NDICE

3 Conjuntos convexos

DEFINICIONES BASICAS

onceptos relacionados con los conjuntos convexos predominan de tal
a en la teoría de la optimación, que es esencial que el estudiante conozca
opiedades básicas. Este apéndice es un resumen de las propiedades más
tantes.

finición. Un conjunto C en E^n es *convexo* si para toda $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ y todo
mero real α, $0<\alpha<1$, el punto $\alpha\mathbf{x}_1+(1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in C$.

ta definición se puede interpretar geométricamente en el sentido de que
ijunto es convexo si, dados dos puntos de un conjunto, todo punto del
nto de recta que une estos dos puntos es también un miembro del
ito. Esto se ilustra en la figura B.1.

proposición siguiente muestra que ciertas operaciones de conjuntos
das preservan la convexidad.

*posición 1. Los conjuntos convexos de E^n satisfacen las relaciones
ientes:*

Si C es un conjunto convexo y β es un número real, el conjunto

$$\beta C = \{\mathbf{x}:\mathbf{x} = \beta\mathbf{c},\ \mathbf{c}\in C\}$$

es convexo.

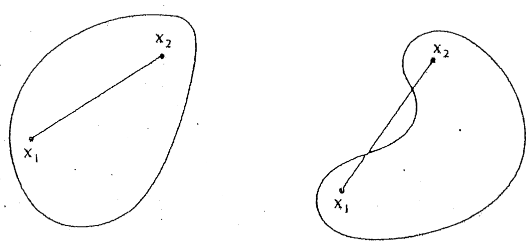

Fig. B.1 Convexidad

2) *Si C y D son conjuntos convexos, el conjunto*

$$C + D = \{\mathbf{x}:\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{d},\ \mathbf{c}\in C,\ \mathbf{d}\in D\}$$

es convexo.

3) *La intersección de cualquier serie de conjuntos convexos es convexa.*

Las demostraciones de estas tres propiedades se obtienen directamente de la definición de un conjunto convexo y se dejan al lector. Las propiedades se ilustran en la figura B.2.

Otro concepto importante es el de formar el menor conjunto convexo que contiene a un conjunto dado.

Definición. Sea S un subconjunto de E^n. La *envoltura convexa* de S, denotada por co(S), es el conjunto que es la intersección de todos los conjuntos convexos que continen a S. La *envoltura convexa cerrada* de S se define como el cierre de co(S).

Por último, se concluye esta sección definiendo un *cono* y un *cono convexo*. Un cono convexo es una clase especial de conjunto convexo que se presenta con frecuencia.

Definición. Un conjunto C es un *cono* si $\mathbf{x}\in C$ implica $\alpha\mathbf{x}\in C$ para toda $\alpha>0$. Un cono que también es convexo es un *cono convexo*.

En la figura B.3 se muestran algunos conos. Su propiedad básica es que si un punto $\mathbf{x}$ pertenece a un cono, entonces toda la semirrecta que comience en el origen y pase por el punto (pero no el origen) también debe pertenecer al cono.

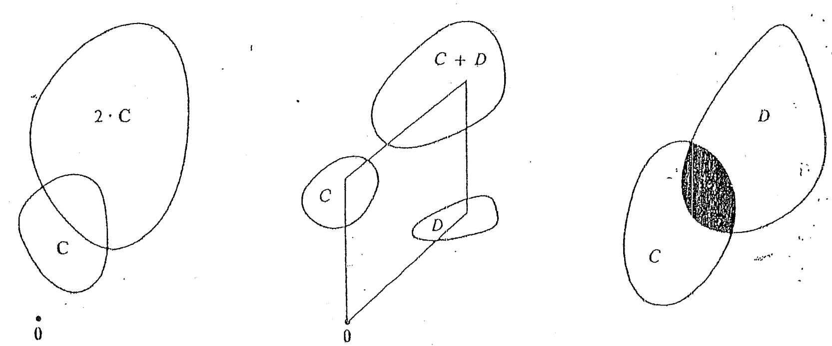

Fig. B.2 Propiedades de conjuntos convexos

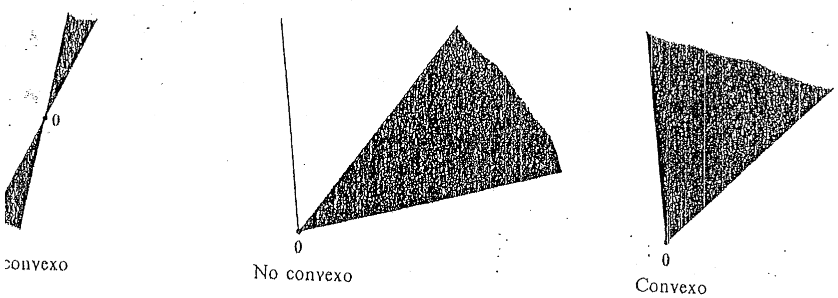

Fig. B.3 Conos

HIPERPLANOS Y POLITOPOS

o más importante de conjunto convexo (además de los puntos aislados) iiperplano. Los hiperplanos predominan en toda la teoría de optimación, ıtándose en la forma de multiplicadores de Lagrange, teoría de dualidad ulos del gradiente

