Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase

Daniel Grieser

Zusammenfassung Wer Mathematik studiert, sollte die Erfahrung machen:

„Ich kann Mathematik selbst entdecken.“

Dies ist der Leitgedanke des Moduls *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, das seit Wintersemester 2011/12 in den Lehrplan der Mathematikstudiengänge der Universität Oldenburg integriert ist. Im Folgenden möchte ich zeigen, dass mit diesem Modul das Mathematikstudium um einen wertvollen Aspekt bereichert und gleichzeitig der Einstieg ins Studium erleichtert wird. Damit möchte ich zur Diskussion neuer Ideen in der Studieneingangsphase Mathematik beitragen und Kollegen ermutigen, ähnliche Konzepte in ihren Studiengängen zu verwirklichen. Nach grundsätzlichen Überlegungen zur Entwicklung des Moduls berichte ich über Inhalte, Aufbau und Erfahrungen aus der Durchführung anhand konkreter Beispiele.

1 Ausgangspunkte

In diesem Abschnitt stelle ich grundsätzliche Überlegungen vor, die zur Einführung des Moduls *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* geführt haben. Im Abschnitt 2 wird dann zunächst ein Konzept für ein solches Modul vorgestellt, das auf diese Überlegungen eingeht, und dann dessen Umsetzung an der Universität Oldenburg beschrieben. Konkrete Beispiele aus der Durchführung finden sich in den Unterabschnitten 2.2, 2.3 und 2.4, jeweils eingerückt und in kleiner Schrift.

Prof. Dr. Daniel Grieser, Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 26111 Oldenburg, E-mail: daniel.grieser@uni-oldenburg.de
Erschienen in: Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik, J. Roth, T. Bauer, H. Koch, S. Prediger (eds), 2014.

1.1 Kreativität und Problembewusstsein in der Mathematik

Die meisten Mathematiker[1] sehen Kreativität als wichtigen Teil mathematischer Aktivität an. Auch viele Kinder haben einen neugierigen, entdeckenden Zugang zu dem Fach. Irgendwann geht das den meisten verloren. Wie sieht es im Mathematik-Studium aus? Fach-Studierende merken, wenn überhaupt, oft zum ersten Mal bei ihren Abschlussarbeiten, dass Kreativität zur Mathematik gehört. Vorher sind sie damit beschäftigt, all die wunderbaren Definitionen, Konzepte und Sätze zu verdauen, die wir, die Lehrenden, ihnen in den Vorlesungen vorführen.[2] Viele Lehramtsstudierenden[3] erreichen diese Stufe nie – die auf Vermittlung von Inhalten getrimmten Studienordnungen lassen da wenig Raum. Das ist um so tragischer, als die aktuellen Kerncurricula bei Mathematik-Lehrern die Fähigkeit voraussetzen, das Entdecken von Mathematik kompetent zu begleiten. Wie soll das gehen, wenn sie es selbst nie erlebt haben?

Wir sollten uns auch fragen, ob wir unseren Studierenden ausreichend Gelegenheit geben, Problembewusstsein zu entwickeln. Die über Jahrhunderte ausgefeilten Theorien, die wir lehren, sind aus Problemen entstanden, und sie können verwendet werden, um unzählige Probleme zu lösen. In der Lehre erscheinen die Probleme oft erst im Nachhinein, als Illustration oder Anwendung der Theorie. Wäre es nicht klüger, erst ein Problem zu formulieren und dann die Lösung zu geben? Mehr noch: die Studierenden ernsthaft über das Problem nachdenken zu lassen, damit sie ein Gefühl dafür bekommen, wo die Schwierigkeiten liegen? Das macht neugierig, regt die Kreativität an, und es wird das Verständnis für die Theorie erhöhen.

Es ist unsere Aufgabe, den zukünftigen Mathematikern und Mathematik-Lehrern in ihrer Fachausbildung schon früh die Gelegenheit zu geben, Problembewusstsein zu entwickeln und mathematisch kreativ zu sein. Dieses Ziel innerhalb existierender Lehrveranstaltungen zu verfolgen ist zwar möglich, doch hat man hier wegen des ‚Stoffdrucks‘ meist wenig Zeit dazu.

Daher ist es angemessen, dafür einen eigenen Ort zu schaffen.

1.2 Beweisen lehren und lernen

Beweise sind das Herz der Mathematik. Dem würden die meisten von uns Mathematikern zustimmen. Daher liegt uns daran, unseren Studierenden dieses Herzstück mathematischer Kultur zu vermitteln. Gelingt uns das? Von den Fachstudierenden,

[1] und natürlich auch die meisten Mathematikerinnen; dies ist auch im Folgenden – z.B. bei Schülerinnen, Dozentinnen, Lehrerinnen, Tutorinnen, Teilnehmerinnen, Studienabbrecherinnen und Studienfachwechslerinnen – immer gemeint, auch wenn im Sinne der Textverständlichkeit nicht jedesmal darauf hingewiesen wird

[2] Natürlich gibt es immer einige wenige, die schon früh weiter sehen können, aber die meisten sind von Übungsaufgaben, bei denen neuer Stoff mit eigenen Einfällen verknüpft werden muss, überfordert und bearbeiten nur die theorie-illustrierenden Aufgaben.

[3] Hier sind immer Studierende des gymnasialen Lehramts gemeint.

die ihr Studium nicht im ersten Jahr abbrechen, entwickeln viele mit der Zeit ein Verständnis, sogar eine Wertschätzung für Beweise und auf verschiedenen Niveaus auch die Fähigkeit, selbst Beweise zu finden. Ähnliches gilt für Lehramtsstudierenden, doch in geringerem Ausmaß. Eine Erfolgsgeschichte? Sehen wir uns die Kehrseite an:

- Auf Übungszetteln sind Beweisaufgaben gefürchtet; sobald es etwas schwieriger wird, werden sie nur von wenigen bearbeitet.
- In Klausuren ‚gehen' Beweise noch weniger.
- Nicht selten werden Beweise, wenn sie für Prüfungen gefordert werden, verständnislos auswendig gelernt.
- Auch fortgeschrittene Studierende sind mitunter unsicher, wann ein Argument als Beweis gilt: Es ist ihnen nicht geläufig, dass ein logisch korrektes Argument auch dann als Beweis gelten kann, wenn es nicht in formaler Sprache formuliert ist.

