézu regulačních obvodů je dobré znát základní popis zkoumané regulační soustavy. Jednou z metod jak získat popis regulované soustavy je identifikace aproximačního přenosu z naměřené přechodové charakteristiky. Níže použité metody nejsou jedinými metodami, které lze pro identifikaci přenosu použít. Pro ulehčení práce při výpočtu aproximačního přenosu byl vytvořen program s názvem Identifikace 2013, který naleznete na přiloženém CD. Program získává aproximační přenos podle metod, které jsou uvedeny v literatuře.

- Aproximace přenosu metodou prof. Strejce [9]
- Aproximace přenosu s relativním tlumením v intervalu $\left(0,1\right\rangle$ [3, 6]

4.4.1 Program Identifikace 2013

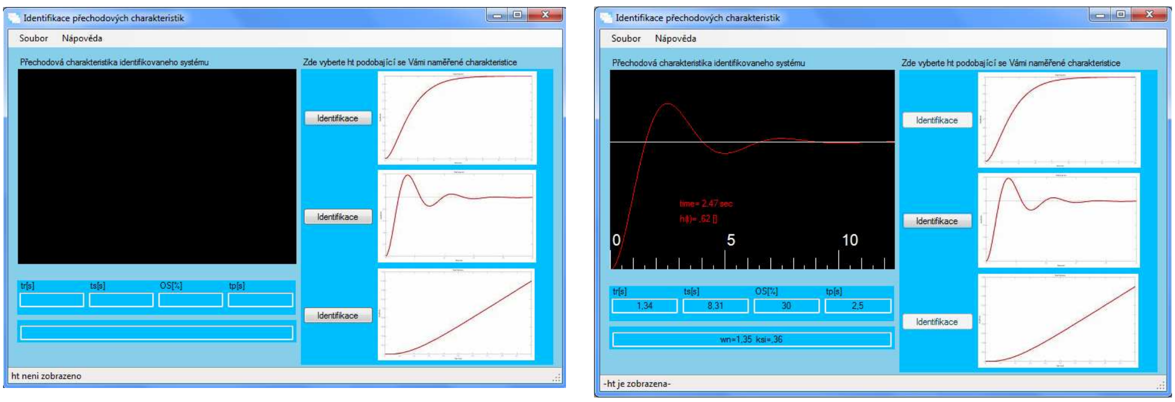
Program byl vytvořen pro ulehčení získání aproximačního přenosu z přechodové charakteristiky. Podle metod vypočítává aproximační přenosy ze zadaných údajů, které uživatel získá z naměřené přechodové charakteristiky. Pro vytvoření aplikace byl zvolen programovací jazyk C#, jako programovací prostředí byl zvolen softwarový produkt [17]. Aplikace je určena pro operační systém Windows, na kterém je nainstalován .NET Framework ve verzi minimálně 4.5. Program byl otestován na operačních systémech Windows XP, Windows Vista, Windows 7. Program byl podroben intenzivnímu testování a měl by odchytit všechny nestandardní vstupy, které může uživatel zadat. Zároveň program dokáže rozpoznat nesmyslně zadané údaje a uživatele upozornit na vzniklou situaci. Uživatel pro získání aproximačního přenosu nepotřebuje žádné hlubší znalosti teorie automatického řízení, program mu sám říká, kterou hodnotu od uživatele očekává a jak ji má uživatel získat. Program obsahuje nápovědu, kterou si může uživatel nechat zobrazit a řídit se instrukcemi, které jsou v nápovědě obsažené.

4.4.1.1 Popis programu

Po spuštění programu Identifikace_2013.exe se nám zobrazí základní úvodní obrazovka s názvem programu, s verzí a logem univerzity. Tato obrazovka je zobrazena 5 sekund.

