Úvod do BI-ZMA

Tomáš Kalvoda[1]

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

Zimní semestr 2014/2015, 12. září 2014

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Obsah

Úvod

Tento text slouží k připomenutí základních pojmů a výsledků středoškolské matematiky, které by studenti předmětu Základy matematické analýzy (dále BI-ZMA) měli dobře znát a ovládat. Zde vykládaná látka se navíc částečně kryje s první úvodní přednáškou BI-ZMA.

Text je rozdělen do několika kapitol sdružujících tematicky podobnou problematiku. Z toho důvodu na sebe různé kapitoly a jejich části nemusí logicky navazovat. Účelem textu není systematický výklad učiva, ale jeho připomenutí, zdůraznění některých důležitých souvislostí, či vyložení látky z nového úhlu pohledu.

V první kapitole probereme základní pojmy týkající se matematického značení, množinových či číselných operací a symboliky. Druhá kapitola se zabývá významem a důležitostí důkazů. Třetí kapitola pak popisuje základní vlastnosti tzv. elementárních funkcí, zejména polynomů, racionálních lomených funkcí, trigonometrických funkcí, exponenciálních a logaritmických funkcí. Poslední kapitola shrnuje základní způsoby popisu geometrických rovinných útvarů pomocí analytické geometrie.

Pro čtenářovo pohodlí je text doplněn seznamem obrázků a tabulek, pomocí něhož lze snadno dohledat, na jaké stránce se daný obrázek či tabulka nachází. Dále je čtenáři k dispozici seznam použitých symbolů. Na samém konci dokumentu je pak uveden i relativně podrobný rejstřík pojmů a několik odkazů na použité zdroje.

Významné rovnice jsou číslovány v rámci kapitol. Rovnice (3.5) je pátou číslovanou rovnicí ve třetí kapitole. Stejný způsob číslování používáme i v případě obrázků a tabulek. V elektronické verzi dokumentu jsou tyto odkazy aktivní.

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Janu Starému, Ph.D., Ing. Danielovi Vašatovi a Mgr. Lence Novákové za připomínky a náměty. Pokud laskavý

čtenář v následujících řádcích odhalí chyby nebo narazí na nejasnosti, může vždy kontaktovat autora tohoto dokumentu[2].

[2] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Přehled použitého značení

Níže uvedené značení je kompatibilní s přednáškami a cvičeními BI-ZMA. V tabulce č. 1 jsou uvedena často používaná řecká písmena i s jejich přibližnou českou výslovností.

$=$ .... symbol rovnosti
$:=$ .... definiční rovnost, symbol nalevo je definován pravou stranou
$\neq$ .... symbol nerovnosti
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ .... množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ .... množina přirozených čísel včetně 0
$\mathbb{Z}$ .... množina celých čísel
$\mathbb{Q}$ .... množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel
$\mathbb{C}$ .... množina komplexních čísel
$\operatorname{Re} z$ .... reálná část komplexního čísla z
$\operatorname{Im} z$ .... imaginární část komplexního čísla z
(a, b) .... otevřený interval, uspořádaná dvojice nebo bod v rovině
$\langle a, b\rangle$ .... uzavřený interval
$A \subset B$ .... A je podmnožinou množiny B
$A \cup B$ .... sjednocení množin A a B
$A \cap B$ .... průnik množin A a B
$A \smallsetminus B$ .... doplněk množiny B do množiny A
$A \times B$ .... kartézský součin množin A a B
$|A|$ .... počet prvků množiny A
$x \in A$ .... x je prvkem množiny A
$x \notin A$ .... x není prvkem množiny A

$\wedge$ .... konjunkce
$\vee$ .... disjunkce
$\Rightarrow$ .... implikace
$\Leftrightarrow$ .... ekvivalence
$\forall$ .... obecný kvantifikátor
$\exists$ .... existenční kvantifikátor
D_f nebo $D(f)$ .... definiční obor funkce f
H_f nebo $H(f)$ .... obor hodnot funkce f
e .... Eulerovo číslo
π .... Ludolfovo číslo
i .... imaginární jednotka
sin .... funkce sinus
cos .... funkce kosinus
tg .... funkce tangens
cotg .... funkce kotangens
arcsin .... funkce arkus sinus
arccos .... funkce arkus kosinus
arctg .... funkce arkus tangens
$\log_a$ .... logaritmus o základu a, $0 < a \neq 1$
ln .... přirozený logaritmus, tj. $\log_{\mathrm{e}}$
log .... dekadický logaritmus, tj. $\log_{10}$
$\lfloor x \rfloor$ .... dolní celá část reálného čísla x
$\lceil x \rceil$ .... horní celá část reálného čísla x
$|x|$ .... absolutní hodnota čísla x
$n!$ .... faktoriál čísla n
$\binom{n}{k}$ .... kombinační číslo

Řecké písmeno	Kapitálka	Česká výslovnost	LaTeX
α		alfa	`\alpha`
β		beta	`\beta`
γ	Γ	gama	`\gamma`
δ	Δ	delta	`\delta`
ϵ		epsilon	`\epsilon`
ζ		zeta	`\zeta`
η		éta	`\eta`
θ	Θ	théta	`\theta`
κ		kapa	`\kappa`
λ	Λ	lambda	`\lambda`
μ		mí	`\mu`
ν		ný	`\nu`
ξ	Ξ	ksí	`\xi`
π	Π	pí	`\pi`
ρ		ró	`\rho`
σ	Σ	sigma	`\sigma`
τ		tau	`\tau`
φ	Φ	fí	`\varphi`
χ		chí	`\chi`
ψ	Ψ	psí	`\psi`
ω	Ω	omega	`\omega`

Tabulka 1: Často používaná písmena řecké abecedy.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Poznámka k matematické notaci

Každý programovací jazyk vyžaduje dodržování správného zápisu kódu neboli **syntaxe**. Pokud programátor zvyklosti daného jazyka nedodržuje, může být jeho kód pro překladač (případně interpretr) nesrozumitelný, a tedy nepoužitelný. Ačkoliv matematika nemá žádný pevně kodifikovaný způsob zápisu, je dobré dodržovat některé zvyklosti. V této podkapitole se proto pokusíme shrnout alespoň ty nejčastěji používané způsoby notace.

Rovnost a rovnice

Nejprve rozebereme význam veledůležitého symbolu rovnosti $=$. V programovacích jazycích i v matematickém zápisu hraje symbol $=$ zásadní roli. Bohužel v každé z těchto oblastí se používá trochu jiným způsobem, což může být velmi často matoucí.