Haben wir alles versucht, Beweise einer breiten Studentenschaft zu vermitteln? Beweisen ist eine spezielle Aktivität, sie sollte speziell thematisiert werden. Sie ist intellektuell anstrengend, daher wird einen Beweis nur schätzen, wer das Positive daran erlebt hat. Schon Pólya (1966, Band 2, S. 195) schrieb:

> In erster Linie muss der Anfänger davon überzeugt werden, dass sich das Lernen von Beweisen lohnt, dass sie einen Zweck haben, dass sie interessant sind.

Pólya dachte an Schülerinnen und Schüler. In der Schule werden heute Beweise noch weniger thematisiert als damals. Daher sind die ‚Anfänger' heute die Studienanfänger.

Wer den Wert von Beweisen einsieht und selbst ernsthaft und mit gelegentlichem Erfolg versucht hat, einen Beweis zu finden, kann auch die Schönheit in Beweisen erkennen; dann trägt sich der Fortschritt oft von selber. Doch zunächst ist es notwendig, diese Anfangsstufe zu erklimmen.

Typische Beweise im traditionellen ersten Studienabschnitt, z.B. dass $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ aus den Axiomen der reellen Zahlen folgt oder dass der Basisergänzungssatz gilt, eignen sich wenig für die von Polya geforderte Überzeugungsarbeit. Was nicht überrascht oder zu abstrakt daherkommt, motiviert nicht. Siehe auch (Grieser, 2014) für eine weitergehende Analyse.

Das erfordert unsere Aufmerksamkeit.

1.3 Der Übergang Schule – Hochschule

Dass der Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik besonders schwierig ist, ist seit Jahrzehnten unter Mathematikern eine allgemein akzeptierte Binsenweisheit. Dies wird auch als einer der Hauptfaktoren für den hohen Anteil an Studierenden gesehen, die das Mathematik-Studium abbrechen.[4] Im Folgenden gebe ich eine kurze Analyse einiger Ursachen dieser Problematik aus meiner Sicht.

Das Mathematik-Studium im deutschsprachigen Raum ist traditionell stark auf die systematische Vermittlung des Gebäudes der Mathematik in seiner modernen Form ausgerichtet. Daher stehen die Studierenden bei Studienbeginn vielen neuen Anforderungen gegenüber: Einer neuen Sprache, einem hohen Maß an Abstraktion und Allgemeinheit, einer starken Betonung von Beweisen, Axiomatik usw.

Aus der Schule sehen die meisten Studierenden die Mathematik als Sammlung von Rechentechniken, und dieser Gegensatz macht ihnen schwer zu schaffen: Sie können anfangs nur schwer nachvollziehen, wozu Abstraktion, Axiomatik und die neue Sprache gut sind. Beweisen ist für sie eine Pflichtübung, nicht gefühlte Notwendigkeit. Das ist kein Wunder: Wie kann man sich für einen Beweis begeistern, wenn man sich nie ernsthaft eine mathematische Frage gestellt hat? Wie eine Theorie schätzen, die Antworten auf nie gestellte Fragen gibt? Wie die Axiomatik gutheißen, wenn man den Wert von Beweisen nicht erkennt? Kurz: Die Anforderungen passen nicht zum Entwicklungsstand vieler Studienanfänger.

Die Saat der wunderbaren Mathematik, die wir säen wollen, fällt auf ein ungepflügtes Feld.

Dies ist nicht nur ineffizient, es hat auch negative Konsequenzen: Viele Studierende erkennen die Mathematik, das Fach, das ihnen einmal Spaß gemacht hat, nicht wieder. Ihre Begeisterung – eine der wichtigste Ressourcen für gutes Lernen – verpufft, statt genutzt zu werden. Sie sind verunsichert durch die hohen Ansprüche und den fehlenden Anschluss an Bekanntes, sie verlieren den Glauben an sich selbst. Im ungünstigsten Fall führt dies zum Studienabbruch oder Studienfachwechsel.

Für Lehramtsstudierende stellen sich diese Probleme verschärft: Während viele Fach-Studierende nach einigen Semestern einsehen, wozu die neue Sichtweise gut ist, lernen die meisten Lehramtsstudierenden nicht ausreichend viel und intensiv Mathematik, um diese kritische Schwelle zu erreichen. Die Hochschulmathematik bleibt für sie fremdartig, ohne Bezug zur Schulmathematik.

Die oben gegebene Beschreibung der Schülersicht auf die Mathematik bedarf einer Modifizierung: Viele Schüler haben sich durchaus zu gewissen Zeiten ernsthaft mathematische Fragen gestellt; das weiß jeder, der erlebt hat, wie begeisterungsfähig viele Grundschulkinder auch für mathematische Inhalte sind. Leider wird dies nur selten im Unterricht aufgegriffen,[5] und nur die wenigsten erhalten sich eine entdeckende Haltung bis in die Oberstufe. Trotzdem ist dies eine Ressource, an die wir anknüpfen können.

[4] Dass einige Studierende das Studium abbrechen, ist nicht zu beanstanden, solange es recht früh passiert. Man sollte sich jedoch fragen, ob die Zahl so hoch sein muss.

[5] Teils kann das durch Sachzwänge begründet werden; aber es gibt auch positive Ausnahmen. Zusätzlich werden häufig AGs für besonders interessierte Schülerinnen und Schüler angeboten. Immerhin wird seit einigen Jahren in vielen Bundesländern Problemlösen als anzustrebende Kompetenz im Kerncurriculum genannt.

2 Das Modul *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*

Wie können wir auf die im ersten Abschnitt angesprochenen Probleme reagieren? Im folgenden Abschnitt 2.1 formuliere ich einige Grundideen und Ziele für eine Lehrveranstaltung am Studienbeginn, die diese Überlegungen unter dem Titel *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* (kurz MPB) aufgreift. Eine MPB-Veranstaltung lässt sich auf verschiedene Weisen organisieren und mit Inhalt füllen. In den folgenden Abschnitten beschreibe ich Inhalte, Aufbau und Durchführungsform des Moduls MPB, wie ich es in den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 durchgeführt habe. Die Einbindung in die Studiengänge und Erfahrungen werden ebenfalls thematisiert.

Mehr zu den Inhalten des Moduls findet man in dem Buch (Grieser, 2013), weitere Ausführungen zum lerntheoretischen Hintergrund in (Grieser, 2014).

2.1 Grundidee, Ziele

Eine Veranstaltung vom Typ *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* soll

- … ein Ort für einen *kreativen, problemorientierten Zugang zur Mathematik* sein. Schon der Titel verschafft einem in der Lehre bisher vernachlässigten Aspekt der Mathematik die gebotene Aufmerksamkeit.
- … ein Ort für eine *ausführliche Thematisierung von Beweisen* sein. Die Studierenden sollen dabei Beweise als Mittel zum Erkenntnisgewinn in elementaren, leicht zugänglichen Kontexten kennenlernen, nicht als Kitt in einem systematischen Aufbau der Theorie. Zudem ist es sinnvoll, nicht nur allgemeine Beweisformen, sondern auch typische Beweismuster zu identifizieren und systematisch zu üben (siehe die Beispiele in Abschnitt 2.2).
- … explizit *Problemlösestrategien* thematisieren. Einige dieser Strategien sollten gleichzeitig als wichtige *mathematische Leitideen* identifiziert werden.
- … sich auf *elementare, intuitiv leicht zugängliche Themen* beschränken. Dies bedeutet anfangs ein direktes Anknüpfen an Schulstoff der Mittelstufe sowie bei neu eingeführten Themen Verzicht auf Abstraktion.[6] Bei der Themenauswahl soll auch auf den Bezug zu anderen Teilen des Mathematikstudiums und zu mathematischer Allgemeinbildung geachtet werden.
- … sprachlich an die *Alltagssprache* anknüpfen. Dabei soll auf logisch präzise Ausdrucksweise geachtet und nach und nach mathematisch formale Sprache (z.B. Mengen, Bijektionen) in bedeutungstragenden Kontexten eingeführt werden.

Dabei soll das Niveau (z.B. die Schwierigkeit der Aufgaben) so gewählt und variiert werden, dass ein ‚breites Mittelfeld‘ im Leistungsspektrum angesprochen wird,

[6] Das heißt nicht Verzicht auf Niveau. Es gibt viele elementare, schwierige Probleme, an denen man viel lernen kann.

aber auch leistungsstarke Studierende vor Herausforderungen gestellt werden. *Ausdrückliches Ziel von MPB ist es, Aspekte der Mathematik, die bisher hauptsächlich für besonders leistungsstarke Studierende erreichbar waren, für viele zugänglich zu machen.*[7]

Ich halte es für wichtig, im Studium Lehrveranstaltungen anzubieten, die zumindest teilweise explizit methodisch, nicht fachgebietsbezogen (z.B. Problemlösen und Beweisen, nicht Analysis, Algebra) ausgerichtet sind; siehe z.B. Fußnote 10. Natürlich müssen die Methoden mit Inhalten verknüpft sein, sonst sind sie leer. Allgemeine Kompetenzkurse (z.B. ‚Einführung in wissenschaftliches Arbeiten') werden bereits an vielen Universitäten angeboten, oft aber wegen der fehlenden Anbindung an konkrete Inhalte kritisiert. Daher muss diese Art von Kurs ein Teil der mathematischen Fachausbildung sein.

Mit einer nach den oben genannten Prinzipien durchgeführten Lehrveranstaltung lassen sich weitere positive Effekte erzielen:

- Indem die Studierenden erleben, dass sie selbst kreativ tätig sein können, werden sie motiviert und gewinnen *Selbstvertrauen*.
- Die Akzeptanz von Beweisen wird erhöht, da sie natürlich und in leicht zugänglichem Kontext auftreten, nicht als formale Pflicht. *Studierende wollen beweisen.*
- Die Studierenden erleben Mathematik als *lebendige Wissenschaft,* nicht als statisches Gebäude.
- Es wird ein *fruchtbarer Boden* für das weitere Studium bereitet:
  - Die forschende Haltung, die die Studierenden im Laufe des Moduls entwickeln, ermöglicht ihnen ein tieferes Verständnis von Mathematik.
  - Die Probleme machen neugierig auf mehr Mathematik. Wer an elementaren Inhalten gelernt hat, was ein mathematisches Problem oder ein Beweis ist, wer sich selbst mathematische Fragen gestellt hat, dem wird die ‚höhere Mathematik' leichter fallen als dem, der Mathematik wie Vokabeln lernt.
  - Durch die Einführung übergreifender mathematischer Leitideen wird die Grundlage für ein Erkennen der Kohärenz der Mathematik, quer zu den Grenzen der Teilgebiete, gelegt.
- Für Lehramtsstudierende haben diese Ziele besondere Bedeutung: Sie können ihren Schülern eine lebendige Mathematik nur vermitteln, wenn sie sie selbst als solche erleben. Die Berufsrelevanz ist für sie klar erkennbar.[8]

[7] Dies und die Anbindung an die Hochschulmathematik unterscheiden MPB wesentlich von Vorbereitungskursen für mathematische Schülerwettbewerbe. MPB soll das Positive solcher Kurse mit den Ansprüchen eines Studiums verknüpfen.

[8] Um dies noch greifbarer zu machen, wurde in einer Vorlesung eine Lehrerin eingeladen, die über ihre Erfahrungen mit problemlöseorientiertem Unterricht und mit Beweisen in der Schule berichtete.

2.2 Inhalt und Aufbau; das 3-Phasen-Modell

In den folgenden Abschnitten wird die konkrete Durchführung von MPB an der Universität Oldenburg beschrieben.