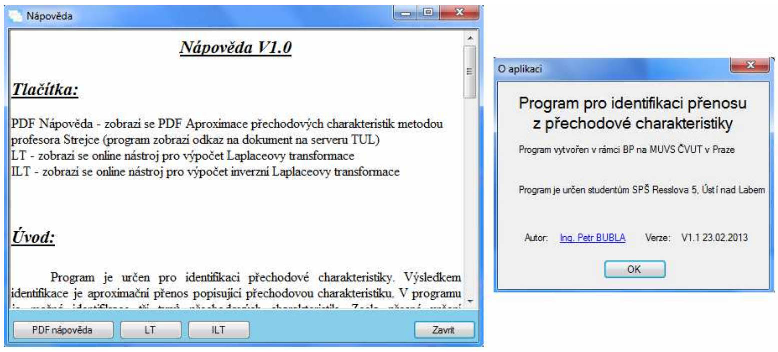
OBRÁZEK 4.X: *Úvodní obrazovka programu Identifikace_2013*

Po uplynutí času 5 sekund se nám zobrazí hlavní okno celé aplikace. Hlavnímu oknu dominuje okno pro zobrazení získané přechodové charakteristiky. Hlavní okno jako jediné umožňuje nastavení uživatelské velikosti, zároveň je ho možné maximalizovat a minimalizovat na lištu. Na horní liště si může uživatel zobrazit nápovědu a okno o aplikaci. Stiskem křížku se aplikace uzavře (uživatel bude v dialogovém oknu vyzván k potvrzení uzavření aplikace). Všechny okna otevřené z hlavního okna jsou zobrazeny do středu obrazovky. V pravé části hlavního ona si uživatel zvolí jaký typ přechodové charakteristiky chce identifikovat. Při stisknutí jednoho ze tří tlačítek bude otevřeno okno, kde bude uživatel vyzván, aby vložit hodnoty odečtené z přechodové charakteristiky. Pokud má uživatel otevřeno nějaké okno pro získání aproximačního přenosu, ostatní tlačítka nelze stisknout. Po výpočtu aproximačního přenosu je v hlavním okně zobrazena přechodová charakteristika a hlavní charakteristická čísla charakteristiky, popřípadě aproximační přenos. Zobrazené údaje jsou závislé na typu přechodové charakteristiky.

