

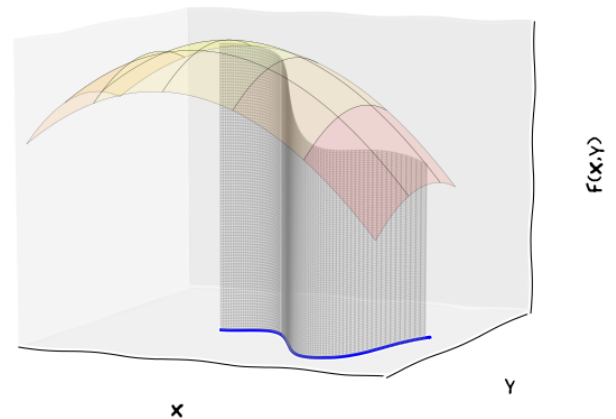
# Křivkový integrál

Robert Mařík

2020

## Anotace.

- V přednášce se seznámíme s rozšířením Riemannova integrálu. Riemannův integrál umožňuje sečíst příspěvky na úsečce. Zobecníme si tento nástroj tak, že umožní sečíst příspěvky podél křivky. Seznámíme se s křivkovým integrálem.
- Zaměříme se na křivkový integrál druhého druhu. V cizojazyčné literatuře je tento integrál nazývaný též integrál vektorového pole. Umožňuje vypočítat práci nebo obecně potenciál a tím přejít (pokud to jde) ke skalárnímu popisu pole namísto vektorového. Tím se popis studovaných systémů zjednoduší.
- Další aplikací křivkového integrálu druhého druhu je tok vektorového pole křivkou. Ten využijeme později při makroskopické formulaci bilance stavové veličiny a při odvození difuzní rovnice v integrálním tvaru.
- Motivací pro zavedení křivkového integrálu druhého druhu je i výpočet **toku přes hranici množiny**.



Obrázek 1: Křivkový integrál prvního druhu

## Prerekvizity.

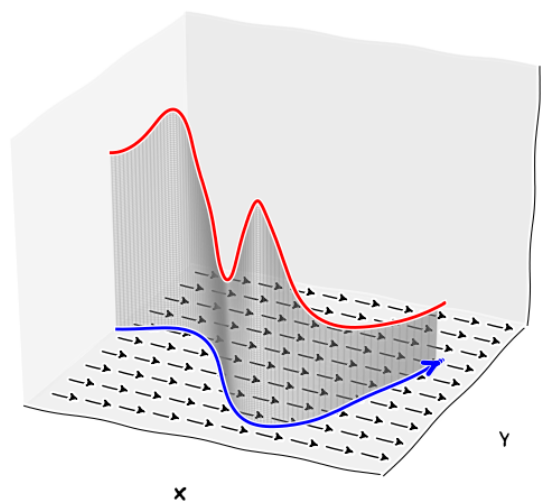
- Křivkový integrál počítáme převodem na Riemannův integrál. Je proto tedy dobré ovládat výpočet neurčitého a určitého Riemannova integrálu.

## Křivkový integrál

<https://youtu.be/n2roVUrXgcw>

Křivkový integrál je rozšíření Riemannova integrálu na případ, kdy množinou, přes kterou integrujeme, je místo úsečky obecnější křivka. Pro jednoduchost budeme uvažovat dvourozměrnou křivku v rovině  $x, y$ .

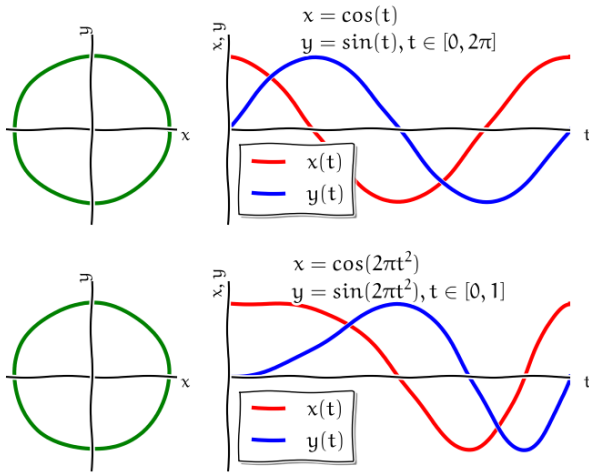
Rozeznáváme dva druhy křivkových integrálů. První z nich používáme při práci se skalárními veličinami. Příkladem je kvadratický moment. (Objekty s velkým kvadratickým momentem jsou při rotačních pohybech obdobou objektů velké hmotnosti při posuvných pohybech.) Druhý z křivkových integrálů používáme při práci ve vektorovém poli. Příkladem je výpočet práce vykonané po křivce nebo tok křivkou.



Obrázek 2: Křivkový integrál druhého druhu

# Parametrické rovnice křivky

<https://youtu.be/MRk4HRAWIA4>



Obrázek 3: Dvě různé parametrizace jednotkové kružnice

Nejprve představíme matematický aparát pro popis křivek. Rovinné křivky nejčastěji popisujeme vektorovou funkcí jedné proměnné  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Zpravidla s touto vektorovou funkcí pracujeme v komponentách, kdy každá její komponenta je dána skalární funkcí. Vektorově píšeme

$$\vec{r}(t) = [\varphi(t), \psi(t)] = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

a tato vektorová funkce se nazývá *parametrizace křivky C*. Často píšeme parametrické rovnice pro jednotlivé souřadnice ve tvaru

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

- Graf křivky dostaneme tak, že pro každé  $t$  z intervalu  $[\alpha, \beta]$  kreslíme ve 2D bod  $[\varphi(t), \psi(t)]$ .
- Pro danou křivku  $C$  v rovině  $xy$ , nejsou její parametrické rovnice dány jednoznačně. [Nakreslit online](#).
- Parametrizace kružnice, úsečky a grafu funkce jedné proměnné jsou v [cheatsheetu](#).

## Křivkový integrál prvního druhu

<https://youtu.be/ZRed88fgDkI>

Pokud uvažujeme rovný drát o lineární hustotě  $f$  a délce  $s$ , je hmotnost drátu rovna součinu

$$m = fs.$$

Pokud by drát nebyl homogenní, je nutné v tomto vzorci místo součinu použít Riemannův integrál

$$m = \int_a^b f ds.$$

Budeme ve zobecňování pokračovat. Uvažujme drát, který není ani homogenní, ani rovný. Nechť leží podél rovinné křivky  $C$  a nechť je jeho lineární hustota (specifická hmotnost) v bodě  $(x, y)$  dána funkcí  $f(x, y)$ . Zde již Riemannův integrál nepomůže. Celkovou hmotnost můžeme odhadnout následovně.

- Myšlenkově rozdělíme drát na malé kousíčky a v každém z nich odhadneme lineární hustotu konstantou. Můžeme například použít minimální hodnotu hustoty v tomto kousíčku pro dolní odhad hmotnosti.
- Vynásobením délky každého kousíčku a lineární hustotou obdržíme jeho hmotnost a sečtením přes všechny kousky dostaneme odhad pro hmotnost drátu. Tento odhad bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.
- Zjemňováním dělení se tyto odhady zpřesňují.

V limitním procesu můžeme nechat délku kousíčků konvergovat k nule. Poté dostáváme objekt, který se nazývá *křivkový integrál prvního druhu*, označuje

$$\int_C f ds$$

a fyzikálně vyjadřuje hmotnost drátu z výše uvažované úlohy. Pokud počáteční a koncový bod křivky  $C$  splývají, píšeme též

$$\oint_C f ds$$

a integrál nazýváme *integrálem po uzavřené křivce*.

## Převod na Riemannův integrál (rovinná křivka)

Mějme parametrické rovnice křivky  $C$  ve vektorovém tvaru

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},$$

kde  $t \in [\alpha, \beta]$ . Derivováním křivky dostaneme

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}.$$

Výpočtem délky vektoru (a formálním vynásobením výrazem  $dt$ ) dále

$$ds = |d\vec{r}(t)| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Tím se křivkový integrál prvního druhu funkce  $f(x, y)$  po křivce  $C$  transformuje na Riemannův integrál

$$\int_C f ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

## Převod na Riemannův integrál (prostorová křivka)

S křivkovým integrálem po křivce

$$C: \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \xi(t)\vec{k}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

ve trojrozměrném prostoru pracujeme podobně. Délkový element je

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2} dt$$

a integrál má tvar

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

## Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

### Vlastnosti křivkového integrálu prvního druhu

**Věta (nezávislost na zvolené parametrizaci).** Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky  $C$ . Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.