ı definición más natural de un hiperplano es la generalización lógica de edades geométricas de un plano en tres dimensiones. Se comienza dando efinición geométrica. Sin embargo, para los cálculos y para una descrip- oncréta de los hiperplanos hay una definición algebraica equivalente más Jna parte importante de esta sección se dedica a probar esta equivalencia.

finición. Un conjunto V de E^n se dice que es una *variedad lineal*, si, dos cualesquiera x_1, $x_2 \in V$, se tiene $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in V$ para todos los meros reales λ.

≠0 ⇒ garantiza indep. lineal.

sérvese que la única diferencia entre la definición de una variedad lineal conjunto convexo es que en una variedad lineal toda la recta que pasa s puntos cualesquiera, en lugar de sólo el segmento de recta entre ellos, star en el conjunto. Así, en tres dimensiones, las variedades lineales no son puntos, rectas, planos bidimensionales y todo el espacio. En l, es evidente que se puede hablar de la dimensión de una variedad Así, por ejemplo, un punto es una variedad lineal de dimensión cero y cta es una variedad lineal de dimensión uno. En el caso general, se hallar la dimensión de una variedad lineal de E^n trasladándola (movién- le modo que contenga al origen y, después determinando la dimensión ıjunto resultante, que es entonces un subespacio de E^n.

inición. Un *hiperplano* de E^n es una variedad lineal $(n-1)$-dimen- ıal.

observa que los hiperplanos generalizan el concepto de un plano nsional en el espacio tridimensional. Se pueden considerar como las ıdes lineales más grandes en un espacio que no sea todo el espacio.

Ahora, se relaciona esta definición geométrica abstracta con una algebraica.

Proposición 2. Sea $\mathbf{a}$ *un vector columna n-dimensional distinto de cero, y sea* c *un número real. El conjunto*

$$H = \{\mathbf{x} \in E^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$$

es un hiperplano de E^n.

Demostración. Se obtiene directamente de la linealidad de la ecuación $\mathbf{a}^T\mathbf{x}=c$ que H es una variedad lineal. Sea $\mathbf{x}_1$ cualquier vector en H. Trasladando por $-\mathbf{x}_1$ se obtiene el conjunto $M=H-\mathbf{x}_1$, que es un subespacio lineal de E^n. Este subespacio está formado por todos los vectores $\mathbf{x}$ que satisfacen $\mathbf{a}^T\mathbf{x}=0$; en otras palabras, todos los vectores ortogonales a $\mathbf{a}$. Evidentemente, esto es un subespacio $(n-1)$-dimensional. ∎

Proposición 3. Sea H un hiperplano de E^n*. Entonces, existen un vector distinto de cero n-dimensional y una constante c tal que*

$$H = \{\mathbf{x} \in E^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x}_1 \in H$ y trasládese por $-\mathbf{x}_1$, obteniendo el conjunto $M=H-\mathbf{x}_1$. Como H es un hiperplano, M es un subespacio $(n-1)$-dimensional. Sea $\mathbf{a}$ cualquier vector distinto de cero ortogonal a este subespacio, es decir, $\mathbf{a}$ pertenece al subespacio unidimensional $M^{\perp}$. Es evidente que $M=\{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x}=0\}$. Al hacer $c=\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1$, se observa que si $\mathbf{x}_2 \in H$ se obtiene $\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1 \in M$ y así, $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2-\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1=0$, lo cual implica $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2=c$. Así, $H \subset \{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x}=c\}$. Como H es, por definición, de dimensión $n-1$ y $\{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x}=c\}$ es de dimensión $n-1$ por la proposición 2, estos dos conjuntos deben ser iguales. ∎

Al combinar las proposiciones 2 y 3 se observa que un hiperplano es el conjunto de soluciones a una sola ecuación lineal. Esto se ilustra en la figura B.4. Ahora, se utilizan hiperplanos para elaborar otra clase importante de conjuntos convexos.