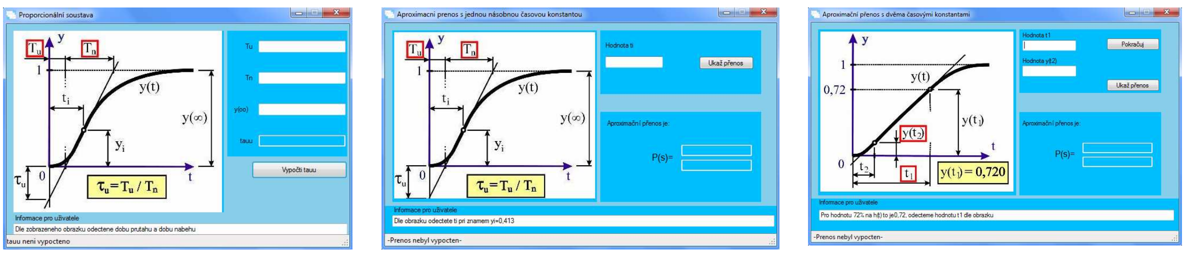


OBRÁZEK 4.X: *Hlavní okno programu Identifikace_2013*

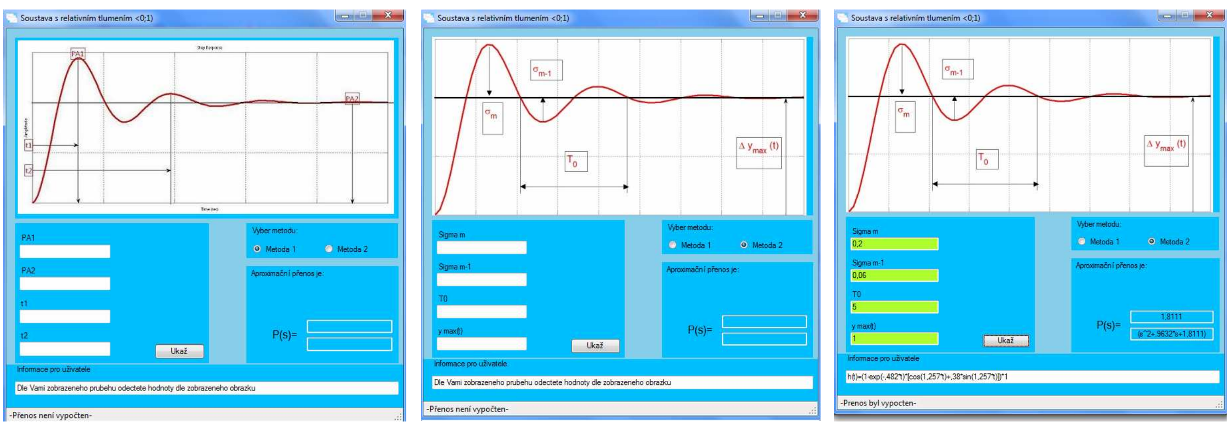
Jak již bylo napsáno po stisku jednoho ze tří tlačítek dojde k otevření příslušného okna, kde bude uživatel vyzván k zadání hodnot. Po stisknu tlačítka Ukaž přenos dojde ke kontrole zadaných hodnot. V případě, že program vyhodnotí zadané hodnoty jako nesmyslné, upozorní uživatele na zadaný údaj, který se musí změnit (příslušné pole zčervená, objeví se výstražný dialogový box, do informativního okna se vypíše hláška s popisem chyby a její nápravou). Jestliže jsou všechny zadané údaje v požadovaném formátu spočte se aproximační přenos, inverzní LT, charakteristické údaje přechodové charakteristiky a nakonec dojde k vykreslení přechodové charakteristiky. Okno pro získání aproximačního přenosu s kmitavou složkou obsahuje dvě výpočtové metody a je na uživateli, kterou si vybere. Níže jsou zobrazeny sceeny jednotlivých obrazovek.



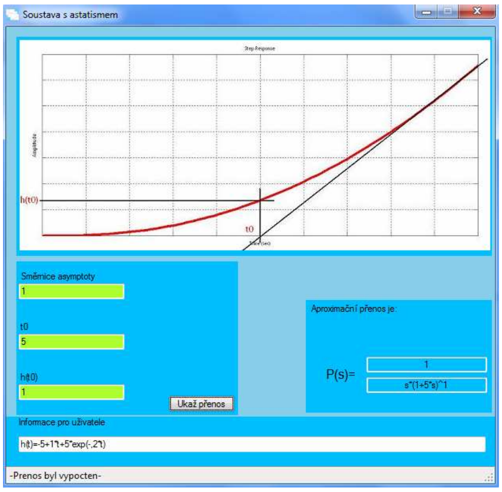
OBRÁZEK 4.X: *Okno s nápovědou*



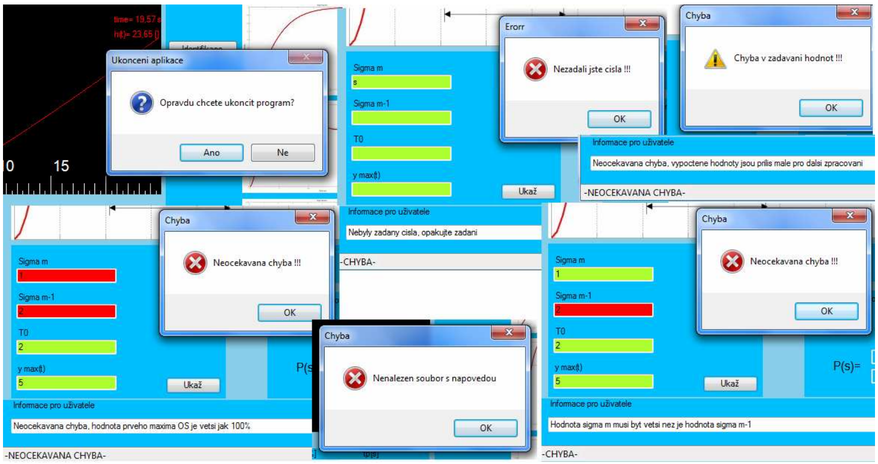
OBRÁZEK 4.X: *Získání aproximačního přenosu soustavy bez kmitavé složky*



