VÝPOČET INVERZNÍ TRANSFORMACE D POMOCÍ ALGORITMU ILT

Doc. Ing. Dalibor Biolek, CSc., VA Brno, Katedra elektrotechniky a elektroniky, K4

Ing. Viera Biolková, FEI VUT Brno, Ústav radioelektroniky

Transformace ***D*** *(© J. Hekrdla, ÚRE ČAV Praha) převádí analogový signál na posloupnost tak, že jsou na rozdíl od klasického vzorkování zachovány přesně relace mezi derivací analogového signálu a diferencí posloupnosti. Tak lze např. převést problém numerického řešení diferenciálních rovnic na jednodušší problém řešení rovnic diferenčních.*

Inverzní transformace ***D*** *je složitý problém, který je v současné době numericky řešen prostřednictvím konečné Laguerrovy řady. V příspěvku je popsána nová metoda výpočtu inverzní transformace* ***D****, která je založena na vzájemných souvislostech mezi transformacemi* ***D****,* ***Z*** *a Laplaceovou. Numerickou přesnost celého výpočtu zajišťuje algoritmus inverzní Laplaceovy transformace (ILT), který pracuje uspokojivě i v případě periodických nebo divergentních signálů.*

Úvod

V [1] je poprvé publikována nová integrální transformace, která převádí funkci reálné proměnné $x_a(t)$ na posloupnost $x(k)$ podle vztahu

$$x(k) = \int_0^\infty x_a(t) e^{-\frac{t}{T}} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^k}{k!} dt. \tag{1}$$

Zde k je nezáporné celé číslo a T je reálná konstanta. Vzorec (1) definuje tzv. **D** transformaci funkce $x_a(t)$. Zkráceně jej budeme zapisovat pomocí operátoru D:

$$x(k) = \mathrm{D}\{x_a(t)\}. \tag{2}$$

Konstanta T zastává funkci jakési vzorkovací periody. Na rozdíl od klasického vzorkování, diskrétní signál $x(k)$ získaný z analogového signálu $x_a(t)$ zachovává řadu jeho důležitých vlastností. Aplikujeme-li transformaci **D** na impulzní odezvu analogového systému, získáme impulzní odezvu ekvivalentního diskrétního systému a diferenční rovnici popisující jeho chování. V [1] je dokázáno, že tuto diferenční rovnici lze jednoznačně určit z diferenciální rovnice analogového systému po náhradě derivace diferencí. Tuto základní vlastnost transformace **D**, totiž že *obrazem derivace je diference obrazu*, lze vyjádřit vztahem

$$\begin{gathered} \mathrm{D}\left\{\frac{d}{dt} x_a(t)\right\} = \Delta_1 \mathrm{D}\{x_a\} = \Delta_1 x(k), \\ \Delta_1 x(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T}. \end{gathered} \tag{3}$$

Korespondence mezi diferenciální a diferenční rovnicí obou systémů je vzájemně jednoznačná, což není možné říci o korespondencích vznikajících použitím známých *p-z* transformací, kdy náhrada derivace diferencí znamená pouhou aproximaci. V praxi to znamená, že transformace **D** umožňuje zkoumat *přesně* chování analogových systémů prostřednictvím zkoumání diskrétních systémů, ekvivalentních ve smyslu transformace **D**. K tomu je ovšem potřebné zvládnout i zpětný mechanismus přechodu od diskrétního signálu na analogový, t.j. inverzní transformaci **D**.

V práci [2], která je celá věnována inverzní transformaci **D**, je ukázáno, že neexistuje jádro transformace $g(k,t)$, které by umožňovalo zapsat inverzní transformaci v běžném tvaru

$$x_a(t) = \mathrm{D}^{-1}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) g(k,t).$$

V [2] je proto problém inverze **D**-obrazu převeden na známý problém inverze jiné transformace, konkrétně transformace Laguerrovy.

Větší přesnosti i výpočetní rychlosti lze dosáhnout, využijeme-li souvislostí mezi transformacemi **D**, **z** a transformací Laplaceovou.

Inverze D-obrazu pomocí numerické inverze Laplaceova obrazu

Z definičního vztahu transformace **D** lze odvodit následující souvislosti mezi transformacemi **D**, **z** a Laplaceovou [1]:

$$x(k) = \mathrm{D}\{x_a(t)\} \Rightarrow \mathrm{Z}\{x(k)\} = \frac{1}{T}\mathrm{L}\{x_a(t)\}\Bigg|_{p=\frac{1-z^{-1}}{T}}. \quad (4)$$

Symboly D, Z a L jsou označeny operátory transformací **T**, **z** a Laplaceovy.

Z (4) je zřejmé, že problém výpočtu signálu $x_a(t)$ z posloupnosti $x(k)$ může být řešen v následujících krocích:

1. Nalezení z-obrazu posloupnosti $x(k)$.
2. Transformace z-obrazu na Laplaceův obraz signálu $x_a(t)$ substitucí $p = (1-z^{-1})/T$ podle (4).
3. Určení signálu $x_a(t)$ z jeho Laplaceova obrazu algoritmem numerické inverzní Laplaceovy transformace (ILT).

Nalezení z-obrazu posloupnosti $x(k)$

Realizace tohoto kroku závisí na typu řešeného problému. Vynechme triviální případ, kdy je znám algoritmus generace posloupnosti $x(k)$ ve formě diferenční rovnice. Častý je případ, kdy máme k dispozici pouze číselné hodnoty této posloupnosti. Pak je třeba určit racionální lomenou funkci operátoru z tak, aby se zadanou posloupností tvořila transformační pár transformace z. Jedná se o dnes již klasický problém identifikace diskrétního systému z impulsní nebo jiné odezvy, který je řešen např.v. [3] a [4].

Transformace z-obrazu na Laplaceův obraz

Je dán z-obraz výchozí posloupnosti $x(k)$ ve formě racionální lomené funkce

$$K\left(z^{-1}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i}}, m \le n. \tag{5}$$

Aplikací substituce $p = (1-z^{-1})/T$ a po vynásobení vzorkovací periodou dostaneme Laplaceův obraz hledaného analogového signálu (viz vzorec 4). Po zdlouhavém odvození lze psát výsledek v uzavřeném tvaru:

$$K(p)=T\frac{\sum_{k=0}^{m} c_k p^k}{\sum_{k=0}^{n} d_k p^k}, m \le n,$$

$$c_k = (-T)^k \sum_{l=k}^{m} a_l \binom{l}{k}, \tag{6}$$

$$d_k = (-T)^k \sum_{l=k}^{n} b_l \binom{l}{k}.$$

<u>Určení signálu $x_a(t)$ z jeho Laplaceova obrazu algoritmem numerické inverzní Laplaceovy transformace (ILT)</u>

Algoritmus přesné inverzní Laplaceovy transformace obrazu ve tvaru racionální lomené funkce jsme popsali v [6]. Uvažujme Laplaceův obraz $K(p)$ podle vzorce (6) a hledejme originál $x_a(t)$. Na funkci $K(p)$ je možno pohlížet jako na přenosovou funkci lineárního systému n-tého řádu se vstupem $w(t)$ a výstupem $y(t)$. Signál $x_a(t)$ pak lze určit jako impulsní odezvu systému, t.j. vynucenou odezvu na Diracův impuls $w(t) = \delta(t)$. Platí tedy

$$K(p)=\frac{\mathrm{L}\{y(t)\}}{\mathrm{L}\{w(t)\}}=\frac{Y(s)}{W(s)}=T\frac{\sum_{k=0}^{m} c_k p^k}{\sum_{k=0}^{n} d_k p^k}, m \le n. \tag{7}$$

Za předpokladu, že u přenosové funkce provedeme takové normování, že platí $d_n=1$, bude této přenosové funkci odpovídat stavový popis [6]