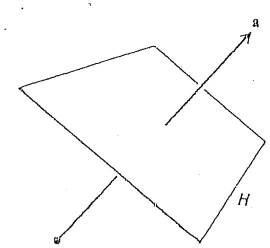

Figura B.4

efinición. Sea $\mathbf{a}$ un vector distinto de cero en E^n y sea c un número real. orrespondientes, al hiperplano $H=\{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x}=c\}$ están los *semiespacios rrados positivo y negativo*

$$H_+ = \{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geqslant c\}$$
$$H_- = \{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant c\}$$

los *semiespacios abiertos positivo y negativo*

$$\mathring{H}_+ = \{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x} > c\}$$
$$\mathring{H}_- = \{\mathbf{x}:\mathbf{a}^T\mathbf{x} < c\}.$$

fácil observar que los semiespacios son conjuntos convexos y que la de H_+ y H_- es espacio total.

finición. Un conjunto que puede expresarse como la intersección de número finito de semiespacios cerrados es un *polítopo convexo.*

observa que los polítopos convexos son los conjuntos obtenidos como ilia de soluciones a un conjunto de desigualdades lineales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} &\leqslant b_1 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} &\leqslant b_2 \\ &\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\mathbf{x} &\leqslant b_m, \end{aligned}$$

ada desigualdad individual define un semiespacio y la familia solución ıtersección de estos semiespacios. (Si alguna $\mathbf{a}_i=\mathbf{0}$, el resultado todavía de expresar, como puede comprobar el lector, como la intersección de nero finito de semiespacios.)

la figura B.5 se representan varios polítopos. Se observa que un o puede ser vacío, acotado o no acotado. Es de especial interés el caso polítopo acotado no vacío y se distinguirá este caso por la siguiente:

inición. Un polítopo acotado no vacío se denomina *poliedro.*

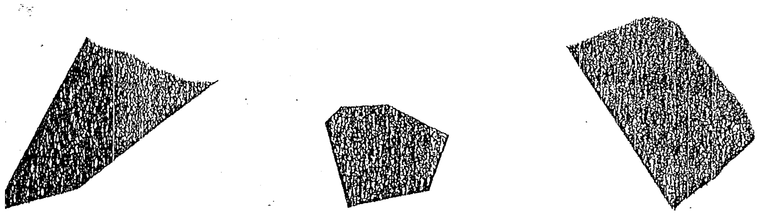

Fig. B.5 Polítopos

B.3 HIPERPLANOS SEPARADORES Y DE APOYO

Los dos teoremas de esta sección son quizá los resultados más importantes relacionados con la convexidad. Geométricamente, el primero dice que dado un punto exterior a un conjunto convexo se puede cruzar un hiperplano por el punto que no toca al conjunto convexo. El segundo, que es un caso límite del primero, dice que dado un punto frontera de un conjunto convexo, hay un hiperplano que contiene al punto frontera y al conjunto convexo de uno de sus lados.

Teorema 1. Sean C un conjunto convexo, e $\mathbf{y}$*, un punto exterior al cierre de C. Entonces, existe un vector* $\mathbf{a}$ *tal que* $\mathbf{a}^T\mathbf{y}<\inf_{\mathbf{x}\in C} \mathbf{a}^T\mathbf{x}$.

Demostración. Sea

$$\delta = \inf_{\mathbf{x}\in C} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 0.$$

Existe $\mathbf{x}_0$ en la frontera de C tal que $|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}|=\delta$. Esto resulta de que la función continua $f(\mathbf{x})=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ alcanza su mínimo sobre cualquier conjunto cerrado y acotado, y evidentemente sólo es necesario considerar $\mathbf{x}$ en la intersección del cierre de C y la esfera de radio 2δ con centro en $\mathbf{y}$.

Se mostrará que al hacer $\mathbf{a}=\mathbf{x}_0-\mathbf{y}$ se satisfacen las condiciones del teorema. Sea $\mathbf{x}\in C$. Para cualquier α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, el punto $\mathbf{x}_0+\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\in\bar{C}$ y, así

$$|\mathbf{x}_0+\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)-\mathbf{y}|^2 \geqslant |\mathbf{x}_0-\mathbf{y}|^2.$$

Al ampliar

$$2\alpha(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\alpha^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 \geqslant 0.$$

Así, al considerar esto cuando $\alpha\to 0+$, se obtiene

$$(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \geqslant 0$$

o

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T\mathbf{x} \geqslant (\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T\mathbf{x}_0 &= (\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T\mathbf{y}+(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}_0-\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}_0-\mathbf{y})^T\mathbf{y}+\delta^2. \end{aligned}$$

Al hacer $\mathbf{a}=\mathbf{x}_0-\mathbf{y}$ se prueba el teorema. ∎

La interpretación geométrica del teorema 1 es que, dado un conjunto convexo C y un punto $\mathbf{y}$ exterior al cierre de C, hay un hiperplano que contiene a $\mathbf{y}$ y a C en uno de sus semiespacios abiertos. Se puede ampliar fácilmente este teorema para incluir el caso en que $\mathbf{y}$ es un punto frontera de C.