OBRÁZEK 4.X: *Získání aproximačního přenosu soustavy s kmitavou složkou*



OBRÁZEK 4.X: *Získání aproximačního přenosu soustavy s astatismem*



OBRÁZEK 4.X: *Chybová dialogová okna*

4.4.2 Příklady na získání aproximačního přenosu

Kapitola 5

Závěr

V práci se podařilo splnit všechny vytyčené cíle a body ze zadání. V rámci této práce byl proveden popis systému modelu spojených nádrží, který je umístěn v laboratoři K23 Katedry řídicí techniky. Na základě popisu systému byl odvozen nelineární matematický model, který byl ve vhodně zvoleném pracovním bodě linearizován. S tímto lineárním modelem, který věrohodně popisuje chování modelu spojených nádrží v okolí zvoleného pracovního bodu, byla provedena důkladná analýza systému, ze které bylo zjištěno, že nemusíme očekávat žádné problémy s řízením výšek hladin v obou nádržích. Následovně pro linearizovaný model bylo navrženo šest typů regulátorů.

Závěr:

Na Laplaceovu transformaci se můžeme dívat jako na užitečný nástroj pro řešení nejen diferenciálních rovnic. Tato kapitola měla za cíl aby jste se nástroj naučili snadno používat a aplikovat na teorii automatického řízení. Širší souvislosti Vám budou podány v rámci matematické analýzy na vysokých školách.

Závěr
Tato práce nepokryla veškerou látku, která je probírána v předmětu … v oboru na škole … . V budoucnu je možné ve spolupráci s Votrubcem na tuto práci navázat a vytvořit další typové příklady a kapitoly.

Tato práce neměla za cíl přinést nějaké nové závěry v teorii automatického řízení. Měla za cíl zjednodušit pochopení látky pro studenty SPSUL, kteří se s touto problematikou zaobírají v předmětu automatizační technika.

Lapleceova transformace je významný nástroj popisu, studia či analýzy jevů a vlastností u nichž hrají důležitou úlohu lineární diferenciální rovnice. Laplaceova transformace není jen další v řadě metod určených k řešení lineárních diferenciálních rovnic, často zásadním způsobem ovlivňuje způsob pohledu na tyto jevy, například v lineárních obvodech. V pozadí termínů, jakými jsou například přenosová funkce, obrazová impedance, admitance, tak typických v teorii obvodů a lineárních systémů, je nepochybně nutné vidět Laplaceovu transformaci.

Výpočet vzorů v Laplaceově transformaci a užitá tabulek, popisujících Laplaceovu transformaci, včak vyžaduje jistou rutinu, kterou je nutné si alespoň v jednoduchých případech nacvičit.

Literatura

A Knižní publikace a elektronické materiály

[1] ANTSAKLIS, P.J., MICHEL, A.N. *A Linear Systems Primer.* Birkhauser, 2007. ISBN-13: 978-0-8176-4460-4.

[2] FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., EMANI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems.* Prentice Hall, 2006. ISBN 0-13-149930-0

[3] KATEDRA AUTOMATIZAČNÍ TECHNIKY A ŘÍZENÍ VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA. *Metody identifikace systémů z přechodových charakteristik.* [online]. Dostupné z WWW:〈 http://www.352.vsb.cz/uc_texty/Identifikace/str/metody.htm#ma2 〉. [cit. 15-01-2013].