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s)=\mathbf{B}W(s)+\mathbf{x}(0), \tag{8}$$

kde $\mathbf{X}$(p) a W(p) jsou Laplaceovy obrazy stavového vektoru $\mathbf{x}(t)$ ($nx1$) a vstupního signálu $w(t)$. $\mathbf{x}(0)$ je stavový vektor počátečních podmínek v čase t=0 a $\mathbf{I}$ je jednotková matice rozměru (nxn). Stavová matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{B}$ mají následující strukturu:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} \end{vmatrix}, \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Přenosové funkci (6) dále odpovídá výstupní rovnice v časové oblasti

$$y(t) = T\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(c_i - c_n d_i)x_{i+1}(t) + c_n w(t)\right\}, \tag{9}$$

kde x_i, i=1,2,..,n jsou prvky stavového vektoru.

Hledání originálu k přenosové funkci je nyní rozděleno do dvou kroků: 1. Inverzní Laplaceova transformace maticové operátorové rovnice (8), 2. Výpočet hledané odezvy z výstupní rovnice (9). V [7] je ukázáno, že tento postup vede na velmi přesnou inverzní Laplaceovu transformaci i v případě, kdy originál osciluje nebo dokonce diverguje.

Inverze rovnice (8) do časové oblasti využívá tzv "resetting principle" [7]. Časovou osu rozdělíme na dílčí na sebe navazující intervaly. Nad prvním intervalem aplikujeme na rovnici (8) algoritmus inverzní Laplaceovy transformace, popsaný v [7], a to za předpokladu nulového výchozího stavu systému $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$ a vybuzení Diracovým impulzem o Laplaceově obrazu $W(p) = 1$. Interval výpočtu musí být zvolen dostatečně krátký, aby se neuplatnila chyba algoritmu inverzní Laplaceovy transformace, která roste pro dlouhé výpočetní časy. Na konci výpočtu se uloží do paměti stavový vektor, který se stává vektorem počátečních podmínek v dalším kroku. Nyní však řešíme pouze přirozenou odezvu systému na tyto počáteční podmínky při neuvažování vstupního buzení. Algoritmus probíhá tak dlouho, dokud není provedena Laplaceova inverze nad každým časovým intervalem. Vždy po výpočtu stavového vektoru se provede výpočet výstupní veličiny dosazením do rovnice (9).

Závěr

V příspěvku je naznačen způsob výpočtu analogového signálu, známe-li jeho **D**-obraz. Problém inverzní **D**-transformace je převeden na již dříve vyřešený problém numerické inverzní Laplaceovy transformace. Celý algoritmus je poměrně jednoduchý a výsledky jeho testování ukazují na vysokou přesnost stanovení originálu i v případě jeho oscilace nebo divergence.

Literatura

[1] HEKRDLA,J.: Transformace D - Analogové versus diskrétní systémy. Výzkumná zpráva, Z-1684/A, ÚRE ČSAV. Dílčí úkol SPZV, Praha, duben 1988, 38 s.

[2] HEKRDLA,J.: Inverzní transformace D. Výzkumná zpráva, Dílčí úkol státního plánu III-6-2/3, Praha, květen 1990, 48 s.

[3] CHUNG,C.G.-HAN,K.W.-YEH,H.H.: Simplification and Identification of Discrete Transfer Function via Step-response Matching. Journal of the Franklin Institute, Vol. 311, No.4, April 1981, pp.231-241.
[4] STEIGLITZ,K.-BRIDE,L.E.: A Technique for Identification of Linear Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-10, 1965, pp.461-464.
[5] VLACH,J.-SINGHAL,K.: Computer Methods for Circuit Analysis and Design. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.
[6] BIOLEK,D.: Numerical Multi-Step Laplace Inversion. Radioengineering, No.1, 1992, pp. 25-28.
[7] BIOLEK,D.:Time Domain Analysis of Linear Systems using Laplace Inversion. Radioengineering, 1994, v tisku.