V drtivé většině programovacích jazyků má symbol `=` význam tzv. **přiřazení**. Například řádek kódu

```
a = 2
```

často značí, že od této chvíle má jistá proměnná `a` hodnotu `2`. Podobně kód

```
a = a + 1
```

počítači říká, že nová hodnota `a` má být stará hodnota `a` zvětšená o `1`. Dále při programování často narazíme na symbol `==`, který testuje skutečnou rovnost dvou objektů. Tedy například kód

```
a == b
```

je vyhodnocen jako pravdivý (`true`), pokud se objekty `a` a `b` rovnají[1]. V opačném případě je vyhodnocen jako nepravdivý (`false`).

V matematickém zápisu je situace o něco komplikovanější. V podstatě lze říci, že velmi závisí na **kontextu**, v jakém se symbol $=$ používá. Základní rolí symbolu $=$ je vyjádření **rovnosti dvou známých** objektů. Tímto způsobem je formulováno tvrzení, např.

$$a = b, \tag{1.1}$$

které je buď pravdivé, nebo ne. Pro přirozené číslo 4 je rovnost $4 = 4$ pravdivá, ale pro čísla 4 a 3 je rovnost $4 = 3$ nepravdivá. V tomto významu má matematický symbol $=$ blízko k programátorskému `==`.

Symbol $=$ se dále používá k zápisu **rovnice**. Například v rovnici

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

označujeme pomocí x **neznámou**, tedy objekt, který je třeba určit tak, aby po jeho dosazení do rovnice (1.2) platila rovnost. O takovýchto instancích x pak říkáme, že jsou **řešením** rovnice (1.2). V našem případě rovnice (1.2) jsou řešením čísla 1 a -1, libovolná další reálná čísla řešením nejsou. A opravdu, po dosazení 1 či -1 do rovnice (1.2) skutečně dostáváme rovnost $0 = 0$, která platí. Naproti tomu například po dosazení 2 za x získáme rovnost $3 = 0$, která je jistě nepravdivá[2].

Symbol $=$ se dále používá k značení přiřazení ve smyslu programátorském. Tento autorův záměr většinou snadno odhalíme z kontextu. Podívejme se podrobně na následující textovou ukázku.

> Uvažujme obdélník o stranách délky $a = 3$ a $b = 4$. Označme délku úhlopříčky tohoto obdélníku symbolem c. Podle Pythagorovy věty platí rovnost $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, tedy v našem případě platí $c = 5$.

[1] Význam rovnosti může záviset na konkrétním objektu, na jeho typu.

[2] Poznamenejme, že příklady uvedené v tomto odstavci sloužily pouze k vysvětlení vlastnosti „být řešením rovnice“. Vůbec se nebavíme o tom, jak řešení efektivně hledat a jestli to vůbec pro zadanou rovnici lze. Více o tomto problému se dozvíte v BI-ZMA.

První dvě použití symbolu =, označená červeně, jsou ve smyslu přiřazení. Od tohoto momentu mají symboly a a b příslušné hodnoty. V programátorské hantýrce bychom řekli, že proměnné a a b byly inicializovány. Druhá věta odstavce sice symbol = neobsahuje, ale její význam je stejný, neboť přikládá jednoznačný význam symbolu c. Konečně v poslední větě se **tvrdí**, že modré rovnosti jsou pravdivé. Zde se už nejedná o přiřazení/definici/inicializaci, ale o platnost jistého vztahu mezi zavedenými objekty a, b a c.

Někdy se ke značení přiřazení používá symbolu $:=$. Zejména po tomto symbolu saháme, chceme-li čtenáře upozornit na zavedení nového objektu. Symbol na levé straně od $:=$ je pak **definován** výrazem na pravé straně od $:=$. Na tomto místě čtenáře upozorňujeme, že v CAS[3] *Mathematica* je význam probíraných symbolů ještě lehce odlišný. Podrobněji se této problematice věnujeme v kapitole 5.

Symboly

Shrňme nyní několik dalších notačních zvyklostí, které se snažíme v tomto dokumentu i v předmětu BI-ZMA dodržovat. Ačkoliv je volba označení používaných objektů zcela v režii autora, je dobré řídit se následujícími nepsanými pravidly.

- Neznámé v rovnicích se označují písmeny z konce latinské abecedy, typicky například x, y, či z.
- Známé – definované – objekty či parametry problému se označují písmeny ze začátku latinské abecedy, například a, b, c, atd. Pro číselné hodnoty se často používá řecké abecedy, tedy α, β, γ, ...
- Pro sčítací indexy (vizte níže podkapitolu 1.6) a celočíselné veličiny se často používá písmen i, j, k, ℓ, m nebo n. Pří používání písmena i je třeba dát pozor, aby nedošlo ke kolizi s imaginární jednotkou, označovanou též[4] i.

[3] *Computer Algebra System*, tedy počítačový algebraický systém.

[4] Proto se imaginární jednotku snažíme aspoň typograficky odlišit, porovnejte i a i. Pro úplnost ještě poznamenejme, že zejména ve fyzikální literatuře se imaginární jednotka často značí symbolem j, písmenko i je rezervováno pro okamžitou hodnotu proudu.

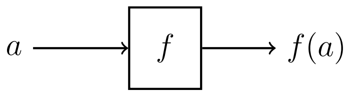
- Množiny se označují velkými písmeny $A, B, C, \dots$ Body v rovině (prostoru) se také většinou označují velkými písmeny latinské abecedy.

- K parametrizaci geometrických objektů (přímky, kružnice, plochy atp.) se používají písmena r, s, t.

Závorky

Dále připomeňme roli závorek v matematickém zápisu. Závorky používáme k označení argumentu funkcí (zobrazení), k upřesnění pořadí provádění operací či k značení intervalů a bodů. Bez použití závorek by řada algebraických výrazů nedávala smysl[5]. Ve zbytku této podkapitoly podrobněji probereme právě takové případy užití závorek.

Máme-li funkci f a bod a z definičního oboru funkce f, pak $f(a)$ označuje funkční hodnotu funkce f v bodě a. Toto použití závorek tedy přesně odpovídá tomu, se kterým se setkáte v programovacích jazycích. Byly-li f a a předem definovány, význam výrazu $f(a)$ je: zavolej funkci f s argumentem a a vrať výsledek. Hodnotu a lze chápat jako vstup a $f(a)$ jako výstup funkce f. Graficky si tuto situaci můžeme představovat jako na obrázku č. 1.1.



Obrázek 1.1: Funkce a funkční hodnota. Na vstupu je a a na výstupu $f(a)$.