[4] KATEDRA MATEMATIKY FEL ČVUT. *Math Tutor – Integral-Theory-Integration Methods – Rozklad na parciální zlomky, přehled metod.* [online]. Dostupné z WWW:〈 http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3db3i.htm, http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc4db3k.htm 〉. [cit. 11-10-2012].

[5] KRAJNÍK, E. *Základy maticového počtu.* ČVUT Praha 2006. ISBN: 80-01-03376-7.

[6] NOVÁK, J. *Aproximace kmitavého členu druhého řádu.* [online]. UTB Fakulta aplikované informatiky Zlín. Dostupné z WWW:〈 http://195.178.89.122/CAAC_PHP/CAAC/cesky/identifikace/apr_ksvr/apr_ksvr.php 〉. [cit. 20-12-2012].

[7] ŠVARC, I. *AUTOMATIZACE Automatické řízení.* VUT Brno 2002. ISBN: 80-214-2087-1.

[8] TKADLEC, J. *DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, Laplaceova transformace.* ČVUT Praha 2005. ISBN: 80-01-03207-8.

[9] ÚSTAV MECHATRONIKY A TECHNICKÉ INFORMATIKY (MTI) TUL. *Aproximace přechodových charakteristik metodou prof. Strejce.* [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://www.mti.tul.cz/files/zky/Strejc.pdf ⟩. [cit. 4-01-2013].

B Internetové stránky

[10] MICROSOFT CORPORATIONS, INC. *Nápověda k Visual Studio Express 2012.* [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://msdn.microsoft.com/en-us/library/vstudio/dd831853%28v=vs.110%29.aspx⟩.

[11] THE MATHWORKS, INC. *Nápověda k produktům Matlab a Simulink.* [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://www.mathworks/products⟩.

[12] WOLFRAMALPHA. *Computational knowledge engine.(Výpočet Laplaceovy transformace)* [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse+Laplace+transform+1%2F%28s^2%2B1%29⟩.

C Seznam použitého software

[13] ADOBE ACROBAT. Ver. 7.0.1. Adobe Systems, Inc. 2006.

[14] INKSPACE. Ver. 0.47 r22583. Open Source, 2009.

[15] MATLAB. Ver. 7.1.0.246 (R14) Service pack 3. The MathWorks, Inc. 2005.

[16] MICROSOFT OFFICE 2003. Ver. 10.2627.2625. Microsoft Corporation 2003.

[17] MICROSOFT VISUAL STUDIO EXPRESS 2012 FOR WINDOWS DESKTOP. Ver. 11.0.5027.42 VSLRSTAGE. Microsoft Corporation 2012.

[18] SIMULINK. Ver. 6.3 (R14 SP3). The MathWorks, Inc. 2005.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

K této diplomové práci je přiloženo CD, na kterém je uložen vlastní text diplomové práce ve formátu PDF, příloha k tomuto textu se zpracovanými daty z jednotlivých měření při regulaci výšek hladin ve formátu PDF. Dále jsou na CD umístěny schématické obrázky, data z jednotlivých měření, většina vytvořených skriptů pro výpočet regulátorů a mnoho dalšího.

1 Seznam adresářů

- /doc
- /schematicke_obrazky
- /fotodokumentace
- /ident_analyza
- /PIDf_regulace
- /LQG_regulace
- /rozvazbovaci_regulace
- /Hinf_regulace

2 Obsah adresářů

- /doc
    - tento text diplomové práce ve formátu *.pdf
    - příloha k tomuto textu ve formátu *.pdf

- /schematicke_obrazky
    - vytvořené schématické obrázky ve formátu *.png
- /fotodokumentace
    - vytvořené fotky reálného systému ve formátu *.jpg
- /ident_analyza
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /PIDf_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /LQG_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /rozvazbovaci_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /Hinf_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat