UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POST GRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

INTRODUCCION A LA INTEGRAL DE HAAR

ELIDIA DEL CARMEN CASTILLO G.

TEISIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA

ASESOR: JOSUE ORTIZ

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA

2005

APROBADO POR:

M.Sc. Josué Ortiz
PRESIDENTE

Dr. Rogelio Rosas
MIEMBRO

E. G.

MSc. Evangelista González
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 22 de diciembre de 2005.

DEDICATORIA

A MI QUERIDA MADRE: QUIEN
AUNQUE PRESENTE NO ESTA;
ES EL PILAR QUE ME MOTIVA
A SEGUIR LUCHANDO
PARA ALCANZAR MIS METAS.

A MI ESPOSO ALBIN QUIEN
HA SIDO MI COMPAÑERO
CONSTANTE E INCANSABLE
EN ESTA ARDUA TAREA.

A MIS HIJOS ALBIN LEONEL
Y JOHANY MICHELL QUIENES
SON MI FUENTE DE
INSPIRACION.

AGRADECIMIENTO

A DIOS PORQUE

ES EL AMIGO INCONDICIONAL

QUE ME AYUDA

A LOGRAR MIS METAS.

AL PROFESOR JOSUE ORTIZ

MI SINCERO APRECIO POR LA DEDICACION

QUE MOSTRO EN LA ELABORACION

DE ESTE TRABAJO.

A TODOS MIS FAMILIARES Y AMIGOS

EN ESPECIAL A MARIO HUGO,

QUE CON SU CONSTANTE MOTIVACION Y APOYO

DEPOSITARON CONFIANZA EN MI

PARA EL LOGRO DE ESTE OBJETIVO.

LA AUTORA

INDICE

Resumen

En este trabajo desarrollamos la teoría relacionada con espacios localmente compactos, integrales positivas de funciones continuas con soportes compactos y particiones continuas de la unidad, las cuales son bases para el estudio de la integral de Haar. Revisamos dos teoremas fundamentales creados por Urysohn y Tychonoff, los cuales son usados por Weil en su teorema. También hacemos una comparación entre la integración sobre espacios localmente compactos e integración de acuerdo a Riemann, Lebesgue y Stieltjes, para concluir que existe otra integral, "La integral de Haar", la cual es positiva, invariante a izquierda y única. Después, estudiamos algunos teoremas de Riesz relacionando a las medidas e integrales. La integral de Lebesgue sobre $\mathfrak{R}^n$ es un ejemplo de una integral la cual es invariante bajo traslación y por consiguiente, es una integral de Haar sobre $\mathfrak{R}^n$. Aquí estudiamos el primer teorema de Haar, el cual establece la existencia y unicidad de la integral de Haar. Posteriormente estudiamos otros tópicos que revelan que el teorema de Weil está basado en el teorema de Tychonoff. En este trabajo las integrales y medidas son identificadas de acuerdo al teorema de Riesz. Continuando nuestro estudio introducimos el concepto de convolución y medida aproximada con los cuales probamos el primer teorema de Von Neumann. Después que, estudiamos algunas de las propiedades más importantes de la integral de Haar, el resultado principal establece lo siguiente: "un grupo localmente compacto G tiene una integral de Haar invariante a izquierda asociada a una medida finita si y solo si G es compacto. Además, G es unimodular si la integral de Haar asociada a G es invariante a izquierda y a derecha. El tercer teorema, establecido por Cartan, usa el criterio de Convergencia de Cauchy y prueba que toda integral de Haar invariante a izquierda es el límite de una integral aproximada.

Summary

In this work we develop the theory related to locally compact space, positive integrals of continuous functions of compact support and continuous partitions of the unity, which are the basis for studying the Haar integral. We are to review two fundamental theorems due to Urysohn and Tychonoff which are used by Weil in his theorem. We also make a comparison between integration on locally compact spaces and integration according to Riemann, Lebesgue and Stieltjes in order to conclude that there is another integral, the Haar integral, which is positive, left invariant and unique. After that, we study some of the Riesz Theorems related to measures and integrals. The Lebesgue integral on $\Re^n$ is shown as an example of an integral which is invariant under translation and therefore a Haar integral on $\Re^n$. At this point we study the first theorem of Haar, which establishes the existence and uniqueness of the Haar integral. A further study of these topics reveals that Weil's Theorem is based upon a theorem of Tychonoff. In these works integral and measures are identified according to Riesz Theorems. Continuing our study we introduce the concept of convolution and approximate measure which allows one to prove the first theorem of Von Neumann. After that, we study some of the most important properties of the Haar integral and the main result which states the following: "A locally compact group G has a left invariant Haar integral associated to a finite measure if and only if G is compact". Moreover, G is unimodular if the Haar integral associated to G is left and right invariant. The third theorem, stated by Cartan, uses the convergence criterion of Cauchy and proves that every left invariant Haar integral is the limit of an approximate integral.

Introducción

La integral de Haar es muy importante en los espacios localmente compactos ya que a través de la demostración de su existencia y unicidad se da respuesta a la conjetura sobre la existencia de una integral invariante en un grupo y se resuelve afirmativamente el quinto problema de Hilbert (¿Todo grupo topológico el cual es localmente euclidiano es necesariamente un grupo analítico?). Obviamente, todo esto representa un gran avance en la construcción del conocimiento matemático el cual abarca diversas áreas, en especial, topología, álgebra, análisis funcional y teoría de la medida, entre otras.

En este trabajo, presentamos un estudio sobre la integral de Haar con sus respectivas propiedades y ejemplos siguiendo puntos de vista basados en aplicaciones de tópicos como factor de proporcionalidad, el Teorema de Tychonoff y el Criterio de Convergencia de Cauchy.

El objetivo fundamental de esta tesis es presentar, la existencia y unicidad de la integral de Haar, deduciendo algunas de sus propiedades interesantes y ver como éstas se transfieren del grupo $\Re^n$ a un grupo totalmente arbitrario G el cual no es necesariamente conmutativo. Por tal razón hemos dividido este trabajo en tres capítulos.

El primer capítulo está dedicado a desarrollar la teoría de topología relacionada con espacios compactos, localmente compactos y normales, integrales positivas de funciones continuas con soportes compactos y particiones continuas de la unidad.

Compacidad e integración sobre productos cartesianos. Estudiamos teoremas que son fundamentales para el desarrollo de la teoría de la integral de Haar tal como el Lema de Urysohn, piedra angular de la topología que garantiza que una función continua puede separar dos conjuntos, el teorema de Dicudonnè – Bochner y el teorema de Tychonoff donde demostramos que el producto de dos espacios topológicos es compacto si ellos son compactos. La versión general del teorema de Tychonoff será utilizada en la demostración del teorema de Weil.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la integración sobre espacios localmente compactos, analizando la relación entre las integrales de Riemann, Lebesgue, y Stieltjes y las cuatro versiones del teorema de Riesz bajo el punto de vista de integración de Stieltjes - Riemann. Introducimos además, la invarianza bajo traslación de la integral de Lebesgue. Luego, estudiamos los orígenes de los grupos topológicos y de la integral de Haar, enfatizando los aspectos fundamentales sobre la existencia de una medida invariante y la aproximación de medidas.

El tercer y último capítulo lo introducimos con el concepto formal de la integral de Haar.

Seguidamente, planteamos el Teorema de la integral de Haar, para lo cual, basta probar dos cosas: primero que la integral existe y segundo que si existe otra integral será igual a la primera salvo por un factor de proporcionalidad. Esta demostración se hará luego de haber presentado las consideraciones de Weil al respecto. A continuación damos un ejemplo concreto que garantiza que la integral de Lebesgue en el espacio $\Re^n$ es una integral de Haar sobre $\Re^n$ y desarrollamos las propiedades más importantes de la integral de Haar probando que para que un grupo localmente compacto G tenga una integral de Haar invariante a izquierda y con relación a la cual G posea una medida finita es necesario y suficiente que G sea compacto. Adicionalmente verificamos que para que un grupo localmente compacto sea unimodular (Toda integral invariante a izquierda es invariante a derecha) es necesario y suficiente que Δ_r y Δ_l sean iguales a 1. Luego, ofrecemos otra prueba de la existencia y unicidad de la integral de Haar de acuerdo a Andrè Weil, quien se basó en el principio maximal del Axioma de Elección de Zermelo en la forma del teorema de Tychonoff.

La última demostración que presentamos está basada en la existencia y unicidad de la integral de Haar, planteada por Henri Cartan quien utilizó el criterio de convergencia de Cauchy para demostrar la existencia y unicidad de dicha integral probando que toda integral de Haar invariante a izquierda es el límite de una integral aproximada.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

Capitulo 1

Preliminares

1.1. Espacios compactos, localmente compactos y normales.

Muchas de las propiedades importantes del intervalo [0,1] se sigue del teorema de Heine – Borel.

Introducimos una clase de espacio topológico en el cual la conclusión del teorema de Heine – Borel es válida y muestra que muchas propiedades de [0,1] son también verdaderas para esos espacios. Esos espacios son llamados **compactos**.

Definición 1.1: Sea $\mathbf{A}=\{V_\iota\}_{\iota\in I}$ la familia de subconjuntos de E tal que $X\subset\bigcup_\iota V_\iota$ para algún $X\subset E$. Así $\mathbf{A}$ es llamado un cubrimiento de X y un cubrimiento abierto si cada V_ι es abierto.

Observación: Para que E sea un cubrimiento en sí mismo, debe ser $E=\bigcup_\iota V_\iota$. Un cubrimiento se dice finito si la colección I de índices es finito. Un subcubrimiento de un cubrimiento dado $\{V_\iota\}_{\iota\in I}$ de X es una subfamilia $\{V_i\}_{\iota\in J}$ del cubrimiento dado, determinado por un subconjunto J de I tal que su subfamilia es también un cubrimiento de X.

Definición 1.2: Un espacio compacto es un espacio de Hausdorff E tal que todo cubrimiento abierto de E puede ser reducido a un subcubrimiento finito; más explícitamente, si $E=\bigcup_{\iota}V_{\iota}$ donde los V_{ι} son conjuntos abiertos, entonces existe un número finito de índices $i_1,\ldots, i_n \in I$ tal que $E=V_{i_1}\cup\ldots\cup V_{i_n}$

Usualmente, esto se expresa, diciendo que el espacio de Hausdorff E, tiene la **propiedad de Lebesgue – Borel.**

En un contexto más general, un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff E es un subconjunto X de E, el cual es un espacio compacto relativo a la topología inducida. Vemos inmediatamente que X será un subconjunto compacto de E si y sólo si todo cubrimiento de X por conjuntos abiertos de E pueden ser reducidos a su subcubrimiento finito.

Definición 1.3: Un subconjunto de E se dice relativamente compacto si su clausura es compacta.

El teorema clásico de Bolzano – Weierstrass nos asegura que en el n – espacio euclidiano $\Re^n$ los subconjuntos compactos son los conjuntos los cuales son al mismo tiempo acotados y cerrados; y los relativamente compactos son acotados únicamente.

Es obvio que en el espacio de Hausdorff, todo subconjunto finito es compacto. Es claro que toda unión finita de subconjuntos compactos es compacta; esto es verdadero también para subconjuntos relativamente compactos.

Proposición 1.1: Si X y Y son subconjuntos compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff E, entonces existen subconjuntos abiertos disjuntos V y W tal que $X \subset V$ y $Y \subset W$.

Prueba:

La proposición es verdadera si cada uno de los subconjuntos se reducen a un punto, porque el espacio es de Hausdorff.

Ahora mostremos que la proposición es verdadera en el caso en que X sea arbitrario y Y se reduce únicamente a un punto y. Si x pertenece a X, entonces $x \neq y$. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto V_x que contiene a x y un subconjunto abierto W_x que contiene a y, los cuales son disjuntos. X es cubierto por la familia $\{V_x\}_{x \in X}$. Por virtud de la compacidad de X, existen puntos $x_1,\ldots,x_n$ de X tal que $X \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$. Es claro que V y W son subconjuntos disjuntos abiertos tal que $X \subset V$, $y \in W$.

Finalmente, mostremos que la proposición es verdadera en el caso en que X y Y son ambos arbitrarios. Si y pertenece a Y, aplicamos el caso precedente a X y y. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto V_y que contiene a X y un subconjunto abierto W_y que contiene a y, los cuales son disjuntos. El conjunto Y es cubierto por $\{W_y\}_{y \in Y}$. Por la compacidad de Y existen puntos $y_1,\ldots,y_p$ de Y tal que $Y \subset W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_p}$ Sea el conjunto $V = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_p}$ y $W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_p}$. Es claro que Vy W son conjuntos abiertos disjuntos y que $X \subset Y$ y $Y \subset W$. Así se completa la prueba.

Observación: En un espacio de Hausdorff la intersección de un subconjunto compacto con un subconjunto cerrado es compacto. Por eso, la intersección de una familia no vacía de conjuntos compactos es compacto. Además un subconjunto arbitrario de un conjunto relativamente compacto es también relativamente compacto.

Proposición 1.2: Si E y F son espacios de Hausdorff y si $f: E \rightarrow F$ es una proyección continua, entonces todo subconjunto compacto X de E tiene la imagen compacta f(X).

Prueba:

Si $\{W_i\}$ es un cubrimiento abierto de f(X), entonces $\{f^{-1}(W_i)\}$, será un cubrimiento abierto de X por virtud de la continuidad de f. Reduciendo esto a un subcubrimiento finito de X, también obtenemos un subcubrimiento finito de f(X). Esto prueba la proposición.

Proposición 1.3: (Concerniente a la continuidad uniforme de Heine – Borel). Si f es una función continua de valores reales en un espacio compacto E, entonces dado $\varepsilon>0$, existe un cubrimiento abierto $\{V_i\}$ de E tal que:

$|f(x)-f(x')| \leq \varepsilon$ si $x, x' \in V_i$ para algún i.

Prueba:

Si $t \in E$, existe una vecindad abierta V_t de t tal que:

$|f(x)-f(t)| \leq \varepsilon/2$ si $x \in V_t$

Así,

$|f(x)-f(x')| \leq |f(x)-f(t)|+|f(x')-f(t)| \leq \varepsilon$ si $x,x' \in V_t$ sobre las bases de la compacidad de E, podemos determinar $t_1,\ldots t_n \in$ E tal que $\{U_{t_i}\}$ es un cubrimiento abierto de E. Entonces el conjunto $V_i = U_{t_i}$ Así la proposición está probada.

Definición 1.4: Un **espacio localmente compacto** es un espacio de Hausdorff E tal que todo punto tiene por lo menos una vecindad compacta.

Un espacio compacto es localmente compacto, pues el espacio en sí mismo es una vecindad compacta de cada uno de sus puntos. Lo inverso, sin embargo, no es verdadero. La línea euclidiana $\Re$, por ejemplo, no es compacta, pero es localmente compacta, pues todo punto x de $\Re$ admite como una vecindad, un intervalo compacto [x-h, x+h] donde h>0; similarmente $\Re^n$ es localmente compacto, pero no es compacto.

Una función definida en un espacio localmente compacto que es continua en todo subconjunto compacto del espacio es necesariamente continua sobre todo el espacio.

Proposición 1.4: En un espacio localmente compacto E las vecindades compactas de todo subconjunto compacto X constituyen una base para las vecindades de este conjunto.

Prueba:

Primero asumamos que E es compacto. Consideremos una vecindad U de X, la cual sin pérdida de generalidad, puede ser tomada como abierta. Aplicamos la proposición 1.1 a X y $Y=U^c$, notemos que Y es compacto, puesto que es un subconjunto cerrado de E. Así obtenemos dos subconjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a X y Y respectivamente. Como $V\subset W^c$ también $\bar{V}\subset W^c$. Observamos que $W^c\subset U$, concluimos que $\bar{V}\subset U$. Pero $\bar{V}$ es una vecindad cerrada de X contenida en U. Es suficiente, entonces observar que $\bar{V}$ es también compacto.

Ahora procederemos al caso general en el cual E es localmente compacto. Comencemos mostrando que X tiene la menor vecindad compacta U. Si $x \in X$, sea U_x una vecindad compacta de x. Como X es cubierto por los puntos interiores de los conjuntos U_x, existen puntos $x_1, \ldots, x_n$ de X tal que X es interior a $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Ahora U es compacta. Así U es una vecindad compacta de X. Ahora sea V una vecindad arbitraria de X. Como $U \cap V$ es una vecindad de X en el espacio compacto U, existe en las bases del caso considerado que $W \subset U \cap V$. En particular, $W \subset V$ y W es una vecindad compacta de X en el espacio E. Así se completa la prueba.

Observación: En un espacio localmente compacto todo subconjunto cerrado y también todo subconjunto abierto es localmente compacto. Es además, obvio, que la unión y la intersección de un número finito de subconjuntos localmente compactos son localmente compactos.

Definición 1.5: Un **espacio normal** es un espacio de Hausdorff E tal que para dos subconjuntos cerrados disjuntos X y Y de E existen subconjuntos disjuntos abiertos V y W de E tal que $X \subset V$ y $Y \subset W$.

En terminología corriente esto es usualmente expresado diciendo que dos subconjuntos cerrados y disjuntos pueden ser separados por vecindades disjuntas.

Notemos que tal condición de separación constituye una extensión de la condición de separación de Hausdorff. Por consiguiente, podemos en la definición de un espacio normal sustituir la condición de que el espacio será un espacio de Hausdorff con la condición de que cada punto es un subconjunto cerrado.

Los espacios normales son sumamente interesantes porque de la riqueza de las funciones continuas reales que existen en tales espacios; surge la expresión del siguiente teorema, el cual es una de las piedras angulares de la topología general.

Teorema 1.1 (Teorema de Separación de Urysohn, también conocido como Lema de Urysohn). Si E un espacio normal, X y Y dos subconjuntos cerrados disjuntos de E. Entonces existe en E una función continua con valor real f tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(z)=0$ si $z \in X$ y $f(z)=1$ si $z \in Y$.

Prueba:

En el caso en que una función f exista, definimos: $U(t)=\{z:f(z)<t\}$ para t real y de ese modo obtenemos una familia de subconjuntos abiertos de E tal que:

a). si $s<t$, entonces $\overline{U(s)} \subset U(t)$ y en particular: $U(s) \subset U(t)$

b). $X \subset U(t)$ si $t>0$ y $Y \subset [U(1)]^c$

c). $U(t)=\varnothing$ si $t \leq 0$ y $U(t)=E$ si $t>1$.

La propiedad (a) resulta del hecho de que si $s<t$ entonces: $U(s) \subset \{z:f(z) \leq s\} \subset U(t)$.

Y el conjunto medio de esta cadena de inclusiones es cerrado. La propiedad (b) y (c) son obvias.

Notemos también que la función f puede ser reobtenida de la familia $\{U(t)\}_{t\in\mathfrak{R}}$ por la fórmula:

(1) $f(z)=\inf\{t:z \in U(t)\}$

Actualmente, los números t tal que $z \in U(t)$ son precisamente los números t para los cuales $f(z)<t$, así que tenemos (1).

Recíprocamente, asumamos que tenemos una familia $\{U(t)\}$ de subconjuntos abiertos de E, los cuales tienen las propiedades (a), (b) y (c) de arriba.

Definamos una función de valor real f en E por (1), notemos que por virtud de (c) si $z \in E$, entonces $z \in U(t)$ para $t>1$ y $z \notin \bigcup(t)$ para $t \leq 0$. Esto nos muestra que f es un valor singular y que $0 \leq f \leq 1$.

Si $z \in X$, vemos por (b) que $f(z)=0$. Análogamente, si $z \in Y$, entonces $z \in U(t)$ es imposible para $t<1$, por lo tanto de otro modo por (a), debemos tener que $z \in U(t) \subset U(1)$ lo cual contradice (b). Así $f(z)=1$.

Notemos que:

(2) $\{z:f(z)<t\} \subset U(t) \subset \{z:f(z) \leq t\}$

En verdad, si $f(z)<t$, encontramos $s<t$ así que $z \in \bigcup(s)$, de esto se sigue que $z \in U(s) \subset U(t)$ los cuales prueban la primera parte de (2). Además si $z \in U(t)$ entonces $f(z) \leq t$ la cual prueba la segunda parte de (2).

Todavía tenemos que mostrar:

(3) $\{z:f(z)<t\}=\bigcup\limits_{s<t} U(s)$

(4) $\{z:f(z) \leq t\}=\bigcap\limits_{s>t} \overline{U(s)}$,

Ahora, vemos de (2) que:

$\bigcup\limits_{s>t} \{z:f(z)<s\} \subset \bigcup\limits_{s<t} U(s) \subset \bigcup\limits_{s<t} \{z:f(z) \leq s\}$

y (3) resulta de la observación que afirma que dos miembros extremos de esta relación son iguales a {z:f(z)<t}. En este orden, debemos probar (4). Para ello notemos que por virtud de (a)

$$\bigcap_{s>t}\overline{U(s)}=\bigcap_{s>t}U(s)$$

Además, vemos de (2) que:

$\bigcap_{s>t}$ {z:f(z)<s} $\subset \bigcap_{s>t}$ U(s) $\subset \bigcap_{s>t}$ {z:f(z) $\leq$s} y (4) resulta de la observación que los dos miembros extremos de esta relación son iguales a

{z:f(z) $\leq$t}

Si s<t, entonces:

{z:s<f(z)<t}={z:f(z) $\leq$s}$^c \bigcap$ {z:f(z)<t}

Por virtud de (3) y (4) vemos que el primer miembro de esta relación es un subconjunto abierto. Así f es continua.

En el orden establecido, en el Lema de Urysohn falta demostrar la existencia de una familia $\{U(t)\}_{t\in\Re}$ de subconjuntos abiertos de E con propiedades (a), (b) y (c).

Definamos U(t)=$\varnothing$ para t $\leq$0, U(t)=E para t>1 y U(1)=Y^c

Supongamos que tenemos ya definido U$\left(\frac{k}{2^n}\right)$ para un cierto entero n$\geq$0 y para k=1,…,2^nen tal forma que X$\subset$U$\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\overline{U(\frac{k-1}{2^n})} \subset$ U$\left(\frac{k}{2^n}\right)$(k=2,…,$2^n$)U(1)=Y^c

Ese conjunto de relaciones, obviamente se cumplen para n=0. Debemos ahora definir $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ en la siguiente manera: Cuando k es par, es decir, cuando k=2i donde i=1,...,2^n, el conjunto $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=U\left(\frac{i}{2^n}\right)$.

Cuando k es impar, es decir, cuando k=2i-1, donde i=1,..., 2^n entonces para $k\geq 3$, es decir, $i\geq 2$, $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ debe ser un subconjunto abierto de E tal que $\overline{U(\frac{i-1}{2^n})}\subset U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$, $\overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)}\subset U\left(\frac{i}{2^n}\right)$ y para k=1, es decir, i=1, $U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ debe ser un subconjunto abierto de E tal que: $X\subset U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, $\overline{U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}\subset U\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Procediendo por inducción en este estilo, definimos para toda fracción diádica $t=\frac{k}{2^n}$ donde k=1,...,2^n y n=0,1,..., es decir, actualmente, para toda fracción diádica t tal que $0<t\leq 1$, un subconjunto abierto U(t) tal que $\overline{U(s)} \subset$ U(t) y, en particular, $U(s)\subset U(T)$ si $0<s<t\leq 1$, $X\subset U(t)$ si $0<t<1$, y $U(1)=Y^c$.

Entonces completamos la definición de U(t) la cual coincide con lo anterior cuando t es una fracción diádica tal que $0<t<1$. También vemos inmediatamente que la familia $\{U(t)\}_{t\in\Re}$ así obtenida posee las propiedades (a), (b) y (c). Así el Lema de Urysohn está probado.

Se acostumbra decir que la función continua f de este lema separa los conjuntos X y Y.

Observación: (1) En la prueba del lema de Urysohn no usamos el hecho de que E es un espacio de Hausdorff, pero existe únicamente la posibilidad de separar dos subconjuntos cerrados disjuntos por dos vecindades disjuntas. Recíprocamente, el Lema de Urysohn es válido en un espacio topológico E, entonces dados dos subconjuntos cerrados y disjuntos X y Y de E existe una función con valor real f definida en E la cual es igual a 0 en X e igual a 1 en Y.

Hagamos $V=\{z:f(z)<1/2\}$ y $W=\{z:f(z)>1/2\}$, obtenemos dos subconjuntos abiertos disjuntos que contienen a X y Y respectivamente.

Recapitulando, la validez del Lema de Urysohn en un espacio topológico ya porque sea un espacio de Hausdorff o no, es equivalente a la posibilidad de separación de dos subconjuntos cerrados disjuntos por dos vecindades disjuntas.

(2) El Lema de Urysohn suele ser llamado <u>teorema de extensión</u>, el cual puede ser establecido como sigue: Sea E un espacio normal, X un subconjunto cerrado de E y f una función de valores reales en X. Entonces existe una función continua con valores reales F en E la cual extiende a f, es decir, una función F tal que: $f(x)=F(x)$ cuando $x\in X$. Usualmente, primero probamos el teorema de separación de Urysohn y, sobre esta base, su teorema de extensión.

De otro modo, el teorema de extensión trivialmente contiene el teorema de separación como un caso especial.

Definición 1.6: Dada una función con valor real f en un espacio topológico E, la clausura del conjunto de puntos en los cuales f no se anula es llamado el **soporte de f.**

El complemento del soporte de f es un subconjunto abierto en el cual f es idénticamente nula. Ese complemento es el subconjunto abierto más grande en el cual f es idénticamente nula. Así el soporte de f puede ser caracterizado como el subconjunto cerrado más pequeño fuera del cual f es idénticamente nula.

Los resultados de Urysohn concernientes a funciones continuas reales en espacios normales son válidos en particular para espacios compactos, pero ellos no se aplican sin modificarlos a espacios localmente compactos, por lo tanto existen espacios localmente compactos los cuales no son normales. Veamos ahora la forma que toman los resultados de Urysohn para los espacios localmente compactos.

Primero, necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.1: Sea E un espacio topológico y f una función continua de valores reales definida en un subconjunto cerrado X de E y nula en la frontera de X. Sea f extendida al espacio entero E por la definición siguiente: f(z)=0 si $z \in X^c$. Entonces f será continua en E.

Prueba:

Es obvio que la función extendida f es continua en cualquier punto el cual es interior o exterior a X. Ahora sea z_0 un punto perteneciente a la frontera de X y por lo tanto a X. Entonces f(z_0)=0.

Dado $\varepsilon>0$, existe una vecindad U de z_0 en X tal que: $|f(z) - f(z_0)|<\varepsilon$ si $z\in U$. Sea V una vecindad de z_0 en E tal que $U=X\cap V$. Claramente, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ si $z\in V$. Así la función extendida f es continua en z_0 lo cual establece el lema.

Proposición 1.5: Sea E un espacio localmente compacto, X un subconjunto compacto de E, y U una vecindad de X. Entonces existe en E una función continua f con valores reales tal que $0\leq f\leq 1$, f(z)=1 si $z\in$ X, y f(z)=0 si $z\in U^c$.

Prueba:

Por la proposición 1.4, existe una vecindad compacta V de X contenida en U. Sea Y la frontera de V. Aplicando el Lema de Urysohn al espacio compacto V y los subconjuntos cerrados X y Y, obtenemos una función continua con valor real f en V la cual está entre 0 y 1 y es igual a 1 en X e igual a 0 en Y. Extendemos f al espacio entero E, definiendo a f igual a 0 fuera de V. Por el lema 1.1, f será continua en E, así poseerá las propiedades establecidas en la proposición.

1.2. Integrales positivas de funciones continuas con soportes compactos.

Definición 1.7: Sea E un espacio localmente compacto. Denotemos por $\mathscr{C}$(E) al espacio vectorial de las funciones continuas reales definidas en E, y por $\mathscr{K}$(E) el subespacio vectorial de $\mathscr{C}$(E) el cual consiste de las funciones con soportes compactos.

Entonces si $f \in \mathcal{K}(E)$, el conjunto de puntos en los cuales f no se anula es relativamente compacto. Las funciones de $\mathcal{K}(E)$ son funciones continuas reales definidas en E las cuales se anulan fuera de subconjuntos compactos, dichos subconjuntos varían de función a función.

$\mathcal{K}(E)$ es un subespacio vectorial propio de $\mathcal{C}(E)$, excepto cuando E es compacto, por lo tanto $\mathcal{K}(E)= \mathcal{C}(E)$. Denotemos por $\mathcal{C}_+(E)$ y $\mathcal{K}_+(E)$ el conjunto de funciones positivas en $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{K}(E)$ respectivamente, esos conjuntos, no obstante, no son subespacios vectoriales, son meramente **conos**; es decir son estables bajo adición y multiplicación por escalares positivos.

Por otro lado, definamos a $\mathcal{L}(E,\mu)$, como un espacio vectorial de funciones integrables de valores reales en E el cual contiene a $\mathcal{K}(E)$ como un subespacio vectorial y admite a μ como una extensión única y natural.

Definición 1.8: Una integral positiva en E es un funcional lineal μ en $\mathcal{K}(E)$, la cual es positiva en $\mathcal{K}_+(E)$.

Observemos que si f y g $\in \mathcal{K}(E)$ y $f \leq g$, entonces $g-f \geq 0$, de donde se sigue que $\mu(g-f) \geq 0$, es decir, $\mu(f) \leq \mu(g)$; así μ es un funcional creciente en $\mathcal{K}(E)$.

El número μ (f) es la integral de f sobre E con respecto a μ. Esta es denotada por $\int_E f(x)d\mu(x)$, $\int f(x)d\mu(x)$, $\int_E fd\mu$, $\int fd\mu$ y variaciones de esas notaciones. Cuando tratamos con una integral fija μ, a menudo omitimos referir a μ en la notación y denotamos a μ (f) por $\int f(x)dx$, por ejemplo, así dx indica integración con respecto a μ, siendo x un punto genérico de E.

Ejemplo 1.1 Consideremos un conjunto E con su topología discreta. Todo punto de E es un subconjunto abierto y compacto. Así E es localmente compacto. Los subconjuntos compactos de E obviamente coinciden con los subconjuntos finitos. Por consiguiente, $\mathcal{K}$(E), es el espacio de las funciones continuas de soporte compacto, definidas en E, tal que cada función se anula fuera de un subconjunto finito de E. El funcional lineal μ definida sobre $\mathcal{K}$(E) de la siguiente forma:

$$f \in \mathcal{K}(\mathbf{E}) \to \mu(\mathrm{f}) = \sum_{x \in E} f(x),$$

la suma tiene significado, puesto que ésta contiene únicamente un número finito de términos diferentes de 0, es positivo en $\mathcal{K}_+$(E), así esto constituye una integral positiva sobre E en el sentido de la definición general.

Las propiedades de sumas e integrales admiten un cierto paralelismo, las cuales usualmente son tópicos que se tratan en cursos de cálculo. El presente ejemplo, es el más interesante, pues el concepto de suma aparece como un caso especial de la noción general de integral.

Ejemplo 1.2: Una vez más consideremos el conjunto E con su topología discreta. Sea α cualquier función positiva con valores reales definida en E. El funcional lineal μ definido en $\mathscr{K}$(E) de la siguiente manera:

$$f \in \mathscr{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mu(\mathrm{f})= \sum_{x \in E} \alpha(\mathrm{x}) f(x),$$

donde la suma tiene significado por la misma razón que en el ejemplo 1.1, la misma es positiva en $\mathscr{K}_+$(E), así constituye una integral positiva en E en el sentido de la definición general. Es trivial verificar que, recíprocamente, toda integral positiva sobre E es de este tipo para una cierta función positiva α. Por lo tanto, tenemos aquí el ejemplo más general de una integral positiva sobre un espacio discreto y por esta razón designamos esa integral como la integral discreta. El ejemplo 1.1 corresponde a α (x)$\equiv$1.

Si μ es una integral positiva sobre un espacio localmente compacto E y si F es un subconjunto abierto de E, entonces μ determina una integral positiva v sobre F en la siguiente manera: Si g$\in \mathscr{K}$(F), extendemos esta función a E por definición es igual a 0 fuera de F y así obtenemos f$\in \mathscr{K}$ (E). Sea el conjunto v(g)= μ(f). Se sigue inmediatamente que v es una integral positiva sobre F. Como es de costumbre, escribimos $\int_F g d\mu$ para $v(g) = \int_F g dv$. Decimos que v es obtenida por la restricción de μ a F o que éste es inducido en F por μ.

Algunas veces es conveniente limitarnos a la consideración de una integral positiva μ en el cono $\mathcal{K}_+(E)$. Es claro que en $\mathcal{K}_+(E)$ el funcional real μ es positiva, es decir, es aditiva, esto es, $\mu(f+g)= \mu(f)+ \mu(g)$ si $f,g\in \mathcal{K}_+(E)$, y que, además, es homogéneamente positiva, esto es, $\mu(\lambda f)= \lambda\, \mu(f)$ si $\lambda \in \Re_+$ y $f\in \mathcal{K}_+(E)$.

Recíprocamente, tenemos:

Proposición 1.6: Si μ es un funcional positivo con valores reales que es homogéneamente, aditivo y positivo en $\mathcal{K}_+(E)$, entonces μ admite una y solo una extensión en $\mathcal{K}(E)$ la cual es una integral positiva sobre E.

Prueba:

Mostremos que μ admite una extensión μ' en $\mathcal{K}(E)$ el cual es un funcional lineal. Si $f\in \mathcal{K}(E)$ es posible escribir $f=f_1-f_2$ donde $f_1,f_2\in \mathcal{K}_+(E)$, aunque no en una única manera. Una forma de obtener tal expresión consiste en poner $f_1=\sup(f,0)$, $f_2=-\inf(f,0)$. De todas estas expresiones $f=f_1-f_2$ se pueden deducir otras expresiones $f=(f_1+g)-(f_2+g)$ donde $g\in \mathcal{K}_+(E)$. Como vemos en la siguiente prueba (nombremos, la prueba de la linealidad de μ') es decir, indiferentemente, se puede descomponer $f=f_1-f_2$ con $f_1,f_2\in \mathcal{K}_+(E)$ de acuerdo a nuestra consideración. Entonces definamos μ' en $\mathcal{K}(E)$ por $\mu'(f)=\mu(f_1)-\mu(f_2)$. Si $f=f_1-f_2=f_3-f_4$ donde las cuatro funciones f_i pertenecen a

$\mathscr{K}_+(E)$, entonces $f_1+f_4=f_2+f_3$ así que $\mu(f_1)+\mu(f_4)=\mu(f_2)+\mu(f_3)$ y así $\mu(f_1)-\mu(f_2)=\mu(f_3)-\mu(f_4)$ lo cual quiere decir que μ' es un valor singular en $\mathscr{K}(E)$ como deseamos. Se sigue de una vez, que μ' es un funcional lineal en $\mathscr{K}(E)$ la cual coincide con μ en $\mathscr{K}_+(E)$ y, por lo tanto, es una integral positiva sobre E. Esto prueba la existencia de la extensión de μ. Para la unicidad, también resulta el hecho de que toda función de $\mathscr{K}(E)$ puede ser escrita como la diferencia de dos funciones de $\mathscr{K}_+(E)$. Así la proposición queda establecida.

En el presente nos limitamos a integrales positivas, porque, tenemos en mente la <u>integral de Haar,</u> la cual es positiva.

Concluimos esta sección estableciendo una simple y básica propiedad de integrales positivas las cuales relacionan su continuidad como la que ya se definió en cierto sentido. De acuerdo a esta conexión necesitamos alguna notación adicional.

Si $f\in\mathscr{K}(E)$, entonces f será acotada en estos soportes y así acotada en E, por lo tanto f se anula fuera de estos soportes.

Entonces definimos:

$\|f\|=\sup\{|f(x)|:x\in E\}$

En esta forma obtenemos una norma en el espacio vectorial $\mathscr{K}(E)$ la cual es llamada la <u>norma uniforme</u>. Cuando E es compacto. $\mathscr{K}(E)=\mathscr{C}(E)$ es completo en el sentido de Cauchy con respecto a estas normas, todo límite uniforme de funciones continuas con valor reales también serán continuas.

Sin embargo, en el caso en el cual E es un espacio localmente compacto arbitrario, $\mathcal{K}(E)$ no es necesariamente completo con respecto a su norma. (Nos podemos fácilmente convencer de esto tomando $E=\Re$, considerando una función continua real en $\Re$ la cual no tiene un soporte compacto, pero que tiende a cero en el infinito, y entonces, aproximando esta función uniformemente a $\Re$ por una sucesión de funciones continuas con valores reales definidas en $\Re$ y con soportes compactos; esta sucesión será una sucesión de Cauchy, pero no converge sobre el espacio $\mathcal{K}(\Re)$.

La continuidad de integrales positivas se entenderá con referencia a su norma, las integrales positivas, son sin embargo, no continuas en este sentido sobre el espacio entero $\mathcal{K}(\Re)$, pero sí sobre ciertos subespacios vectoriales.

Si K es un subconjunto de E, denotamos por $\mathcal{K}(E,K)$ el subespacio vectorial de $\mathcal{K}(E)$ formado por las funciones las cuales tienen soportes contenidos en K.

$\mathcal{K}_+(E,K)$ representa el cono de funciones positivas de $\mathcal{K}(E,K)$. Si K es compacto, $\mathcal{K}(E,K)$ será completo en el sentido de Cauchy, relativo a la norma uniforme.

Proposición 1.7: (Concerniente a la continuidad de integrales positivas). Si μ es una integral positiva sobre el espacio localmente compacto E, entonces μ será relativamente continua a la norma uniforme sobre todo subespacio vectorial $\mathcal{K}(E,K)$ tal que K es un subconjunto compacto de E.

Prueba:

Dado un subconjunto compacto K de E, existe una función $F \in \mathscr{K}_+(E)$ la cual es igual a 1 en K. Existe de hecho, una vecindad compacta V de K (proposición 1.4). Por lo tanto existe en E una función continua con valor real $F \geq 0$ la cual es igual a 1 en K e igual a 0 fuera de V (proposición 1.5) así satisface la condición dada.

Si $f \in \mathscr{K}(E,K)$, entonces:

$-\|f\| \cdot F \leq f \leq \|f\| \cdot F$, esto es, $-\|f\| \cdot F(x) \leq f(x) \leq \|f\| \cdot F(x)$ para todo $x \in E$. Actualmente si $x \in K$ es suficiente notar que $F(x)=1$, y $-\|f\| \leq f(x) \leq \|f\|$; y si $x \in K^c$, es suficiente notar que $f(x)=0, \|f\| \geq 0$, y $F(x) \geq 0$. Como $-\|f\| \cdot \mu(F) \leq \mu(f) \leq \|f\| \cdot \mu(F)$, esto es, $|\mu(f)| \leq \|f\| \cdot \mu(F)$, se sigue que, si $f \in \mathscr{K}(E,K)$ varía en tal forma que $\|f\|$ tiende a 0, entonces $\mu(f)$ tiende a 0. Puesto que es suficiente probar la continuidad de un funcional lineal en el origen, vemos que μ es continua sobre $\mathscr{K}(E,K)$ así se completa la prueba.

Esta propiedad se acostumbra expresar diciendo que, si una función variable $f \in \mathscr{K}(E)$ tiende uniformemente en E a una función fija $f_0 \in \mathscr{K}(E)$ en tal forma que el soporte de f siempre queda dentro de un subconjunto compacto fijo K de E, entonces $\mu(f)$ tiende a $\mu(f_0)$.

Observación: (1) La proposición 1.7, no obstante, aunque simple, es importante, porque si deseamos presentar la noción general de la integral sin restringirnos previamente a integrales positivas, debemos tomar precisamente la continuidad descrita en dichas proposición, como un punto de inicio, ahora deseamos definir un integral sobre el espacio localmente compacto E siendo un funcional lineal μ en $\mathcal{K}$(E) el cual es relativamente continuo a la norma uniforme sobre todo subespacio vectorial $\mathcal{K}$(E,K), K será un subconjunto arbitrario de E.

(2) La continuidad de una integral positiva μ sobre E referida en la proposición 1.7, como también el concepto de continuidad los cuales se usaron en la definición de una integral arbitraria, merecen un comentario especial. Primero que no es cierto que μ será siempre continua sobre el espacio entero $\mathcal{K}$(E) relativo a la norma uniforme y segundo que una integral no necesariamente es un funcional continuo con respecto a la norma uniforme, esto es, con respecto a la convergencia uniforme. La crítica, sin embargo, es eliminada, tan pronto como reconozcamos que estamos tratando con espacios localmente compactos los cuales no son necesariamente compactos, como también con integrales positivas las cuales no son necesariamente finitas sobre el espacio entero, esto es, integrales positivas para las cuales los espacios pueden tener medidas infinitas en el sentido discutido anteriormente. En esa conexión es suficiente repetir una observación común hecha en cursos de cálculo: si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas reales definidas sobre la recta $\Re$ tiende uniformemente a 0 sobre la línea entera, no podemos igualmente fijar, que si los f_n tienen soportes compactos, concluir que necesariamente:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \to 0$ si $n \to +\infty$ para la correspondiente integral de Riemann; puesto que esta conclusión puede ser correcta si todos los f_n se anulan fuera del mismo intervalo compacto.

1.3. Particiones continuas de la unidad.

Antes de adentrarnos a nuestro objetivo final referente a la teoría general de integración sobre espacios localmente compactos, esto es, integración sobre productos cartesianos, desarrollaremos ciertas consideraciones concernientes al concepto de una partición continua de la unidad.

A manera de motivación, consideremos un conjunto finito E. Designemos sus puntos por $x_1,\ldots,x_n$. Sea $\mathscr{C}(E)$ el álgebra de funciones de valores reales sobre E. Indicamos por $e_i(i=1,\ldots,n)$ la función con valores reales definidas en E la cual es igual a 1 en el punto x_i y es igual a 0 en los puntos x_j, $j\neq i$. Claramente, $e_i\geq 0$, $\Sigma\, e_i=1$ y $\{e_i\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathscr{C}(E)$. Cada $f\in \mathscr{C}(E)$ puede ser escrito en una única forma como una combinación lineal de los $\{e_i\}$, es decir, $f=\Sigma\, \lambda_i e_i$ donde todo $\lambda_i=f(x_i)$, su expresión puede ser escrita en la forma $f=\Sigma\, fe_i$, por lo tanto fe_i es la función que es igual a $\lambda_i=f(x_i)$ en el punto x_i e igual a 0 en los puntos x_j, $j\neq i$. La igualdad $1=\Sigma\, e_i$ nos da una expresión de la unidad como la suma de funciones positivas, cada una de las cuales tiene soporte mínimo, es decir, soporte reducido a un punto. Extenderemos esa situación al caso de funciones sobre espacios normales, los cuales nos permiten escribir la unidad como una suma de funciones positivas reales teniendo soportes suficientemente pequeños, en el sentido que se indicará más adelante. El concepto de una partición continua de la unidad simultáneamente introducida por Dieudonnè y Bochner, a resultado ser una herramienta importante en muchas pruebas.

Definición 1.9: Si E es un espacio topológico, cada expresión $1=\Sigma f_i$ la cual representa la función constante 1 sobre E como una suma finita de funciones continuas con valores reales $f_i \geq 0$ en E, se dirá que es **una partición continua de la unidad.**

Notemos que, por supuesto, $0 \leq f_i \leq 1$. Si $E=\bigcup V_i$ es un cubrimiento abierto finito de E, la partición se dirá que es subordinada a este cubrimiento si los conjuntos indexados de $\{f_i\}$y$\{V_i\}$ son idénticos y cada f_i se anula fuera del correspondiente V_i.

Proposición 1.8: Si E es un espacio normal y si X es un subconjunto cerrado de E y $\{V_i\}$ es un cubrimiento abierto finito de X, existe otro cubrimiento finito abierto $\{W_i\}$ de X con el mismo conjunto de índices tal que $\overline{W_i} \subset V_i$.

Prueba:

Asumamos para fijar nuestras ideas que el conjunto índice I está dado por I=$\{1,\ldots,n\}$ La proposición se cumple en el caso n=1.

Actualmente, como $X \subset V$, donde X es cerrado y V es abierto, existe por virtud de la normalidad de E, un conjunto abierto W_1, tal que $X \subset W_1$, $\overline{W_1}$, $\subset V_1$.

Ahora supongamos que n>1 y que la proposición se cumple para n-1

De $X \subset V_1 \bigcup \ldots \bigcup V_n$ obtenemos $X \bigcap (V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_n)^c \subset V_1$. Por la normalidad de E existe un conjunto abierto W_1, tal que $X \bigcap (V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_n)^c \subset W_1$, $\overline{W_1}$, $\subset V_1$. La primera de estas inclusiones provee $X \bigcap W_1^c$, $\subset V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_n$. Podemos así por la hipótesis de inducción determinar conjuntos abiertos:

$W_2,\ldots,W_n$ tal que $X \cap \overline{W}_1^c \subset W_2 \cup \ldots \cup W_n$, $\overline{W_2} \subset V_2,\ldots,\overline{W_n} \subset V_n$. Ahora, la primera de esas inclusiones significa que $X \subset W_1 \cup \ldots \cup W_n$. Esto prueba la proposición para el caso n.

Observación (1): La proposición 1.8 es frecuentemente aplicada al caso particular en el cual X=E. El caso más general aquí discutido es, en el cual X no es necesariamente igual a E también ocurre en las aplicaciones, pero esta consideración es útil en cualquier forma porque resulta de la prueba inductiva en el caso particular en el cual X=E. Al mismo tiempo, el caso general, es una consecuencia inmediata de este caso particular.

(2) La validez de la proposición 1.8 en el caso en el cual n=1 y X es un subconjunto arbitrario cerrado, o en el caso en el cual n=2 y X=E implica la normalidad de E. Por consiguiente, la hipótesis de que E es normal no es únicamente suficiente sino también necesaria para que la proposición 1.8 sea correcta en un espacio de Hausdorff.

Teorema 1.2: (Dieudonnè – Bochner). Todo cubrimiento finito abierto $\{V_i\}$ de un espacio normal E corresponde a una partición continua de la unidad la cual es subordinada a su cubrimiento.

Prueba:

Aplicamos la proposición 1.8 al caso en el cual X=E. Existe entonces un cubrimiento finito abierto $\{W_i\}$ de E tal que $\overline{W_i} \subset V_i$. Por el lema de Urysohn (teorema

1.1) existe una función continua de valores reales $g_i \geq 0$ en E la cual es igual a 1 en $\overline{W_1}$, e igual a 0 fuera de V_i. Colocando $g = \Sigma g_i$, notemos que $g \geq 1$ así que g no se anula en E. Ahora definamos $f_i = g_i/g$ la cual da la partición deseada. Así se concluye la prueba.

Observación: Se sigue de la prueba del teorema 1.2 que el soporte de f_i puede ser asumido contenido en V_i. En este sentido en el cual $1 = \Sigma f_i$ es una expresión de 1 como la suma de funciones continuas positivas con valores reales las cuales tienen soportes suficientemente pequeños; así como se comprendió.

Corolario 1.1: Todo cubrimiento finito abierto $\{V_i\}$ de un subconjunto cerrado X de un espacio normal E corresponde a una familia finita $\{f_i\}$ de funciones continuas con valores reales en E tal que $f_i \geq 0$, $f_i(x)=0$ si $x \in V_i^c$, $\Sigma f_i \leq 1$, en E, y $\Sigma f_i = 1$en X.

Prueba:

Claramente, X^c y $\{V_i\}$ constituye un cubrimiento abierto finito de E. Aplicando el teorema 1.2, obtenemos una función continua f con valores reales y una familia $\{f_i\}$ de funciones continuas con valores reales en E tal que $1 = f + \Sigma f_i, f \geq 0$, f nula en X y f_i nula fuera de los V_i. Esto establece el colorario.

Obviamente, la validez del teorema (1.2) de Dieudonnè – Bochner o de sus corolarios es equivalente a la normalidad de un espacio de Hausdorff.

1.4. Compacidad sobre productos cartesianos.

Con el objetivo en mente de presentar ciertos resultados concernientes a la integración de productos cartesianos, primero indicamos algunas propiedades básicas de compacidad relativos a productos de dos factores. La extensión de un número finito de factores es inmediato.

Proposición 1.9: Sean E y F dos espacios y $\{W_k\}_{k\in K}$ un cubrimiento abierto de ExF. Entonces existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de E y un cubrimiento abierto $\{V_j\}_{j\in J}$ de F tal que todo $U_i x V_j$ está contenido en algún W_k.

Prueba:

Si $x\in E$ y $y\in F$, entonces (x,y) pertenece a algún W_k. Así existen subconjuntos abiertos $x \in U_{xy}$ de E y $y\in V_{xy}$ de F tal que U_{xy} x $V_{xy} \subset W_k$. Fijemos x en E. Por la compacidad de F existen $y_1,\ldots y_n$ de F tal que $F = V_{xy_1} \cup \ldots \cup V_{xy_n}$ Sea el conjunto $U_x = U_{xy_1} \cap \ldots \cap U_{xy_n}$. Sea $\mathcal{V}_x$ el conjunto formado de los distintos $\mathcal{V}_{xy_s}$ (s=1,...,n). U_x es un subconjunto abierto de E que contiene a x y $\mathcal{V}_x$ es un conjunto de subconjuntos abiertos de F cuya unión es igual a F, lo que significa que $\mathcal{V}_x$ es un cubrimiento abierto de F. Notemos que, si $V\in \mathcal{V}_x$, entonces U_x x V está contenido en algún W_k, puesto que $V=V_{xy_s}$ para un cierto s y $U_x \subset U_{xy_s}$ Por la compacidad de E existen $x_1,\ldots x_m$ de E tal que $E=U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto formado de los distintos $U_{x_r} (r = 1,\ldots,m)$. $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de E. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de los subconjuntos de F de la forma $V_1 \cap \ldots \cap V_m$ donde $V_r\in \mathcal{V}_{x_r}$ (r=1,...m). Se sigue inmediatamente que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto de F por lo tanto la misma observación se cumple para $\mathscr{V}_{x_r}$. Además cada $U_{x_r} x(V_1, \cap \ldots \cap V_m)$ está contenido en $U_{x_r} xV_r$ las cuales para esta parte está nuevamente contenida en algún W_k. La proposición es así probada.

Proposición 1.10: (Teorema Trivial de Tychonoff). Para que el producto E x F de dos espacios topológicos E y F sean compactos, es necesario y suficiente que E y F sean compactos.

Prueba:

Para que E x F sea un espacio de Hausdorff, es necesario y suficiente que E y F sean espacios de Hausdorff. Si E y F son compactos, la proposición 1.9 muestra de una vez que E x F también es compacto. Recíprocamente, sea E x F compacto. Por lo tanto, las proyecciones naturales de E x F sobre E y F son continuas, E y F, entonces también son compactos (proposición 1.2). Así se completa la prueba.

La proposición 1.10 es válida no únicamente para dos factores (o para un número finito de factores), sino también para una cantidad infinita arbitraria de factores. Esto constituye un resultado profundo que nació de Tychonoff, las cuales fueron establecidas cuando se necesitaron.

1.5. Integración sobre productos cartesianos.

Nuestro objetivo en esta sección es probar la permisibilidad de invertir el orden de integración en el caso simple, es decir, de una función continua con valores reales de dos variables reales con soportes compactos.

Recordemos que si E es un espacio compacto, $\mathscr{C}$(E) designa al espacio vectorial normado de las funciones continuas con valores reales en E, la norma será dada por: $||f||=\sup\{|f(t)|:t\in E\}$ si $f\in \mathscr{C}(E)$.

Lema 1.2: Sea E un espacio compacto, F un espacio topológico, y $f:ExF\to R$ una función. Supongamos que para todo $y\in F$, la función $x\to f(x,y)$ de E a $\Re$ es continua. Indicamos por f ' la función definida sobre F cuyos valores están en $\mathscr{C}$(E) y el cual con todo $y\in F$ asocia a $f'(y)\in \mathscr{C}(E)$ donde f '(y) es la función $x\to f(x,y)$. Para que: $f':f\to \mathscr{C}(E)$ sea continua, es necesario y suficiente que $f:ExF\to \Re$ sea continua.

Prueba:

Primero supongamos que f' es continua. Sea $\varepsilon>0$ y $(x_0,y_0)\in ExF$. Por la continuidad de f ', existe una vecindad V de y_0 tal que $||f'(y)-f'(y_0)||\leq \varepsilon/2$ si $y\in V$, esto es tal que $|f(x,y)-f(x,y_0)|\leq \varepsilon/2$ si $x\in E$ y $y\in V$. Por la continuidad de $x\to f(x, y_0)$, también existe una vecindad U de x_0 tal que $|f(x, y_0)-f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon/2$ si $x\in U$. Por consiguiente $|f(x,y)-f(x_0,y_0) \leq \varepsilon$ si $x\in \bigcup$ y $y\in V$; esto es, f es continua.

Recíprocamente, asumamos que f sea continua. Se sigue que, dado $\varepsilon>0$ y $y_0 \in F$ existe para todo $t\in E$, una vecindad U_t de t y una vecindad V_t de y_0 tal que:

$|f(x,y)-f(t, y_0)| \leq \varepsilon/2$ si $x \in U_t$ y $y\in V_t$. La compacidad de E nos permite determinar $t_1,\ldots,t_n$ en E en tal forma que $E=U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}$. Haciendo $V=V_{t_1} \cap \ldots \cap V_{t_n}$ obtenemos una vecindad de y_0. Si $x\in E$ y $y\in V$, entonces para un cierto i, tenemos:

$x\in U_{t_i}$ y $y\in V_{t_i}$, de donde $|f(x,y)-f(t_i, y_0)| \leq \varepsilon/2$.

Además obtenemos, de $x\in U_{t_i}$ y $y_0 \in V_{t_i}$.

$$|f(x, y_0)-f(t_i, y_0)| \leq \varepsilon/2$$

Así $$|f(x,y)-f(x, y_0)| \leq \varepsilon \text{ si } x\in E \text{ y } y\in V, \text{ ó}$$

$$\|f'(y)-f'(y_0)\| \leq \varepsilon \text{ si } y\in V, \text{ esto es, } f' \text{ es continua.}$$

Y así se concluye la prueba.

Lema 1.3: Consideremos dos espacios localmente compactos E y F (ExF siendo así localmente compactos), una integral positiva μ sobre E, y una función $f\in \mathscr{K}(E\mathrm{x}F)$. Para todo $y\in F$, la función $x\rightarrow f(x,y)$, entonces, pertenece a $\mathscr{K}(E)$. Además, la función $y\rightarrow \int f(x,y)d\mu(x)$ pertenece a $\mathscr{K}(F)$.

Prueba:

Sea C el soporte compacto de f y A y B sus proyecciones sobre E y F respectivamente. A y B serán compactas y $C \subset A \times B$. Empleando la notación del Lema

1.2 sea f ' (y) la función real definida sobre E como fue indicada para todo $y \in F$. Claramente f '(y) $\in \mathcal{K}(E)$ para todo $y \in F$, puesto que f '(y) es continua sobre E y su soporte está contenido en A.

Por virtud del lema 1.2 aplicado con A en lugar de E, además, vemos que la función $y \rightarrow$ f '(y) de F a $\mathcal{K}(E)$ es continua bajo la norma uniforme sobre $\mathcal{K}(E)$. Por virtud de la proposición 1.7. concerniente a la continuidad de integrales positivas, y del hecho de que el soporte de f '(y) está contenido en el conjunto compacto A independiente de y, podemos decir que la función $y \rightarrow \int f'(y) d\mu$ es continua en F. Puesto que, además, este soporte está contenido en B, ésta función pertenece a $\mathcal{K}(F)$. La prueba así se completa.

CAPÍTULO 2

INTEGRACIÓN SOBRE ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS.

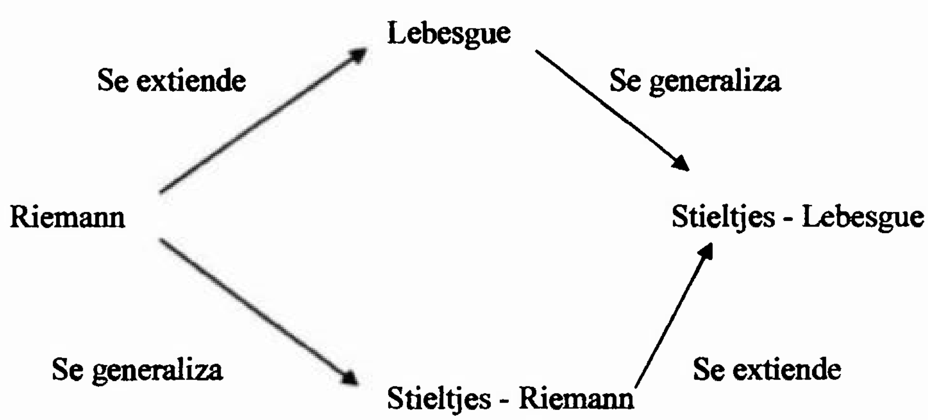
Capítulo 2

Integración sobre espacios localmente compactos.

2.1. Relación entre la integral de Riemann, Lebesgue y Stieltjes.

En los cursos usuales sobre análisis estudiamos primero la integral de Riemann y luego su extensión a la integral de Lebesgue. A su vez, la integral de Riemann puede ser generalizada en la integral de Stieltjes, la cual se extiende a la integral de Stieltjes – Lebesgue, además esta última es una generalización de la integral de Lebesgue.

Así tenemos el diagrama:



Cabe señalar que la integral de Riemann tiene ciertos defectos que pueden remediarse con la integral de Lebesgue, aunque hasta ahora se ha visto que las propiedades algebraicas de las integrales de ambas son las mimas y que sus valores coinciden cuando la función es acotada y Riemann integrable. Sin embargo, se ha observado que las funciones acotadas que son Lebesgue integrables, no lo son en el sentido de Riemann. Luego la primera observación es que hay más funciones Lebesgue integrables que funciones Riemann – integrables. En segundo lugar, hay que analizar que para definir la integral de Lebesgue no es necesario suponer que las funciones sean acotadas. Así se establecen las diferencias notables entre las integrales de Riemann y Lebesgue, como las siguientes: en la primera se usa intervalos y sus longitudes, mientras que en la segunda se utilizan conjuntos de puntos más generales y sus medidas, manejando límites con facilidad en tanto que la de Riemann no lo hace.

Casi paralelo a los trabajos de Borel y Lebesgue, el matemático Dutch Stieltjes mostró la utilidad y alcance de la extensión de la integral de Riemann en la cual la función longitud b-a es remplazada por la medida más general μ(b)- μ(a) donde μ es una función dada.

Cuando μ (x) coincide con x, se obtiene la longitud ordinaria, pero obviamente este es un caso bastante particular. Una forma de ver la naturalidad de la generalización de Stieltjes es desde un punto de vista probabilístico; tal que μ (b) es la probabilidad de que una variable aleatoria. "x" sea menor que "b", entonces μ (b)- μ (a) es la probabilidad que $a \leq x \leq b$; ésta se extiende naturalmente a la medida definida en conjuntos más generales que los intervalos. Así de esta forma expresamos que la medida de un conjunto representa la probabilidad de que "x" sea miembro de éste.

2.2. La integral de Lebesgue-Stieltjes.

Iniciaremos esta sección con las siguientes definiciones referentes a espacios básicos de medida.

Definición 2.1: Un espacio básico de medida $\mu : \Re \to \Re^+$ es un sistema compuesto de un conjunto I, un anillo $\Re$ de subconjuntos de I y una función μ en $\Re$ de valores reales no negativos, con la propiedad siguiente:

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en $\Re$ cuya unión A está nuevamente en $\Re$, entonces $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$. Tal espacio M puede ser denotado por la tripleta (I, $\Re, \mu$).

El anillo $\Re$ hace referencia al anillo de conjuntos básicos medibles en M y μ será llamada la medida.

En otros términos, un espacio básico de medida es simplemente un anillo de conjuntos juntamente con una función real contable aditiva no negativa en el anillo.

Definición 2.2: Un espacio básico de medida (I, $\Re, \mu$) es discreto en el caso en que $\Re$ incluya todos los subconjuntos unitarios de I y μ sea completamente aditiva en $\Re$ en el sentido siguiente: Si $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es cualquier familia indexada (con conjunto de índices Λ de elementos mutuamente disjuntos de $\Re$ cuya unión A está nuevamente en $\Re$), entonces:

$$\mu(A) = \sum_\lambda \mu(A_\lambda)$$

Esta definición sugiere un modo simple de construcción para un espacio discreto.

Sea I cualquier conjunto, sea $\mathfrak{R}$ el anillo de todos los subconjuntos finitos de I y sea w una función real no negativa en I. Para cualquier conjunto A, $\mu(A)=\sum_{x\in A} w(x)$.

Fácilmente vemos que la suma de los pesos w(x) en la unión de dos conjuntos finitos disjuntos es la suma de los "pesos" en los respectivos conjuntos; así μ es finitamente aditiva.

Ilustremos con el siguiente ejemplo, el caso donde $\mathfrak{R}$ es extendido a $\mathfrak{R}^*$ incluyendo todos los subconjuntos de A para los cuales la suma $\sum_{x\in A} w(x)$ es finita, con $\mu(A)$ definida como su suma.

Ejemplo 2.1: Si I representa la recta real, y x_1, x_2,... la enumeración de los puntos racionales en I. Definamos:

$$w(x)=\begin{cases} 2^{-n} & \text{si } x=x_n \text{ para algún n} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

El anillo $\mathfrak{R}^*$ es el conjunto potencia de los reales. La medida de cualquier subconjunto de A será la suma de 2^{-n} tomando sobre sus índices n tal que $x_n \in A$.

Es fácil construir la generalización Stieltjes de la medida de Lebesgue como una construcción de la medida de Lebesgue; su construcción más general de un espacio básico de Lebesgue – Stieltjes, es esencialmente el Teorema 2.1 que demostraremos posteriormente.

Debemos ahora interesarnos con las medidas en un anillo $\mathfrak{R}$ generado por los intervalos acotados contenidos en un intervalo I en la recta real; intervalo que representa cualquier subconjunto convexo de los reales. Tal conjunto es caracterizado por la propiedad siguiente: siempre que este contenga a a y b, con $a<b$, entonces también contiene todos los puntos x tal que $a<x<b$. Así el intervalo dado puede ser abierto, cerrado, un punto único, semi – abierto (equivale a abierto en un extremo y cerrado en el otro), o hasta vacío. La longitud del intervalo acotado con extremo izquierdo "a" y extremo derecho "b" ($a \leq b$) es por supuesto b-a. Recordemos la notación [a, b] para el intervalo cerrado de a a b; (a, b) para el intervalo abierto y (a, b] y [a, b) para los intervalos semi abiertos excluyendo los puntos extremos izquierdo y derecho respectivamente.

Lema 2.1: El anillo $\mathfrak{R}$ es precisamente la colección de todas las uniones finitas disjuntas de intervalos cerrados cuya clausura está contenida en I.

Prueba:

Por el momento denotemos la colección por $\mathscr{C}$. Entonces como $\mathscr{C}$ está contenido en $\mathfrak{R}$ y contiene los generadores de $\mathfrak{R}$ es suficiente mostrar que $\mathscr{C}$ es un anillo. La unión de conjuntos cualesquiera A y B puede ser siempre expresada como una unión disjunta mediante la relación:

$A \cup B = A \cup (B-A)$.

Como $\mathscr{C}$ es obviamente cerrado bajo uniones disjuntas, es por consiguiente suficiente probar que $\mathscr{C}$ es cerrado bajo diferencias. Si B es una unión disjunta de intervalos F_1, F_2, …,F_n, la diferencia A-B puede ser formada por la sustracción sucesiva de los intervalos de A. Basta, entonces probar que la diferencia de un conjunto $\mathscr{C}$ con un intervalo en $\mathscr{C}$, está nuevamente en $\mathscr{C}$. Pero, fácilmente, vemos que si un intervalo es removido de una unión disjunta de intervalos, el resultado es, nuevamente, una unión disjunta de intervalos.

Lema 2.2: Para cualquier función con valores complejos F definida en I existe una única función finita aditiva con valores complejos μ definida en $\Re$ tal que:

μ(E)=F(b)-F(a). Para los intervalos E en $\Re$ con extremos izquierdo y derecho a y b respectivamente.

Prueba:

Para los intervalos en $\Re$ definimos μ como se definió anteriormente. Por el lema 2.1, un elemento general A de $\Re$ es una función finita de intervalos $E_1,E_2,\ldots,E_n$ en $\Re$. Pero, a menos que A se reduzca a un único punto, se tienen infinitas representaciones. Así es necesario, y también suficiente claro mostrar que la definición:

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

Es independiente de la forma particular en la cual A se representa. Supongamos, entonces, que A es también representada como la unión disjunta de los intervalos $F_1,F_2,\ldots,F_r$. Entonces E_i es la unión disjunta de los intervalos $E_i\cap F_1, E_i\cap F_2,\ldots,E_i\cap F_r$

Además, $\mu(E_i)=\sum_{j}\mu(E_i\cap F_j)$

Se obtiene, arreglando convenientemente, la suma a izquierda con la cual se reduce el valor a izquierda. Por simetría de inmediato, tenemos que:

$$\mu(F_j) = \sum_i \mu(E_i \cap F_j)$$

Se sigue que:

$$\sum_i \mu(E_i) = \sum_j \mu(F_j)$$

Teorema 2.1: Si F es una función monótona creciente en un intervalo real I, existe una única medida contable aditiva μ en el anillo $\Re$ generado por los intervalos compactos en I tal que:

$\mu(E)=F(b)-F(a)$. Para todo intervalo E en $\Re$ con a y b como extremos izquierdo y derecho respectivamente.

Prueba:

Sea F una función continua monótona creciente definida en I. Entonces la función del conjunto μ definida en el lema 2.2 es una medida no negativa finitamente aditiva. Sólo falta demostrar la contabilidad aditiva de μ, lo cual es de hecho, lo más importante del teorema.

Supongamos A_1, A_2, ... es una sucesión decreciente de conjuntos en $\Re$ cuya intersección es vacía y sea $\varepsilon>0$. Si A_n es un intervalo, es obvio de la continuidad de F, que A_n contiene un intervalo cerrado B_n tal que:

$$\mu(A_n-B_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pero aún, si An es una unión finita de intervalos disjuntos, cada uno de esos intervalos contienen un intervalo cerrado cuya medida es cerrada arbitrariamente respecto a la medida del intervalo contenido. Así en cualquier caso, A_n contiene un conjunto cerrado B_n en $\mathfrak{R}$ tal que:

$$\mu(A_n\text{-}B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

La intersección de los B_n está contenida en la de los A_n y es por consiguiente vacío. Como los B_n no son únicamente cerrados y acotados como también (i,e, compactos), existe un entero positivo r para el cual:

$$\bigcap_{n=1}^{r} B_n = \varnothing$$

Si $s \geq r$, se sigue fácilmente que:

$$A_s \subset \bigcup_{n=1}^{r} (A_n\text{-}B_n)$$

La prueba se concluye mostrando que:

$$\mu(A_s) \leq \sum_{n=1}^{r} \mu(A_n\text{-}B_n) < \varepsilon$$

Primero observamos que $\mu(E) \leq \mu(F)$ cuando E y F están en $\mathfrak{R}$ y $E \subset F$. Por lo tanto: $\mu(A_s)$ es acotado por la medida de $\bigcup_{n=1}^{r}(A_n\text{-}B_n)$

De inmediato hacemos uso de la subaditividad de μ, es decir del hecho de que $\mu(\bigcup_{n=1}^{r} E_n) \leq \sum_{n=1}^{r} \mu(E_n)$ para cualquier $E_1, E_2, \ldots, E_r$ en $\mathfrak{R}$. Probemos esto:

Sea $D_n = E_n - (\bigcup_{n=1}^{r} E_r)$ y notemos que los D_n son elementos disjuntos de $\mathfrak{R}$ cuya unión es la misma que la de los E_n. Por lo tanto:

$\mu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mu(D_n)$

por aditividad finita. Puesto que $D_n \subset$ En se sigue que $\mu(D_n) \leq \mu(E_n)$ y por lo tanto en la ecuación de arriba, la suma que está a la derecha es acotada por $\sum_n \mu(E_n)$.

Observación: La medida básica de Borel – Lebesgue en la recta real puede ser definida como en el teorema 2.1 para el caso en el cual I es la recta entera y F(x)=x. Puede ser caracterizada como la única medida del tipo dado en el teorema 2.1 la cual es invariante bajo traslación, es decir, $\mu(E+x) = \mu(E)$ para cualquier conjunto E en $\mathfrak{R}$ y cualquier número real x; aquí la notación A+x es usada para indicar el conjunto de todos los números de la forma a+x con a en A.

El teorema 2.1 es un espacio de medida básico Lebesgue – Stieltjes, donde la misma está definida en la forma (I, $\mathfrak{R}$, n), tal que I y R representan lo mismo que en el teorema, y n es una medida contable aditiva en $\mathfrak{R}$. Pero no todo espacio básico de Lebesgue – Stieltjes es de esta forma; por ejemplo, si n asigna la medida 1 a un conjunto en $\mathfrak{R}$ si y solo si $\mathfrak{R}$ contiene un punto particular p_o de I, no puede ser del tipo dado por el teorema 2.1, pero es fácil ver que cualquier medida nula en el conjunto consiste de un único punto. Más generalmente por la misma razón, cualquier medida discreta en $\mathfrak{R}$ no puede ser de la clase dada por el teorema 2.1. La propiedad de anularse sobre los puntos realmente caracteriza los miembros de esta clase y la medida general de Lebesgue –

Stieltjes es simplemente la suma, en un único modo, de una medida "puramente continua", definida como una medida que se anula sobre conjuntos unitarios y además es una medida discreta. La situación puede ser resumida de la siguiente forma:

Corolario 2.1: Si μ es una medida básica de Lebesgue – Stieltjes en el intervalo real I, existe una función monótona creciente continua a derecha F(x) definida en I, la cual es única salvo por una constante aditiva, tal que si (a,b] es cualquier intervalo acotado semi - abierto en I, entonces: μ((a,b])=F(b)-F(a); y toda función monótona creciente continua a derecha F(x) en I es asociada con una medida única básica de Lebesgue – Stieltjes en esta forma.

Prueba:

Sea p cualquier punto en I tal que μ({p})=0 asumiendo que I no consiste de un único punto en cualquier caso el resultado es trivial, y el conjunto F(x)= μ((p,x]) para $x \geq p$ y F(x)=- μ((x,p]) para x<p. De la contabilidad aditiva de μ se sigue que F es continua a derecha; de la no negatividad de μ, se sigue que F es monótona creciente.

Considerando separadamente los casos en los cuales a y b exceden a p, ambos son excedidos por p ó $p \in$ (a,b], no es difícil verificar que μ((a,b])=F(b)-F(a).

Si recíprocamente, F(x) es una función monótona creciente continua a derecha en I, sea ρ(x) y σ(x) sus funciones continuas y escalonadas las cuales se constituyen en el mismo sentido que el teorema 2.1.

Entonces ρ (x) determina una medida μ_ρ por el teorema 2.1 tal que: μ((a,b])= ρ (b)- ρ (a) siempre que (a,b] $\subset$I; σ (x) similarmente determina una medida μ_σ por su definición; $\mu_\rho+\mu_\sigma$es, entonces la medida cuya existencia es la acertada para la segunda parte del corolario.

Nota: El punto de mayor importancia en este corolario es que una función monótona puede tener únicamente un número contable de discontinuidades, las cuales tienen un carácter simple. Más formalmente una función escalonada (continua a derecha) en I se define como una función f de la forma f(x)=d((p,x]) cuando x>p y f(x)=-d((x,p]), para x<p, para alguna medida discreta en el anillo generado por los subconjuntos compactos de I y algún punto p en I o la suma de una función y una constante. Notemos que cualquier función escalonada es monótona creciente y es actualmente por la aditividad contable de la medida discreta, continua a derecha.

Lema 2.3: Cualquier función monótona creciente λ(x) continua a derecha en un intervalo I es la suma de una función continua y una función escalonada, cada una de las cuales es única sin una constante aditiva.

Prueba:

Para cualquier función monótona f, el $\lim\limits_{\varepsilon>0} f(x+\varepsilon)$ existe para cualquier punto x en el intervalo de definición con la convención de que x$\pm$ ε es reemplazado por x en el caso en que este sea exterior al intervalo de definición (o alternativamente, f es convenientemente extendido fuera de este intervalo de definición, es decir, haciendo extender la constante en cada intervalo complementario a I y continuo en cualquier punto frontera de I). Esos límites pueden ser denotados por $f(x \pm 0)$, como se acostumbra cuando hay muy poca probabilidad de confusión con la interpretación literal de $f(x \pm 0)$. Para que $\lambda(x)$ sea continua a derecha, quiere decir que $\lambda(x+0) = \lambda(x)$ para todo x en I. Pero esto es también verdadero ya que $\lambda(x-0) = \lambda(x)$ excepto para muchos valores contables de x. Por C=[a,b] denotamos un intervalo compacto arbitrario contenido en I, y sea $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}=b$ cualquier conjunto finito de elementos de C, comenzando con a y terminando con b.

Entonces $\lambda(b)- \lambda(a)$ puede ser expresado como la suma telescópica $\sum_{j=0}^{n} [\lambda(x_j+1)- \lambda(x_j)]$, cada uno de los términos no es negativo.

Haciendo $\delta(x)= \lambda(x) - \lambda(x-0)$, se sigue que $\sum_{j=1}^{n} \delta(x_j) \leq \lambda(b)- \lambda(a)$

Resulta que a lo sumo un número finito de $\delta(x)$ para x en C pueden exceder cualquier valor positivo dado; por ejemplo, el valor m^{-1}, m será un entero positivo arbitrario. Ahora $\delta(x)$ es positivo si y solo si $\delta(x)>m^{-1}$ para algún entero positivo m; así puede ser más contables, más valores de x en C para el cual $\delta(x)>0$; puesto que I es una unión contable de subintervalos compactos, existen muchos más valores contables x en I.

Pero $\delta(x)>0$ si y sólo si $\lambda(x)$ es discontinua en el punto x. Ahora d denota la medida discreta en el anillo $\Re$ generado por los subintervalos compactos de I, tal que, el conjunto unitario consiste de los puntos "x" que tienen la medida $\delta(x)$. Si p denota un punto arbitrario en I tal que δ (p)=0 y definimos $\lambda_d(x)$ para $x \in$ S de la siguiente manera:

$\lambda_d(x)=d((p,x])$ para $x \geq p$; $\lambda_d(x)=-d((x,p])$ pasa $x<p$.

De la aditividad contable de d (comparemos la observación inmediata precedida por el ejemplo 2.1), se sigue fácilmente que λ_d es continua a derecha; es obvio que es monótona creciente, y es construida de tal forma que los escalones $\lambda_d(x)$- $\lambda_d(x-0)$ son idénticos con los $\lambda(x)$ en sí mismos. Se sigue que $\lambda(x)$ - $\lambda_d(x)$ es continua; y fácilmente se ve que $\lambda_d(y)-\lambda_d(x) \leq \lambda(y)-\lambda(x)$ siempre que $x<y$, de lo cual se sigue que $\lambda(x)$- $\lambda_d(x)$ es monótona creciente.

La descomposición:

$\lambda(x)=[\lambda(x)-\lambda_d(x)]+\lambda_d(x)$

Entonces tiene las propiedades indicadas. En el caso $\lambda(x)= \rho(x)+ \sigma(x)$ es otra descomposición, se observa fácilmente que λ_d y σ tienen los mismos escalones, de los cuales se sigue que su única diferencia se representa por una constante aditiva, la cual implica que la misma es verdadera para $\lambda(x)-\lambda_d(x)$ y $\rho(x)$

Definición 2.3: Una medida μ en un intervalo [a,b] tal que $\mu([a,b])=1$ es llamada una medida de probabilidad. La función $F(x)= \mu([a,x])$ es llamada una función de distribución acumulativa de una medida de probabilidad contable aditiva en un intervalo [a,b] si y sólo si

a. F es monótona creciente

b. F es continua a derecha

c. F(a)=0 y F(b)=1

Después de haber visto algo de la teoría de la medida retomemos los métodos de integración los cuales son estudiados para funciones de una o distintas variables reales.

Por otro lado las aplicaciones geométricas y analíticas nos llevan a considerar la integración de funciones que son definidas sobre múltiples diferenciables o hasta en cierta forma más general, conjuntos los cuales son comúnmente clasificados como de dimensión infinita.

Todas estas consideraciones dan origen a la fértil idea de contruir una teoría general de integración de funciones definidas en conjuntos que admiten integración es decir, sobre conjuntos en los cuales ciertos conceptos son postulados para permitir el desarrollo de tales teorías.

Si nos encaramos ante el dilema de escoger entre la integración en espacios localmente compactos e integración abstracta pareciera que la segunda es más abstracta que la primera; sin embargo, esta postura no es tan correcta, lo que si es cierto es que la primera teoría es un caso especial de la segunda.

En la teoría de integración en espacios localmente compactos integramos funciones definidas en un conjunto cuya topología hace del mismo un espacio localmente compacto, mientras que en la teoría de integración abstracta integramos funciones definidas en un conjunto para el cual no hay una topología previamente dada.

Pero por otro lado, Kakutani mostró que en un cierto sentido la integración abstracta se reduce a integración en espacios localmente compactos, así que los dos puntos de vista son equivalentes.

Siguiendo a Bourbaki, retornamos a considerar ciertos hechos bien conocidos sobre la integral de Stieltjes – Riemann. Para simplificar más nuestro trabajo nos limitamos a las funciones de una variable real, sin detallar tanto algunos tópicos por no ser tan necesarios para el mismo.

2.3. Versiones del teorema de Riesz bajo el punto de vista de la integración de Stieltjes – Riemann

Consideramos el intervalo compacto I=[a,b] de la recta $\Re$. Sean f y α las funciones con valores reales definidas en I. La integral de Stieltjes – Riemann f con respecto a α está definida por:

$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$ donde $a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq x_n = b$ y el límite es tomado como la longitud máxima. $\Delta = \max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ de los intervalos en los cuales I se subdivide y tiende a ser cero.

A continuación presentaremos algunos detalles referentes a funciones de variación acotada por considerarlos necesarios para el desarrollo de esta sección.

El teorema más elemental de existencia con relación a la integral de Stieltjes – Riemann descrito anteriormente es el que expresa que $\int_a^b f d\alpha$ existe si f es continua y α es de variación acotada, esto significa que la variación total está definida por:

$VT(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|$ es finita, el supremo es tomado con referencia a toda sucesión finita tal que: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$.

Describiremos con más detalles la definición de variación acotada.

Definición 2.4 [Funciones de variación acotada]: Sea α una función de valores reales definida en un intervalo [a,b] y sea $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$; cualquier subdivisión de [a,b]

Definamos:

$$p=\sum_{i=1}^{n}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]^+$$

$$n=\sum_{i=1}^{n}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]^-$$

$$vt=n+p=\sum_{i=1}^{n}|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|$$

donde usamos r^+ para denotar r, si $r\geq 0$ y 0 si $r\leq 0$ y el conjunto $r^-=|r|-r^+$

Tenemos:

$$\alpha(b)-\alpha(a)=p-n$$

Sean los conjuntos:

P=sup p

N=sup n

VT=sup(vt)

Donde tomamos el supremo de todas las posibles subdivisiones de [a,b]. Claramente, tenemos que $P\leq VT\leq P+N$. Llamemos a P, N y VT las variaciones positivas, negativas y totales de α sobre [a,b]. Algunas veces se describe VT_a^b, $VT_a^b(\alpha)$, entre otros, para denotar la dependencia de los intervalos [a,b] sobre la función α. Si $VT<\infty$, decimos que α es de variación acotada sobre [a,b]. Su notación es algunas veces abreviada escribiendo $\alpha\in VA$.

Lema 2.4: Si α es de variación acotada en [a,b], entonces $VT_a^b=P_a^b+N_a^b$

y α (b)- α (a)=P_a^b-N_a^b

Prueba:

Para cualquier subdivisión de [a,b]

$P=n+\alpha(b)-\alpha(a)$

$\leq N+\alpha(b)-\alpha(a)$

Y tomemos el supremo para todas las posibles subdivisiones obtenemos:

$P\leq N+\alpha(b)-\alpha(a)$

Como

$N\leq T<\infty$

$P-N\leq \alpha(b)-\alpha(a)$

Similarmente,

$N-P\leq \alpha(a)-\alpha(b)$,

y así

$P-N\leq \alpha(b)-\alpha(a)$

Luego,

$VT\geq p+n=p+p-\{\alpha(b)-\alpha(a)\}=2p+N-P$ y $VT\geq 2P+N-P=P+N$

Como $VT\leq P+N$, tenemos $VT=P+N$

Teorema 2.2 [de Jordan]: Una función α es de variación acotada en [a,b] si y sólo si α es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes con valores reales en [a,b].

Prueba.

Sea α de variación acotada y sea el conjunto $g(x)=P_a^x$ y $h(x)=N_a^x$. Entonces g y h son funciones monótonas crecientes con valores reales. Como $0 \leq P_a^x \leq VT_a^x \leq VT_a^b < \infty$ y $0 \leq N_a^x \leq VT_a^x \leq VT_a^b < \infty$

Pero $\alpha(x)=g(x)-h(x)+\alpha(a)$ por el lema 2.4. Como $h-\alpha(a)$ es una función monótona, tenemos α expresado como la diferencia de dos funciones monótonas.

De otro modo, si $\alpha=g-h$ en [a,b] con g y h crecientes, entonces para cualquier subdivisión tenemos:

$$\Sigma|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})| \leq \Sigma[g(x_i)-g(x_{i-1})]+\Sigma[h(x_i)-h(x_{i-1})]$$

$$=g(b)-g(a)+h(b)-h(a)$$

Por la tanto

$$VT_a^b(\alpha) \leq g(b)+h(b)-g(a)-h(a)$$

Lo que concluye lo prueba.

Retomando la definición de la integral de Stieltjes - Riemann, esta integral existe, cuando f es continua y α es creciente. En caso especial, es sin embargo, equivalente al descrito anteriormente, puesto que por el teorema 2.2: toda función de variación acotada puede ser escrita como la diferencia de dos funciones crecientes.

Denotemos ahora por $\mathscr{C}$ (I) al espacio vectorial compuesto de las funciones continuas de valores reales definidas en I. Toda función con valor real α la cual es definida como de variación acotada en I determina un funcional lineal Γ representado en el espacio vectorial $\mathscr{C}$(I) por:

(1) Γ (f)= $\int_a^b f \, d\alpha$ donde f$\in$ $\mathscr{C}$(I)

Un proceso de integración Stieltjes – Riemann en I es por definición un funcional lineal. Γ en $\mathscr{C}$(I) el cual puede ser representado por una integral Stieltjes – Riemann es decir, para el cual existe una función de valor real α en I de variación acotada como la que se cumple en (1). El teorema de Riesz caracteriza aquellos procesos de integración de Stieltjes – Riemann los cuales corresponden a funciones α que son funciones de variación acotada a funciones crecientes. Un funcional lineal. Γ en $\mathscr{C}$(I) es positivo si f$\in$ $\mathscr{C}$(I) y f$\geq$0 implica Γ (f) $\geq$0.

Teorema de Riesz (2.3): Sea Γ un funcional lineal sobre el espacio vectorial $\mathscr{C}$(I). Para que exista en I una función creciente de valor real α tal que (1) se cumpla:

(1) Γ (f)= $\int_a^b f dx$ donde f $\in$ $\mathscr{C}$(I)

Es necesario y suficiente que Γ sea positiva.

Denotemos ahora por $\mathscr{K}(\Re)$ el espacio vectorial compuesto de todas las funciones de valores realaes definidas en $\Re$ tal que cada función se anula fuera de un intervalo compacto el cual varía con la función.

Teorema de Riesz (2.5): Sea Γ un funcional lineal sobre es el espacio vectorial $\mathscr{K}(\Re)$. Para que exista en $\Re$ una función creciente de valores reales α tal que (2) se cumpla:

(2) $$\Gamma(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f d\alpha \text{ donde } f \in \mathscr{K}(\Re)$$

Es necesario y suficiente que Γ sea positiva.

En el teorema de Riesz 2.3 y 2.5 el proceso de integración Stieltjes – Riemann relativo a funciones crecientes coincide con los funcionales lineales positivos sobre $\mathscr{C}$(I).

En el teorema de Riesz 2.3 el espacio vectorial $\mathscr{C}$ (I) es un espacio de Banach cuya norma es definida en una forma natural por:

$||f||=\sup\{|f(x)|: x \in I\}$

Podemos, por consiguiente, hablar de funcionales lineales Γ en $\mathscr{C}$ (I) siendo relativamente continuos a esta norma. No obstante, en el Teorema de Riesz 2.5 en lugar de integrar sobre un intervalo compacto, integramos sobre la línea entera. Las pruebas en este caso son simples consecuencias de las que se dan el caso anterior. La diferencia entre un intervalo compacto y la recta entera es reflejada entre espacios compactos y los espacios localmente compactos discutidas anteriormente.

Así para dar lugar al teorema de Riesz 2.5 se han considerado f y α dos funciones con valores reales definidas en la recta $\Re$. Asumamos que f es continua en $\Re$ y que α es de variación acotada sobre todo intervalo compacto [a,b] de $\Re$.

Entonces la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y de acuerdo a la definición usual:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f d\alpha = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ a \to +\infty}} \int_a^b f d\alpha$$

Con tal de que el límite indicado exista, el cual por supuesto, depende del comportamiento de f en el infinito; α es asumido fijo. Como es delicado analizar el comportamiento de f en el infinito, el cual nos garantiza la existencia del límite superior, no queda asumir que existe un intervalo compacto fuera del cual f se anula exteriormente.

Recordemos que $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$ es el espacio vectorial compuesto de todas las funciones de valores reales definida en $\mathfrak{R}$ tal que cada función se anula fuera de un intervalo compacto, el cual varía con la función. La pregunta que surge aquí es:

¿Qué funcionales lineales Γ en $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$ pueden ser representado por una integral del tipo de arriba;

(2) $$\Gamma\ (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, d\alpha \quad \text{donde } f \in \mathscr{K}(\mathfrak{R})$$

siendo α creciente o de variación acotada en todo intervalo de impacto de $\mathfrak{R}$, así garantizamos la existencia de la integral en (2).

Podemos repetir para $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$ la definición hecha anteriormente para $\mathscr{C}$ (I) expresando que un funcional lineal Γ es positivo si f $\in \mathscr{K}(\mathfrak{R})$ y f ≥ 0 implica Γ (f) ≥ 0 y así obtenemos el teorema 2.5.

Teorema de Riesz (2.4): Sea Γ un funcional lineal sobre el espacio vectorial $\mathscr{C}$(I). Para que exista en I la función de valores reales α de variación acotada tal que (1) se cumpla:

(1) $$\Gamma\ (f) = \int_a^b f d\alpha \quad \text{donde f} \in \mathscr{C}(\mathrm{I})$$

Es necesario y suficiente que Γ sea continua.

Teorema de Riesz (2.6): Sea Γ un funcional lineal sobre el espacio vectorial $\mathscr{K}(\Re)$. Para que exista en $\Re$ una función de valores reales α, la cual es de variación acotada sobre todo intervalo compacto de $\Re$ tal que (2) se cumpla.

(2) $$\Gamma(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f d\alpha \text{ donde } f \in \mathscr{K}(\Re)$$

Es necesario y suficiente que Γ sea continua.

Para el teorema de Riesz (2.4) y (2.6) se considera el proceso de integración de Stieltjes – Riemann relativo a funciones de variación acotada que coincide con los funcionales continuas en $\mathscr{C}$(I) y $\mathscr{K}(\Re)$ respectivamente.

Una comparación de las proposiciones anteriores nos conduce a la conclusión de que cada funcional lineal positivo en $\mathscr{C}$(I) debe ser continuo.

Además, el Teorema 2.2, citado anteriormente, cuando se aplica en conexión con los dos enunciados nos muestra que cada funcional lineal continuo en $\mathscr{C}$(I) puede ser escrito como la diferencia de las dos funcionales lineales positivas, un hecho que puede ser probado directamente y el cual es de importancia por la teoría de la integración.

Correspondiendo a nuestra definición de una norma para $\mathscr{C}$(I) podemos definir una norma en el espacio vectorial $\mathscr{K}$(R) como sigue:

$$\| f \| = \sup \{ \ | f(x) | : x \in R \}$$

No obstante, existe una diferencia entre los dos espacios vectoriales $\mathscr{K}(\Re)$ y $\mathscr{C}$(I), pues $\mathscr{K}(\Re)$ no es realmente un espacio de Banach, es decir, no es completo con respecto a la métrica definida por la norma indicada.

Se sigue fácilmente del hecho de que $\mathscr{K}(\Re)$ es un subespacio propio y denso del espacio vectorial compuesto de todas las funciones que son reales y continuas en $\Re$ y que tienden a cero en el infinito, la norma también en este espacio vectorial será dada por la expresión de arriba.

El hecho de que $\mathscr{K}(\Re)$ no sea completo con respecto a la norma dada anteriormente causa una cierta dificultad con respecto al establecimiento del propio teorema.

Este teorema falla, si, como naturalmente, el mismo sugiere definimos un funcional lineal Γ en K($\Re$) como continuo, siendo relativamente continuo a la norma indicada, así vemos que no es la definición que conviene aquí. La definición adecuada de continuidad se desarrolla como sigue: Para todo intervalo compacto K de la recta $\Re$, denotemos por K($\Re$,K), el subespacio vectorial de K($\Re$) el cual está compuesto de funciones continuas de valores reales definidas en $\Re$ que se anulan fuera de K. En particular, la norma indicada adquiere significado en el espacio vectorial K($\Re$,K) e inmediatamente vemos que K($\Re$,K) es un espacio de Banach. Así decimos que Γ es continua si esta es relativamente continua a la norma indicada en todo subespacio vectorial K($\Re$,K) donde K es cualquier intervalo compacto en $\Re$. Con esas definiciones podemos establecer el deseado teorema de Riesz (2.6).

Hemos tenido que citar las cuatro formas del teorema de Riesz para considerarlo completo. Realmente, solamente la primera y tercera nos interesa, porque nos limitaremos a integrales positivas. Sin embargo, agregamos la observación que al tipo de continuidad apropiado para las cuatro formas pertenecen al estudio de límites inductivos en espacios vectoriales topológicos en el sentido de Dieudonnè-Schwartz.

Las pruebas dadas por Riesz son importantes para la evaluación de ciertas ideas básicas de análisis funcional.

Este trabajo unido al de otros matemáticos determina un cambio de actitud en la fundación de la teoría de integración la cual encontró su más elegante expresión en los trabajos de Cartan, Weil y Bourbaki. De hecho, los teoremas de Riesz citados previamente nos muestran que no se hace diferencia, si se sigue el punto de vista original de Stieltjes, generalizando la integral de Riemann, reemplazando la función x por una función α que es creciente o de variación acotada, o si dejamos de lado la definición de Stieltjes y concentramos nuestra atención no realmente en α, sino simplemente en lo continuo o positivo del funcional Γ. Este último punto de vista, representa como ya vimos , el revés de lo históricamente establecido, probando ser más simple y más conveniente.Así una integral positiva sobre I la cual es definida como un funcional lineal positivo en C (I) y una integral sobre I como un funcional lineal continuo en C (I), se aplica también a $\Re$ y K ($\Re$).

Todo lo anteriormente descrito se resume en el siguiente diagrama:

VERSIONES DEL TEOREMA DE RIESZ

Teorema de Riesz
(2.3)
Sea Γ un funcional lineal sobre el espacio vectorial $\mathscr{C}$(I).
Para que exista en I una función creciente con valor real α, tal que:
(1) $\Gamma(f) = \int_a^b f\,d\alpha$ donde f$\in$ $\mathscr{C}$(I)
se cumpla, es necesario y suficiente que Γ sea positiva.

$\mathscr{C}$(I)

Teorema de Riesz
(2.4)
Sea Γ un funcional lineal en el espacio vectorial $\mathscr{C}$(I).
Para que exista en I una función valor real α, la cual es de variación acotada, tal que:
(1) $\Gamma(f) = \int_a^b f\,d\alpha$ donde f$\in$ $\mathscr{C}$(I)
se cumpla, es necesario y suficiente que Γ sea continua.

Γ Positiva

Γ Continua

Teorema de Riesz
(2.5)
Sea Γ un funcional lineal sobre el espacio vectorial $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$.
Para que exista en $\mathfrak{R}$ una función creciente de valor real α, tal que:
(2) $\Gamma(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\alpha$ donde
f$\in$ $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$
se cumpla, es necesario y suficiente que Γ sea positiva.

$\mathscr{K}(\mathfrak{R})$

Teorema de Riesz
(2.6)
Sea Γ un funcional lineal en el espacio vectorial $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$.
Para que exista en $\mathfrak{R}$ una función de valor real α, la cual es de variación acotada sobre todo intervalo compacto de $\mathfrak{R}$ tal que:
(2) $\Gamma(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\alpha$ donde
f$\in$ $\mathscr{K}(\mathfrak{R})$
se cumpla, es necesario y suficiente que Γ sea continua.

2.4. Invarianza bajo traslación de la integral de Lebesgue.

La integral de Lebesgue en la recta $\Re$ sobre el n - espacio Euclidiano $\Re^n$ posee ciertas propiedades simples, las cuales son de pocas consecuencias, pero suficientemente fuertes para caracterizar la integral. Una de estas propiedades, aunque trivial, en los cursos de cálculo, es el tema de invarianza bajo traslación.

Esto se expresa como sigue: si f (x) es una función con valor real de una variable real y si sometemos esa función a una traslación S, obtenemos la función f (x-s). Para que f (x) sea integrable en el sentido de Lebesgue es necesario y suficiente que esa función f (x-s) también sea integrable y entonces:

$$\int f(x)dx = \int f(x-s)dx,$$

estas integrales serán extendidas sobre la recta entera.

Un enunciado similar se cumple para el espacio $\Re^n$. Como tenemos la oportunidad de ver estas propiedades simples de invarianza bajo traslaciones que esencialmente caracterizan la integral de Lebesgue en la recta $\Re$ y en el espacio $\Re^n$ como un resultado del hecho de $\Re$ y $\Re^n$ son grupos topológicos aditivos los cuales son localmente compactos.

De hecho, mostremos que todo grupo localmente compacto tiene una teoría natural de integración tal que la integral que está involucrada es invariante bajo traslaciones la cual será indicada con precisión posteriormente. Esa teoría constituye una generalización importante de la teoría clásica de la integral de Lebesgue.

2.5. Grupos topológicos

Definición 2.6: Un grupo topológico es un grupo G el cual al mismo tiempo es un espacio topológico tal que las operaciones de grupo, es, decir, las proyecciones $(x,y)\to xy$ de $G\times G$ en G y $x\to x^{-1}$ de G en G son continuas.

En una vía más económica, podemos definir un grupo topológico por la continuidad de proyección $(x,y)\to xy^{-1}$ únicamente.

En verdad la comparación de las proyecciones $(x,y)\to(x,y^{-1})$ con la proyección $(x, y)\to xy$ da la proyección $(x, y)\to xy^{-1}$ así que la continuidad de las dos primeras implican la continuidad de la última.

Recíprocamente la continuidad de $(x,y)\to xy^{-1}$ como es una función de dos variables implica la continuidad parcial de esa función de y o $x=e$, es decir, la continuidad de $y\to y^{-1}$. Además la composición de la proyección $(x,y)\to(x,y^{-1})$ con la proyección $(x,y)\to xy^{-1}$resulta la proyección $(x,y)\to xy$ así provee la continuidad del último como una consecuencia de la continuidad del primero.

En un grupo topológico G toda traslación a derecha $x\to xs$ donde $s\in G$ está dada como un homeomorfismo de G. Realmente, la continuidad de $(x,y)\to xy$ como una función de dos variables implican su continuidad parcial con respecto a x. para $y = s$, es decir la continuidad de $x\to xs$. Así la traslación a derecha $x\to xs^{-1}$ es también continua.

Pero las dos traslaciones a derecha $x \to xs$ y $x \to xs^{-1}$ son inversas una de la otra. Por consiguiente $x \to xs$ es un homeomorfismo de G. Como esa proyección homeomorfa "e" en s, vemos que si V es una vecindad de "e", entonces V_s será una vecindad de s; y recíprocamente, toda vecindad de s es de la forma V_s donde V_s es una vecindad de "e": Una observación similar se cumple para traslaciones a izquierdas. La proyección inversa $x \to x^{-1}$ es también un homeomortismo de G. En verdad, la proyección $x \to x^{-1}$ es continua por hipótesis y es esta su propio inverso.

Este es por consiguiente un homeomorfismo de G. Como la proyección inversa proyecta "e" en si mismo, vemos que V es una vecindad de "e" si y solo si V^{-1} es una vecindad de "e".

La vecindad simétrica de "e", es decir, la vecindad tal que $V=V^{-1}$ forma una base para la vecindad de "e".

Tomemos $V=U\cap U^{-1}$ para una vecindad arbitraria U de "e" obtenemos de hecho, una vecindad simétrica de "e" tal que $V \subset U$.

Para roda vecindad U de "e" existe una vecindad V de "e" tal que $VV \subset U$. Por la continuidad de $(x,y) \to xy$ para $x=e$, y $y=e$ y del hecho de que $ee=e$, existe en realidad, para una vecindad arbitraria U de "e", vecindades, V' y V'' de "e" tal que $V'\,V'' \subset U$. Tomando $V= V'\cap V''$ vemos que $VV \subset U$.

Todo automorfismo interno $x \to sxs^{-1}$ es un homeomorfismo de G puesto que este resulta de la composición de dos homeomorfismos. Llamémosle las traslaciones $x \to sx$ y $x \to xs^{-1}$

Por lo tanto esa proyección automorfa de e en e, se sigue que V será una vecindad de e si y solo si sVs^{-1} es una vecindad de "e".

Definición 2.7: Si H es un subgrupo de G, entonces H sera un grupo topológico, con tal de que se le asigne la topología inducida por G. Entonces decimos que H es un subgrupo topológico.

Si H es un subgrupo de G su clausura $\overline{H}$ también será un subgrupo de G. En verdad, la proyección continua (x,y) $\rightarrow$xy la cual proyecta HxH en H y así proyecta: $\overline{HxHen\overline{H}}$, es decir, $\overline{H} x \overline{H}$ en $\overline{H}$. Por consiguiente, $\overline{H}\ \overline{H} \subset \overline{H}$ Similarmente, la proyección continua x $\rightarrow$x^{-1} proyecta H en H y por consiguiente $\overline{H}$ en $\overline{H}$. Así $\overline{H}^{-1} \subset \overline{H}$.. Esto significa que $\overline{H}$ es un subgrupo de G.

Definición 2.8: Dado un subconjunto X de G. debemos por consiguiente, llamar la clausura en G al subgrupo generado por X, al subgrupo cerrado generado por X. La clausura de todo subgrupo invariante es también invariante, puesto que todo automorfismo interno es un homeomorfismo.

Definición 2.9: Todo grupo es un grupo topológico cuando este se le asigna la topología discreta. Entonces decimos que tratamos con un grupo discreto.

Las teorías de grupo son así sobre las bases del concepto de un grupo discreto, un caso especial de la teoría de grupos topológicos.

Definición 2.10: Un grupo compacto es un grupo topológico, el cual es un espacio compacto.

Un grupo localmente compacto es un grupo topológico el cual es un espacio localmente compacto. Debemos usar convenientemente una terminología similar para los conceptos topológicos restantes del mismo modo que los grupos Hausdorff.

Si K y L son subconjuntos compactos de un grupo topológico G, entonces KL será, compacto. Actualmente, el producto cartesiano K x L será compacto (proposición 1.10) y su imagen KL obtenida por la proyección continua $(x,y) \rightarrow xy$ debe ser, por consiguiente también compacto (proposición 1.2). Si el subconjunto K de G es compacto, entonces K^{-1} será compacto y viceversa, puesto que $x \rightarrow x^{-1}$ es un homomorfismo de G el cual proyecta K sobre K^{-1}.

Definición 2.11: Un isomorfismo topológico entre dos grupos topológicos G' y G'' es una correspondencia uno a uno entre G' y G'' bajo la cual ellos son isomorfos como grupos y homeomorfos como espacios topológicos. En particular un automorfismo topológico de un grupo topológico G es un isomorfismo de G en sí mismo. Todo automorfismo interno es como ya hemos observado un automorfismo topológico. El automorfismo topológico de G forma un grupo más explícitamente, un subgrupo de los grupos de permutación de G.

Definición 2.12: Un homomorfismo, continuo de un grupo topológico G' en un grupo topológico G'' es un homomorfismo $f : G' \rightarrow G''$ de los grupos que son una proyección continua.

En la teoría de grupos topológicos, el homomorfismo continuo y abierto de G' en G'' son importantes particularmente; pues ellos son los homomorfismos f: $G' \to G''$ las cuales son continuas con proyecciones abiertas de G' en G'' (Recordemos que una proyección abierta es cualquier proyección que transforma un subconjunto abierto sobre otro subconjunto abierto).

Si X y Y son dos subconjuntos de un grupo topológico G y si uno de ellos es abierto, entonces XY también es abierto. Supongamos que X es abierto. Entonces XY será abierto como la unión de los subconjuntos abiertos X y donde "y" es el rango sobre Y.

Para que un grupo topológico G sea un grupo de Hausdorff es necesario y suficiente que la identidad de G sea cerrada en G.

Realmente si G es un espacio de Hausdorff, todo punto de G es cerrado. Recíprocamente, si la identidad de G es cerrada y si $a \neq b$, entonces $ab^{-1} \neq e$, de donde se sigue que la existencia de una vecindad U de "e" tal que U ab^{-1} no contiene a "e".

Sea V una vecindad de "e" tal que $VV \subset U$. Se sigue que Va y V^{-1} b son vecindades disjuntas de a y b respectivamente. Asi G es un grupo de Hausdorff.

Si $\{G_i\}$ es una familia de grupos topológicos, su producto cartesiano $G=\Pi\ G_i$ también será un grupo topológico relativo a la topología del producto cartesiano. Y realmente, si $x=\{x_i\}$ y $y=\{y_i\}$ son dos puntos variables en G, la proyección $(x,y) \to xy$ será dada por $xy=\{ x_i y_i \}$.

Así para que $(x,y) \to xy$ sea continua es necesario suficiente que $(x,y) \to x_j y_j$, sea continua para todo índice j. Ahora la proyección $(x,y) \to x_j y_j$ es continua, puesto que es resultado de la composición de proyecciones continuas $(x,y) \to (x_j y_j)$ y $(x_j y_j) \to x_j y_j$. Así

$(x,y) \rightarrow xy$ es continua. Similarmente, $x \rightarrow x^{-1}$ es continua. Asi G es un grupo topológico. Notemos que la proyección natural de G en cada Gj esta dado $x \rightarrow x_j$ es un homomorfismo continuo y abierto. G es llamado el producto cartesiano topológico de la familia $\{ G_i \}$.

Supongamos que un grupo topológico G es el producto directo de una familia finita $\{ G_i \}$ de subgrupos, asumamos que todo elemento de G_i conmuta con todo elemento de G_j si $i \neq j$ y que todo elemento x de G puede ser escrito en la única forma $x = \Pi x_i$ donde $x_i \in G_i$.

Debemos entonces decir que G es un producto directo topológico de esa familia si el isomorfismo entre el producto cartesiano ΠG_i, y G definido por $\{ x_i \} \rightarrow x = \Pi x_i$ el cual es únicamente continuo y es también un homeomorfismo, es decir, es un isomorfismo topológico.

Supongamos que un grupo topológico G es el producto cartesiano de una familia finita $\{G_i\}$ de grupos topológicos entonces G es también en una forma natural, el producto topológico de una familia finita de subgrupos topológicos, esto es, subgrupos que son topológicamente isomorfos con los G_i. El concepto de un producto topológico directo puede ser extendido convenientemente al caso de familias arbitrarias.

Ejemplo 2.2: Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. La topología natural de V es obtenida tomando unas bases $e_1,\ldots,e_n$ de V, estableciendo isomorfismo de espacios vectoriales entre V y $\Re^n$ por medio de $x = \Sigma x_i e_i \rightarrow (x_1,\ldots.x_n)$, asignando a $\Re^n$ la topología del producto cartesiano de $\Re$ y a V la topología que convierte el isomorfismo entre V y $\Re^n$ en un homeomorfismo. La topología así obtenida en V es; obviamente, natural, es decir independiente de la elección básica. Fácilmente se muestra que la proyección $(x,y) \rightarrow x+y$ de VxV en V y $(\lambda,x) \rightarrow \lambda x$ de $\Re$xV en V son continuas, esto se expresa diciendo que V es un espacio vectorial topológico. En particular, V es un grupo localmente compacto aditivo.

Consideraciones correspondientes se aplican a $\Re^n$; y V y $\Re^n$ son isomorfos topológicamente. En el caso de un espacio vectorial complejo de dimensión finita, podemos repetir que fue justamente establecido o podemos simplificar la observación de que V es también un espacio vectorial del doble número de dimensiones.

Ejemplo 2.3: El grupo multiplicativo $\Re^*$ de los números reales diferentes de 0 con la topología inducida en ésta por la topología natural del cuerpo $\Re$ de números reales es un grupo localmente compacto. El subgrupo topológico $\Re^*_+$ de los números reales estrictamente positivos es topológicamente isomorfos al grupo aditivo topológico $\Re$.

Notemos que $\Re^n$ es el producto directo topológico de $\Re^*_+$ y el subgrupo formado de ± 1. El grupo multiplicativo C* de los números complejos diferente de 0, con la topología inducida sobre esta por la topología natural del cuerpo C de los números complejos es un grupo localmente compacto. El subgrupo topológico T de los números complejos de valor absoluto ''1'' es un grupo compacto. La forma polar de un número complejo diferente de 0, muestra que una vez que C es el producto topológico directo de $\Re^*_+$ y T, el cual implica que C* es isomorfo topológicamente con RxT. El espacio con n-ésima potencia cartesiana T^n es un grupo compacto llamado el n-toro.

Si G es un grupo topológico y H un subgrupo invariante, el grupo cociente K=G/H será un grupo topológico, con la condición de que le asignamos a éste la topología cociente tal que la topología de G determine la relación de equivalencia definida por los cocientes de H en G. Mostremos esto, indicando por $\pi : G \rightarrow K$ el homomorfismo natural de G en K.

Supongamos que z' z'' $\in$ K y que z= z' z''. Sea V cualquier subconjunto abierto de K contiene a z. Seleccionamos x' x'' $\in$ G tal que π (x')= z', π (x'')=z''. Haciendo x=x' x'' obtenemos asi π (x)=z Notamos que U=π^{-1} (V) es un subconjunto abierto de G que contiene a x. Por la continuidad de la multiplicación en G, existen dos subconjuntos abiertos U',U'' de G conteniendo x' , x'' respectivamente, tal que U'U'' $\subset$ U. Sea el conjunto V'= π (U'), V''=π (U''). Notemos que V' y V'' contienen a z' y z'' respectivamente, que V'V'' $\subset$ V y que V' y V''son abiertos en K por que su imagen inversa π^{-1}(V')= U'H y π^{-1} (V'')=U''H es un abierto en G.

De este resultado se da la continuidad de la multiplicación en K: Análogamente probemos la continuidad de la inversión en K. Así G es un grupo topológico: El homomorfismo π de G en K además de ser continuo es también abierto: si U es un subconjunto abierto de G, entonces π (U) será abierto en K, así como su imagen inversa $\pi^{-1}\left[(\pi(U)\right]$=UH es abierto en G. Para que K sea un grupo de Hausdorff es necesario y suficiente que H sea cerrado en G, por lo tanto H será cerrado en G si y sólo si la identidad de K es cerrada en K, la cual como ya hemos visto, es equivalente a K, siendo así un grupo de Hausdorff.

Observación: Ahora, denotemos por $\mathcal{L}(V)$ el álgebra de las transformaciones lineales de V en si mismo. $\mathcal{L}(V)$ es un espacio vectorial de dimensión n^2. En particular (ejemplo 2.2), $\mathcal{L}(V)$ tiene su topología natural, como se probó fácilmente en dicho ejemplo transformando las operaciones del espacio vectorial $\mathcal{L}(V)$ en operaciones continuas, también se transforma la multiplicación $(X,Y)\rightarrow XY$ en una proyección continua de $\mathcal{L}(V)\mathrm{x}\mathcal{L}(V)$ **en** $\mathcal{L}(V)$. Esto se expresa diciendo que $\mathcal{L}$ (V) es un álgebra topológica. Las transformaciones lineales invertibles de V constituyen un grupo $G\mathcal{L}(V)$. Claramente, $G\mathcal{L}(V)$ es un subgrupo abierto de $\mathcal{L}(V)$ y, por consiguiente, $G\mathcal{L}(V)$ es localmente compacto bajo la topología inducida y además es un grupo topológico bajo dicha topología. Designemos ese grupo localmente compacto $G\mathcal{L}(V)$ como el grupo lineal de V.

Definición 2.13 G/H es llamado el grupo topológico cociente de G por H o módulo H bajo la continuidad y homorfismo abierto π de G en G/H.

Si $f : G \rightarrow K$ es un homomorfismo continuo del grupo topológico G en el grupo topológico K, podemos considerar el núcleo $H=f^{1}$ (e), el cual será un subgrupo invariante de G, podemos formar el grupo cociente topológico G/H. El isomorfismo natural $i:G/H\rightarrow K$, de G/H en K, por la continuidad de f, será continuo y satisface la condición de que $f=i\ \pi$ donde $\pi:G \rightarrow G/H$ designando la continuidad y homomorfismo abierto de G en G/H. Ese grupo isomorfo i no es necesariamente un isomorfismo topológico así este puede fallar al ser un homeomorfismo. Para que i sea un isomorfismo topológico, es necesario y suficiente que f no sea continua únicamente, sino también abierta. Actualmente si i es un homeomorfismo, entonces f=i π será abierto como el producto de dos proyecciones abiertas. Recíprocamente, si f es abierta y si X es abierta en G/H, entonces $\pi^{-1}(X)$ es abierta en G de lo cual se sigue que $f(\pi^{-1}(X))=i(X)$ será abierto en K. Así i es también abierto; es decir, i será un homeomorfismo. Recapitulando: si $f:G\rightarrow K$ es un homomorfismo continuo y abierto de G en K y únicamente en este caso, el isomorfismo natural entre G/H y K donde $H=f^{-1}(e)$ es un isomorfismo topológico. En este sentido el estudio de grupo cociente topológico y de homeomorfismo continuo y abierto de un grupo topológico en otro grupo topológico son equivalentes.

Si H y K son dos grupos topológicos arbitrarios y G=HxK es su producto cartesiano, la proyección natural de G en K dada por $(y,z)\rightarrow z$ donde $y\in H$ y $z\in K$ es un homomorfismo continuo y abierto de G en K con el grupo H'=Hxe, el cual es isomorfo topológicamente con H, como su núcleo.

Por esta razón la situación en el cual tenemos un homomorfismo continuo y abierto $f:G\rightarrow K$ de un grupo topológico G sobre un grupo topológico K es una generalización del caso en el cual tenemos un producto cartesiano de de dos grupos topológicos.

Siempre hemos considerados que una propiedad P de grupos topológicos (por ejemplo, la propiedad de que un grupo topológico sea compacto o localmente compacto, o la propiedad expresada por el hecho de que todo homomorfismo continuo de un grupo topológico, en $\Re$ es igual a cero, entre otros), nuestra inquietud es guiada al propósito de que el producto cartesiano G=HxK de dos grupos topológicos es necesario o suficiente, o necesario y suficiente que los dos factores H y K lo posean. Siempre consideremos un homomorfismo continuo y abierto $f:G \to K$ del grupo topológico G en el grupo topológico K, son similarmente dirigidas en un contexto más general, si nos cuestionamos en cuanto a que G posea la propiedad P sera necesario o suficiente, o necesario y suficiente que $H=f^{-1}(e)$, ó K, ó H y K lo posean.

Notamos que en este caso posterior de los homorfismos continuos y abiertos H y K no juegan roles simétricos, mientras que sí en el caso de los productos cartesianos H x K.

Definición 2.14: En un grupo G el conmutador de dos elementos x y y está definido por $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$.

Definición 2.15: El subgrupo conmutador de G es el subgrupo generado por los conmutadores. Como $[x,y]^{-1} = [y,x]$, los elementos del subgrupo conmutador son los productos finitos de conmutadores.

De $s[x,y]\, s^{-1}=[sxs^{-1},sys^{-1}]$ se sigue que el subgrupo conmutador es invariante.

Definición 2.16: En un grupo topológico G el subgrupo conmutador cerrado es la clausura del subconjunto conmutador y así es un subgrupo invariante cerrado. Si H es un subgrupo invariante tal que K= G/H es conmutativo, entonces H contiene el subgrupo conmutador.

Actualmente si $\pi : G \to K$ es el homomorfismo natural de G en K: y x y y $\in$ g, entonces π (xy)= π (x) π (y)= π (y) π (x)= π (yx) donde se sigue que π ([x,y])=e, es decir $[x,y] \in H$ y así H contiene el subgrupo conmutador cerrado. Recíprocamente, si

H contiene el subgrupo conmutador se sigue de $[x,y] \in H$ y que $\pi(x)\ \pi(y)=\pi(y)\ \pi(x)$ lo que quiere decir que K es conmutativo. Así el subgrupo conmutador es el subgrupo invariante más pequeño cuyo grupo conciente es conmutativo; y el subgrupo conmutador cerrado es el subgrupo invariante cerrado más pequeño, cuyo grupo cociente es conmutativo. Cuando el grupo topológico G coincide con este subgrupo cerrado conmutativo, todo homomorfismo continuo $f:G\rightarrow K$ de G sobre un grupo de Hausdorff conmutativo completamente arbitrario es trivial, es decir, es la proyección homomorfa proyecta a G sobre la identidad de K. De hecho, llamamos a K, conmutativo. Se sigue que el subgrupo cerrado $f^{-1}(e)$ contiene todo conmutador y así contiene el subgrupo conmutador cerrado, es decir $f^{-1}(e)=G$.

Definición 2.17: En un grupo G el centro C es el conjunto de los elementos x de G los cuales conmutan con cualquier otro elemento s de G así que $xs=sx$.

Esta relación puede ser escrita como $x=sxs^{-1}$. El centro es también el conjunto de esos elementos de G los cuales son invariantes bajo todos los automorfismos internos. En particular, el centro es un subgrupo invariante. Si consideramos un grupo de Hausdorff G, el centro es evidentemente cerrado, por consiguiente, todo automorfismo interno es un homeomorfismo. Así existe una proyección de G sobre el grupo de automorfismos internos de G a los cual asocian con todo $s\in G$, el automorfismo interno a_s dado por $a_s(x)=sxs^{-1}$ donde $x\in G$. La proyección es un homomorfismo cuyo núcleo es el centro C de G. Así G/C es isomorfo con el grupo de automorfismos internos de G.

Cerramos esta sección estableciendo una propiedad simple concerniente a la continuidad uniforme, la cual se usará después.

Definición 2.18: Sea f una función de valores reales definida en un grupo topológico G. Dado ε >0, llamamos una vecindad de ε- uniformidad a izquierda de f a cualquier vecindad V de la identidad e tal que, si $x^{-1}y \in V$, entonces $|f(x)-f(y)| \leq \in$. Análogamente, definimos una vecindad de ε- uniformidad a derecha remplazando $x^{-1}y$ por yx^{-1} en la definición anterior.

Una vecindad de ε-uniformidad será una vecindad que es de ambas ε-uniformidades a derecha y a izquierda. La intercección de una vecindad de ε–uniformidad a izquierda con una ε-uniformidad a derecha, es una vecindad de ε- uniformidad.

Definición 2.19: La función f se dice uniformemente continua a izquierda en G, si para todo ε >0, existe una vecindad de ε - uniformidad a izquierda entonces f es claramente continua en G.

Omitimos la definición análoga de continuidad uniforme a derecha y de continuidad uniforme ya que son obvias.

Proposición 2.1: Toda función continua f con valores reales de soporte compacto definido sobre un grupo topológico G es uniformemente continua.

Prueba:

Mostremos que existe para f una vecindad de ε - uniformidad a izquierda para todo ε >0. Notemos que x^{-1} y=s es equivalente a y=xs. Debemos, por consiguiente, mostrar que existe una vecindad V_1 de "e" tal que $|f(x)-f(xs)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in G$ y $s \in V$.

Para este propósito, comencemos mostrando que, si K es el soporte de f, existe una vecindad V_1 de "e" tal que $|f(x)-f(xs)| < \varepsilon$ si $x \in K$, $s \in V_1$. Para todo $x \in K$ existe de hecho, una vecindad U_x de x y una vecindad V_x de e tal que $|f(y)-f(ys)| < \varepsilon$ con la condición de que $y \in U_x$ y $s \in V_x$.

Por la compacidad de K, existen $x_1, \ldots x_n \in K$ tal que $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$.

Tomemos $V_i = V_x \cap \ldots \cap V_{xyz}$ vemos que esta vecindad V tiene la propiedad requerida. Seguidamente, mostremos que existe una vecindad V_2 de e tal que si $x \notin K$, $s \in V_2$ entonces $|f(x)-f(xs)| = |f(xs)| < \varepsilon$. Realmente, el conjunto J de todo $y \in G$ tal que $|f(y)| \geq \varepsilon$ es cerrado y esta contenido en el interior de K. Para todo $x \in J$ existe una vecindad V_x de e tal que $xV_x \subset K$. Sea Wx otra vecindad de e tal que $W_x W_x \subset V_x$. Por la compacidad de J existe $x_1, \ldots, x_n \in J$ tal que:

$J \subset x_1 Wx_1 \cup \ldots \cup x_n Wx_n$. Tomando $W = Wx_1 \cap \ldots \cap Wx_n$ vemos que $JW \subset K$. Si ahora tomamos $V_2 = W^{-1}$, obtenemos una vecindad de la propiedad requerida.

Finalmente, si $V = V_1 \cap V_2$, es claro que V es una vecindad de ε - uniformidad a izquierda. Obtenemos una vecindad de ε - uniformidad a derecha análogamente. De la intersección de estos dos resultados se obtiene una vecindad de ε - uniformidad. Así la proposición es probada.

2.6. Evolución histórica de los grupos topológicos

Los grupos topológicos fueron considerados por primera vez por Sophus Lie, en el particular, pero fundamental caso de grupos analíticos, en los cuales por medio de sistemas coordenados apropiados, las operaciones de grupo son expresadas, en términos de funciones analíticas. En los comienzos del siglo XX, Hilbert y Brouwer consideraron grupos topológicos que fueron más generales que aquellos tratados por Sophus Lie. Los fundamentos de las teorías generales de grupos topológicos fueron establecidos mucho más tarde por Schreider y Leja en 1926 y 1927.

La teoría de grupos topológicos posee su extenso desarrollo que surge por el problema conocido como el quinto problema de Hilbert. Este problema trata con grupos topológicos localmente compactos y con grupos topológicos localmente euclidianos, es decir grupos topológicos tal que todo punto tiene una vecindad abierta la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto del n-espacio euclidiano $\mathfrak{R}^n$. El famoso problema aquí mencionado fue propuesto por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemática en el año 1900; como uno de la lista de los 23 problemas presentados bajo el título "Problemas Matemáticos". El quinto problema de Hilbert concierne a la siguiente pregunta: ¿Es todo grupo topológico el cual es localmente euclideano, necesariamente un grupo analítico? Este problema fue resuelto recientemente en forma única por Gleason, Montgomery y Zippin en 1952 y la respuesta fue afirmativa.

En un período de un poco más de 50 años, aproximadamente los matemáticos lucharon para desarrollar la teoría de grupos topológicos y crear las herramientas que hiciera posible la solución del famoso problema de Hilbert.

2.7. Orígenes de la integral de Haar

Una de las conjeturas formuladas durante el período mencionado fue sobre la existencia de una integral invariante en un grupo. Von Neumann intentó establecer la existencia de tal integral, pero sin éxito. En 1933, Haar avanzó la teoría en un paso fundamental: él establece la existencia de una medida invariante sobre un grupo compacto el cual es asumido, además, separable, es decir, para verificar, el así llamado segundo axioma de enumerabillidad para conjuntos abiertos. Eso no deja de ser una sorpresa bajo aquellas circunstancias, sin embargo, la existencia de una medida invariante como tal es el caso más simple de grupos analíticos considerados por Sophus Lie, ya conocida y dada, fueron aplicados por Peter y Weil en 1927. En el año de 1933, Von Neumann utilizó el resultado de Haar y resolvió el quinto problema de Hilbert para grupos euclidianos localmente compactos. Siguiendo esto, en 1934, fue nuevamente Von Neumann quien estableció la unicidad de la medida de Haar y ciertas propiedades en ellas.

Esto representó un paso importante de progreso aún cuando fuera un logro más simple que el que hiciera Haar. Estos son un breve bosquejo de los hechos que históricamente nos conducen a la integral de Haar.

La prueba inicial de Haar fue limitada. Como se ha expresado a grupos compactos separables, la idea de separabilidad será necesaria con el propósito de hacer la aplicación del así llamado viable proceso diagonal de Cantor.

Una extensión de la integral de Haar a grupos localmente compactos arbitrarios fue lograda por André Weil; la prueba de su existencia fue basada en el Teorema de Tychonoff concerniente a la compacidad de los productos cartesianos de espacios compactos. Una variante de esta prueba puede ser formulada de acuerdo a Banach en términos de límites generalizados. La prueba de Weil tiene el mérito de ser corta, pero fue criticada pues se usa el axioma de Zermelo, o el principio maximal en la forma del

Teorema de Tychonoff, en la parte que se refiere a su existencia. Una crítica similar se aplica a la prueba de Banach con la visión en el hecho de que la integral de Haar existe y es única bajo el factor de proporcionalidad, esta integral no debe ser obtenida por medio del axioma de elección, pero debe ser construida como un cierto límite por una aplicación del criterio de Cauchy el cual es generalmente reconocido como la herramienta por excelencia para establecer la existencia de teoremas cuando el objeto matemático a tratar es a priori no conocido, pero su existencia y unicidad se cumplen verdaderamente.

Debemos a Henry Cartan otra prueba de la existencia y unicidad para la integral de Haar sobre grupos localmente compactos arbitrarios. Esa prueba no está sujeta a las críticas anteriores ya que construye la integral de Haar como un límite basado en el criterio de Cauchy, simultáneamente garantizando su existencia y unicidad.

La prueba de Cartan es, sin embargo un poco más larga y menos simple que la de Weil.

Por eso debemos presentar posteriormente, las pruebas tanto de Weil como de Cartan. Otra prueba de existencia para la integral de Haar fue dada por Montgomery y Zippin, siguiendo ideas de Kakutani y Kodaira.

Consiste primero en establecer la existencia de grupos localmente compactos separables con el propósito posterior de obtener existencia en grupos localmente compactos arbitrarios tomando en cuenta el hecho de que todo grupo localmente compacto tiene numerosos subgrupos cerrados invariantes cuyos grupos cocientes son separables.

2.8. Aspectos básicos sobre la existencia de una medida invariante.

La idea básica de la prueba de la existencia de una medida invariante en un grupo, concebida por Haar es muy simple. La presentamos con el propósito de fijar nuestras ideas en el n-espacio euclidiano $\Re^n$ en lugar de un grupo más general.

Queremos definir una medida m (X) para ciertos subconjuntos X de $\Re^n$ llamados medibles, tales que una medida debe satisfacer ciertas condiciones tales como $0 \leq m(X) \leq +\infty$, $m(X) \leq m(Y)$ si $X \subset Y$ con X y Y medibles, $m(U_i X_i) \leq \Sigma_i m(X_i)$ para toda familia finita o enumerable de conjuntos finitos. Además la medida es invariante bajo traslaciones, es decir, debemos tener $m(s + X) = m(X)$ para todo $s \in \Re^n$ donde X es medible y, por consiguiente, s + X debe también ser medible.

Finalmente excluimos el caso trivial donde la medida es idénticamente nula.

Supongamos que tal medida existe. Entonces, notemos que, si X y Y son dos subconjuntos medibles de $\Re^n$ tal que X puede ser cubierto por un número finito de traslaciones de Y, es decir, $X \subset (s_1 + Y) \cup \ldots \cup (s_n + Y)$, entonces:

$m(X) \leq \Sigma\, m(s_i + Y) = n.\, m(Y)$ y por lo tanto asumiendo que $0 < m(Y) < +\infty$, $n \geq \dfrac{m(X)}{m(Y)}$

Por consiguiente, definamos el símbolo (X:Y) siendo el entero más pequeño $n \geq 0$ tal que X puede ser cubierto por n- traslaciones de Y, entendemos que realmente es posible cubrir a X. Ahora, esto es posible, es decir, X puede ser cubierto por un número finito de traslaciones de Y, si X es un subconjunto compacto de $\Re^n$ y Y tiene un interior no vacío. Y realmente si $x \in X$, existe un $s \in \Re^n$ tal que X es interior en s + Y. Es suficiente determinar $x_1, \ldots, x_n \in X$ y los correspondientes $s_1, \ldots, s_n \in \Re^n$ tal que :

$X \subset (s_1+Y) \cup \ldots \cup (s_n+Y)$. También notemos que $(X: Y) > 0$ con tal de que X no sea vacío.

El entero (X:Y) es una medida que representa cuantas veces X es más grande que Y y su introducción es motivada por las consideraciones anteriores. Sin embargo, es intuititivamente obvio, que (X:Y) no es más que una comparación de los tamaños de X y Y, puesto que en una conversión no tan precisa, vemos como Y se hace más grande.

Luego, estos es verdadero porque al cubrir X por un número finito de traslaciones de Y, la parte sobrante de este cubrimiento la cual yace fuera de X, es decir, el conjunto de esos puntos de $(s_1 + Y) \cup \ldots \cup (s_n + Y)$ el cual no pertenece a X, se incrementa cuando Y crece.

Esta observación intuitiva nos dirige a la siguiente construcción:

Sea X* un subconjunto de $\Re^n$ fijo, así que una vez, la medida de la unidad es establecida, debemos tener entonces:

$m(X^*)=1$

Supongamos que X* es compacto y que X* tiene un interior no vacío, la cual es una hipótesis razonable si deseamos construir una medida natural en $\Re^n$ para el cual $m(X^*)= 1$.

2.8.1 Aproximación de Medidas

Definición 2.20: Consideremos un subconjunto compacto arbitrario X de $\Re^n$. Si V designa una vecindad del origen 0, introducimos la aproximación de medida $m_v(X)$ de X definida por:

$$\mathrm{mv}(X)=\frac{(X:V)}{(X^*:V)}$$

una expresión que tiene significado, por lo tanto, $0 \leq (X:V) <+ \infty$ y $0<(X^*:V)<+\infty$. Por lo tanto m_v (X) es el cociente de la medida del número de veces que X es más grande que V entre la medida del número de veces que X* es más grande que V; esto es intuitivamente sugerido ya que ese cociente da una idea aproximada de la relación entre los tamaños de X y X* y que esa aproximación tiende a ser más presisa a medida que decrece la vecindad V del origen la cual usamos como un intermediario en la comparación de X y X*.

Ahora trasladamos estas ideas intuitivas dentro del lenguaje matemático, donde puede ser probado que para todo subconjunto compacto X de $\Re^n$, existe un número, el cual representamos por m(X), tal que dado un $\varepsilon>0$ arbitrario, podemos determinar una vecindad V_0 del origen tal que $|m_v(X)-m(X)|<\varepsilon$ siempre y cuando $V\subset V_0$. En la terminología sugerida, esto es expresado diciendo que para todo subconjunto compacto X de $\Re^n$ la medida aproximada de $m_V(X)$ se aproxima a un límite cuando la vecindad V en el origen disminuye y tiende a cero.

Una vez hayamos establecido rigurosamente la existencia del límite $m(X)=\lim\limits_{V\to 0} m(X)$ para todo subconjunto compacto X de $\Re^n$ la cual implica una interesante técnica de demostración la cual no es trivial en lo absoluto, vemos que $m(X^*)=1$ puesto que $m(X^*)=1$ como deseamos; esto garantiza que la medida m no es idénticamente nula.

Además, notemos que $(s+X:V)=(X:V)$ de donde $m_v(s+X)=m_v(X)$ y así $m(s+X)=m(X)$ para todo elemento s y todo subconjunto compacto X de $\Re^n$ esto asegura la invarianza de la medida m bajo traslaciones.

Teniendo definido m(X) en esta forma para subconjuntos compactos X, finalmente, por uno de los varios procesos conocidos, extendemos la medida m a subconjuntos medibles arbitrarios, obteniendo así de ese modo como se demostrará la medida de Lebesgue bajo un factor de proporcionalidad la cual depende del subconjunto particular X^* en nuestro caso, la elegimos como la unidad de medida. Esta observación de que la medida m como se definió arriba ilustra a la medida de Lebesgue como una consecuencia de la unicidad, excepto para un factor de proporcionalidad, de una traslación de medida - invariante: la medida m y la de Lebesgue ambas son traslaciones de medidas invariantes las cuales deben ser proporcionales.

Esto en general, es un bosquejo de la básica y simple idea de Haar, cuyo contenido geométrico, fácilmente se acepta intuitivamente. El mérito del trabajo de Haar consiste en colocar dentro de las prácticas un esbozo superior de ideas y proveer matemáticamente lo que se dio por intuición.

Las consideraciones anteriores se transfieren literalmente de $\Re^n$ a un grupo localmente compacto arbitrario G, tan pronto como se reemplaza s+ Y por sY, el origen 0 o de $\Re^n$ por el elemento identidad "e" de G y además hace una distinción entre traslaciones a derechas y a izquierdas, puesto que el grupo G no es necesariamente conmutativo.

CAPÍTULO 3

LA INTEGRAL DE HAAR

Capítulo 3

La Integral de Haar

Durante la primera mitad del siglo XX, surge la conjetura sobre la existencia de una integral invariante en un grupo. El primero en tratar este tema, motivado en parte por la esperanza de poder contribuir con la resolución del quinto problema de Hilbert (¿todo grupo topológico el cual es localmente euclidiano es necesariamente un grupo analítico o Lie?), fue Haar.

En este capítulo analizaremos las tres demostraciones básicas sobre la existencia y unicidad de la integral de Haar realizada primeramente por Haar y Von Neumann (existencia y unicidad respectivamente basados en un factor de proporcionalidad estrictamente positivo) dando así respuesta afirmativa al quinto problema de Hilbert. Posteriormente presentaremos la demostración de André Weil basado en el Teorema de Tychonoff y la de Henri Cartan utilizando el Criterio de Convergencia de Cauchy.

La importancia de estos tres enfoques radica en probar a través de una herramienta matemática confiable, la existencia y unicidad de la integral de Haar, deduciendo algunas propiedades interesantes y ver como se transfieren de un grupo $\Re^n$ a un grupo totalmente arbitrario G el cual no es necesariamente conmutativo, distinguiendo así entre invarianza a izquierda y a derecha.

3.1. La integral de Haar.

Ya tuvimos la oportunidad de expresar que la integral de Lebesgue sobre el n-espacio euclidiano $\Re^n$ es invariante bajo traslaciones; lo cual es expresado por la validez de la ecuación:

$\int f(x-s)dx = \int f(x)dx$ para todo $s \in \Re^n$.

Procederemos ahora a estudiar integrales sobre un grupo localmente compacto las cuales son invariantes bajo traslaciones en una forma más general. Como los grupos tratados no son necesariamente conmutativos, debemos distinguir entre translaciones a izquierda y a derecha.

Iniciaremos esta sección con las definiciones de traslación a izquierda y a derecha respectivamente.

Definición 3.1: Sea $(G, \bullet)$ un grupo multiplicativo y A un conjunto arbitrario con $s \in G$. Para cada $f \in A^G$ definimos:

1. La traslación a izquierda de f por el elemento s de G como la función:

   sf: $G \to A$, la cual actúa de la forma siguiente:

   $(sf)(x)=f(s^{-1}x)$ para $x \in G$.

2. La traslación a derecha de f por el elemento s de G como la función:

   fs: $G \to A$, la cual actúa de la forma siguiente:

   $(fs)(x)=f(xs^{-1})$ para $x \in G$.

Con el objetivo de motivarnos, señalemos que las expresiones $f(s^{-1}x)$ y $f(xs^{-1})$ corresponden en el presente, al caso multiplicativo de la expresión $f(x-s)$ dado anteriormente para el caso de $\Re^n$.

Observemos las siguientes propiedades:

1. $ef=f$
2. $fe=f$
3. $s(tf)=(st)f$ $\qquad s,t \in G$ y $f \in A^G$
4. $(fs)t=f(st)$
5. $s(ft)=(sf)t$

Por ejemplo, verifiquemos la propiedad (3)

$$s(tf)=(st)f$$

$[s(tf)](x)=(tf)(s^{-1}x)$ Por la definición 3.11

Como $(tf)(x)=f(t^{-1}x)$ $\qquad =f(t^{-1}s^{-1}x)$ Por la definición 3.11

Podemos escribir a

$=f[(st)^{-1}x]$ pues $s,t \in G$

$=[(st)f](x)$… Por la definición 3.11

De donde

$$[s(tf)](x)=[(st)f](x) \text{ para todo } x \in G.$$

como se deseaba.

Los otros son casos similares.

Introducimos también al mismo tiempo la notación siguiente la cual será usada después.

Definición 3.2: Sea f$\in A^G$, la función $\hat{f} \in A^G$ se define por la regla $\hat{f}$(x)=f(x^{-1}) para x$\in$G.

Definición 3.3: La integral positiva μ definida sobre un grupo localmente compacto G se dice que es invariante bajo traslación a izquierda o invariante a izquierda si para cada f$\in \mathcal{L}$(G, μ) y s$\in$G se tiene que:

sf$\in \mathcal{L}$(G, μ) y además μ(sf)= μ(f), esto es:

$\int (sf)(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$ o sea

$\int f(s^{-1}x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$

En particular, si X$\subset$G es medible, entonces sX es también medible y μ(sX)= μ(x) para todo s$\in$G.

Observemos que $\mathcal{K}$(G) es invariante bajo traslaciones a izquierda, esto es, si f$\in \mathcal{K}$G), entonces sf$\in \mathcal{K}$(G) para todo s$\in$G. Si μ es invariante a izquierda, entonces: μ(sf)= μ(f) para todo f$\in \mathcal{K}$G), s$\in$G.

Recíprocamente, si μ(sf)= μ(f) para todo f$\in \mathscr{K}$(G) y s$\in$G, entonces μ será invariante a izquierda como el proceso por el cual pasa de $\mathscr{K}$(G) a $\mathscr{L}$ (G, μ) muestra inmediatamente que si f$\in \mathscr{L}$ (G, μ) y s$\in$G, entonces sf$\in$ $\mathscr{L}$ (G, μ) y μ(sf)= μ(f). Este resultado se sigue directamente del lema siguiente aplicado al caso en el cual E=F=G, μ=v, T(x)=sx.

Lema 3.1: Sean E y F dos espacios localmente compactos, T un homeomorfismo entre E y F, y μ y v integrales positivas en E y F respectivamente tal que:

$v(fT^{-1})= \mu(f)$ para todo f $\in \mathscr{K}$(E).

Para que f$\in \mathscr{L}$ (E,μ) es necesario y suficiente que f T^{-1} $\in \mathscr{L}$ (F,v) y la igualdad

$v(fT^{-1})= \mu(f)$ todavía se cumple para f $\in \mathscr{L}$ (E, μ).

Prueba:

f$\in \mathscr{L}$ (E, μ) si y sólo si existen $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ de funciones escalonadas (integrables según μ) tal que:

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$=f y en este caso:

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n d\mu$$

$$\begin{tikzcd}
(E, \mu) \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \Re \\
(F, v) \arrow[u, shift right, "T^{-1}"'] \arrow[ur, "f \circ T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} (\varphi_n \circ T^{-1}) = \mathrm{f} \circ \mathrm{T}^{-1}$

$(\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n) \circ T^{-1}$

$\mathrm{f} \circ \mathrm{T}^{-1}$

$\int \varphi_n \circ T^{-1} dv = \int f T^{-1} dv \overset{?}{=} \int f d\mu$

Si $\mathrm{fT}^{-1} \in \mathscr{L}$ (F,v) $\to \exists$ $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de funciones escalonadas en (F, v) tal que:

$\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n = f T^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "f"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \\
F \arrow[u, shift right, "T^{-1}"'] \arrow[r, "\Psi_n"'] & \Re
\end{tikzcd}$$

$\psi_n \circ T$

$E \to \Re$

$F = (fT^{-1})T : E \to \Re$

$F = (\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n)T = \lim\limits_{n \to \infty} (\psi_n \circ T)$

Dado un espacio localmente compacto E y una integral positiva μ en E, un homeomorfismo T de E se dice que preserva μ si, para que $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ es necesario y suficiente que $fT^{-1} \in \mathcal{L}(E, \mu)$,y, entonces $\mu(fT^{-1}) = \mu(f)$, esto es,

$$\int f(T^{-1}(x))d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x).$$

Para que esta relación se cumpla, es necesario y suficiente que $\mu(fT^{-1}) = \mu(f)$ para todo $f \in \mathcal{K}(E)$, garantizado por el lema 3.1. Los homeomorfismos de E los cuales preservan μ, obviamente, forman un grupo, esto es, un subgrupo del grupo de todos los homeomorfismos de E. Con esta terminología podemos definir las integrales positivas las cuales son invariantes a izquierda en un grupo localmente compacto, como las que son preservadas bajo todas las translaciones a izquierda.

Definición 3.4: Sea μ una integral positiva invariante a izquierda sobre un grupo localmente compacto y sea c un número real positivo, entonces $c\mu$ es también una integral positiva invariante a izquierda.

La definición para integrales positivas invariantes a derecha es análoga a la de integrales positivas invariantes a izquierda.

Hasta donde sea posible nos limitaremos al caso de integrales invariantes a izquierda.

3.2. Prueba de la existencia y unicidad de la integral de Haar de acuerdo a Haar y Von Neumann.

A continuación enunciaremos el teorema básico de toda la teoría que se maneja en este capítulo.

Teorema 3.1 (Haar): Sobre todo grupo G localmente compacto existe al menos una integral positiva invariante a izquierda $\mu \neq 0$. Tal integral μ es única, excepto por un factor de proporcionalidad estrictamente positivo; esto es, si $v \neq 0$ es otra integral positiva invariante a izquierda sobre G, existe un número real $c>0$ tal que $v=c\,\mu$.

Como ya hemos dicho, la existencia de una integral invariante a izquierda asegurada en el teorema fue establecida por Haar. Por esta razón, toda integral positiva $\mu \neq 0$, la cual es invariante a izquierda sobre G, es llamada una integral de Haar invariante a izquierda. El establecimiento de la unicidad de esta integral nació de Von Neumann.

Antes de presentar una prueba inmediata del teorema 3.1 debemos primero ilustrarlo con algunos ejemplos, derivando a su vez algunas consecuencias del mismo.

Ejemplo 3.1: La integral de Lebesgue en el espacio $\Re^n$ es una integral de Haar en $\Re^n$. La integral de Haar más general sobre el espacio $\Re^n$ está dada por:

$\mu(f)=c\int f(x)dx$,

donde c>0 y la integral en el segundo miembro es la integral de Lebesgue, siguiendo a la parte del teorema 3.1 que se refiere a la unicidad.

Puesto que $\Re^n$ es conmutativo, no existe distinción entre la invarianza a izquierda y a derecha. Si hacemos c=1, normalizamos la integral de Haar en tal forma que el paralelepípedo $0 \le x_i \le 1$ (i=1,…,n). tiene medida unitaria.

En un contexto más general, sea V un espacio vectorial real de dimensión n. La integral de Haar sobre V es establecida en la siguiente manera: Tomemos una base $e_1,\ldots,e_n$ de V. Sea $I:V \to \Re^n$ el isomorfismo entre V y $\Re^n$ dado por $I(x)=(x_1,\ldots,x_n)$ donde

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Toda función f sobre V, determina una función $f\,I^{-1}$ sobre $\Re^n$. Consideremos la función f con valores reales sobre V tal que fI^{-1} es integrable según Lebesgue sobre $\Re^n$ y definimos:

$\mu(f)= \int f(I^{-1}(x_1,\ldots,x_n))dx_1,\ldots,dx_n$ la integral en el segundo miembro será tomada en el sentido de Lebesgue.

Para que se logre simplificar más la notación, escribimos la integral en el segundo miembro de la ecuación anterior en la forma:

$$\mu(f)= \int f(x)dx_1,\ldots,dx_n$$

donde se entendió que $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Aparece de una vez que μ es una integral de Haar sobre V. Hacemos un cambio de base en V, la integral μ toma un cambio sobre un factor de proporcionalidad estrictamente positivo, esto es, igual al valor absoluto del determinante de la matriz, el cual describe el cambio de base. Se sigue inmediatamente del teorema sobre Jacobianos concernientes al cambio de variables de integrales múltiples aplicado en el caso presente a una transformación lineal de variables.

El comportamiento de μ relativo al cambio de bases está de acuerdo con el tipo de unicidad de la integral de Haar descrito en el teorema 3.1.

En el caso de un espacio vectorial arbitrario V no existe una normalización natural que permita distinguir a una integral de Haar privilegiada tal como señalamos en el caso particular en el cual $V=\Re^n$. No obstante, si dado un producto escalar sobre V, llamemos a sus resultados una integral de Haar privilegiada, que en términos de los cuales el paralelepípedo determinado por una base ortonormal tienen medida unitaria. La integral de Haar es independiente de la base ortonormal elegida por cuanto la matriz de cambio de base ortonormal, es ortogonal y por consiguiente, el valor absoluto de este determinante es 1. El caso particular de $\Re^n$ es el caso correspondiente a la elección usual del producto escalar en el cual tomamos $(x|y)=\Sigma\, x_i y_i$ para $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$.

Antes de ir a nuevos ejemplos, indicamos una propiedad simple de la integral de Haar en espacios vectoriales de dimensión finita la cual se usa en los ejemplos siguientes y además se formuló en lenguaje intrínseco, no es más que un caso especial del Teorema sobre Jacobianos concernientes a cambio de variables en integrales múltiples, esto es, el caso de un cambio expresado por una transformación lineal.

Definición 3.5: Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si T es un transformación lineal de V, la matriz $\{t_{ij}\}$ de T con referencia a una base $e_1,\ldots,e_n$ de V es determinada por:

$$T(e_j)=\sum_i t_{ij}e_i$$

Es fácil verificar que el determinante de $\{t_{ij}\}$ es independiente de la base elegida. El determinante es representado por det(T) y será llamado el determinante de T el cual se vio que es de carácter intrínseco, es decir, es independiente de las bases.

Se sigue de una vez que:

(1) $T\rightarrow \det(T)$ es continuo en $\mathscr{L}(V)$

(2) $\det(T'T'')=\det(T').\det(T'')$ para $T',T''\in \mathscr{L}(V)$

(3) det (I)=1 donde I es la identidad de $\mathscr{L}(V)$

(4) $T\in \mathscr{L}(V)$ es invertible si y si $\det(T)\neq 0$

En particular, $T\rightarrow \det(T)$ es un homomorfismo continuo de $G\mathscr{L}(V)$ sobre $\Re^{*}$

Proposición 3.1: Dado $T\in G\mathscr{L}(V)$; para que una función real f sobre V sea relativamente integrable a una integral de Haar sobre V es necesario y suficiente que fT^{-1} también sea integrable y entonces si dx representa la integral de Haar en cuestión, tenemos:

$$\int f(T^{-1}(x))dx=|\det T|\cdot\int f(x)dx$$

Prueba:

Por virtud del lema 3.1, es suficiente probar la igualdad para $f \in \mathscr{K}(V)$. Introducimos una base $e_1,\ldots,e_n$ en V en términos de los cuales T tiene una matriz $\{t_{ij}\}$.

Indicamos por I el isomorfismo entre V y $\Re^n$ dado por $I(x)=(x_1,\ldots,x_n)$ para $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, la igualdad mostrada es equivalente a la igualdad.

$$\int f(T^{-1}(y))dy_1 \ldots dy_n = |\det T| \cdot \int f(x)dx_1 \ldots dx_n$$

en $\Re^n$ donde $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ y $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. En la integral múltiple del primer miembro llevamos a cabo la transformación lineal de variables dadas por:

$$y_i = \sum_j t_{ij} x_j$$

Notemos que, si $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ y $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, entonces $T(x)=y$ ó $x=T^{-1}(y)$, y que el Jacobiano de la transformación de variables es el determinante $\{t_{ij}\}$ ó $\det(T)$. El resultado de la igualdad probada, es entonces: $\int f(x)\cdot|\det(T)|dx_1 \ldots dx_n = |\det(T)| \cdot \int f(x)dx_1 \ldots dx_n$ lo cual es obvio. Así se completa la prueba.

Ejemplo 3.2: Sea G un grupo arbitrario discreto. Sabemos que $\mathscr{K}$ (G) es el espacio vectorial de funciones de valores reales definidos sobre G, cada uno de los cuales se anula fuera de algún subconjunto finito. (Ejemplo 1.1, sección 1.2, Capítulo 1.)

Para todo $f \in \mathscr{K}(G)$; definimos:

$$\mu(f) = \sum_{x \in G} f(x)$$

Vemos de inmediato que μ es una integral de Haar, la cual es invariante tanto a izquierda como a derecha, puesto que toda permutación del conjunto G preserva a μ. Esta integral de Haar es normalizada por la condición de que la medida de todo punto sea uno. Toda integral sobre G es proporcional a la dada por un factor de proporcionalidad estrictamente positivo.

Antes de considerar nuevos ejemplos, queremos establecer ciertos resultados preliminares que se usarán después.

Definición 3.6: Sea V un espacio vectorial de dimensión n, entonces corresponde a toda transformación lineal T de V, el determinante det(T).

Recordemos que $\mathscr{L}(V)$ es el álgebra de las transformaciones lineales de V; este es un espacio vectorial de dimensión n^2.

1) Toda transformación $A \in \mathscr{L}(V)$ determina una transformación lineal en $\mathscr{L}(V)$, esto es, la multiplicación a izquierda L_A por A dada por $L_A(X)=AX$, donde $X \in \mathscr{L}(V)$.

2) La multiplicación a derecha R_A por A es definida por $R_A(X)=XA$ donde $X \in \mathscr{L}(V)$

Por consiguiente, L_A y R_A, como transformaciones lineales del espacio vectorial $\mathcal{L}$ (V)de dimensión finita, tienen asociados a ellos sus determinantes det (L_A) y det(R_A). La próxima proposición da una expresión para esos determinantes.

Proposición 3.2: Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n y $A \in \mathcal{L}(V)$, entonces:

det (L_A) = det(R_A) = (det (A)) ^{n}

Prueba:

Sea $e_1,\ldots,e_n$ una base de V. Si A, X, Y $\in$ $\mathcal{L}$ (V), indicamos por $\{a_{ij}\}$, $\{x_{ij}\},\{y_{ij}\}$ las respectivas matrices expresadas en esas bases. Mostramos una matriz por columna escribiendo la primera columna horizontalmente, entonces la segunda también y así la cuarta. En esta forma una matriz de orden n representa un punto en $\Re^{n^2}$ Si Y=AX, entonces:

$$\{y_{ij}\} = \sum_k a_{ik} x_{kj}$$

Si exhibimos esas matrices por columna la relación entre ellas se da por coordinación de los puntos ($y_{11},\ldots,y_{n1},\ldots,y_{1n},\ldots y_{nn}$), como funciones lineales de la coordinación de los puntos ($x_{11},\ldots,x_{n1},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{nn}$). La matriz de orden n^2 de la transformación lineal de $\Re^{n^2}$ justamente obtenida, es fácil determinarla por medio de la fórmula descrita anteriormente, es igual a μ:

(1)
$$\begin{pmatrix} A & 0\cdots & 0 \\ 0 & A\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & A \end{pmatrix}$$

donde A en un estilo condensado representa la matriz a_{ij}, de la transformación lineal A, y 0 indica la matriz cero de orden n. Por la regla de la multiplicación de matrices, (1) es igual al producto:

(2)
$$\begin{pmatrix} A & 0\cdots & 0 \\ 0 & I\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & I \end{pmatrix} x...x \begin{pmatrix} I & 0\cdots & 0 \\ 0 & I\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & A \end{pmatrix}$$

donde I indica la matriz unitaria de orden n. Así el determinante de la matriz en (1) es igual al producto de los determinantes de las matrices en (2), por lo tanto, de una vez se sigue que $\det(L_A) = (\det(A))^n$. La prueba de que $\det(R_A) = (\det(A))^n$ es análoga.

Ejemplo 3.3: Consideremos un espacio vectorial real V de dimensión n y el grupo localmente compacto de trasformaciones lineales invertibles de V, y procedemos a determinar la integral de Haar sobre ese grupo.

Sabemos que $\mathcal{GL}$ (V) es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}$ (V). Indicamos por T un punto genérico de $\mathcal{L}$ (V) y por dT una integral de Haar sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}$ (V). (Ejemplo 3.1)

También consideremos la integral correspondiente inducida sobre G= $\mathcal{GL}$ (V). Hagamos la prueba para determinar una función continua u definida sobre G, tal que: μ (f)= $\int_G u(T)f(T)dT$, donde $f \in \mathcal{K}$(G) es una integral de Haar invariante a izquierda sobre G.

Para este propósito debemos tener μ (Sf)= μ (f) para todo $S \in G$ y $f \in \mathcal{K}$(G), esto es

$$\int_G u(T)f(S^{-1}T)dT = \int_G \mu(T)f(T)dT$$

Ahora escribamos al integrando del primer miembro en la forma $u(SS^{-1}T)f(s^{-1}T)$, extendiendo esa función de T a $\mathcal{L}$ (V), pero definiendo a ésta de tal forma que sea igual a 0 fuera de G: y aplicamos la proposición 3.1 y 3.2.

Entonces la igualdad descrita anteriormente resulta:

$$|\det(S)|^n \int_G u(ST)f(T)dT = \int_G u(T)f(T)dT$$

Ahora es suficiente elegir u en tal forma que satisfaga la ecuación funcional, $|\det(S)|^n u(ST)=u(T)$ para todo $S, T \in G$. Tomando $S=T^{-1}$ y $c=u(I)$ donde I es la identidad de G, obtenemos $u(T)=\frac{c}{|\det(T)|^n}$ y recíprocamente es claro que esa función satisface la ecuación lineal indicada. Así obtenemos:

μ (f)= $\int_G \frac{f(T)}{|\det(T)|^n} dT$ expresando una integral de Haar invariante a izquierda sobre G, por medio de una integral de Haar sobre $\mathscr{L}$ (V) indicada por dT, notemos que la constante c que aparece en la expresión para u debe ser estrictamente positiva y por esta razón puede ser absorbida dentro de dT. El factor de proporcionalidad conectado con la elección de dT reaparece como un factor de proporcionalidad en la expresión de μ. La fórmula precedente establece una correspondencia natural uno a uno entre la integral de Haar sobre $\mathscr{L}$ (V) representada por dT y la integral de Haar invariante a izquierda sobre G representada por ∂ T; esta correspondencia puede ser escrita simbólicamente en la forma:

$$\partial T = \frac{dT}{|\det(T)|^n}$$

Mediante un cálculo cuidadoso llegaremos a la misma expresión para la integral de Haar invariante a derecha sobre G. **Aunque G no es conmutativo, toda integral de Haar invàriante a izquierda es también invariante a derecha y viceversa.**

A continuación tenemos el siguiente lema el cual es conocido como el Lema de Bois Reymond en el cálculo de variaciones.

Lema 3.2: Sea E un espacio localmente compacto y μ una integral positiva sobre E tal que, si f$\in$ $\mathscr{K}_+$(E), f$\neq$0, entonces $\int f d\mu$ >0. Si g' y g'' son dos funciones continuas reales sobre E tal que $\int fg' d\mu = \int fg'' d\mu$ para todo f$\in$ $\mathscr{K}$(E), entonces g'=g''.

Prueba:

Supongamos que existe un punto $x \in E$ tal que $g'(x) > g''(x)$. Se sigue de una vez que existe una función $f \in \mathscr{K}_+(E)$, $f \neq 0$ tal que $f \cdot (g'-g'') \in \mathscr{K}_+(E)$, $f(g'-g'') \neq 0$. Esto implica que $\int f \cdot (g'-g'') d\mu > 0$, el cual sin embargo, contradice $\int fg' d\mu = \int fg'' d\mu$. Esta contradicción muestra que $g'(x) \leq g''(x)$ para todo $x \in E$, o que $g' \leq g''$. Similarmente $g'' \leq g'$, de donde $g' = g''$ como se desea mostrar. Así se concluye la prueba.

Aplicando este lema, vemos inmediatamente que una integral de Haar invariante a izquierda en $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(V)$ no es invariante a derecha y viceversa.

Ejemplo 3.4: El Ejemplo 3.3 es un caso particular de la situación siguiente: Sea M un álgebra de dimensión finita con unidad, definida sobre el cuerpo $\mathfrak{R}$ de los números reales.

El espacio vectorial topológico natural de M hace que la multiplicación en M sea continua, como fácilmente se verifica, así que M es un álgebra topológica. El grupo multiplicativo $G = \mathfrak{G}(M)$ de los elementos de M que tienen inversos es un subconjunto abierto de M y un grupo localmente compacto relativo a la topología inducida. Si $A \in M$, definamos la multiplicación a izquierda L_A por la fórmula $L_A(X) = AX$ donde $X \in M$.

La transformación lineal L_A del espacio vectorial M tiene un determinante $\det(L_A)$. Para que A sea invertible en M, es necesario y suficiente que $\det(L_A) \neq 0$. Realmente, si A es invertible, tenemos:

$\det(L_A)\det(L_{A^{-1}}) = \det(L_{AA^{-1}}) = \det(L_I) = 1$, donde $\det(L_A) \neq 0$. Recíprocamente, si $\det(L_A) \neq 0$, L_A será una transformación lineal invertible del espacio vectorial M.

Existe, en particular, un elemento $B \in M$ tal que $L_A(B)=I$, esto es, $AB=I$. Se sigue que $\det(L_A)\det(L_B)=\det(L_I)=1$ por lo tanto $\det(L_B) \neq 0$. Por la misma razón, existe $C \in M$ tal que $BC=I$. Así $ABC=A$, lo que implica que $C=A$. Las relaciones $AB=I$, $BA=I$, muestran que A es invertible. Sea dT el integrando con respecto a una integral de Haar sobre el espacio vectorial M. Entonces el funcional lineal definido para $f \in \mathscr{K}(G)$ sobre las bases de la relación.

$\mu(f)= \int_G \frac{f(T)}{|\det(L_T)|} dT$ es, como fácilmente se verifica, una integral de Haar invariante a izquierda sobre G.

La invarianza a derecha es tratada similarmente. El ejemplo 3.3 corresponde a $M= \mathscr{L}(V)$. De paso notemos que, en oposición a que se cumpla verdaderamente cuando $M= \mathscr{L}(V)$, no es cierto que toda integral de Haar invariante a izquierda es también invariante a derecha y viceversa, cuando $G= \mathscr{G}(M)$ y M es arbitrario. Por ejemplo, dado un espacio vectorial de dimensión n y un subespacio vectorial W de dimensión m, donde $1 \leq m \leq n-1$. Sea $M= \mathscr{L}_W(V)$ el álgebra de las transformaciones lineales de V las cuales dejan a W invariante como un conjunto, esto es, el cual transforma W en sí mismo.

Los ejemplos dados para espacios vectoriales reales pueden ser considerados también para el caso complejo.

3.3. Propiedades de la integral de Haar.

Ahora establecemos ciertas propiedades simples de la integral de Haar; algunas de las cuales son consecuencia inmediata de la existencia y unicidad del teorema 3.1.

Proposición 3.3: Para que un grupo localmente compacto G tenga una integral de Haar invariante a izquierda μ con relación a la cual G posea medida finita, es necesario y suficiente que G sea compacto.

Prueba:

($\Leftarrow$) Si G es compacto, necesitamos únicamente recordar al teorema 3.1 puesto que se refiere a la existencia y tomando en cuenta que todo espacio compacto tiene medida finita en relación a toda integral positiva.

($\Rightarrow$) Recíprocamente asumamos que G no es compacto y que m(G)= $\int d\mu < +\infty$ donde μ indica una integral de Haar invariante a izquierda sobre G.

Seleccionemos $f \in \mathscr{K}_+(G)$ en tal forma que $\int f d\mu > 0$. Podemos asumir que $f \leq 1$. Debemos determinar una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset G$ tal que los soportes de las funciones $s_n f$ son disjuntos, es decir sop $(s_i f) \cap$ sop$(s_j f) = \varnothing$ si $i \neq j$, entonces se sigue que $s_1 f + \ldots + s_n f \leq 1$, de donde n $\int f d\mu \leq$ m(G) para todo n, lo cual es absurdo, pues contradice la propiedad arquimediana de $\Re$. Denotemos el soporte de f por K. Entonces el soporte de $s_n f$ será $s_n K$.. Escojamos $s_1 = e$ y asumamos que tenemos construido $s_1, \ldots, s_n$. Para que $s_{n+1}K$ sea disjunto de $s_i K (i=1,\ldots,n)$ debemos tener que $s_{n+1} \in (s_i KK^{-1})^c$ $(i=1,\ldots,n)$.

Como G no es compacto y $s_1KK^{-1} \cup \ldots \cup s_nKK^{-1}$ es compacto un tal s_{n+1} existe y así se completa la prueba.

Ahora establecemos el siguiente lema el cual también se usará después en la prueba del teorema 3.1

Lema 3.3: Sea G un grupo localmente compacto, f, g $\in \mathcal{K}_+(G)$ y $f \neq 0$. Entonces existe $s_1,\ldots,s_n \in G$ y números reales $c_1,\ldots,c_n>0$ tal que $g \leq \Sigma c_i \cdot s_i f$

Prueba:

Sea K considerado como el soporte de g. Sea $u \in G$ tal que f(u)>0. Si $t \in G$ y si tenemos el conjunto $s=tu^{-1}$, vemos que (sf)(t) >0. Podemos así determinar un número real c>0 y una vecindad V de t en tal forma que $x \in V$ implica $g(x) \leq c \cdot (sf)(x)$.

Por la compacidad de K es posible elegir un cubrimiento finito $V_1,\ldots V_n$ de K, con los elementos $s_1,\ldots,s_n \in G$ y los números reales $c_1,\ldots,c_n>0$ tal que $g(x) \leq \Sigma c_i \cdot (s_i f)(x)$ para todo $x \in V_i$. Así $g(x) \leq \Sigma c_i \cdot (s_i f)(x)$ para todo $x \in K$. Como esa relación también se cumple fuera de K, esta se cumple para todo el grupo G. Lo que completa la prueba.

Proposición 3.4: Si μ es una integral de Haar invariante a izquierda sobre un grupo localmente compacto G, si $f \in \mathcal{K}_+(G)$ y $f \neq 0$, entonces $\int d\mu > 0$

Prueba:

Sea $g \in \mathcal{K}_+(G)$. Existen $s_1,\ldots,s_n \in G$ y números reales $c_1,\ldots,c_n>0$. tales que $g \leq \Sigma c_i \cdot s_i f$. De esto se sigue que $\int g d\mu \leq \Sigma c_i \cdot \int d\mu$. Como $\mu \neq 0$, existe una función $g \in \mathcal{K}_+(G)$, tal que $\int g d\mu >0$, de donde $\int f d\mu >0$ como se deseaba.

La proposición 3.4 muestra que la integral de Haar invariante a izquierda satisface la hipótesis hecha en el enunciado del Lema de Boys Reymond (Lema 3.2). Además establece que la prueba de la proposición 3.4 es independiente del teorema 3.1., de hecho, esto será importante posteriormente cuando se use dicha proposición en la prueba del teorema.

Sea G un grupo localmente compacto. Si μ es una integral de Haar invariante a izquierda sobre G, definimos para todo $t \in G$, el funcional lineal positivo $v \neq 0$ por $v(f)=\mu(ft)$ donde $f \in \mathcal{K}(G)$. Mostremos que v es invariante a izquierda y en realidad, $v(sf)=\mu((sf)t)=\mu(s(ft))=\mu(ft)=v(f)$ como μ es invariante a izquierda. Por la unicidad de la integral de Haar (Teorema 3.1) existe para todo t un número único $\Delta(t)>0$ tal que $v(f)= \Delta(t) \cdot \mu(f)$. Notemos que si hubiésemos tomado otra integral de Haar invariante a izquierda, deberíamos tener por el teorerma 3.1, la proporcionalidad para μ y por consiguiente, $\Delta(t)$ debería tener el mismo valor. $\Delta(t)$, no depende así de la elección particular de la integral de Haar invariante a izquierda. A su vez usamos la notación más precisa $\Delta_r(t)$ o $\Delta_r^G(t)$ en lugar de $\Delta(t)$.

Definición 3.7: La correspondencia $\Delta_r : t \to \Delta_r(t)$ es llamada módulo a derecha de G. Así tenemos: $\int f(xt^{-1})d\mu(x) = \Delta_r(t) \cdot \int f(x)d\mu(x)$ si $f \in \mathcal{K}(G, \mu)$, $t \in G$

Proposición 3.5: El módulo a derecha de un grupo localmente compacto G es un homomorfismo continuo de G en el grupo multiplicativo $\Re_+^*$ de los números reales estrictamente positivos.

Prueba

Consideremos una integral de Haar invariante a izquierda μ. Entonces $\Delta(st) \int f(x)d\mu(x) = \int f(x(st)^{-1})d\mu(x) = \int f(xt^{-1}s^{-1})d\mu(x)$ pues $s,t \in G$

$$= \Delta(t) \int f(xs^{-1})d\mu(x) = \Delta(s)\ \Delta(t) \int f(x)d\mu(x)$$

Si elegimos $f \in \mathscr{K}(G)$ tal que $\int f(x)d\mu(x) = 1$, vemos que $\Delta(st) = \Delta(s)\ \Delta(t)$. Sin embargo, tenemos que para tal función f la relación $\Delta(s) = \int f(xs^{-1})d\mu(x)$ del cual podemos concluir, sobre las bases del (lema 1.3, sección 1.5, capítulo I), que Δ es una función continua sobre todo subconjunto compacto de G y por lo tanto del grupo entero G. Así se concluye la prueba.

Definición 3.8: Sea v una integral de Haar invariante a izquierda, vemos que para todo $t \in G$, existe un número estrictamente positivo único el cual se representa por $\Delta_l(t)$ o $\Delta_l^G(t)$ tal que:

$\int f(t^{-1}x)dv(x) = \Delta_l(t)\int f(x)dv(x)$ si f$\in \mathcal{K}$ (G,v),t$\in$G

La función Δ_l :t$\rightarrow$ Δ_l (t) la cual no depende en la elección particular de la integral de Haar invariante a derecha, es llamada el módulo a izquierda de G y es un homomorfismo continuo de G en $\Re_+^*$.

Proposición 3.6: Si μ es una integral de Haar invariante a izquierda sobre el grupo localmente compacto G, entonces: $\int f(x^{-1})d\mu(x) = \int \frac{f(x)}{\Delta_r(x)}d\mu(x)$ para todo f$\in \mathcal{K}$(G) y el funcional lineal v el cual asocia con todo f$\in \mathcal{K}$(G) el valor común de los dos miembros de esa igualdad, es una integral de Haar invariante a derecha.

Prueba:

Sea el conjunto: v(f)= $\int f(x^{-1})d\mu(x)$ si f$\in \mathcal{K}$(G). Mostremos que los funcionales lineales v$\neq$0 es invariante a derecha. Usemos la notación $\hat{f}$ ya introducida en la sección 3.1 (definición 3.2)

$\hat{f}(x) = f(x^{-1})$. Entonces:

$$v(fs)= \int (fs)(x^{-1})d\mu(x)= \int f(x^{-1}s^{-1})d\mu(x) = \int f((sx)^{-1})d\mu(x)$$

$$= \int \hat{f}(sx)d\mu(x) = \int \hat{f}(x)d\mu(x) \qquad = \int f(x^{-1})d\mu(x) = v(f)$$

Esto es, v(fs)=v(f). En una forma análoga, también obtenemos un funcional positivo invariante a derecha v$\neq$0, si definimos: v(f)= $\int \frac{f(x)}{\Delta_r(x)}d\mu(x)$ si f$\in \mathcal{K}$(G)

Y en realidad:

$$v(fs)=\int\frac{f(xs^{-1})}{\Delta_r(x)}d\mu(x)=\Delta_r(s^{-1})\int\frac{f(xs^{-1})}{\Delta_r(xs^{-1})}d\mu(x)$$

$$=\Delta_r(s^{-1}).\Delta_r(s)\int\frac{f(x)}{\Delta_r(x)}d\mu(x)=v(f)$$

esto es, v(fs)=v(f). Por la unicidad de la integral de Haar invariante a derecha (Teorema 3.1), existe un número real c>0 tal que $c\int f(x^{-1})d\mu(x)=\int\frac{f(x)}{\Delta_r(x)}d\mu(x)$ si f$\in\mathscr{K}$(G).

Probemos que c=1 como Δ_r(e)=1, existe para un ε>0; una vecindad V de e tal que $|\Delta_r(x)-1|\leq\varepsilon$ para todo x$\in$V. Por la (proposición 1.5, sección 1.1, capítulo 1), existe además una función f$\in\mathscr{K}_+$(G) con f$\neq$0 la cual es igual a 0 fuera de V. Podemos asumir que $f(x)=f(x^{-1})$ para todo x$\in$G, como esto será suficiente si esta relación no se cumple, al remplazar f(x) por $f(x)+f(x^{-1})$ para todo x$\in$G. Como $\int fd\mu>0$ (proposición3.4), podemos suponer que $\int fd\mu=1$. Para tal función f, podemos escribir:

$$c\int f(x^{-1})d\mu(x)=\int f(x)\Delta_r(x^{-1})d\mu(x)$$

$$=\int f(x)(\Delta_r(x^{-1})-1)d\mu(x)+1$$

Notemos que el primer miembro es igual a c y que $f(x)|\Delta_r(x^{-1})-1|\leq\varepsilon f(x)$ para todo x$\in$G. Se sigue de esto que $|c-1|\leq\varepsilon$ para todo ε, así que c=1 como se deseaba. Esto establece la igualdad asegurada en la proposición y muestra que la función lineal positiva v$\neq$0 da la igualdad para cada uno de los dos miembros de esa igualdad es una integral de Haar invariante a derecha. Lo que concluye la prueba.

Podemos expresar el enunciado de la proposición anterior en forma más precisa diciendo que, si μ y v son integrales de Haar invariantes a izquierda y a derecha respectivamente, entonces $f \in \mathcal{L}$ (G,v) si y sólo si $\hat{f} \in \mathcal{L}$ (G, μ), o, equivalente, si

$\frac{f}{\Delta_r} \in \mathcal{L}(G, \mu)$

Además,

$$\int f(x)d\nu(x) = \int f(x^{-1})d\mu(x) = \int \frac{f(x)}{\Delta_r(x)} d\mu(x) \text{ si } f \in \mathcal{L}(G,\nu),$$

con tal de que el factor de proporcionalidad arbitrario envuelto en la elección de ν (o de μ) sea tomado convenientemente. Se sigue de la proposición 3.6 y del lema 3.1.

La proposición 3.6 así establecida es una correspondencia natural entre las integrales de Haar invariantes a izquierda y a derecha. A toda integral de Haar invariante a izquierda μ, le corresponde la integral de Haar invariante a derecha ν, tal que $\int f d\nu = \int \hat{f} d\mu$ y a toda integral de Haar invariante a derecha v le corresponde una integral de Haar invariante a izquierda μ tal que $\int f d\mu = \int \hat{f}$ dv. Esas correspondencias son inversas una de la otra.

La igualdad afirmada en la proposición 3.6 puede también ser escrita en la forma:

$$\int f(x^{-1})\Delta_r(x^{-1})d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x).$$

Para esto es suficiente reemplazar f por $f\Delta_r$ en la igualdad original. Así la relación anterior no es válida únicamente para $f \in \mathcal{K}(G)$, sino también para $f \in \mathcal{L}$ (G, μ), puesto que en particular, $f \in \mathcal{L}$ (G, μ) si y sólo si, $\hat{f}\,\hat{\Delta}_r \in \mathcal{L}$ (G, μ)como se sigue de lo que fue establecido anteriormente.

Proposición 3.7: En un grupo localmente compacto G tenemos Δ_l(S) Δ_r(S)=1

Prueba:

Sea μ una integral de Haar invariante a izquierda. La integral de Haar invariante a derecha v la cual por la proposición 3.7 corresponde a la dada por.

$$\int f(x)dv(x) = \int \frac{f(x)}{\Delta_r(x)} d\mu(x)$$

así

$$\int (sf)(x)dv(x) = \int f(s^{-1}x)dv(x) = \int \frac{f(s^{-1}x)}{\Delta_r(x)} d\mu(x) = \Delta_r(s^{-1}) \int \frac{f(s^{-1}x)}{\Delta_r(s^{-1}x)} d\mu(x)$$

$$= \Delta_r(s^{-1}) \int \frac{f(x)}{\Delta_r(x)} d\mu(x) = \Delta_r(s^{-1}) \int f(x)dv(x)$$

Por consiguiente Δ_l(s)= Δ_r(s^{-1}) la cual prueba la afirmación anterior.

Definición 3.9: Un grupo localmente compacto G se dice **unimodular** si toda integral de Haar invariante a izquierda es también invariante a derecha y viceversa.

Incidentalmente, esta definición es suficiente, por el teorema 3.1 pues requiere únicamente que alguna integral de Haar invariante a izquierda sea también invariante a derecha, o requiere lo inverso.

Observación: Sobre grupos localmente compactos unimodulares, las integrales invariantes a izquierda y a derecha se dicen que son integrales invariantes y son simplemente llamadas las integrales de Haar. Los grupos de los ejemplos 3.1, 3.2, 3.3 son unimodulares. El grupo del ejemplo 3.4 no es unimodular.

Proposición 3.8: Para que un grupo localmente compacto sea unimodular, es necesario y suficiente que Δ_r y Δ_l sean iguales a 1.

Prueba:

Sea μ una integral de Haar invariante a izquierda. Para que μ sea también invariante a derecha es necesario y suficiente que: $\int f(xs^{-1})d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$

ó

$$\Delta_r(s)\int f(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

para todo f$\in \mathcal{K}$(G) y todo s$\in$G, el cual es equivalente a Δ_r(s)=1 para todo s$\in$G. Después será suficiente referir la proposición 3.7 y así se completa la prueba. La designación del grupo unimodular proviene de la proposición 3.8.

Proposición 3.9: Para que: $\int f(x^{-1})d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$ para todo f$\in \mathcal{K}$(G), donde μ es una integral de Haar invariante a izquierda sobre el grupo localmente compacto G, es necesario y suficiente que G sea unimodular.

Prueba:

($\Leftarrow$) Si G es unimodular, es suficiente aplicar la proposición 3.6 y 3.8 asumamos recíprocamente, que la igualdad afirmada siempre se cumple. Entonces, como, por la proposición 3.6 el primer miembro es una integral de Haar invariante a derecha y como la segunda es, por hipótesis, una integral invariante a izquierda, G será unimodular. Así completamos la prueba.

3.4. Prueba de la existencia y unicidad de la integral de Haar de acuerdo a Andrè Weil.

En la (sección 2.8 del capítulo anterior) se dio un esbozo esquemático que daba idea de la prueba de Haar respecto a la existencia de una medida invariante. La prueba que dió Weil, que se presenta en esta sección conserva la idea esencial de Haar, pero se aplica a las integrales en lugar de medidas. Una de las herramientas de Weil es el **Principio Maximal del Axioma de Elección de Zermelo en la forma del Teorema de Tychonoff,** esto constituye un sustituto para el proceso de **diagonalización de Cantor**, el cual fue usado por Haar asumiendo la hipótesis restringida en la cual el grupo satisface el segundo axioma de enumerabilidad. El tipo de prueba que nació de Weil, se abrió a la crítica, pues se usa el axioma de elección para establecer que un cierto conjunto no es vacío, así que un punto puede ser seleccionado allí dentro. En realidad, el conjunto tratado, se reduce a un único punto como resultado de la unicidad de la prueba. Por consiguiente, el uso del axioma de elección es en cierto sentido susceptible a la crítica. Por otro lado, la existencia de la prueba que nació de Weil pertenece a una de las pruebas más simples y cortas que se hayan conocido. Como ya, observamos, la unicidad de la integral de Haar fue establecida por primera vez por Von Neumann.

Comenzamos la prueba del siguiente resultado fundamental de la topología general, la cual generaliza a (la proposición 1.10, sección 1.4, capítulo1).

Teorema 3.2: (Tychonoff). Para que un producto cartesiano E=$\prod_{i\in I} E_i$ de un espacio topológico sea compacto es necesario y suficiente que todo factor sea compacto.

Prueba:

Para que E sea un espacio de Hausdorff es necesario y suficiente que todo factor sea un espacio de Hausdorff. Así, únicamente necesitamos examinar la propiedad de Borel – Lebesgue.

Si E es compacto, todo factor será compacto, como la proyección natural de E sobre los factores son continuos (Proposición 1.2 sección 1.1, capítulo 1).

Recíprocamente, supongamos que todo factor es compacto. Deseamos probar que toda colección de subconjuntos abiertos de E la cual cubre a E contiene una colección finita que también cubre a E. Asumamos que esto no es verdadero y conduzcamos la prueba por reducción al absurdo. Asumamos, entonces, que existe al menos una colección R de subconjuntos abiertos de E los cuales cubren a E tal que no todo subconjunto finito de R cubre a E. Supongamos que $\mathfrak{R}$ no es vacío, es el conjunto de tales colecciones R. Ordenamos $\mathfrak{R}$ por inclusión, esto es, hagamos,R'$\subset$R'' si x$\in$R' implica x$\in$R''. Esto surge del hecho que $\mathfrak{R}$ sea inductiva así que todo subconjunto no vacío totalmente ordenado de $\mathfrak{R}$ tiene una cota superior en $\mathfrak{R}$. Por el principio maximal, existe un conjunto maximal $R \in \mathfrak{R}$.

La maximalidad de R en $\mathfrak{R}$ evidentemente significa que, si V es un subconjunto abierto de E no pertenece a R, existe un subconjunto abierto de E_1 para todo índice i. Denotemos por V_i^{-1} la imagen inversa en E relativa a la proyección natural de E sobre E_1. Por la definición de la topología de E, los distintos V_i^{-1} son abiertos en E y su intersección finita $V_{i_1}^{-1} \cap \ldots \cap V_{i_p}^{-1}$ constituye una base para los subconjuntos abiertos de E.

Dado un índice i, afirmamos que los subconjuntos abiertos V_1 de E_1 tal que $V_i^{-1} \in R$, no cubre a E_1. Esto es verdadero porque en el caso contrario pudimos, por la compacidad de E_1, determinar un número finito de subconjuntos abiertos $V_{1_i}, \ldots V_{n_i}$ de E_1 la cual cubre a E_1 y los cuales $V_{1_i}{}^{-1}, \ldots, V_{n_i}{}^{-1} \in R$, así que podría tener un subconjunto finito de R cubriendo a E; esto es, sin embargo, imposible puesto que $R \in \mathfrak{R}$. Existe, así para todo índice i un punto a_1 de E_1 el cual pertenece a un subconjunto no abierto V_1 de E_1 tal que $V_i^{-1} \in R$. Sea $a = \{a_i\}$ el punto de E así obtenido.

Como R cubre a E, existe $V \in R$ tal que $a \in V$. Por la definición de la topología de E existen índices $i_1, \ldots i_p$ y subconjuntos abiertos $V_{i_1}, \ldots, V_{i_p}$ de $E_{i_1}, \ldots, E_{i_p}$ tal que $a \in V_{i_1}^{-1} \cap, \ldots, \cap V_{i_p}^{-1} \subset V$. Así $a_{i_1} \in V_{i_1}, \ldots, a_{i_p} \in V_{i_p}$ se sigue que $V_{i_1}^{-1}, \ldots, V_{i_p}^{-1}$ no pertenece a R. Por la maximalidad de R existen para todo $r=1,\ldots,p$ un subconjunto finito R_r' de R tal que $V_{i_1}^{-1}$ y R_r' cubre a E. Formando la unión de $R_1', \ldots, R_p'$, obtenemos un subconjunto finito R' de R tal que $V_{i_r}^{-1}$y R' cubre a E. Recordando que $V_{i_r}^{-1} \cap \ldots \cap V_{i_p}^{-1} \subset V$, vemos que V y R' cubren a E. Ahora $V \in R$, $R' \subset R$. Así R admite un subconjunto finito cubriendo a E lo que contradice que $R \in \mathfrak{R}$. Así se completa la prueba del Teorema de Tychonoff.

Proposición 3.10: Sea E un espacio de Hausdorff y $\{X_\iota\}$ una familia arbitraria de subconjuntos no vacíos de E con la propiedad de que para cada X_ι y X_J existe un X_k contenido en X_ι y X_J. Para que E sea compacto, es necesario y suficiente que, para toda familia $\{X_\iota\}$ la propiedad indicada implica la existencia de al menos un punto de E el cual pertenece a la clausura de todos los X_ι.

Prueba:

Supongamos que E sea compacto. Sea V_ι el complemento de la clausura de X_ι. Puesto que $V_{i_1}, \cup \ldots \cup V_{i_n} \subset V_\iota$ con tal de que $X_\iota \subset X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}$, vemos que la subfamilia no finita de $\{V_\iota\}$ cubre a E porque, como X_ι no es vacío, $V_\iota \neq E$. Por la compacidad de E la familia $\{V_\iota\}$ de subconjuntos abiertos no pueden cubrir a E. Así existe un punto de E que no pertenece a cualquiera de los V_ι, y, por consiguiente, pertenece a la clausura de todos los X_ι.

Recíprocamente, si E tiene la propiedad indicada en la proposición, consideramos un cubrimiento abierto $\{V_\iota\}$ de E. Sea P el conjunto que consiste de los subconjuntos cerrados de E de la forma $X = (V_{i_1}, \cup \ldots \cup V_{i_n})^c$

Se sigue de una vez que, si X', X'' $\in$ P, entonces X' $\cap$ X'' $\in$ P. Además puntos que no son de E pertenecen a todos los subconjuntos cerrados puesto que $\{V_i\}$ es un cubrimiento de E. Bajo la hipótesis hecha algunos de los subconjuntos cerrados pueden ser vacíos y eso prueba la existencia de un subcubrimiento de E y establece la proposición.

Después de estos preliminares de la topología general, **pasamos a la parte del teorema 3.1 la cual se refiere a su existencia**. Desde ahora, G denota un grupo localmente compacto.

Si f, g $\in \mathscr{K}_+$(G)con g $\neq 0$, consideremos un número finito de puntos $s_1,\ldots,s_n \in$ G y de números reales $c_1,\ldots c_n \geq 0$ tal que f$\leq \Sigma c_i \cdot s_i g$ lo cual es posible por el lema 3.3. Si tenemos una integral de Haar invariante a izquierda μ sobre G, podríamos, entonces, concluir que

$$\Sigma c_i \geq \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}$$

Esto dirige nuestra atención a la siguiente definición:

Definición 3.10: Si f, g $\in \mathscr{K}_+$(G) con g $\neq 0$. Definamos (f:g) como el ínfimo de las sumas Σc_i para todas las expresiones del tipo indicado para el cual tenemos que $f \leq \Sigma c_i \cdot s_i g$.

Como en el caso que se decía en la (sección 2.8 del capítulo anterior) el número (f:g) es una medida de la relación entre las integrales de f y g. Notemos que

$0 \leq (f{:}g) < +\infty$. Cuando escribimos el símbolo (f:g) se entenderá que $f,g \in \mathscr{K}_+(G)$ y que $g \neq 0$.

Lema 3.4:

(1) $(f{:}g) > 0$ si $f \neq 0$;

(2) $(sf{:}g) = (f{:}g)$ si $s \in G$;

(3) $(f_1+f_2,g) \leq (f_1{:}g)+(f_2,g)$;

(4) $(\lambda f,g) = \lambda (f{:}g)$ si $\lambda \in \Re_+$;

(5) $(f_1{:}g) \leq (f_2{:}g)$ si $f_1 \leq f_2$;

(6) $(f{:}h) \leq (f{:}g)(g{:}h)$.

Prueba:

Tomemos (1). Si a y b representan el supremos de f y g sobre G, entonces $a>0, b>0$ Ahora $f \leq \Sigma c_i \cdot s_i g$ implica $f(x) \leq b\,\Sigma c_i$ para $x \in G$ de donde $\Sigma c_i \geq b/a$ *y*, por consiguiente, $(f{:}g) \geq b/a > 0$.

Probemos (2). Si $f \leq \Sigma c_i \cdot s_i g$, entonces $sf \leq \Sigma c_i \cdot ss_i g$, puesto que $(sf{:}g) \leq \Sigma c_i$ y, así $(sf{:}g) \leq (f{:}g)$. Si en esa desigualdad remplazamos f por sf y s por s^{-1}, obtenemos: [illegible] $\leq (sf{:}g)$ lo cual prueba (2).

Probemos (3). Si $f_1 \leq \Sigma c_i \cdot s_i g$, $f_2 \leq \Sigma d_j \cdot t_j g$, entonces la adición de esas relaciones provee $(f_1+f_2{:}g) \leq \Sigma c_i + \Sigma d_j$, de donde (3) resulta.

(4) y (5) son obvias.

Ahora examinemos (6). Supongamos que f$\leq \Sigma c_i \cdot s_i g$,g$\leq \Sigma d_j \cdot t_j h$. Entonces s_ig$\leq \sum_j d_j \cdot s_i t_j h$, de donde f$\leq \sum_{ij} c_i d_j \cdot s_i t_j h$. Así (f:h) $\leq \Sigma c_i d_j = \Sigma c_i . \Sigma d_j$ lo cual prueba (6). Así el lema es establecido.

Fijemos nuestra atención sobre una función definida:

f* $\in \mathscr{K}_+$(G) con f* $\neq 0$ cuya integral es igual a 1.

Definición 3.11: Si F$\in \mathscr{K}_+$(G), F$\neq 0$, definamos la integral aproximada μ_F(f) de f$\in \mathscr{K}_+$(G) por

$$\mu_F\text{(f)}=\frac{(f:F)}{(f^*:F)} \text{ con f}^* \in \mathscr{K}_+\text{(G) y f}^* \neq 0$$

Observación: Notemos que por el lema 3.4 (1), tenemos (f*:F)>0. Claramente μ_F(f*)=1. Cuando escribimos el símbolo μ_F(f), se entenderá que f,F$\in$ $\mathscr{K}_+$(G) *y* que F$\neq$0.

Lema 3.5:

(1) μ_F(f)>0 si f $\neq 0$

(2) μ_F(sf)= μ_F(f) si s$\in$G

(3) $\mu_F(f_1+f_2) \leq \mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)$

(4) $\mu_F(\lambda f)=\lambda\, \mu_F(f)$ si $\lambda \in \Re_+$

(5) $\mu_F(f_1) \leq \mu_F(f_2)$ si $f_1 \leq f_2$

(6) $\dfrac{1}{(f^*:f)} \leq \mu_F(f) \leq (f:f^*)$ si f$\neq$0

Prueba:

Toda relación de este lema se sigue, de una vez, de la correspondiente relación del lema 3.4 Justamente probemos (6). Es suficiente notar que:

$(f:F) \leq (f:f^*)(f^*:F)$, $(f^*:F) \leq (f^*:f)(f:F)$

La relación (3) del lema 3.5 muestra que la integral aproximada es subaditiva. La ausencia de la aditividad de la integral aproximada es un delicado punto de la prueba del Teorema 3.1. El lema siguiente indica que μ_F tiende a ser aditivo, como el soporte de F, tiende a la identidad de G. Recordemos que $\mathcal{K}_+(G,V)$ denota el cono de las funciones de $\mathcal{K}_+(G)$ cuyos soportes están contenidos en V.

Lema 3.6: Dados f_1, $f_2 \in \mathcal{K}_+(G)$ y $\varepsilon>0$, existe una vecindad V de la identidad de G tal que:

$\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2) \leq \mu_F(f_1+f_2)+\varepsilon$

con tal de que $F \in \mathcal{K}_+(G,V)$ y $F \neq 0$.

Prueba:

Sea K un subconjunto compacto de G fuera de la cual f_1 y f_2 son nulas. Elijamos una función $f' \in \mathcal{K}_+(G)$ la cual es igual a 1 en K. Sea el conjunto $f=f_1+f_2+\delta f'$ donde $\delta>0$. Definamos las funciones h_1 y h_2 haciendo $h_i(x)=\dfrac{f_i(x)}{f(x)}$ si $f(x) \neq 0$ y poniendo $h_i(x)=0$ si $f(x)=0$. La función h_i es continua sobre el conjunto abierto sobre el cual f no se anula, como también sobre el conjunto abierto, este es el complemento de K, puesto que sobre el complemento h_1 es idénticamente 0. Así $h_1 \in \mathscr{K}_+(G)$ puesto que esos dos conjuntos abiertos cubren a G, y K es compacto. Notemos que $fh_i = f_i$ y que $h_1 + h_2 \leq 1$. Dada $\varepsilon' > 0$, existe por la proposición 2.1 del capítulo anterior, una vecindad V de la identidad tal que si $x^{-1}y \in V$, entonces $|h_i(x) - h_i(y)| \leq \varepsilon'$ (i=1,2). Supongamos que $F \in \mathscr{K}_+(G,V)$ y $F \neq 0$. Notemos que, sobre la otra forma $f \leq \Sigma c_i \cdot s_i F$, esto es;

$f(x) \leq \Sigma c_i F(s_i^{-1}x)$, implica que:

$f(x)h_j(x) \leq \Sigma_i c_i F(s_i^{-1}x)h_j(x) \leq \Sigma_i c_i F(s_i^{-1}x)(h_j(s_i) + \varepsilon')$.

Realmente, es suficiente notar que $h_j(x) \leq h_j(s_i) + \varepsilon'$ ó $F(s_i^{-1}x) = 0$ de acuerdo a si $s_i^{-1}x$ pertenece a V o no. Así:

$f_j = fh_j \leq \Sigma_i c_i (h_j(s_i) + \varepsilon') \cdot s_i F$

Por lo tanto:

$(f_j:F) \leq \Sigma_i c_i (h_j(s_i) + \varepsilon')$

Por adición, obtenemos:

$(f_1:F) + (f_2:F) \leq \Sigma_i c_i (1 + 2\varepsilon')$

Lo que implica:

$(f_1:F) + (f_2:F) \leq (1 + 2\varepsilon')(f:F)$

Dividiendo por $(f^*:F)$, vemos que:

$\mu_F(f_1) + \mu_F(f_2) \leq (1+2\varepsilon')\, \mu_F(f)$

$\leq (1+2\varepsilon')(\mu_F(f_1+f_2) + \delta\, \mu_F(f'))$

Aplicando el lema 3.5, (6) vemos que.

μ_F (f_1)+ μ_F (f_2) ≤ μ_F (f_1+f_2)+2ε'(f_1+f_2:f*)+δ (1+2ε')(f':f*)

Como ε' y δ pueden ser tan pequeños como deseamos, primero seleccionamos δ y entonces después ε'. Así de ese modo queda probado el lema.

Ahora finalmente probaremos esa parte del teorema 3.1 que se refiere a la existencia.

Denotamos por D el conjunto de funciones f ∈ $\mathscr{K}_+$(G) con f ≠ 0. Para f ∈ D, sea J(f) el intervalo compacto $\left[\frac{1}{(f^*:f)},(f:f^*)\right]$, sobre la recta $\Re$. El producto cartesiano:

$$J=\prod_{f\in D} J(f)$$

es compacto por el Teorema de Tychonoff. Para cada F ∈ D fija los valores tomados por μ_F (f) al recorrer todo D son las coordenadas de los punto a_F de J, esto es, a_F={ μ_F (f)}$_{f\in D}$. Para cada vecindad V de la identidad, sea A_V el conjunto de puntos a_F de J que corresponden a aquellas funciones F ∈ D cuyos soportes están contenidos en V, esto es, las funciones F ∈ $\mathscr{K}_+$(G,V) con F ≠ 0. Ninguno de los A_V son vacíos. Más aún, si tomamos V_1 y V_2 y V como vecindades de la identidad tal que V ⊂ V_1 ∩ V_2, entonces A_V ⊂ A_{V_1} ∩ A_{V_2}. Por la proposición 3.10 existe un punto a=$\{\mu(f)\}_{f\in D}$ que pertene a la clausura de todos los A_V en J lo que quiere decir que dados f_1,…,f_n ∈ D, ε>0, y una vecindad V de la identidad, existe una función F ∈ D cuyo soporte está contenido en V tal que:

$|\mu(f_i)-\mu_F(f_i)|\leq \varepsilon$ (i=1,…,n)

Así (2), (3), (4) y (6) del lema 3.5 y del lema 3.6 nos muestran inmediatamente que

$\mu(sf)=\mu(f)$, $\mu(f_1+f_2)=\mu(f_1)+\mu(f_2)$,

$\mu(\lambda f)=\lambda\mu(f)$, $\mu(f)\geq\dfrac{1}{(f^*:f)}>0$

donde f, f_1, f_2 $\in$ D y $\lambda>0$. Definiendo $\mu(0)=0$ y aplicando la (proposición 1.6, sección 1.2, capítulo 1) obtenemos una integral invariante a izquierda sobre G como se deseaba.

Notemos que $\mu(f^*)=1$

Pasando por la prueba de la unicidad de la integral de Haar invariante a izquierda dicha unicidad se entendió como se explicó en el Teorema 3.1.

Definición 3.12: Si μ es una integral de Haar invariante a izquierda, la función representada por $f * g$ y definida por:

$$(f * g)(x)=\int f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y) \qquad (x\in G),$$

es la **convolución** de f y g con respecto a μ, donde f,g $\in$ $\mathcal{K}$(G).

Notemos que la función de dos variables $(x,y)\rightarrow f(y)g(y^{-1}x)$ pertenece a $\mathcal{K}$(GxG). Esta es claramente continua. Además $f(y)g(y^{-1}x)\neq 0$ es equivalente a $f(y)\neq 0, g(y^{-1}x)\neq 0$. Si S_f y S_g representan los soportes de f y g, respectivamente, el soporte de la función de dos variables en cuestión, estarán contenidas en S_fS_gxS_f como se sigue de $x=y(y^{-1}x)$. Por el (lema 1.3, sección 1.5, capítulo 1) vemos que $f * g\in\mathcal{K}$(G) y que el soporte S_{f*g} está contenido en $S_f.S_g$. La invarianza a izquierda de μ permite escribir:

$$(f * g)(x) = \int f(xy) g(y^{-1}) d\mu(y) \qquad (x \in G)$$

El concepto de una convolución, definida en la definición 3.12 para funciones continuas con soportes compactos, se generaliza a funciones integrables y tiene propiedades importantes. Sin embargo, debemos limitarnos a las ideas un poco rudimentarias, las cuales son suficientes para nuestro objetivo inmediato. Los dos lemas siguientes, forman parte de un método importante conocido como el **proceso de regularización**, el cual, sin embargo, debemos evitar discutir aquí.

Lema 3.7: Sea E un espacio localmente compacto, μ una integral positiva sobre E, f una función continua de valores reales sobre E y a $\in$ E. Dado un ε>0 arbitrario, existe una vecindad V de "a" tal que, si g $\in$ $\mathscr{K}_+$(E,V) y $\int g d\mu = 1$, entonces $|\int fg d\mu - f(a)| \leq \varepsilon$

Prueba:

Dado ϵ>0, existe una vecindad V de "a" tal que: $|f(y)-f(a)| \leq \varepsilon$ si $y \in V$.

Ahora $\int fg d\mu - f(a) = \int (f(y) - f(a)) g(y) d\mu(y)$.

si g$\in$ $\mathscr{K}_+$(E,V) y $\int g d\mu = 1$. Es suficiente notar que $|f(y) - f(a)|\, g(y) \leq \varepsilon g(y)$ para $y \in E$. Lo que completa la prueba.

Lema 3.8: Sea G un grupo localmente compacto, μ una integral de Haar invariante a izquierda sobre G, y f $\in$ $\mathscr{K}$(G). Dado un ε>0 arbitrario, existe una vecindad V de la identidad tal que, si $g \in \mathscr{K}_+(G,V)$ y $\int g d\mu = 1$, entonces $|(f * \hat{g})(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para $x \in G$.

Prueba:

Es suficiente aplicar la prueba del lema anterior con E=G, a=e, f reemplazado por $x^{-1}f$, y usando la (proposición 2.1 del segundo capítulo) y la segunda expresión para una convolución. Así se concluye la prueba.

b) Prueba de la unicidad del teorema 3.1.

Ahora, finalmente probemos la parte del teorema 3.1 la cual se relaciona con la unicidad. Consideremos dos integrales invariantes a izquierda μ y v sobre G. Primero asumimos que esas integrales son tales que existe una función $f^* \in \mathscr{K}_+(G)$ para la cual $\mu(f^*) = v(f^*) = 1$. Basados en esta hipótesis probemos que $\mu = v$. La transición a dos integrales invariantes a izquierda de Haar las cuales son generales, es entonces, inmediata.

Si $f, g \in \mathscr{K}(G)$, formamos la convolución $h = f * \hat{g} \in \mathscr{K}(G)$ relativo a μ. Por la primera expresión para una convolución.

$$\int h(x) dv(x) = \int f(y) \cdot \int \hat{g}(y^{-1}x) dv(x) d\mu(y)$$

Por lo tanto:

$$(1) \qquad \int h dv = \int f d\mu \cdot \int \hat{g} dv$$

Ahora dado un $\varepsilon>0$ arbitrario, existe una vecindad V de la identidad, la cual puede ser asumida como compacta la cual tiene la propiedad de que si $g\in \mathscr{K}_+(G,V)$ y $\int gd\mu=1$, entonces por el lema 3.8 tenemos:

$||h-f||=\sup\{|h(x)-f(x)|;x\in G\}\leq \mathcal{E}$. Recordemos que la proposición 3.4 fue probada independientemente del teorema 3.1 y que, por consiguiente, por esa proposición, existe para la vecindad V de la identidad una función $g\in \mathscr{K}_+(G,V)$ con $\int gd\mu=1$. Como el soporte de h está contenido en el conjunto compacto S_fV^{-1}, se sigue de la continuidad de integrales positivas (Proposición 1.7, sección 1.2, capítulo 1) que $\int hdv$ puede llegar a ser cerrada en $\int fdv$ como se deseaba, con tal de que $g\in \mathscr{K}_+(G,V)$ y que $\int gd\mu=1$, y que V sea una vecindad lo suficientemente pequeña de la identidad. Como aplicamos esta observación a $f=f^*$ y tomando en cuenta que $\int f^*d\mu=\int f^*dv=1$, la relación (1) muestra que $\int \hat{g}dv$ puede aproximarse tanto a 1, como se desea, con tal que, nuevamente, $g\in \mathscr{K}_+(G,V)$, y $\int gd\mu=1$ y que V sea una vecindad lo suficientemente pequeña de la identidad. Como aplicamos esta nueva observación y una vez más la precedente a $f\in \mathscr{K}(G)$, la relación (1) por pasar al límite, provee $\int fdv=\int fd\mu$, por lo tanto $v=\mu$. Finalmente, notemos que, si μ y v son integrales de Haar invariantes a izquierda arbitrarias y si seleccionamos una función definida $f^*\in \mathscr{K}(G)$ con $f^*\neq 0$, entonces por la proposición 3.4 tenemos $\mu(f^*)>0$, $v(f^*)>0$ Haciendo $\mu'=\frac{\mu}{\mu(f^*)}$ y $v'=\frac{v}{v(f^*)}$, concluimos de μ'(f*)=v'(f*)=1 y que μ'=v'. Así μ y v son proporcionales. **Esto completa la prueba del teorema 3.1.**

En la prueba de la proposición 3.11 dada posteriormente, interpretaremos la unicidad de "a" como siendo equivalente a la primera parte de esta proposición y la afirmación directa la cual será llevado a cabo en la próxima sección, constituye uno de los pasos de la prueba de Cartan.

Lema 3.9: Sea E un espacio compacto y $\{X_i\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de E con la propiedad de que dado X_i y X_j existe un X_k contenido en X_i y X_j. Indicamos por "a" algún punto perteneciente a la clausura de todos los X_i (Proposición 3.10)

Para que "a" sea el único punto de E perteneciente a la clausura de todos los X_i, es necesario y suficiente que toda vecindad de "a" contenga al menos un X_i.

Prueba:

Es obvio, que si toda vecindad de "a" contiene al menos un X_i, entonces "a" será el único punto de E perteneciente a las clausuras de todos los X_i, ya que E es un espacio de Hausdorff.

Asumamos, recíprocamente, que esta es una vecindad abierta V de "a" la cual contiene todos los X_i. Sea el conjunto $Y_i=X_i \cap F$ donde $F= V^c$. La proposición 3.10 puede ser aplicada al espacio compacto F y la familia $\{Y_i\}$; de esto resulta la existencia de al menos un punto de F perteneciente a la clausura de todos los Y_i y de inmediato, de todos los X_i. Así "a" no es el único punto de E perteneciente a la clausura de todos los X_i y el lema está probado. Esto completa la prueba.

Proposición 3.11: Para todo $f \in \mathscr{K}_+(G)$ existe un número $\mu(f)$ tal que, dado un $\varepsilon>0$ arbitrario, es posible elegir una vecindad V de la identidad tal que:

$|\mu_F(f)- \mu(f)| \leq \varepsilon$ con tal de que $F \in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F \neq 0$. El número $\mu(f)$ es único para cada f.

Prueba:

Sea $f \neq 0$. Como "a" es el único punto de J en la clausura de todos los A_V, el lema 3.9 muestra que toda vecindad de "a" en J contiene un conjunto A_V. Fácilmente se verifica que esto último es equivalente a la primera parte de la proposición 3.11. La segunda afirmación resulta del hecho de que, si $\mu'(f)$ tiene la misma propiedad que $\mu(f)$, podemos concluir que $|\mu(f)- \mu'(f)| \leq 2\varepsilon$, de donde $\mu(f)= \mu'(f)$.

3.5. Prueba de la existencia y unicidad de la integral de Haar de acuerdo a Henri – Cartan.

La prueba de acuerdo a Cartan presentada en esta sección establece la existencia y unicidad simultáneamente basada en sí misma en un interesante teorema de aproximación. En lugar del principio maximal del axioma de elección de Zermelo, o algún resultado equivalente parecido al Teorema de Tychonoff, Cartan en la parte concerniente a la existencia usa el criterio de convergencia de Cauchy, como se establece previamente, es la heramienta por excelencia para el establecimiento de la existencia de teoremas los cuales incluyen unicidad. Cartan procede como sigue: él prueba la proposición 3.11 de la cual se sigue de una vez que $\mu(f)$ es la integral de f relativa a una integral de Haar invariante a izquierda μ; esto establece la existencia de tal integral. Sobre las bases del cálculo envuelto en esta prueba, él entonces demuestra que toda integral de Haar invariante a izquierda es el límite de una integral aproximada; eso establece la unicidad de la integral.

Mantenemos la notación usada en la sección precedente y comenzamos estableciendo el lema siguiente, cuyo enunciado es más preciso que el del lema 3.6 de la sección 3.4, pues contiene información adicional concerniente a la vecindad V la cual en el caso anterior no se necesitó. El lema acerca de lo establecido es formulado con referencias a "n"- funciones en lugar de dos funciones con una visión hacia las pruebas del Teorema 3.3 y el lema 3.12

Lema 3.10: Dado $f_1,\ldots f_n \in \mathscr{K}_+(G)$ y $\varepsilon>0$, existe un $\varepsilon'>0$ tal que, si V es una vecindad de la identidad la cual es de ε'- uniformidad a izquierda para $f_1,\ldots f_n$, entonces:

$\Sigma\mu_F(f_i) \leq \mu_F(\Sigma f_i)+\varepsilon$ con tal de que $F \in \mathscr{K}_+(G,V)$ y $F \neq 0$.

Prueba:

Sea K un subconjunto compacto de G, fuera del cual $f_1,\ldots,f_n$ son nulas. Elegimos una función $f' \in \mathscr{K}_+(G)$ tal que $f' \leq 1$ sobre G y $f'=1$ sobre K. Sea el conjunto $f=\Sigma fi+\delta f'$ para $\delta>0$ fijo. Definamos las funciones $h_1,\ldots,h_n$ colocando $h_i(x)=\dfrac{fi(x)}{f(x)}$ cuando $f(x) \neq 0$ y haciendo $h_i(x)=0$ cuando $f(x)=0$. Claramente, las funciones h_i son continuas y nulas fuera de K (para detalles, ver lema 3.6). Además $fh_i=f_i$, $\Sigma h_i \leq 1$.

Si V es una vecindad de ε'- uniformidad a izquierda para $f_1,\ldots,f_n$ entonces V será una vecindad de ε''- uniformidad a izquierda para $h_1,\ldots,h_n$ donde $\varepsilon'' = \frac{(2nL+\delta)\varepsilon'}{\delta^2}$ y $L=\sup\{f_i(x); x\in G, i=1,\ldots,n\}$. De hecho, asumamos que $x^{-1}y \in V$. Distingamos entre los casos siguientes:

1). $x,y\in K$. Entonces $f(x)\neq 0$, $f(y)\neq 0$ y

$$h_i(x)-h_i y)=\frac{f_i(x)(f(y)-f(x))+f(x)(f_i(x)-f_i(y))}{f(x)f(y)}$$

Como $f'(x)=f'(y)=1$, se sigue que $|f(x)-f(y)|\leq n\varepsilon'$. Además $\delta \leq f(x) \leq nL+\delta$. Así $|h_i(x)-h_i(y)|\leq \varepsilon''$.

2). $x\in K$, $y\in K^c$. Entonces $f_i(y)=0$, $h_i(y)=0$. De $|f_i(x)-f_i(y)|\leq \varepsilon'$ derivamos $f_i(x)\leq \varepsilon'$. Así:

$$|h_i(x)-h_i(y)|=h_i(x)=\frac{f_i(x)}{f(x)}\leq\frac{\varepsilon'}{\delta}\leq\varepsilon''$$

3) $x\in K^c$, $y\in K$. Similar al caso precedente

4) $x\in K^c$, $y\in K^c$. Es suficiente notar que $h_i(x)=h_i(y)=0$.

Así la afirmación concerniente a V es probada.

Supongamos, ahora que $F\in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F\neq 0$. Reemplazando ε' por ε'', aplicando la fase pertinente al cálculo usado en la prueba del lema 3.6, muestra que $f\leq \Sigma c_i \cdot s_i F$ implica que

$(f_j:F) \le \sum_i c_i(h_j(s_i) + \varepsilon'')$

Adicionando esas relaciones, obtenemos:

$\Sigma(f_j : F) \le \sum_i c_i(1 + n\varepsilon'')$

De donde

$\Sigma(f_j : F) \le (1 + n\varepsilon'')(f : F)$.

El resto de la prueba es llevada como en el lema 3.6, primero tomemos δ suficientemente pequeña y entonces tomamos $\mathcal{E}$'', la cual reemplaza $\mathcal{E}$', lo suficientemente pequeña. El lema 3.10 es, así probado.

Corolario 3.1: Dado $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{K}_+(G)$, $M \ge 0$, $\mathcal{E}>0$, existe un $\mathcal{E}$'> 0 tal que, si V es una vecindad de la identidad la cual es de $\mathcal{E}$'- uniformidad a izquierda para $f_1,\ldots,f_n$ y si $0 \le \lambda_1 \le M,\ldots,0 \le \lambda_n \le M$, entonces: $\Sigma\lambda_i\mu_f(f_i) \le \mu_F(\Sigma\lambda_i f_i) + \varepsilon$ con tal de que $F \in \mathcal{K}_+(G,V)$ y $F \ne 0$.

Prueba:

Se puede asumir que M>0. Dado $f_1,\ldots,f_n$ y $\varepsilon>0$, determinemos ε' sobre las bases del lema anterior. Sea el conjunto $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon'}{M}$. Si V es una vecindad de ε''- uniformidad a izquierda para $f_1,\ldots,f_n$, entonces V será una vecindad de ε'- uniformidad a izquierda para $\lambda_1 f_1,\ldots \lambda_n f_n$ con tal de que $0 \le \lambda_1 \le M,\ldots,0 \le \lambda_n \le M$. Por virtud del lema 3.10 y la forma en la cual ε' fue determinada en la prueba de este lema, el corolario es verificado con ε'' en lugar de ε'. Esto completa la prueba.

Lema 3.11: Si $g \in \mathscr{K}_+(G)$ y K es un subconjunto compacto de G, entonces dado $\varepsilon>0$, existe $s_1,\ldots,s_n \in K$ y $h_1,\ldots,h_n \in \mathscr{K}_+(G)$ tal que: $|\Sigma h_i(t).(s_i g)(x)-(tg)(x)|\leq \varepsilon$ si $x\in G$, $t\in K$.

Prueba:

Sea V una vecindad de ε- uniformidad a derecha para g. Entonces $yx^{-1}\in V$ implica $|g(x)-g(y)| \leq \varepsilon$. El cubrimiento abierto {sV; $s\in K$ de K admite un subcubrimiento finito, esto es, existe $s_1,\ldots,s_n\in K$ tal que $K\subset s_1V\cup\ldots\cup s_nV$. Por el (corolario1.1.del Teorema 1.2, capítulo 1) (Dieudonnè-Bochner) adaptado a espacios localmente compactos en la forma indicada al final de la sección 1.3 del capítulo 1, existen $h_1,\ldots,h_n \in \mathscr{K}_+(G)$ tal que $\Sigma h_i = 1$ sobre K y todo h_i se anula fuera de los s_iV. Se sigue que $|\ h_i(t)\cdot(s_i g)(x)-h_i(t)\cdot(tg)(x)|\leq \varepsilon h_i(t)$ si x, $t\in G$. Agregando esas relaciones y asumiendo que $t\in K$, obtenemos la desigualdad asertada.

Para el beneficio de su utilidad en el establecimiento del teorema de aproximación ahora probado y para las ocasiones posteriores, nos llama la atención, la relación siguiente: Si f_1, f_2, f_3, $F\in \mathscr{K}_+(G,)$ con $F\neq 0$, entonces $|f_1-f_2|\leq f_3$ implica $|\mu_F(f_1)-\mu_F(f_2)\ |\leq \mu_F(f_3)$. Realmente de $f_1\leq f_2+f_3$, $f_2\leq f_1+f_3$. deducimos por (3) y (5) del lema 3.5 que:

$\mu_F(f_1) \leq \mu_F(f_2) + \mu_F(f_3)$, $\mu_F(f_2) \leq \mu_F(f_1) + \mu_F(f_3)$, de donde la afirmación resulta.

Teorema 3.3: (CARTAN): Dado $f \in \mathscr{K}_+(G)$; si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y si V es una vecindad de la identidad la cual es de ε'- uniformidad a izquierda para f, entonces para todo $g \in \mathscr{K}_+(G,V)$ con $g \neq 0$, existen $s_1,\ldots,s_n$ perteneciente al soporte de f y números reales $c_1,\ldots,c_n \geq 0$ tal que:

$|f(x) - \Sigma c_i (s_i g)(x)| \leq \varepsilon$ para $x \in G$.

Prueba:

Si K es el soporte de f y $\delta > 0$, entonces por el lema 3.11 existe $s_1,\ldots,s_n \in K$ y $h_1,\ldots,h_n \in \mathscr{K}_+(G)$ tal que: $|\Sigma h_i(t).(s_i g)(x) - (tg)(x)| \leq \delta$ para $x \in G$, $t \in K$.

Multiplicado por f(t), se obtiene:

$|\Sigma(s_i g)(x) h_i(t) f(t) - (tg)(x) f(t)| \leq \delta f(t)$ para x, $t \in G$.

Sobre el otro lado,

$|(tg)(x) f(t) - (tg)(x) f(x)| \leq \varepsilon' \cdot (tg)(x)$ para $x,t \in G$

Como V es vecindad de ε'- uniformidad a izquierda para f y como $g \in \mathscr{K}_+(G,V)$ como se acierta, una vez que se distinga entre los casos $t^{-1}x \in V$ y $t^{-1}x \in V^c$. Combinando las dos desigualdades pasadas, se tiene:

$$\left| \ \Sigma(s_i g)(x) h_i(t) f(t) - (tg)(x) f(x) \ \right| \leq \delta f(t) + \varepsilon'(tg)(x) \text{ si } \quad x,t \in G.$$

Notemos que $(tg)(x) = g(t^{-1}x) = \hat{g}(x^{-1}t) = (x\hat{g})(t)$, la cual permite reemplazar a $(tg)(x)$ por $(x\hat{g})(t)$ en dos lugares en la desigualdad de arriba. Consideramos "x" como fijo y t como variable independiente. Por la obsevación inmediata precedente al enunciado del teorema y por (3) y (4) del lema 3.5, podemos escribir:

$$|\mu_F(\Sigma(s_i g)(x)h_i(f) - f(x)\mu_F(x\hat{g})| \leq \delta\mu_F(f) + \varepsilon'\mu_F(x\hat{g}),$$ donde $F \in \mathscr{K}_+(G)$, $F \neq 0$.

Notemos que, como $g \neq 0$, $\mu_F(x\hat{g}) = \mu_F(\hat{g}) > 0$, por (1) y (2) del Lema 3.5. Dividiendo por $\mu_F(\hat{g})$; se tiene que:

(1) $$|\mu_F(\Sigma\, \lambda_i(x)\, \lambda_i f) - f(x)| \leq \delta\, \mu_F(f) / \mu_F(\hat{g}) + \varepsilon'$$

donde $\lambda_i(x) = (s_i g)(x) / \mu_F(\hat{g})$

Por (6) del Lema 3.10 y (6) del Lema 3.5 tenemos:

$\mu_F(f) / \mu_F(\hat{g}) = (f{:}F)/(\hat{g}:F) \leq (f:\hat{g})$, $0 \leq \lambda_i(x) \leq M$ donde $M = (f^*:\hat{g})$. sup $\{g(t): t \in G\}$. Aplicando el corolario 3.1 del Lema 3.10 combinado con (3) del Lema 3.5, vemos que dado $\delta' > 0$ existe una vecindad W de la identidad tal que

(2) $$|\mu_F(\Sigma\, \lambda_i(x)\, h_i(f) - \Sigma\, \lambda_i(x)\, \mu_F(h_i f)| \leq \delta'$$

Con tal de que $F \in \mathscr{K}_+(G,W)$, $F \neq 0$. Si seleccionamos una función F definida con esas propiedades y combinado las desigualdades (1) y (2) descritas anteriormente, obtenemos

$$|f(x) - \Sigma\, \lambda_i(x)\, \mu_F(h_i f)| \leq \delta\, (f:\hat{g}) + \varepsilon' + \delta'$$

Como $\varepsilon' < \varepsilon$, podemos afortunadamente elegir δ y δ' en tal forma que el segundo miembro de esa desigualdad anterior sea menor ε. Recordando la expresión para $\lambda_i(x)$ y colocando $c_i = \mu_F(h_i f) / \mu_F(\hat{g})$, obtenemos el teorema.

Observación: Si hubieramos tenido ya una integral de Haar invariante a izquierda μ en G, el teorema anterior, pudo haberse probado en una manera un poco más simple usando μ en lugar de μ_F, puesto que μ es aditiva. La prueba dada arriba la cual usa μ_F en lugar de μ, sin embargo, nos permite usar este teorema sin ninguna restrincción en la prueba de la existencia de μ.

Notemos que aunque la observación hecha no se usa aquí, el teorema 3.3 se cumple también para $f \in \mathscr{K}(G)$ con tal de que requiera los números $c_1,\dots,c_n$ únicamente reales sin que necesariamente sean positivos.

Lema 3.12: Sea $f \in \mathscr{K}_+(G)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una vecindad U de la identidad con esta propiedad: para todo $g \in \mathscr{K}_+(G, U), g \neq 0$, podemos determinar un número real $c \geq 0$ y otra vecindad V de la identidad, tal que:

$|\mu_F(f) - c\,\mu_F(g)| \leq \varepsilon$

Con tal de que $f \in \mathscr{K}_+(G,V), F \neq 0$.

Prueba:

Denotemos por U_0 una vecindad compacta fija de la identidad y por K el soporte de f. Determinemos $f' \in \mathscr{K}_+(G)$ tal que $f' \leq 1$ sobre G y $f'=1$ sobre el subconjunto compacto KU_0. Dado $\delta > 0$, existe por el teorema 3.3 una vecindad U de la identidad la cual se puede suponer que está contenida en U_0 tal que si $g \in \mathscr{K}_+(G,U), g \neq 0$ podemos determinar $s_1,\dots,s_n \in K$ y $c_1,\dots,c_n \geq 0$ tal que:

$|f(x)-\Sigma c_i \cdot (s_i g)(x)| \leq \delta$ para $x \in G$.

Asumamos que g satisface esas condiciones. Notemos que la nulidad de $s_i g$ fuera de KU_o, vemos que esa desigualdad continua cumpliéndose si reemplazamos su segundo miembro por $\delta f'(x)$. De esto resulta:

$|\mu_F(f)- \mu_F(\Sigma c_i \cdot s_i g)(x)| \leq \delta\ \mu_F(f') \leq \delta(f':f^*)$, donde $F \in \mathcal{K}_+(G)$, $F \neq 0$. Por el lema 3.10 y por (3) del lema 3.5 existe una vecindad V de la identidad tal que:

$|\mu_F(\Sigma c_i \cdot s_i g) - \Sigma c_i \mu_F(s_i g)| \leq \delta$ con tal de que $F \in \mathcal{K}_+(G,V)$, $F \neq 0$. Como $\mu_F(s_i g) = \mu_F(g)$, la combinación de las dos desigualdades anteriores provee:

$|\mu_F(f) - c\,\mu_F(g)| \leq \delta + \delta(f':f^*)$ donde $c = \Sigma c_i$. Por virtud de la arbitrariedad de δ, esto prueba el lema.

Definición 3.13: Sea I un conjunto semi-ordenado, esto es, un conjunto en el cual está definido para algunos elementos $i_1, i_2 \in I$, una relación de semi-orden $i_1 \leq i_2$ (también escrito $i_2 \geq i_1$) Esta relación es reflexiva así que $i \leq i$, y transitiva así que $i_1 \leq i_2$ e $i_2 \leq i_3$ implica $i_1 \leq i_3$.

No es necesario asumir que I está ordenado o que la relación indicada sea de un orden, una relación de orden debe implicar que, además de las dos condiciones mencionadas, la condición de antisimetría debe también ser impuesta así que de $i_1 \leq i_2$ y $i_2 \leq i_1$, debe seguirse que $i_1 = i_2$. Asumamos que I es directamente descendente así que dado i_1 e i_2 en I, existe en I un $i \leq i_1, i_2$. Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ la cual indica en I una familia de números reales. Decimos que lím x_i existe cuando i decrece en I si existe un número real x tal que dado ε>0, existe un i_o en I para el cual $|x_i - x| \leq \varepsilon$ si $i \leq i_o$. Entonces escribimos x=lím x_i, x es único. Ese concepto de límite goza de las propiedades usuales, las cuales no fueron establecidas. Entre ellas está el criterio de convergencia de Cauchy de acuerdo al cual lím x_i existe si y sólo si dado ε>0, existe un i_o en I tal que $|x_{i_1} - x_{i_2}| \leq \varepsilon$ siempre que $i_1, i_2 \leq i_o$.

Consideramos, entonces, el grupo localmente compacto G y sea I el conjunto de parejas i=(V,F) donde V es una vecindad de la identidad y $F \in \mathscr{K}_+(G,V), F \neq 0$. Si $i_1=(V_1,F_1)$, $i_2=(V_2,F_2)$ son dos elementos de I, definamos $i_1 \leq i_2$ cuando $V_1 \subset V_2$. Ahora consideremos una función fija $f \in \mathscr{K}_+(G)$. Dado i=(V,F) en I, definamos $x_i = \mu_F(f)$. La proposición 3.11 evidentemente, significa que lím x_i existe cuando i es decreciente. Aplicando el criterio de Cauchy entonces vemos que dicha proposición es equivalente a la proposición siguiente.

Proposición 3.12: Dado $f \in \mathscr{K}_+(G)$ y un ε>0 arbitrario, es posible elegir una vecindad V de la identidad para la cual:

$|\mu_{F_1}(f) - \mu_{F_2}(f)| \leq \varepsilon$

con tal de que $F_1, F_2 \in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$

Prueba:

Dado f y $\delta>0$, existe por el lema 3.12, una vecindad U de la identidad tal que, si $g\in\mathscr{K}_+(G,U), g\neq 0$, existe un número real $c\geq 0$ y una vecindad V de la identidad para la cual:

(1) $$|\mu_F(f)-c\,\mu_F(g)|\leq\delta \text{ si } F\in\mathscr{K}_+(G,V), F\neq 0$$

Similarmente, existe por el lema 3.12 para f* y para un δ dado, una vecindad U de la identidad tal que si, $g\in\mathscr{K}_+(G,V)$, $g\neq 0$, existe un número real $d\geq 0$ y una vecindad V de la identidad para la cual, como $\mu_F(f^*)=1$.

(2) $$|1-d\,\mu_F(g)|\leq\delta \text{ si } F\in\mathscr{K}_+(G,V), F\neq 0$$

Notemos que U y V, definido cada uno respectivamente, uno para f y el otro para f*, podemos para cada uno asumir lo mismo para ambas funciones, puesto que cualquier vecindad puede ser siempre reemplazada por una más pequeña.

Si $\delta<1$ como suponemos, (2) implica que $d\neq 0$. Combinando (1) y (2) y colocando r=c/d, obtenemos:

$|\mu_F(f)-r|\leq(1+r)\,\delta$ si $F\in\mathscr{K}_+(G,V)$, $F\neq 0$

Ahora (1) y (2) dan:

$c\,\mu_F\leq\mu_F(f)+\delta\leq(f;f^*)+\delta$, $d\,\mu_F(g)\geq 1-\delta$

Dividiendo y asumiendo que $\delta\leq 1/2$, vemos que $r\leq 2(f:f^*)+1$ y así $|\mu_F(f)-r|\leq 2((f:f^*)+1)\,\delta$ si $F\in\mathscr{K}_+(G,V)$, $F\neq 0$. Porque de la arbitrariedad de δ podemos, entonces decir que, dado $f\in\mathscr{K}_+(G)$ y $\varepsilon>0$, existe un número $r\geq 0$ y una vecindad V de la identidad tal que $|\mu_F(f)-r|\leq\varepsilon$ si $F\in\mathscr{K}_+(G,V)$, $F\neq 0$. Si, así F_1,

$F_2 \in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$, se sigue de $|\mu_{F_1}(f)-r| \leq \varepsilon$, $|\mu_{F_2}(f)-r| \leq \varepsilon$ tal que $|\mu_{F_1}(f)- \mu_{F_2}(f)| \leq 2\varepsilon$, lo cual establece la proposición 3.12.

Una vez la proposición 3.12 es establecida y por consiguiente también la proposición 3.12 esto es, la existencia de $\text{lím}\, \mu_F(f)=\mu(f)$ para todo $f \in \mathscr{K}_+(G)$, entonces el Lema 3.5, Lema 3.10 y la (proposición 1.6, sección 1.2, capítulo 1) proveee una integral de Haar invariante a izquierda μ para la cual $\mu(f^*)=1$.

Prueba de la unicidad de la integral de Haar.

Para demostrar la unicidad de la integral de Haar, consideramos en adición a μ, otra integral de Haar invariante a izquierda v tal que v(f*)=1. Los cálculos que se llevan a cabo en la prueba del lema 3.12 y la proposición 3.12 puede repetirse con v en lugar de μ_F; el reemplazo siempre representa una simplificación, puesto que v es lineal. De esos cálculos se sigue que el mismo número r al cual arribamos anteriormente en la proposición 3.12 satisface la relación: $|v(f)-r| \leq \varepsilon$ en adición a $|\mu_F(f)-r| \leq \varepsilon$ siempre que $F \in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F \neq 0$. Así el $|v(f)- \mu_F(f)| \leq 2\varepsilon$ simpre que $F \in \mathscr{K}_+(G,V)$, $F \neq 0$.

Entonces: $v(f)=\text{lím}\, \mu_F(f)= \mu(f)$ para todo $f \in \mathscr{K}_+(G)$, esto es $v=\mu$. Si v es una integral de Haar invariante arbitraria, es suficiente introducir $v' = \dfrac{v}{v(f^*)}$ para concluir que $v'=\mu$. Se sigue que $v=c\mu$ donde $c=v(f^*)>0$. Así la unicidad es establecida. Lo que completa la prueba.

BIBLIOGRAFIA

Halmos, P. (1950). Measure Theory. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Jacobson, N.(1965).Basic Algebra. W.H. Freeman and Company New York.

Lipschutz, S. (1965) General Topology. New York: Shaum's Series.

Kosniowski, C. (1987). A first cource in algebraic topology. Great Britain: Cambridge University Press.

Mackey, G. (1950). Functions on locally compact groups. USA: Bull Amer. Math Soc.

Nachbin, L. (1965). The Haar Integral Princenton N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Richard W. y Crowell R. (1972). Calculus of Vector functions. New Yersy: Prentice Hall, Inc.

Royden H. (1990). Real Análisis Stanford, California: Micmillon

Rubiano, G. (1997). Topología General. Colombia. Sección de Publicaciones de la Facultad de Ciencias. Universidad de Colombia.

Sacks, S. (1937). Theory of the integral. New York: Warzawa, G.E. Stechert Co.

Schaefer, H (1971). Topological Vector Space. New York:Springer – Verlag.

Segal, I y Kunze, R. (1992). Integrals and Operators. México: McGraw – Hill.

Serge, L. (1983). Undergraduate Analysis. New York: Springer – Verlag.

Shilov, G. (1966). Integral, measure and derivative: a unified approach. USA: Prentice – Hall, Inc.

Willard, S. (1970). General Topology. United States of America: Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Cartan H. (1941) Sur la mesure da Haar france: Bull Soc. Math.

Von Neumann J. (1950) The uniqueness of Haar's measure N.J: Princeton University Press.

Weil A. (1940) L' integration dans les grupes topologiques et ses applications, París: Hermann Cie.