Někdy se však mluví přímo o $f(x)$ jako o funkci. Tento úhel pohledu často používáme v případě, že chceme zároveň čtenáři sdělit, jak budeme označovat nezávisle proměnnou (zde x). V některých případech se závorky u argumentů funkcí vynechávají, zejména z důvodů zlepšení čitelnosti a zjednodušení zápisu. Např. často píšeme $\sin\alpha$ místo $\sin(\alpha)$ nebo $\ln 2$ místo $\ln(2)$. Je však třeba opatrnosti, nebo může dojít k nedorozumění. Například výraz

$$\ln 2 \cdot 3 \tag{1.3}$$

[5]Nebyla jednoznačně interpretovatelná. Uvažte například výraz $2 \cdot 3 + 5$. Bez zavedení konvenční priority operací nelze rozhodnout, zda-li se jedná o $2 \cdot (3 + 5)$ nebo $(2 \cdot 3) + 5$.

by mohl být interpretován jako

$$\ln(2 \cdot 3) \quad \text{nebo} \quad \ln(2) \cdot 3.$$

Tato čísla samozřejmě **nejsou** stejná. Pomocí kapesního kalkulátoru se snadno přesvědčíme, že přibližně platí následující rovnosti

$$\begin{aligned} \ln(2 \cdot 3) &= \ln(6) \approx 1.791\,759\,469\,23, \\ \ln(2) \cdot 3 &\approx 2.079\,441\,541\,68. \end{aligned}$$

Zvláště při „ručním“ počítání[6] mohou tyto nepřesnosti vést ke katastrofálním chybám. Proto je lepší multiplikativní faktory psát před funkcemi, výraz $3 \ln 2$ už má jednoznačný význam, na rozdíl od výrazu uvedeném v (1.3).

Upozorněme ještě čtenáře, že pro některé funkce se používá speciální notace nevyžadující závorky. Například druhá odmocnina se značí $\sqrt{x}$, třetí odmocnina $\sqrt[3]{x}$, nebo absolutní hodnota $|x|$. Čtenáři je také jistě známa dolní (resp. horní) celá část reálného čísla x označovaná symbolem $\lfloor x \rfloor$ (resp. $\lceil x \rceil$).

Závorky se dále používají k upřesnění pořadí operací. Například výraz

$$\big(a + (c/2)\big) \cdot 3$$

je třeba číst následovně: nejprve vyděl c dvěma a k výsledku přičti a, takto získané číslo vynásob třemi. Bez závorek,

$$a + c/2 \cdot 3,$$

by (bez zavedení **konvencí**[7] přednosti operací) nebylo jasné, jak přesně tento výraz vyhodnotit.

Na závěr této podkapitoly ještě zmiňme horní a dolní indexy. Horní index se většinou používá k označení mocnin, například

$$3^5, \quad a^n, \quad e^2 \quad \text{atp.}$$

Někdy se horní index používá i k označení složek vektorů nebo třeba operace komplexního sdružení čísla a. Často se lze setkat s a^* místo $\overline{a}$.

[6] Například v písemce.

[7] Ano, přednost násobení před sčítáním je pouze konvenční a umožňuje nám zpřehlednit řadu algebraických výrazů.

Dolní index slouží k označení buď pořadí prvku v posloupnosti, nebo obecněji závislosti dané veličiny na celočíselném parametru. Tento zápis má blízko k indexování prvků pole, programátorské `a[2]` má prakticky stejný význam jako naše a_2.

1.2 Množiny a operace s nimi

Pod pojmem **množiny** rozumíme sadu objektů zadanou výčtem, nebo pomocí vlastnosti, kterou musí prvky množiny splňovat[8]. Pokud je počet prvků malý, nebo je lze jednoduše vyjmenovat, píšeme například

$$A = \{\pi, \mathrm{e}\}, \quad B = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Množina A obsahuje právě dva prvky (čísla π a e). Množina B obsahuje všechna přirozená čísla. Pokud x patří do množiny A, píšeme $x \in A$, v opačném případě x nepatří do množiny A a pak píšeme $x \notin A$. **Prázdnou množinu**, tj. množinu neobsahující žádné prvky, označujeme symbolem $\emptyset$. Je-li N množina a $A(x)$ výrok o x z N pak množina

$$C = \{x \in N \mid A(x)\}$$

je tvořena všemi $x \in N$, pro které je výrok[9] $A(x)$ pravdivý. Například množinu všech sudých celých čísel můžeme popsat následovně

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ je dělitelné dvěma}\}.$$

Množiny můžeme porovnávat podle toho, jaké obsahují prvky. O množině A řekneme, že je **podmnožinou** množiny B, právě když každý prvek množiny A patří také do množiny B. V tom případě pak píšeme $A \subset B$, nebo $B \supset A$. Pokud množiny nemají žádné společné prvky, tj. když $A \cap B = \emptyset$, pak o nich

[8] Tato naivní definice může obecně vést k logickým paradoxům, nejznámějším je asi Russelův paradox. Uvažujeme-li pouze „malé“ podmnožiny číselných množin, k žádným problémům nedojde. Problematikou definice pojmu množiny se podrobně zabývá matematická Teorie množin, například Zermelo-Fraenkelova teorie pocházející z počátku dvacátého století.

[9] Zde $A(x)$ označuje tvrzení, jehož pravdivost či nepravdivost závisí na parametru x. Jako příklad můžeme uvést $N = \mathbb{Z}$ a $A(x)$ nechť je tvrzení „x je sudé číslo“. Potom $A(2)$ je pravda ale $A(3)$ nikoliv.

mluvíme jako o **disjunktních** množinách. O dvou množinách A a B říkáme, že jsou **jsou si rovny** (nebo jsou **stejné**), právě když $A \subset B$ a současně $B \subset A$. Rovnost množin přirozeně zapisujeme jako $A = B$.

Připomeňme základní operace s množinami. Máme-li dvě množiny A a B, pak jejich **průnik** definujeme jako množinu všech prvků, které patří zároveň do A i do B. Průnik dvou množin značíme symbolem $A \cap B$. Symbolicky tedy tuto množinu můžeme popsat jako

$$A \cap B := \Big\{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\Big\}.$$

Sjednocení dvou množin A a B je tvořeno všemi prvky, které patří do A nebo[10] do B. Značíme ho symbolem $A \cup B$ a lze tedy psát

$$A \cup B := \Big\{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\Big\}.$$

Tyto dvě operace lze přirozeně zobecnit na libovolný počet množin. Nechť I je libovolná indexová množina a pro každé $i \in I$ je A_i jistá množina. Potom klademe

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\},$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{existuje } i \in I \text{ tak, že } x \in A_i\}.$$

Další důležitou množinovou operací je **doplněk** (někdy též nazývaný **rozdíl dvou množin**). Doplněk množiny B do množiny A je tvořen všemi prvky množiny A, které nepatří do B. Značíme ho $A \setminus B$ a platí

$$A \setminus B := \Big\{x \,\Big|\, x \in A \text{ a } x \notin B\Big\}.$$

Pokud se bavíme o podmnožině A jisté pevně zvolené množiny X, pak množinu $A^c := X \setminus A$ stručně nazýváme doplňkem množiny A.

Všimněte si, že zatímco pro libovolné dvě množiny A a B platí

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{a} \quad A \cap B = B \cap A,$$

pro rozdíl dvou množin tato vlastnost (komutativita) neplatí. Tedy obecně je množina $A \setminus B$ různá od množiny $B \setminus A$.

[10] Toto „nebo“ není exkluzivní.

Další základní operací na množinách je **kartézský součin** množin. Pro libovolné dvě množiny A a B je jejich kartézský součin, označujeme ho $A \times B$, tvořen všemi uspořádanými dvojicemi[11] prvků z A a B, tj. dvojicemi (a, b) kde $a \in A$ a $b \in B$. O a (resp. b) mluvíme jako o první (resp. druhé) složce uspořádané dvojice (a, b). Přesněji

$$A \times B := \Big\{(a, b) \,\Big|\, a \in A \text{ a } b \in B\Big\}.$$

Kartézský součin lze zavést i pro více množin. Například pod $A \times B \times C$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic prvků z A, B a C.

Otázka 1: Pokud jsou A a B množiny s konečným počtem prvků (ozn. $|A|$ a $|B|$), kolik prvků má množina $A \times B$?

Otázka 2: Dokažte **de Morganovy** zákony pro průnik a sjednocení, tedy rovnosti

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{a} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

platné pro $A, B \subset X$.

1.3 Číselné množiny

Množinu **přirozených čísel**[12] označujeme symbolem $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Všimněme si, že množina přirozených čísel je uzavřená vůči násobení a sčítání. Přesněji, násobením a sčítáním dvou přirozených čísel dostaneme opět přirozené číslo:

$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a + b \in \mathbb{N},$$
$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Přirozená čísla abstrahují „počet“ objektů. Na následujícím obrázku č. 1.2 jsou uvedeny tři sady různých geometrických útvarů. Příklady (a), (b) i (c) mají tu

[11] Je nutné rozlišovat mezi uspořádanou dvojicí (a, b) a množinou $\{a, b\}$. Množiny $\{a, b\}$ a $\{b, a\}$ jsou stejné, ale uspořádané dvojice (a, b) a (b, a) obecně ne (pro různé a a b). Uspořádaná dvojice na rozdíl od množiny ještě nese informaci o pořadí svých složek.

[12] Množinu přirozených čísel s nulou značíme $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

vlastnost, že vždy obsahují tři útvary. Tento postřeh vyjadřujeme konstatováním, že útvary jsou tři a značíme arabskou[13] číslicí 3.

(a) (b) (c)

Obrázek 1.2: Skupiny symbolů (a), (b) a (c) mají společnou vlastnost, kterou vyjadřujeme symbolem 3.

Množina $\mathbb{N}$ však není uzavřená vůči odečítání dvou přirozených čísel. V případě sčítání můžeme tento fakt také formulovat tak, že rovnice

$$a = b + x \tag{1.4}$$

pro zadaná přirozená $a, b \in \mathbb{N}$ nemusí mít přirozené řešení x. Uvažme třeba $a = 4$ a $b = 5$. Jinak řečeno, pomocí přirozených čísel nemůžeme vyjádřit koncept „dluhu“ a „prázdného počtu“.

K odstranění těchto nedostatků musíme k přirozeným číslům přidat nulu a záporná čísla. Dostáváme tak množinu **celých čísel**,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

V této množině už můžeme násobit, sčítat i odčítat, ale výsledek operace dělení už tuto množinu opustí. Tedy řešení rovnice

$$a = b \cdot x \tag{1.5}$$

pro zadaná celočíselná a a b nemusí být celočíselné. Tuto operaci opět můžeme motivovat potřebou rozdělovat jeden objekt na několik částí (např. jednu pizzu na osm kousků, dostáváme osminy pizzy). Musíme přejít k racionálním číslům.

[13] K docenění pozičního zápisu čísel pomocí arabských cifer se zkuste zamyslet nad problémem provádění algebraických operací (sčítání, násobení, odčítání) pomocí římského číselného systému. Není to nic jednoduchého, že? Arabské číslice v Evropě propagoval Leonardo z Pisy (známý pod jménem Fibonacci) na začátku třináctého století. V roce 1202 vydal spis *Liber abbaci* („Kniha o počítání“), který významně napomohl rozvoji obchodu a vědy. Další zajímavosti o této „první výpočetní revoluci“ se může zvídavý čtenář dozvědět v poutavé knížce [3].

Množina **racionálních čísel** je tvořena řešeními rovnice (1.5) s nenulovým b, která zapisujeme jako zlomky

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \right\}. \tag{1.6}$$

Operace sčítání a násobení je na zlomcích definována pomocí operací v $\mathbb{Z}$ následovně

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps + qr}{qs}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}, \quad \text{kde} \quad \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}.$$

Na pravých stranách těchto výrazů vždy můžeme zkrátit společné faktory a skutečně tak dostáváme prvek množiny (1.6). Celá čísla přirozeně patří do množiny racionálních čísel, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, jakožto zlomky $\frac{p}{1}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, přičemž algebraické operace jsou zachovány.

Racionální čísla $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ splňují veledůležité vztahy

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \tag{1.7}$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{1.8}$$

platné pro libovolná racionální čísla a, b, c. Rovnosti (1.7) se nazývají **asociativní zákony** pro sčítání, resp. násobení. Pouze díky jejich platnosti můžeme u opakovaného sčítání a násobení přestat psát závorky. Celkový výsledek totiž na uzávorkování nezáleží[14]. Rovnost (1.8) se nazývá **distributivní zákon**. Čtenář je s ním jistě intimně obeznámen, neboť díky němu lze provádět operaci „vytýkání před závorku“. Abychom nemuseli na pravé straně (1.8) psát závorky, zavádí se konvenční přednost operace násobení před sčítáním. Význačným prvkem množiny racionálních čísel je číslo 0, které splňuje

$$0 + a = a + 0 = a$$

[14]Např. $(4+2)+1 = 4+(2+1) = 4+2+1 = 7$. Uvědomme si, že toto není automaticky splněno pro libovolnou binární operaci. Uvážíme-li např. operaci dělení $\div$, $a \div b := \frac{a}{b}$, pak

$$\frac{1}{4} = (2 \div 4) \div 2 \neq 2 \div (4 \div 2) = 1.$$

pro libovolné racionální číslo a. Ke každému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako $-a$ splňující

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Podobný význam jako číslo 0 pro operaci sčítání má číslo 1 pro operaci násobení, pro každé racionální číslo a platí

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Konečně ke každému nenulovému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako a^{-1} splňující

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Předchozí odstavec lze shrnout do krátkého konstatování, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ tvoří **těleso**. Studiem[15] číselných těles se zabývá oblast matematiky nazývaná obecná algebra, s níž se čtenář poprvé seznámí v letním semestru prvního ročníku v předmětu BI-LIN. Konečná[16] tělesa nacházejí široké uplatnění v moderních šifrovacích algoritmech a počítačové bezpečnosti vůbec.