**Věta (linearita).** Pro funkce  $f$  a  $g$  a konstantu  $k$  platí následující.

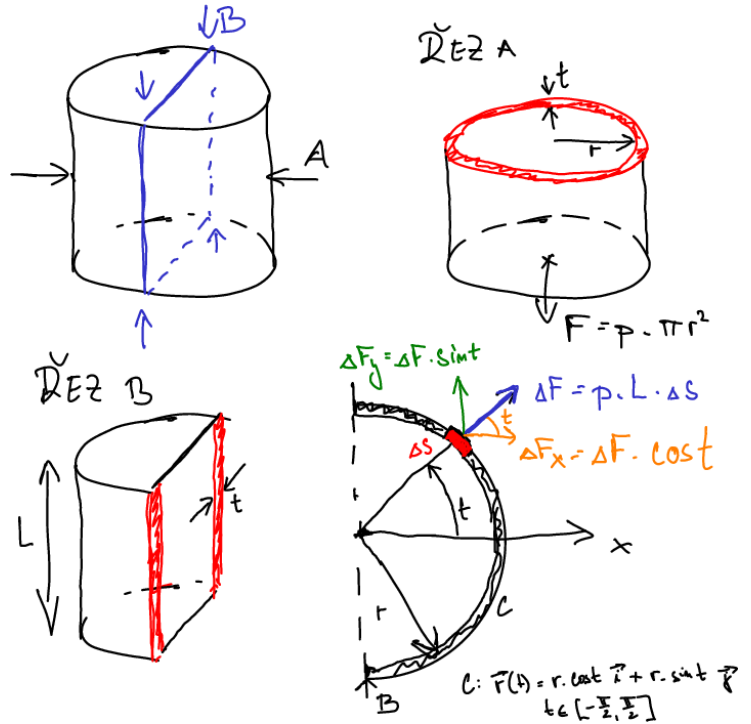
$$\begin{aligned} \int_C f + g ds &= \int_C f ds + \int_C g ds \\ \int_C kf ds &= k \int_C f ds \end{aligned}$$

**Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru).** Nechť je křivka  $C$  rozdělena na dvě křivky  $C_1$  a  $C_2$ , které jsou disjunktní (až na koncové body). Potom platí

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$$

## Proč trubky praskají podélně?

Ukážeme si aplikaci křivkového integrálu prvního druhu k tomu, abychom sečetli komponenty síly, snažící se roztrhnout natlakovanou válcovou nádobu. Tlaková síla je ve všech částech nádoby stejně velká. Protože je však kolmá ke stěně nádoby, mění se směr síly a tím i průměty síly do směru, ve kterém počítáme



Obrázek 4: Schema válcové nádoby pod tlakem a řezy, v nichž počítáme namáhání.

namáhání. Zjednodušíme si situaci tím, že budeme uvažovat průmět stěny do roviny podstavy, kdy se stěna redukuje na křivku.

Vypočteme síly, které se snaží roztrhnout válec napříč (viz řez A v obrázku) a podélně (viz řez B v obrázku). Tato dvě namáhání porovnáme. Ještě existuje namáhání radiálně od osy. Ale v tomto případě se tlaková síla rozkládá na celou plochu pláště válce a v tomto směru je namáhání minimální. Proto toto namáhání nemusíme uvažovat.

Uvažujme natlakovanou válcovou nádobu s tlakem  $p$ , výškou  $L$ , poloměrem podstavy  $r$  a stěnou o tloušťce  $t$ .

Výpočet namáhání v řezu A je snadný. Obsah řezu (vyšrafováno červeně) je  $2\pi r t$ . Na dno a víko působí síla  $F = p\pi r^2$  a v řezu A je tahové napětí

$$\sigma_p = \frac{F}{S} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r t} = \frac{pr}{2t}.$$

Nyní vypočteme namáhání, které se snaží roztrhnout válec podélně. K tomu musíme vypočítat sílu, která působí po obvodě válce, tj. která se snaží válec roztrhnout v řezu B. Obsah řezu (červeně vyznačeno) je  $2Lt$ . Nejtěžší bude najít celkovou sílu, která od sebe oddaluje dvě poloviny pláště. To je místo, kde zapojíme integrál.

Budeme se na úlohu dívat shora ze směru, kterým míří osa válce. Tím můžeme snížit dimenzionalitu úlohy. Plášť válce v tomto

pohledu vidíme jako kružnici a polovinu pláště jako půlkružnici. Tato půlkružnice má rovnici  $\vec{r}(t) = r \cos(t)\vec{i} + r \sin(t)\vec{j}$ , kde  $r$  je poloměr válce a  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  je úhel mezi spojnicí elementu v bodě  $(x, y)$  a mezi kladnou částí osy  $x$ . Kousek pláště válce odpovídající v průmětu úseku křivky délky  $\Delta s$  má obsah  $L\Delta s$ . Tlaková síla na tento kousek je součin tlaku a obsahu, tj.

$$\Delta F = pS = pL\Delta s.$$

Směr je kolmý k plášti válce a s vodorovnou osou proto síla svírá úhel  $t$ . Průmět této síly do vodorovného směru je

$$\Delta F_x = pL\Delta s \cos t$$

a tyto příspěvky musíme sečíst křivkovým integrálem přes celou křivku. Platí  $ds = r dt$ . Celková síla, která se snaží nádobu roztrhnout podélně je

$$\begin{aligned} F_x &= \int_C pL \cos t ds \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} pLr \cos t dt \\ &= prL \left[ \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= prL \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2prL. \end{aligned}$$

Povrch, na který tato síla působí, odpovídá dvěma podélným hranám (červeně na řezu B), tj. má obsah  $2Lt$  a napětí je tedy

$$\sigma_h = \frac{2pLr}{2Lt} = \frac{pr}{t} = 2\sigma_p.$$

Vidíme, že toto napětí je dvojnásobkem napětí v podélné ose.

Ještě je vhodné ověřit, že svislý průmět, tj.

$$\Delta F_y = pL\Delta s \sin t$$

k namáhání nepřispívá, protože

$$\begin{aligned} F_y &= \int_C pL \sin t ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

To však je možné očekávat i ze symetrie.

Pokud se chcete dozvědět o problematice více, nebo si prohlédnout obrázky válcových nádrží, které selhaly vlivem vysokého nebo nízkého tlaku, zkuste Google a heslo "hoop stress".

## Křivkový integrál druhého druhu

[https://youtu.be/GeJgtBHy\\_sM](https://youtu.be/GeJgtBHy_sM)

Pokud působíme na těleso silou  $F$  a přemísťujeme toto těleso ve směru působící síly po dráze délky  $s$ , **konáme práci**  $W = Fs$ . Pokud přemísťování neprobíhá ve směru působící síly a má-li síla směr  $\vec{F}$  a posunutí  $\vec{s}$ , je práce rovna skalárnímu součinu  $\vec{F} \cdot \vec{s}$ .

Předpokládejme, že na těleso působí (obecně nekonstantní) síla  $\vec{F}$  a těleso se pohybuje podél křivky  $C$  určené polohovým vektorem  $\vec{r}(t)$ . Pro výpočet práce můžeme použít trik obvyklý v integrálním počtu. Rozdělíme dráhu na malé kousíčky a v rámci těchto kousíčků považujeme  $\vec{F}$  i  $\Delta\vec{r}$  za konstantu. Potom můžeme odhadnout příspěvek každého kousíčku k celkové práci klasickým způsobem pomocí skalárního součinu a nakonec všechny příspěvky sečíst. Tato aproximace bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.

V limitě dostáváme veličinu, která se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* funkce  $\vec{F}$  po křivce  $C$ . Tento integrál zapisujeme

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}.$$

Je-li

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

zapisujeme někdy křivkový integrál ve složkách

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Protože při pohybu tělesa po křivce jedním směrem se práce koná a při pohybu opačným směrem spotřebovává, je nutné, aby křivka figurující v křivkovém integrálu druhého druhu byla orientovaná. Musíme tedy prohlásit jeden koncový bod za *počáteční* a druhý za *koncový*. Vždy budeme předpokládat, že křivka je *orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením*, tj. že počáteční bod křivky odpovídá hodnotě parametru  $t = \alpha$  a koncový bod odpovídá hodnotě parametru  $t = \beta$ .

## Převod na Riemannův integrál

Známe-li parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

křivky  $C$ , je možno křivkový integrál druhého druhu funkce

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

po křivce  $C$  zapsat následovně

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt.$$

Vektorově

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt.$$

## Vlastnosti křivkového integrálu druhého druhu

**Věta (souvislost křivkového integrálu a orientace křivky).** Změnou orientace křivky křivkový integrál druhého druhu mění znaménko.

**Věta (nezávislost na zvolené parametrizaci).** Křivkový integrál druhého druhu nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky  $C$ . Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.

Následující vlastnosti jsou stejné jako u křivkového integrálu prvního druhu.

**Věta (linearita a aditivita vzhledem k integračnímu oboru).** Křivkový integrál druhého druhu je lineární vzhledem k funkci a aditivní vzhledem k oboru integrace. Přesněji, pro funkce  $\vec{F}$  a  $\vec{G}$  a konstantu  $k$  platí následující.

$$\int_C \vec{F} + \vec{G} \, d\vec{r} = \int_C \vec{F} \, d\vec{r} + \int_C \vec{G} \, d\vec{r}$$

$$\int_C k\vec{F} \, d\vec{r} = k \int_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

Je-li křivka  $C$  rozdělena na dvě disjunktní (až na koncové body) křivky  $C_1$  a  $C_2$ , platí

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \, d\vec{r}.$$

## Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

manimp:integracni\_cesta|Křivkový integrál může a nemusí záviset na integrační cestě. Pokud na ní nezávisí, je možné v takovém poli nadefinovat potenciální energii.

- Integrál

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

vyjadřuje **práci** kterou vykoná síla  $\vec{F}$  při přemístění tělesa podél orientované křivky  $C$ .

- Je-li křivka  $C$  uzavřená, píšeme

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Fyzikálně se jedná o **práci** kterou vykoná síla  $\vec{F}$  při přemístění tělesa po uzavřené orientované křivce. Tato práce se též nazývá *cirkulace vektorového pole po orientované křivce*  $C$ . Pokud je možno v poli zavést potenciální energii a pokud tedy práce závisí jenom na počáteční a koncové poloze, musí tato práce být nulová. To je důsledkem věty kterou si uvedeme později.

- Při odvození křivkového integrálu druhého druhu jako vykonané práce hraje roli vlastně jenom ta složka silového pole, která při posunu ve směru křivky koná práci. Uvažujeme tedy jenom složku tečnou ke křivce. Pokud použijeme naopak pouze normálovou komponentu, dostaneme veličinu vyjadřující **tok vektorového pole orientovanou křivkou**  $C$ . Výsledný vzorec pro tok vektorového pole  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  křivkou  $C$  je

$$\int_C -Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

- Je-li množina  $\Omega$  “dostatečně pěkná” (např. souvislá, bez děr, s hladkou hranicí  $\partial\Omega$ , která se nikde neprotíná, detaily uvedeme později u Greenovy věty), potom každý z integrálů

$$\oint_{\partial\Omega} xdy \quad \text{a} \quad \oint_{\partial\Omega} ydx$$

udává (až na případné znaménko) obsah množiny  $\Omega$ . Na tomto principu fungují planimetry.

## Shrnutí: vlastnosti křivkových integrálů

- Oba křivkové integrály jsou **aditivní vzhledem k oboru integrace**. Je možno křivku rozdělit na konečný počet navzájem disjunktních částí, vypočítat integrál na každé části samostatně a výsledky sečíst.
- Křivkový integrál prvního ani druhého druhu **nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky**.
- Křivkový integrál prvního druhu **nezávisí na orientaci křivky**.
- Křivkový integrál druhého druhu **při změně orientace křivky mění znaménko**.

## Závěrečné informace

### Parametrizace úsečky

- Hledejme parametrické rovnice orientované úsečky  $AB$ , kde je dán počáteční bod  $A = [x_A, y_A]$  a koncový bod  $B = [x_B, y_B]$ .
- Leží-li bod  $X$  na úsečce  $AB$ , potom vektor  $\vec{AX}$  má stejný směr (včetně orientace) jako vektor  $\vec{AB}$  a nejvýše stejnou délku.
- Platí tedy  $\vec{AX} = t\vec{AB}$  pro nějaké  $t \in [0, 1]$ . Odsud potom dostáváme  $X - A = t(B - A)$  a  $X = A + t(B - A)$ .
- V souřadnicích zapsáno, parametrické rovnice úsečky jsou

$$\begin{aligned}x &= x_A + t(x_B - x_A) \\ y &= y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

- Pro úsečku v prostoru platí totéž, pouze přibývá třetí souřadnice.

### Z ptačí perspektivy

- Křivkový integrál druhého druhu souvisí s prací silového pole. Vzhledem ke zkušenostem z mechaniky by toto měla být cesta ke skalárnímu popisu vektorového pole. Protože v minulém týdnu jsme jednu takovou cestu otevřeli (pojem rotace a její nulovost či nenulovost), dá se očekávat, že obě problematiky budou souviset. Tuto souvislost si ukážeme později, za dva týdny (Greenova věta).
- Křivkový integrál druhého druhu může souviset s tokem vektorového pole křivkou a to je zase doména difuzní rovnice a divergence vektorového pole. Oba pojmy, křivkový integrál a divergence spolu opravdu souvisí a přesvědčí nás o tom později opět Greenova věta.