Probleme und Lösungsstrategien Den Kern des Moduls bildet das Bearbeiten zahlreicher *Probleme* in Vorlesung, Übungen und Hausaufgaben. Diese sind so ausgewählt, dass die Studierenden zum eigenen Entdecken eingeladen werden und an ihnen mathematische Arbeitsweisen und wichtige mathematische Ideen in elementarem Kontext entdecken, üben oder lernen können. Ein weiteres Kriterium ist Attraktivität: ‚hübsche' Probleme motivieren mehr als langweilige.

Durch das gemeinsame Bearbeiten der Probleme in Vorlesung und Tutorien (s. unten) erleben und erlernen die Studierenden den *mathematischen Prozess*: was tue ich, wenn ich anfange, mir über ein mathematisches Problem Gedanken zu machen? Dies fängt an mit einfachen Techniken der Selbstorganisation (sich klar werden über die verwendeten Begriffe; Ausschau halten nach dem, was gegeben und was gesucht ist; nicht aufgeben, wenn ein Ansatz nicht weiterführt, sondern einen anderen versuchen, usw.) und reicht über einfache Problemlösetechniken (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Zwischenziele setzen etc.) bis hin zu komplexen Techniken des Beweisens und Problemlösens (indirekte Beweise, Extremalprinzip usw.). Solche *Problemlösestrategien* werden explizit thematisiert, im Laufe des Semesters immer wieder angesprochen und in einer Liste (‚Werkzeugkasten') gesammelt.

Logik und Beweise Logik und Beweise werden systematisch und mit vielen Beispielen behandelt, jedoch erst nach ca. 1/3 des Semesters, da die Studierenden zu diesem Zeitpunkt schon einige Erfahrungen im Argumentieren gesammelt haben. Eine Behandlung am Anfang erscheint mir wenig sinnvoll, da die Studierenden eine Alltagslogik mitbringen und erst durch die intensivere Beschäftigung mit Mathematik Offenheit für eine genaue Betrachtung entsteht.

Die Notwendigkeit von Beweisen wird für die Studierenden evident durch Einsatz offener Problemstellungen (‚Entscheiden Sie, ob…' statt ‚Beweisen Sie, dass…') und von Problemen mit Überraschungen (z.B. ‚Ist n^2+n+41 für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl?' – bei Probieren von $n = 1,2,3,\dots$ könnte man zunächst vermuten, dass die Antwort ja ist).

Neben den allgemeinen Beweisformen (direkter, indirekter, Widerspruchsbeweis) werden typische Beweismuster anhand geeigneter Probleme eingeführt, benannt und geübt.

Beispiele für Beweismuster:

- Formeln werden z.B. durch direkte Herleitung aus bekannten Formeln, durch vollständige Induktion oder durch doppeltes Abzählen (oder die verwandte Idee der Vertauschung von Summenoperationen) hergeleitet. Hier ist auch ein Verweis auf viel ‚höhere' Mathematik möglich, wo ein Verständnis von Strukturen zu Beweisen von Formeln führen (zum Beispiel Linearitätsüberlegungen beim Herleiten der Binet-Formel für die Fibonacci-Zahlen).
- Typische Beweismuster für Existenzbeweise sind direktes Angeben bzw. Konstruktion, Schubfachprinzip (nicht konstruktiv!), Extremalprinzip, auch vollständige Induktion.

- Typische Beweismuster für Nichtexistenzbeweise sind der Widerspruchsbeweis und das Invarianzprinzip (Konstruktion von Invarianten; siehe Beispiel 6 in Abschnitt 2.4).

Diese Beweismuster treten in allen Bereichen der Mathematik auf.

Themenauswahl Die Themenauswahl ordnet sich den Grundideen unter. Konkrete Themen waren u.a. Rekursionen, Graphen (z.B. Eulerformel, Planarität), Abzählprinzipien, elementare Zahlentheorie (Teilbarkeit, Kongruenzen) sowie Permutationen und deren Signatur (als wichtiges nicht-triviales Beispiel einer Invariante). Ein anderes Thema, das sich gut eignen würde, ist die Geometrie.

Die drei Phasen Dem Aufbau des Moduls MPB liegen einige grundsätzliche Überlegungen zugrunde, wie Studierende zu einem selbständigen Umgang mit Mathematik hingeführt werden können. Ich unterscheide drei Phasen:

1. **Entdecken:** In der ersten Phase machen die Studierenden die Erfahrung, dass sie Mathematik selbst entdecken können – und damit, dass es in der Mathematik viel zu entdecken gibt. Diese Phase öffnet den Geist für die Mathematik und schafft Selbstvertrauen.
2. **Konsolidieren:** In der zweiten Phase lernen die Studierenden, ihre Lösungsideen zu präzisieren und genau zu formulieren, und *erkennen den Wert von Beweisen und allgemeinen Formulierungen.* Nachdem sie eine Gesetzmäßigkeit oder ein Muster entdeckt haben, brauchen sie einen Beweis, um sicher zu sein, dass diese allgemein gilt.
3. **Strategien lernen:** In der dritten Phase lernen die Studierenden Strategien zum Problemlösen und Beweisen kennen und setzen sie gezielt ein.

In den ersten Wochen liegt der Fokus auf der ersten Phase (siehe Beispiele 1, 2, 3 in 2.4), sie wird jedoch schon bald durch die zweite und dritte Phase ergänzt, wobei im Laufe des Semesters die Komplexität der eingesetzten Strategien und Beweismuster zunimmt. Mit der Zeit wird die Kombination von Entdecken, allgemeinem Formulieren und Beweisen unter (meist unbewusstem) Einsatz von Problemlöse- und Beweisstrategien selbstverständlich. Für das Entdecken wird immer wieder viel Zeit eingeräumt. Der Übergang zu allgemeinen Formulierungen und Argumenten fällt vielen Studierenden schwer. Hier hilft viel Übung, viel Hilfestellung und konstruktives Korrigieren der Hausaufgaben. Sorgfältig aufgeschriebene Lösungen, die die in der Veranstaltung gefundenen Lösungswege zusamenfassen, bilden hilfreiche Vorbilder.

Einen guten Einstieg in die anspruchsvollste dritte Phase bieten relativ transparente Lösungs- bzw. Argumentationsstrategien, z.B. Rekursion und Induktion. Neben das schematische Anwenden dieser Strategien[9] tritt von Anfang an das *gezielte Planen* ihres Einsatzes (eine Rekursion suchen, einen Induktionsbeweis planen, siehe Beispiel 4 in 2.4).

Gegen Ende des Semesters wird ein Niveau erreicht, das im Hinblick auf logische Komplexität und Anspruch an Kreativität über andere Anfängervorlesungen

[9] Z.B. Beweis von Formeln durch vollständige Induktion. Da in der Analysis-Vorlesung viele solche ‚Schema F'-Beispiele behandelt werden, wird dies in MPB nur kurz illustriert.

hinausgeht. Dies ist nur möglich, da nicht gleichzeitig abstrakte Inhalte zu verarbeiten sind.

Ein Beispiel für ein komplexes Beweismuster ist das Extremalprinzip: Um die Existenz eines Objekts mit einer bestimmten Eigenschaft A zu zeigen, versucht man, es dadurch zu charakterisieren, dass eine gewisse Größe B extremal wird. Dass ein Objekt mit extremalem B die Eigenschaft A hat, zeigt man typischerweise mittels Widerspruchsbeweis (oder in analytischem Kontext durch Ableiten). Das echte Problem ist das Finden einer geeigneten Größe B. Hier ist Kreativität gefragt. Und selbst, wenn man ein B versucht hat, dieses aber nicht ‚funktioniert', kann es trotzdem sein, dass ein anderes B' funktioniert.

Dies genau zu verstehen, schult das logische Verständnis. Und wer einmal diese Komplexität erkannt hat, wird ein größeres Verständnis für (und größere Hochachtung vor) Beweisen haben, in denen das Prinzip Anwendung findet. Einige Beispiele: Beweis des Mittelwertsatzes, Beweis der Existenz von Eigenwerten hermitescher Matrizen durch Maximieren der zugehörigen quadratischen Form, auf höherer Ebene Variationsrechnung, Morse-Theorie usw.

2.3 *Form: Durchführung von Vorlesung und Tutorien; Prüfungen*

Wenn wir die Studierenden zu einem aktiven Umgang mit Mathematik hinführen wollen, sollten wir sie in unseren Lehrveranstaltungen ständig zur Mitarbeit aufrufen. Wie lässt sich dies verwirklichen, insbesondere bei hohen Teilnehmerzahlen?

Das Modul MPB an der Uni Oldenburg gliedert sich in wöchentlich je eine 90-minütige Vorlesung (ca. 200 Studierende) und ein 90-minütiges Tutorium (ca. 15-20 Studierende unter Anleitung eines Tutors/einer Tutorin – dies sind fortgeschrittene Studierende).

Die Vorlesung: In weiten Teilen hat die Vorlesung die Form eines Dialogs zwischen Dozent (D) und Studierenden. Das läuft z.B. so ab:

D: Wir wollen folgendes Problem untersuchen. (schreibt ein Problem an, illustriert es ggf. kurz anhand von Beispielen)

D: Gibt es Fragen zur Problemstellung? (beantwortet ggf. Fragen)

D: Sie haben nun 5 Minuten Zeit, sich zu dem Problem Gedanken zu machen. Nehmen Sie auch Papier und Stift zu Hilfe. Sie können sich auch gerne mit Ihren Nachbarinnen austauschen. Wahrscheinlich wird die Zeit nicht reichen, eine vollständige Lösung zu finden. Aber jede Überlegung, die Sie jetzt anstellen, wird Ihnen helfen, die Lösung, die wir anschließend gemeinsam erarbeiten, zu verstehen.

D (nach 5 Minuten): Welche Vorschläge und Ideen haben Sie?

(es melden sich einige Studierende, der D. greift die Vorschläge auf, wiederholt sie für alle, kommentiert sie, notiert sie an der Tafel, setzt sie in Beziehung zueinander; unter Beteiligung der Studierenden – ggf. mit weiteren Eigenarbeitszeiten – und mit minimaler, doch gezielter Führung wird nach und nach eine Lösung erarbeitet)

Kommentare:

- Durch das gemeinsame Vorgehen erleben die Studierenden, wie Mathematik entsteht, und sind intensiv am Geschehen beteiligt.

- Es ist wichtig, für diese explorativen Phasen viel Zeit einzuräumen.[10]
- Obwohl im Plenum nur wenige Studierende zu Wort kommen, können sich die anderen mit diesen identifizieren. Dies ist besser, als wenn alle Beiträge zur Lösung vom Dozenten kämen.
- Man kann nicht einfach genug beginnen, um möglichst alle ‚mitzunehmen'. Aber man sollte auch alle herausfordern. Siehe Beispiele 1 und 2 in 2.4.
- Natürlich muss der Dozent auswählen, welche Ansätze er wie weit verfolgt und wie viel er selbst hinzufügt. Dabei sollte er auch immer wieder solche Ansätze aufgreifen, von denen er weiß, dass sie nicht zum Ziel führen (oder auch solche, bei denen er nicht weiß, ob sie zum Ziel führen!). In eine Sackgasse zu geraten ist Teil mathematischen Arbeitens, sich daraus zu befreien eine zu erlernende Fähigkeit.
- Die bei den Lösungsprozessen gewonnenen methodischen und inhaltlichen Erkenntnisse (z.B.: es war hilfreich, eine gewisse Notation einzuführen oder ein Zwischenziel/eine Hilfsaussage zu formulieren) werden vom Dozenten explizit benannt, geordnet und dadurch für weitere Probleme nutzbar gemacht (siehe Grieser, 2013).

Diese dialogartigen Vorlesungsabschnitte werden gelegentlich durch Abschnitte in eher klassischem Vorlesungsstil ergänzt, siehe die Themenauswahl in 2.2.

Die Tutorien: Hier werden Probleme zunächst allein und dann in kleinen Gruppen (2-4 Studierende) erarbeitet und die Lösungsversuche dann in der gesamten Gruppe besprochen. In der Kleingruppenarbeit haben die Studierenden Gelegenheit, ihre Ideen sprachlich zu formulieren, und lernen voneinander. Wichtig ist eine enge Abstimmung von Tutorien und Vorlesung sowie der Tutorien untereinander. Dies wurde durch ausführliche Besprechungen sowie durch die Vorgabe von Präsenzaufgaben für die Tutorien durch den Dozenten erreicht, sowie bei erstmaliger Durchführung durch Anwesenheit der Tutoren in der Vorlesung.[11] Neben inhaltlichen Hinweisen (z.B. auf mehrere Lösungsansätze hinweisen) sind methodische Überlegungen wie die Grundprinzipien und das 3-Phasen Modell Thema der Besprechungen. Die Tutoren haben eine sehr wichtige Funktion und sollten darin angeleitet werden, Hilfe zur Selbsthilfe zu geben.

Übungszettel und Klausur: Wie sonst auch üblich, werden wöchentlich Übungszettel ausgegeben. Neben Problemlöseaufgaben, die teilweise an Vorlesungsaufgaben anschließen und fortschreitend Beweisanteile enthalten, haben sich gelegentliche Aufgaben der Art

> Wo ist der Fehler im folgenden „Beweis“, welche Schritte sind korrekt?

bewährt. Die Korrektur ist anspruchsvoll, da häufig sehr verschiedene Lösungswege beurteilt werden müssen. Daher korrigieren die Tutoren gemeinsam. Als Prüfungs-

---

[10] Der Luxus, diese Zeit zu haben, ist der Vorteil einer methodisch orientierten Lehrveranstaltung.

[11] Bei der erstmaligen Durchführung der Veranstaltung ergab sich das Problem, geeignete Tutoren zu finden. Jedoch hat sich dieses von alleine gelöst, da durch frühzeitige Information klar gemacht wurde, dass die Veranstaltung auch für die Tutoren einen großen Gewinn bedeutet. Sie sind dann auch gerne in die Vorlesung gekommen.

form am Semesterende ist wegen der großen Zahl der Studierenden nur eine Klausur praktikabel. Die naheliegende Frage, wie man Problemlösefähigkeiten unter Klausurbedingungen testen kann, wird dadurch beantwortet bzw. teilweise umgangen, dass die Klausuraufgaben Variationen von Aufgaben sind, die in Vorlesung, Übungsgruppe oder Hausaufgabe behandelt wurden.

2.4 Beispiele aus der Vorlesung

Die erste Vorlesung Zum Einstieg habe ich folgendes Problem gestellt:

> *Beispiel 1:* Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 Meter langen Baumstamms in 1-Meter-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?

Man kann nicht einfach genug beginnen: Aktivierung! Ganz viele Hände gehen hoch. Die meisten sagen drei Minuten, vereinzelt hört man dreieinhalb. An diesem Problem lassen sich einige Schritte des Problemlösens beobachten, die man später in schwierigeren Situationen einsetzen kann: Als *Zwischenziel* bestimmt man zunächst die Anzahl der Teile. Eine *Skizze* hilft und zeigt: Die Anzahl der Schnitte ist um eins geringer als die Anzahl der Teile – solche Verschiebungen um eins treten immer wieder, auch in 'höherer Mathematik', auf. Ein guter Folgeauftrag: Begründe, warum diese Verschiebung auftritt – auch wenn man 7 durch 1000 (oder n) ersetzt, also keine Zeichnung mehr machen kann. Die schwierigere Variation, was herauskommt, wenn man mehrere schon erhaltene Stücke nebeneinanderlegen und gleichzeitig durchschneiden darf, eignet sich für's Tutorium.

Das nächste Problem:

> *Beispiel 2:* Mit wie vielen Nullen endet $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$?

Das ist deutlich schwieriger. Schnell hört man als Antworten 2, 10, 11 (von den Faktoren 10, 20,...,100). Sind das alle? Der Taschenrechner hilft nicht. Wie kann man sich dem Problem nähern? Eine wichtige Strategie: *Vereinfache!* Betrachte zunächst $n!$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, beobachte, wo die erste Null auftritt, überlege warum, wann kommt die zweite. Schrittweise arbeitet man sich vor, *bekommt ein Gefühl für das Problem*, merkt, dass die Faktoren 5 zentral sind (man *erkennt eine Regel*), schließlich erhält man die Antwort 24. Zuletzt wird die gefundene Lösung sauber formuliert.

Nützliche Rekursionen Die Idee der Rekursion ist ein sehr geeignetes Mittel, wie Studierende selbst entdeckend tätig werden können.

> *Beispiel 3:* Auf wie viele Arten kann man ein Rechteck der Größe $2 \times n$ mit Dominosteinen der Größe 1×2 pflastern?

Durch systematisches Probieren findet man die Antwort für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, dann wird es schnell zu kompliziert. Die gewonnenen Anzahlen legen die Vermutung nahe, dass die Fibonacci-Zahlen herauskommen. Die entsprechende Rekursion zu begründen ist eine gute Übung für allgemeines Formulieren. Ihre Gültigkeit ist ein wunderbarer Erkenntnisgewinn. Z.B. lässt sich damit leicht die Antwort für größere n angeben. Als Fortsetzung bietet sich die Herleitung einer geschlossenen Formel für die Fibonacci-Zahlen an.

Vollständige Induktion kann auch spannend sein Die meisten Studierenden lernen die vollständige Induktion zuerst (und oft ausschließlich) als Mittel kennen, um Formeln wie $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ nachzuweisen. Das ist wichtig, verschafft Sicherheit, dient als erste Illustration – ist aber etwas unbefriedigend: Das sind mechanische Fingerübungen, und die eigentlich interessante Frage bei solchen Formeln ist doch, wie man sie findet.

Dabei lässt sich die Induktion für viele hübsche Beweise einsetzen, bei denen zusätzlich das logisch korrekte Formulieren geübt wird. Ein Beispiel ist die Eulersche Formel für ebene Graphen. Ein weiteres Beispiel:

> *Beispiel 4:* Zeige, dass sich die Länder, in die die Ebene durch n beliebige Geraden geteilt wird, mit zwei Farben so färben lassen, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

Nur wenn man bewusst einen Induktionsbeweis plant, wird man erkennen, dass für den Induktionsschritt folgende Frage beantwortet werden muss: Sei eine beliebige zulässige Färbung der von beliebigen $n-1$ Geraden gebildeten Landkarte gegeben. Es werde eine beliebige Gerade hinzugelegt. Wie kann man die gegebene Färbung zu einer zulässigen Färbung der neu entstandenen Landkarte modifizieren?