Na začátku této sekce jsme si ukázali, že přirozených a celých čísel „není dost[17]“. K uspokojení našich požadavků bylo vždy nutné další čísla dodat. Podobná situace nastává i v případě racionálních čísel. Tato množina je sice již uzavřená vůči binárním operacím sčítání a násobení, ale tentokrát narazíme na potíže při analýze následujícího geometrického problému. Uvažujme čtverec o straně délky 1 (racionální číslo), vizte obrázek č. 1.3. Ptáme se, jaká je délka jeho úhlopříčky. Tu lze zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka. Na obrázku č. 1.3 je tato označena písmenem x. Podle Pythagorovy věty platí

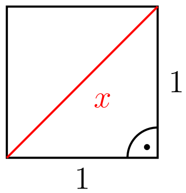
$$1^2 + 1^2 = x^2. \tag{1.9}$$

Tedy $x^2 = 2$. Takovéto kladné číslo nazýváme odmocninou ze dvou a značíme $x = \sqrt{2}$. Lze snadno ukázat, že toto číslo **není** racionální. Viz větu 8. Stojíme

[15] Mimo jiné.

[16] Mající konečný počet prvků.

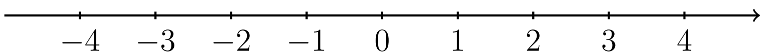
[17] Poznamenejme, že nyní se nebavíme o problematice reprezentace čísel v PC, nebo jiném hardware. Už ani racionální čísla nelze v celé obecnosti reprezentovat pomocí PC.



Obrázek 1.3: Čtverec o straně délky 1 a jeho úhlopříčka o straně délky x.

tedy před závažným problémem. Na obrázku č. 1.3 nelze délku červené úsečky vyjádřit racionálním číslem!

Mezi iracionální čísla dále patří například Ludolfovo[18] číslo (π) či Eulerova[19] konstanta (e). V jistém smyslu je iracionálních čísel podstatně více než racionálních, lze říci, že „typické“ reálné číslo je iracionální. Více si o vztahu těchto dvou množin povíme v BI-ZMA. Čtenáři je jistě známo, že čísla si můžeme představovat jako body ležící na přímce, tzv. číselné ose. Na přímce je zvolen význačný bod odpovídající nule a číslo a vynášíme na osu ve vzdálenosti $|a|$ od bodu 0. Kladná čísla umisťujeme napravo a záporná čísla nalevo od 0. Pokud bychom na osu vynášeli pouze racionální čísla, výsledná přímka by byla



Obrázek 1.4: Číselná osa.

„děravá“. Například ve vzdálenosti $\sqrt{2}$ (napravo i nalevo) od bodu 0 by nebyl zanesen žádný bod. K zaplnění číselné osy je potřeba uvažovat i iracionální čísla. Přesnou formulací požadavku, aby reálná osa nebyla „děravá“ je, aby reálná čísla splňovala „axiom úplnosti“. Podrobněji se touto problematikou budeme zabývat v jedné z prvních přednášek BI-ZMA.

Poznamenejme pro zajímavost, že rozhodnout o racionálnosti či iracionálnosti čísla nemusí být jednoduché. Dokonce existují čísla, o kterých se doposud **neví**, do které množiny patří. Příkladem může být Euler-Mascheroniho kon-

[18]Ludolph van Ceulen, 1540 – 1610, matematik nizozemského původu, zasvětil svůj život výpočtu čísla π na 35 desetinných míst, která jsou i vyryta na jeho náhrobku.

[19]Leonhard Euler, 1707 – 1783, švýcarský matematik a fyzik.

stanta definovaná vztahem[20]

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Více informací o tomto konkrétním problému lze nalézt v [4].

Mohlo by se zdát, že po doplnění racionálních čísel iracionálními čísly již není nutné žádná další čísla přidávat. Všimněme si, že geometrickou úvahu z minulého odstavce lze prostě redukovat na požadavek (vizte rovnici (1.9)), aby rovnice

$$x^2 - 2 = 0$$

měla v dané číselné množině řešení (zde $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Ovšem už hned jednoduchá obměna této rovnice,

$$x^2 + 1 = 0, \tag{1.10}$$

nemá reálné řešení[21]. Tuto rovnici lze vyřešit zavedením imaginární jednotky (značíme i), jež splňuje rovnost $\mathrm{i}^2 = -1$ a řeší proto i rovnici (1.10). Číslo i nazýváme **komplexní jednotkou**. Získáváme tak **komplexní čísla**,

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

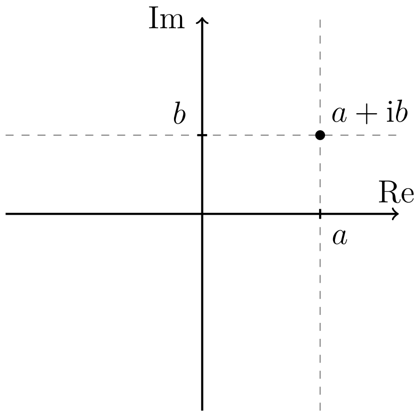
Je-li $z = a + \mathrm{i}b$ komplexní číslo, pak reálné číslo a nazýváme **reálnou částí** z a reálné číslo b **imaginární částí** z. Dvě komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné a imaginární části. Reálnou část komplexního čísla z značíme $\mathrm{Re}\, z$ a imaginární část značíme $\mathrm{Im}\, z$.

Algebraické operace na množině $\mathbb{C}$ jsou zavedeny následovně

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) &:= (a + c) + \mathrm{i}(b + d), \\ (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) &:= (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc), \quad a + \mathrm{i}b,\ c + \mathrm{i}d \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Všimněte si, že pokud $d = b = 0$ pak součet $a+c$ a součin $a \cdot c$ má stejný význam jako v reálných číslech. Množina $\mathbb{C}$ s takto zavedenými operacemi opět tvoří těleso.

Komplexní čísla si lze představit například jako body v **komplexní rovině**. Vodorovnou osu nazýváme **reálnou osou** a svislou osu nazýváme **imaginární**



Obrázek 1.5: Komplexní rovina.

osou. Komplexnímu číslu $a + ib$ pak odpovídá bod o souřadnicích (a, b). Viz obrázek č. 1.5.