Teorema 2. Sean C un conjunto convexo, e $\mathbf{y}$*, un punto frontera de C. Entonces, existe un hiperplano que contiene a* $\mathbf{y}$ *y a C en uno de sus semiespacios cerrados.*

stración. Sea $\{y_k\}$ una sucesión de vectores, exterior al cierre de C, que rja a y. Sea $\{a_k\}$ la sucesión de vectores correspondientes elaborados el teorema 1, normalizado de modo que $|a_k|=1$, tal que

$$a_k^T y_k < \inf_{x\in C} a_k^T x.$$

$\{a_k\}$ es una sucesión acotada, tiene una subsucesión convergente $\{a_k\}$, con límite a. Para este vector se tiene que para cualquier $x\in C$

$$a^T y = \lim_{k\in\mathscr{K}} a_k^T y_k \leqslant \lim_{k\in\mathscr{K}} a_k^T x = ax. \blacksquare$$

finición. Un hiperplano que contenga un conjunto convexo C en uno sus semiespacios cerrados, y un punto frontera de C, es un *hiperplano apoyo* de C.

rtiendo de esta definición, el teorema 2 dice que dado un conjunto ɩo C y un punto frontera y de C, hay un hiperplano de apoyo C en y.

PUNTOS EXTREMOS

finición. Un punto x en un conjunto convexo C es un *punto extremo* C si no existen dos puntos distintos x_1 y x_2 en C tales que $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ para algún α, $0<\alpha<1$.

r ejemplo, en E^2 los puntos extremos de un cuadrado son sus cuatro s y los de un disco circular son todos los puntos en la frontera. ese que una variedad lineal formada por más de un punto no tiene extremos.

na 1. Sea C un conjunto convexo, H un hiperplano de apoyo de C, y a intersección de H y C. Todo punto extremo de T es un punto extremo C.

ración. Supóngase que $x_0\in T$ no es un punto extremo de C. Entonces, $_1+(1-\alpha)x_2$ para algunos x_1, $x_2\in C$, $x_1\neq x_2$, $0<\alpha<1$. Descríbase H $H=\{x:a^Tx=c\}$ con C contenido en su semiespacio positivo cerrado. es;

$$a^T x_1 \geqslant c, \qquad a^T x_2 \geqslant c.$$

omo $x_0\in H$,

$$c = a^T x_0 = \alpha a^T x_1 + (1-\alpha) a^T x_2,$$

$_1$ y $x_2\in H$. Por tanto, x_1, $x_2\in T$, y x_0 no es un punto extremo de T. $\blacksquare$

rema 3. Un conjunto convexo acotado cerrado en E^n es igual a la ɔltura convexa cerrada de sus puntos extremos.

Demostración. La demostración se hace por inducción en la dimensión del espacio E^n. Se ve fácilmente que la afirmación es cierta para $n=1$. Supóngase que es cierta para $n-1$. Sea C un conjunto convexo acotado cerrado en E^n, y K, la envoltura convexa cerrada de los puntos extremos de C. Se desea mostrar que $K=C$.

Supóngase que existe $y\in C$ y $\notin K$. Entonces, por el teorema 1, sección B.3, existe un hiperplano que separa y y K; esto es, existe $a\neq 0$ tal que $a^Ty<\inf_{x\in K} a^Tx$. Sea $c_0=\inf_{x\in C}(a^Tx)$. El número c_0 es finito y existe $x_0\in C$ para la cual $a^Tx_0=c_0$, porque por el teorema de Weierstrass, la función continua a^Tx alcanza su mínimo en cualquier conjunto acotado cerrado. Así, el hiperplano $H=\{x:a^Tx=c_0\}$ es un hiperplano de apoyo para C. Es disjunto de K, pues $c_0<\inf_{x\in K}(a^Tx)$.

Sea $T=H\cap C$. Entonces, T es un subconjunto convexo cerrado acotado de H que puede considerarse como un espacio de dimensión $n-1$. T es no vacío, pues contiene x_0. Así, por la hipótesis de inducción, T contiene puntos extremos; y, por el lema 1, éstos son también puntos extremos de C. Así, se han hallado puntos extremos de C que no están en K, lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

Estúdiense las implicaciones de este teorema para poliedros convexos. Se recuerda que un poliedro convexo es un politopo acotado. Al ser la intersección de semiespacios cerrados, un poliedro convexo también es cerrado. Así, cualquier poliedro convexo es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos. Se puede mostrar (véase Sec. 2.5) que cualquier politopo tiene como máximo un número finito de puntos extremos y, por tanto, un poliedro convexo es igual a la envoltura convexa de un número finito de puntos. También se puede probar el inverso, proporcionando las dos caracterizaciones equivalentes siguientes:

Teorema 4. *Un poliedro convexo se puede describir como una intersección acotada de un número finito de semiespacios cerrados o como la envoltura convexa de un número finito de puntos.*