Möglich und unmöglich Unmöglichkeitssätze gehören zu den faszinierendsten der Mathematik, teilweise auch zu den schwierigsten. Solche in elementarem Kontext kennenzulernen, auch selbst Beweise für diese zu finden, ist von hohem Wert: es motiviert, schult präzises logisches Denken und bereitet auf ähnliche Argumentationsmuster (z.B. indirekter Beweis) vor, die in der ‚höheren' Mathematik häufig vorkommen.

> *Beispiel 5:* Kann man 5 Punkte mit allen ihren paarweisen Verbindungen so in die Ebene zeichnen, dass sich die Verbindungslinien nicht kreuzen?

Auch die Grundidee der Invariante lässt sich sehr hübsch einführen.

> *Beispiel 6:* Schreiben Sie die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge nebeneinander. Ein Zug bestehe im Vertauschen zweier benachbarter Zahlen. Kann nach einer ungeraden Anzahl von Zügen wieder die Ausgangsanordnung erreicht werden?

(Oder: Geben Sie verschiedene Wege an, zur Ausgangsanordnung zurückzukehren. Was beobachten Sie?) Das Ergebnis – dass dies nicht möglich ist – ist zunächst überraschend und bereitet den Boden für die Einführung der Signatur einer Permutation, die später in der linearen Algebra wieder auftaucht. Nach deren Diskussion lassen sich hübsche, höchst nicht-triviale Anwendungen geben, z.B. die Unmöglichkeit der Lösung des 15er-Schiebepuzzles (siehe Grieser, 2014, S. 243 und S.252).

2.5 Rahmenbedingungen: Einbindung in die Studiengänge

An der Universität Oldenburg wurde das Modul *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* zum Wintersemester 2011/12 eingeführt. Es wird immer im Wintersemester angeboten. Im Studiengang 2-Fächer-Bachelor Mathematik (für das Lehramt in Gymnasien und berufsbildenden Schulen) ist es Pflicht und wird zum Besuch im ersten Semester, neben der Analysis 1, empfohlen. Im Vergleich zur früher empfohlenen Kombination Analysis 1 / Lineare Algebra bedeutet das eine Entlastung am Studienbeginn, sowohl zeitlich (10 statt 12 Stunden wöchentliche Präsenzzeit) als auch inhaltlich (MPB wird im Vergleich zur Linearen Algebra als leichter empfunden). Im Fach-Bachelor Studiengang ist MPB Teil eines Wahlpflicht-Bereichs (sog. Professionalisierungsbereich) und wird empfohlen. Die Standardempfehlung für das erste Semester ist hier wie früher Analysis 1 und Lineare Algebra. Auch Studierende höherer Semester profitieren von dem methodischen Ansatz, den herausfordernden Problemen und der Diskussion übergreifender wissenschaftlicher Prinzipien.

Eine solche Umstellung bringt Herausforderungen mit sich, organisatorisch (z.B. wird die Lineare Algebra im Winter und im Sommer angeboten; Lehramtsstudierende besuchen sie parallel zur Analysis 2) und inhaltlich: Wird eine neue Lehrveranstaltung Pflicht, muss eine andere weichen. Das ist eines der Hauptprobleme bei der Weiterentwicklung von Studiengängen. Alles erscheint wichtig, für jedes existierende Modul gibt es gute Gründe, es beizubehalten. Für das Pflichtmodul MPB wurden in Oldenburg Kürzungen in fortgeschrittenen Themen der Analysis und Algebra im Lehramtsstudium vorgenommen. Wir haben uns entschieden, dass wir für die angehenden Lehrer einen soliden Einstieg, an dem sie wachsen und die Mathematik entdeckend erleben, als wichtiger ansehen als zum Beispiel den Satz über implizite Funktionen.

2.6 Erfahrungen

Wurden die angestrebten Ziele erreicht? Wie wurde das Format angenommen? Gibt es nun weniger Studienabbrecher?

Die folgenden Einschätzungen/Aussagen basieren auf vielen Gesprächen mit den Tutoren und mit Studierenden, auf Lehrevaluationen, auf der Klausurkorrektur sowie auf Berichten der Studierenden in sogenannten Lerntagebüchern. In diesen sollten sie die Inhalte des Moduls aus Sicht ihres eigenen Lernfortschritts reflektieren und beurteilen. Mehrmals im Semester wurden die Lerntagebücher eingesammelt.[12]

Allgemein kann gesagt werden, dass die in 2.1 formulierten Ziele für einen großen Teil der Studierenden erreicht wurden: Entwickeln von Problemlösefähig-

[12] Die Akzeptanz der Lerntagebücher war anfangs gering. Einige Studierende fanden sie bis zum Semesterende überflüssig, aber es gab auch viele, die es sehr schätzten, am Ende noch einmal ihre Eintragungen vom Anfang zu lesen und ihre Fortschritte so klar vor Augen zu haben. Das Führen der Lerntagebücher war gefordert, ihre Inhalte flossen aber nicht in die Note ein.

keiten, souveränerer Umgang mit Beweisen, erhöhtes Selbstvertrauen und Erleben der Lebendigkeit der Mathematik. Beweisaufgaben in der Klausur wurden von einer deutlichen Mehrheit der Teilnehmer gut gelöst – im Kontrast zu Erfahrungen, die man meist mit (selbst einfachen) Beweisaufgaben z.B. in Analysis 1-Klausuren macht.