Zavádí se **absolutní hodnota komplexního čísla**

$$|a + \mathrm{i}b| := \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

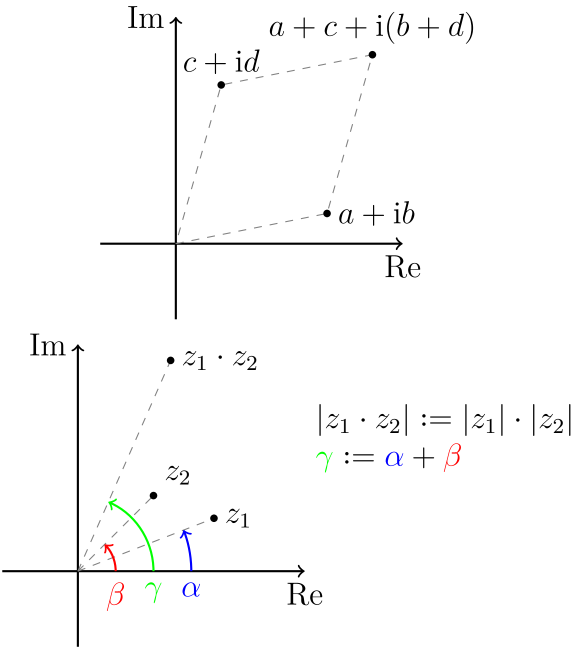
V komplexní rovině si lze absolutní hodnotu komplexního čísla $a+ib$ představit jako délku úsečky spojující body 0 a $a + b\mathrm{i}$. Číslo $a - ib$ nazýváme **komplexně sdruženým číslem** k číslu $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Komplexně sdružené číslo tak získáme zrcadlením vůči reálné ose.

Operaci sčítání komplexních čísel si lze představit jako sčítání vektorů (sčítá se „po složkách“). Operaci násobení komplexních čísel lze v komplexní rovině znázornit jako rotaci a škálování. To není zcela zřejmé tvrzení, lze ho však odvodit z definice operace násobení (1.11). Pro ilustraci uvádíme obrázek č. 1.6. Speciálně násobení imaginární jednotkou i si lze v komplexní rovině představovat jako rotaci o úhel $\frac{\pi}{2}$ vzhledem k počátku souřadného systému, který odpovídá číslu 0.

Důvod k zavedení komplexních čísel se může zdát uměle vykonstruovaný. Například se hned nabízí otázka, zda v případě, kdy budeme zkoumat řešení

[20] O limitě se dozvíte podrobněji v BI-ZMA.

[21] To by mělo být zřejmé. Pro libovolné reálné číslo x je jeho kvadrát x^2 nezáporný a proto je výraz $x^2 + 1$ vždy větší nebo roven jedné a nikdy nemůže být nulový.



Obrázek 1.6: Geometrická interpretace operace sčítání a násobení komplexních čísel.

jiné polynomiální rovnice než (1.10), nebudeme potřebovat další komplexní jednotku. Odpověď na tuto otázku podal Gauss[22] ve své slavné **Fundamentální větě algebry**: každý polynom s komplexními koeficienty stupně n má n komplexních kořenů[23]. K řešení polynomiálních rovnic tedy naprosto vystačíme s komplexními čísly.

Řada matematických metod aplikovaných v praxi je ve své podstatě komplexní. Například Fourierova transformace (resp. *Fast Fourier Transform*, FFT), využívaná k analýze signálu, je bez aparátu komplexních čísel jen nešikovně popsatelná. Bez komplexních čísel by šlo jen velmi těžko formulovat kvantovou fyziku, teorii, na které stojí řada moderních technologií a jež možná v budoucnu kompletně změní otázku bezpečnosti IT.

Na závěr této kapitolky poznamenejme, že komplexní čísla lze ještě dále

[22] Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777 – 23. února 1855) byl německý matematik.
[23] Kořeny počítáme i s jejich násobnostmi.

rozšířit na (nekomutativní) **těleso kvaternionů**. Zde neoperujeme jen s jednou komplexní jednotkou, ale hned se třemi (i, j a k). Celkem tedy dostáváme čtyři jednotky (jedna reálná 1 a tři „komplexní“), odtud název. Vztahy mezi těmito jednotkami jsou definovány pomocí rovnic

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \quad \text{a} \quad \mathrm{ijk} = -1. \tag{1.12}$$

Množinu

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

s operacemi definovanými podobně jako v komplexních číslech, zavedl Hamilton[24]. Proč se tu o kvaternionech zmiňujeme? Pomocí kvaternionů lze totiž velmi výhodně (ve výpočetním slova smyslu) počítat například rotace vektorů v třírozměrném prostoru. Využívá jich řada algoritmů implementovaných v grafických kartách[25].

Otázka 3: Vypočtěte reálné a imaginární části následujících komplexních čísel.

a) $z = (4 + 3\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})$,   b) $z = (2 - \mathrm{i})^2$,

c) $z = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$,   d) $z = \dfrac{1}{2 + \mathrm{i}}$.

1.4 Význačné podmnožiny reálných čísel

V této kapitole připomeneme definici intervalů a uvedeme několik pojmů popisujících vlastnosti podmnožin reálných čísel.

[24]Sir William Rowan Hamilton (4. srpna 1805 – 2. září 1865) byl irský fyzik a matematik. Poté, co objevil definiční vztahy (1.12), vyryl je do mostu v Dublinu.

[25]Pro zajímavost vizte např. [2].

Intervaly představují důležité podmnožiny množiny reálných čísel. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, zavádíme značení:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b \right\} && \text{otevřený interval,}\\
\langle a,b\rangle &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\} && \text{uzavřený interval,}\\
\langle a,b) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x < b \right\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,b\rangle &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \leq b \right\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,+\infty) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \right\} && \text{neomezený interval.}
\end{aligned}$$

Podobně zavádíme neomezené intervaly $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ a $(-\infty, a\rangle$.

Dále pro podmnožiny reálné osy připomeneme následující, skoro až očividné, názvosloví. Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou shora** (resp. **zdola**), právě když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in A$ platí $x < K$ (resp. $x > K$). Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když je omezená shora i zdola zároveň.

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ nazýváme **maximem množiny** A, právě když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $x \leq a$. Číslo $b \in A$ nazýváme **minimem množiny** A, právě když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $x \geq b$. Maximum (resp. minimum) množiny A také značíme $\max A$ (resp. $\min A$).

Takto definované maximum (případně minimum) množiny nemusí vždy existovat. Například interval $(1, 2)$ nemá ani minimum, ani maximum. Čísla 1 ani 2 skutečně nepatří do množiny $(1, 2)$. Tento problém lze odstranit zavedením infima a suprema množiny, která představují zobecnění pojmů minimum a maximum. Podrobněji se jim budeme věnovat v přednáškách BI-ZMA.

Otázka 4: Která z následujících množin je shora omezená, zdola omezená či omezená?

a) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

b) množina všech prvočísel,

c) množina všech řešení nerovnice $x^2 - (\pi + 1)x + \pi > 0$,

d) $\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Otázka 5: Určete maxima a minima následujících množin, pokud existují.

a) $A = \{2, -1, 3\}$,

b) $B = (4, a\rangle$, kde $a \in \mathbb{R}$ je pevně zvolený parametr,

c) $C = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

d) $D = \{2k - 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$,

e) $E = \{2k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1.5 Symbolika matematické logiky

Matematická tvrzení je výhodné zapisovat ve zkrácené formě pomocí symboliky predikátové logiky. Podrobně bude tato oblast matematiky probrána v předmětu Matematická logika (BI-MLO). Díky využití tohoto přístupu vynikne logická struktura tvrzení, která by jinak mohla čtenáři zůstat skryta za větami přirozeného jazyka. Na tomto místě pouze stručně shrneme základy, které jsou čtenáři již jistě známy.

Výrok je tvrzení, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je či není pravdivé. Výroky značíme velkými písmeny A, B, $C, \ldots$ Často narazíme na výroky závisející na parametru x, tzv. predikáty, které značíme dle očekávání $A(x)$. Pro různá x tak dostáváme různé výroky $A(x)$. Uveďme alespoň dva příklady.

- Nechť x probíhá množinu všech obyvatel planety Země. Symbolem $A(x)$ označme výrok „x je muž“. Označuje-li a autora tohoto textu, pak je výrok $A(a)$ pravdivý.

- Nechť x probíhá množinu všech celých čísel. Symbolem $B(x)$ označme výrok „x je sudé číslo“. Pravdivými výroky pak jsou například $B(2)$, či $B(4)$, ale $B(99)$ pravdivý není.

Připomeňme čtyři základní **výrokové spojky** (operace), pomocí nichž z daných výroků sestavujeme složitější. K dispozici máme:

- $\neg A$, **negace**, A není pravdivé.

- $A \wedge B$, **konjunkce**, platí A a zároveň B.
- $A \vee B$, **disjunkce**, platí A nebo B.
- $A \Rightarrow B$, **implikace**, A implikuje B, případně z A plyne B.
- $A \Leftrightarrow B$, **ekvivalence**, A je ekvivalentní s B, případně A platí právě tehdy když B.

V závislosti na pravdivostním ohodnocení prvotních výroků A a B jsou pravdivostní hodnoty výrokových spojek dány následující tabulkou č. 1.1.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabulka 1.1: Pravdivostní hodnoty výrokových spojek.

Abychom mohli kvantifikovat proměnné vyskytující se ve výrokových formulích, zavádíme tři **kvantifikátory**:

- $\forall$, **obecný kvantifikátor**, pro všechna, pro každé.
- $\exists$, **existenční kvantifikátor**, existuje, pro nějaké.
- $\exists!$, $\exists_1$, existuje právě jedno.

Pokud proměnná x probíhá všechna reálná čísla, píšeme $\forall x \in \mathbb{R}$. Podobně pokud se tvrdí existence celého čísla k, píšeme $\exists k \in \mathbb{Z}$. Pro větší přehlednost kvantifikátory v zápisu formule oddělujeme závorkami. Předveďme si názornou ukázku.

Příklad 1: Přirozené číslo p je prvočíslo, právě když každé přirozené k dělící p je rovno 1 nebo p. Zapsána pomocí kvantifikátorů a výrokových spojek tato formule zní

$$(\forall k \in \mathbb{N})\Big(k|p \;\Rightarrow\; (k = 1 \;\vee\; k = p)\Big),$$

zde používáme označení $k|p$ pro predikát „k dělí p“.

Příklad 2: Goldbachova hypotéza patří mezi jednoduchá matematická tvrzení, která jsou numericky ozkoušena pro milióny případů, ale důkaz jejich pravdivosti doposud není znám. Tato hypotéza tvrdí, že každé sudé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel. Označíme P množinu všech prvočísel a $2\mathbb{N}$ množinu všech sudých přirozených čísel, pak Goldbachovu hypotézu lze vyjádřit formulí

$$(\forall n \in 2\mathbb{N})(\exists k, l \in P)(n = k + l).$$

Na závěr této podkapitoly ozřejmíme ještě jeden obrat často používaný (nejen) v matematické literatuře, a sice vysvětlíme význam „postačující“ a „nutné“ podmínky. Platí-li tvrzení $A \Rightarrow B$, pak o A mluvíme jako o **postačující podmínce pro** B a o B mluvíme jako o **nutné podmínce pro** A.

Důvod k tomuto názvosloví by měl být očividný. Platí-li tvrzení $A \Rightarrow B$ a víme-li, že A je pravdivé, pak platí i B! Platnost A tedy **stačí** pro to, aby platilo B. Naopak, pokud je tvrzení $A \Rightarrow B$ pravdivé a víme, že B je nepravdivé, potom A je nepravdivé. Tj. aby vůbec A mohlo být pravdivé, tak B musí být **nutně** pravdivé.

1.6 Zkrácené psaní součtů a součinů

Materiálu uvedenému v této podkapitole se budeme věnovat i v prvních přednáškách a cvičeních BI-ZMA.

Velmi často narazíme na potřebu sčítat jistý konečný počet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, případně na potřebu diskutovat vlastnosti tohoto součtu. Místo zdlouhavého a potenciálně nejednoznačného[26] výrazu

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.13}$$

píšeme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[26]Čtenář by mohl v konkrétním případně špatně pochopit, co má doplnit za „tečky“. Mohlo by se tak snadno stát, že čtenáři nedáváme snadno pochopitelnou informaci, ale IQ test.

Symbol $\sum$, sigma, pochází z řecké abecedy, kde označuje velké „s“. Je zvoleno, protože označuje **s**oučet (v češtině jde o náhodu, anglicky ***s**um*, latinsky ***s**umma*). „Lokální proměnná“ k se nazývá sčítací index, číslo 1 se označuje jako **dolní mez** a číslo n jako **horní mez**. Je pouze na naší volbě, jak sčítací index označíme. Například součty

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

jsou si rovné, neboť označují stejný součet (1.13), který samozřejmě na žádném sčítacím indexu nezávisí (nevyskytuje se v něm ani k, ani j).

Díky asociativnímu a komutativnímu zákonu (vizte rovnici (1.7)) platí rovnost

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{1.14}$$

Skutečně, stačí použít asociativitu a komutativitu sčítání a vhodně přeuspořádat sčítance. Podobně díky distributivnímu zákonu (vizte rovnici (1.8)) je pravdivé tvrzení

$$\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1.15}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je jistá konstanta, tedy číslo nezávislé na k. Tato rovnice představuje zobecnění známé operace „vytýkání před závorku“. V obou rovnicích (1.14) a (1.15) je naprosto podstatné, že dolní i horní mez je stejná.