Das 3-Phasen-Modell hat sich sehr gut bewährt: Nach 1-2 Wochen war bei vielen Teilnehmern eine Begeisterung über die ersten eigenen mathematischen Entdeckungen zu verspüren. Das wiederholte, explizite Thematisieren der Notwendigkeit von Beweisen und allgemeinen Formulierungen in der zweiten Phase erlaubte es, damit auch Studierende zu erreichen, die anfangs damit Schwierigkeiten hatten. Die dritte Phase des gezielten Einsetzens und Planens von Beweisen wurde erwartungsgemäß sehr unterschiedlich gemeistert und bot auch den leistungsstärksten Studierenden angemessene Herausforderungen.

Die meisten Studierenden waren durchgehend sehr motiviert. Dies war besonders auffällig für die Lehramtsstudierenden, da für sie die Berufsrelevanz gut erkennbar war.

Das interaktive Format, gemischt mit gelegentlichen Vorlesungssequenzen, hat sich trotz der Größe der Vorlesung bewährt, um die Aufmerksamkeit über weite Strecken zu erhalten. Ebenfalls bewährt hat sich das Format der Kleingruppenarbeit in den Tutorien, dort wurde meist begeistert mitgearbeitet.

Die insgesamt sehr positive Stimmung lässt sich durch eine Äußerung beschreiben, die ich von mehreren der beteiligten Tutoren gehört habe: So ein Modul hätte ich mir am Studienbeginn auch gewünscht.

Studienabbrecherzahlen lassen sich zwar erheben, sie sind aber schwierig zu interpretieren, da sie vielen Einflüssen und natürlichen Schwankungen unterliegen. Im Lehramtsstudiengang (2-Fächer-Bachelor Mathematik) war die Anzahl der Abbrecher (einschließlich Studienfachwechsler) im 1. Semester im Jahr 2011 mit 12,5% geringer als in den Vorjahren, im Jahr 2012 mit 6,8% sogar deutlich (Zahlen für 2008, 2009, 2010: 22,8%, 15,2%, 15,9%). Die Anzahl der Studierenden, die im WS 2011 begonnen und ihr Studium bis zum Ende ihres 3. Semesters abgebrochen oder das Fach gewechselt hatten, lag immerhin noch bei 34%, war damit aber auch deutlich geringer als in den Vorjahren (mit 41,8%, 41,4%, 51,0%).

Ich möchte auch einige Schwierigkeiten erwähnen. Da MPB von den Studierenden als deutlich zugänglicher empfunden wurde als die parallel besuchte Analysis 1, ergab sich hier zeitweilig eine Konkurrenzsituation, z.B. Konkurrenz um die Aufmerksamkeit und die Zeit der Studierenden: Die Studierenden konzentrierten sich zeitweise auf die schwierigere und vermeintlich wichtigere Vorlesung Analysis 1. Die Ansprüche an die Tutoren sind hoch, insbesondere wenn die Veranstaltung erstmalig durchgeführt wird. Sie lernen aber auch methodisch viel dabei. Auch die Ansprüche an den Dozenten der Vorlesung sind zumindest ungewöhnlich: Das interaktive Format erfordert ein schnelles Eingehen auf unvorhergesehene Vorschläge, manchmal auch den Mut, vor Publikum zu überlegen, zu schwanken oder auch zu sagen, dass man sich etwas in Ruhe überlegen müsse. Genau das ist aber auch im Sinne von MPB: Den mathematischen Prozess für die Studierenden sichtbar machen.

3 Schlussworte

Mit MPB habe ich eine Möglichkeit beschrieben, dem Mathematikstudium wertvolle neue Impulse zu geben und damit unter anderem den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern, ohne dabei die wissenschaftliche Qualität des Studiums zu beeinträchtigen. Manche Kolleginnen und Kollegen mögen sich durch die positiven Erfahrungen ermutigt fühlen, ähnliches zu versuchen. Aufgrund der Hindernisse, die großen Änderungen von Studiengängen im Weg stehen, mag dies auch durch teilweise Integration der in 2.1 dargelegten Grundideen geschehen.

Im schulischen Bereich wurden seit einigen Jahren von zahlreichen Autoren Forderungen und Konzepte formuliert, die eine ähnliche Zielrichtung wie MPB haben, z.B. Bruder (2001), Pehkonen (2001), Winter (1989). Im universitären Bereich scheint ein derartiger Ansatz bisher neu zu sein – abgesehen vom Klassiker Pólya (1966). Es ist bemerkens- und bedauernswert, dass die dort formulierten Ideen bisher nicht systematisch in das Mathematikstudium integriert wurden. MPB greift diese Ideen auf und zeigt, wie sie im Kontext der aktuellen Mathematikausbildung in Schule und Universität umgesetzt werden können.

In der Studie *Mathematik Neu Denken*, die der Gymnasiallehrerbildung neue Impulse gegeben hat, fordern die Autoren unter anderem: ‚Die Fachmathematik muss nach unserer Auffassung eine starke elementarmathematische Komponente enthalten, die nach Möglichkeit an schulmathematische Erfahrungen anknüpft und auch wissenschaftliches Arbeiten „im Kleinen" ermöglicht' (Beutelsbacher et al., 2011, S. 2). Genau dies (und mehr) leistet MPB.

Literaturverzeichnis

Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor; Spiel, Susanne Spiel; Wickel, Gebriele (2011). *Mathematik Neu Denken*, Vieweg und Teubner.

Bruder, Regina (2001). *Kreativ sein wollen, dürfen und können*, Mathematik lehren, Heft 106, S. 46-51.

Grieser, Daniel (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen – eine Entdeckungsreise in die Mathematik*, Springer Spektrum. Zusatzmaterialien für Lehrende: http://www.springer-spektrum.de/Privatkunden/Zusatzmaterial/978-3-8348-2459-2/Mathematisches-Problemloesen-und-Beweisen.html

Grieser, Daniel (2014). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In R. Biehler, R. Hochmuth, H.-G. Rück, A. Hoppenbrock (Hrsg.), *Mathematik im Übergang von Schule zur Hochschule und im ersten Studienjahr.* Springer Spektrum.

Pólya, Georg (1966). *Vom Lösen Mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Band 1+2*, Birkhäuser.

Pehkonen, E. *Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts*, Der Mathematikunterricht, Jg. 47(6), S. 60-72.

Winter, Heinrich (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Vieweg und Teubner.