Ukažme si tento koncept na konkrétním příkladě. Chceme sečíst všechna přirozená čísla od 3 do 10. Zkrácený zápis je následující

$$S = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{k=3}^{10} k. \tag{1.16}$$

Porovnejme tento způsob zápisu součtu s použitím `for` cyklu k nalezení tohoto součtu v jazyce C.

```
int main()
{
  int sum = 0;
  for (int k = 3; k <= 10; k++) sum += k;
```

```
  cout << "Soucet je: " << sum << endl;
  return 0;
}
```

K provádění výpočtů pomocí této sumační notace je dobré umět manipulovat se sčítacími indexy[27]. Například součet S v rovnici (1.16) lze zapsat také jako (sčítáme v opačném pořadí)

$$S = \sum_{k=1}^{8} (11 - k) = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3,$$

nebo (sčítací index běží pěkně od 1 a sčítáme ve stejném pořadí jako původně)

$$S = \sum_{k=1}^{8} (2 + k).$$

Zdůrazněme pointu tohoto odstavce znovu. **Jeden součet lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby**.

Někdy se změnou mezí sčítacího indexu součet změnit nemusí, jako například zde

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

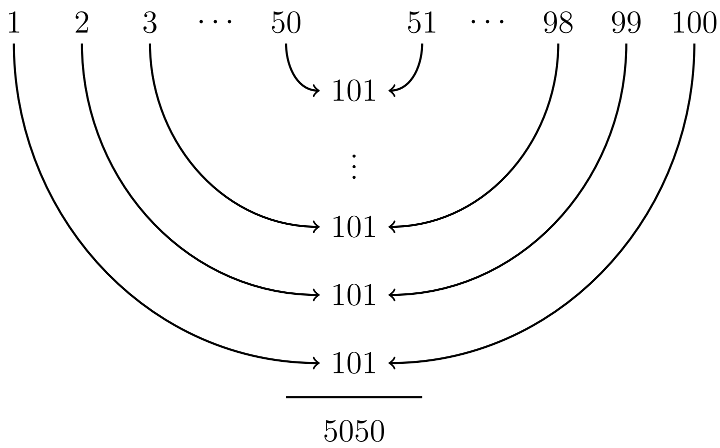
Přidali jsme totiž jen člen odpovídající $k = 0$ splňující $0^2 = 0$.

Příklad 3 (Gaussův trik)**:** Traduje se, že mladý Gauss dostal ve škole za úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100. Jako jediný ve třídě dosáhl dobrého výsledku, neboť nesčítal čísla od nejmenšího k největšímu, ale všiml si, že pokud sečte první (tj. 1) s posledním (tj. 100), dostane součet 101, pokud sečte druhé (tj. 2) a předposlední (tj. 99), dostane opět 101. Takto může postupovat až k $50+51 = 101$. Graficky je tento postup znázorněn na obrázku č. 1.7. Výsledek je tedy

$$50 \cdot 101 = 5050.$$

Obecně platí, že součet čísel od 1 do jistého přirozeného n je

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.17}$$



Obrázek 1.7: Gaussův trik pro sečtení prvních sto přirozených čísel.

Důkaz formulky (1.17). Pomocí sumační notace je snadné Gaussovu myšlenku popsat následovně

$$\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{k=1}^{50} \Big(k + (101 - k)\Big) = \sum_{k=1}^{50} 101 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Všimněme si, že naprosto stejný trik lze použít v případě, že máme sečíst čísla od 1 do obecného n:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} \Big(k + (n+1-k)\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

Dostáváme tak veleznámý vzoreček (1.17). □

K dostatečnému ocenění tohoto výsledku je vhodné si uvědomit rozdíl mezi zadáním (sečíst čísla od 1 do 100) a výsledkem. Na levé straně rovnosti

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot (100+1)}{2}$$

[27] Toto bude obsahem prvního cvičení BI-ZMA.

musíme provést celkem 99 operací sčítání oproti jednomu sčítání, násobení a dělení na straně pravé. Proto byl Gauss jediný, kdo získal dobrý výsledek. Poznamenejme, že když budeme zvětšovat n, bude počet operací na levé straně stále růst, kdežto počet operací nutných k vyhodnocení Gaussova vzorečku bude stále stejný. Implementace tohoto konkrétního součtu pomocí prosté sumy by proto byla značně neefektivní. Pomocí Landauovy symboliky lze toto pozorování vyjádřit konstatováním, že výpočetní složitost součtu samotného je $\mathcal{O}(n)$ a Gaussova vzorce $\mathcal{O}(1)$. O Landauově symbolice se podrobněji zmíníme na přednáškách BI-ZMA.

Příklad 4 (Součet prvních n členů geometrické posloupnosti)**:** Pro každé reálné q různé od 1 a přirozené n platí

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1.18}$$

Přímý důkaz. Označme si zkoumaný výraz jako

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Všimněme si, jak se tento výraz chová vzhledem k vynásobení kvocientem q. Konkrétně přímo z definice S_n plynou vztahy

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = 1 + q\Big(1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}\Big) = \\ &= 1 + qS_n, \\ S_{n+1} &= S_n + q^n, \end{aligned}$$

platné pro libovolné kladné přirozené n. Porovnáním těchto dvou různých výrazů pro S_{n+1} dostáváme rovnost

$$1 + qS_n = S_n + q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

odkud

$$S_n(1-q) = 1 - q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za uvedeného předpokladu $q \neq 1$ pak ihned dostáváme dokazovaný vztah (1.18). □

Otázka 6: Lze se v předchozím příkladu zbavit předpokladu $q \neq 1$? Jak je nutné změnit formulku (1.18)?

Otázka 7: K procvičení základních operací se sumami vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{5} 1, \quad \sum_{k=1}^{6} k - \sum_{k=1}^{6} (k+1).$$

Otázka 8: Který z následujících výrazů lze bez dalšího komentáře jednoznačně interpretovat, tedy přiřadit mu jednoznačně číselnou hodnotu?

a) $\sum_{k}^{4} k + 1,$ b) $j \sum_{j=1}^{30} 30k,$

c) $\sum_{j} 2j,$ d) $\sum_{j=1}^{2j} \sin j.$

Podobně jako součet lze zkráceně zapisovat i součin. K tomu se používá velké řecké písmeno $\prod$ (čti pí, **p**rodukt). Například součin prvních deseti přirozených čísel lze zapsat

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \prod_{k=1}^{10} k.$$

Faktoriál kladného přirozeného čísla n je definován předpisem

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

Připomeňme, že se dále zvlášť definuje faktoriál nuly, $0! := 1$. Faktoriál záporných celých čísel není definován[28].

S produkty se manipuluje velmi podobně jako se sumami. Jediným rozdílem je, že místo sčítání používáme násobení, jinak je myšlenka stejná. Například

[28] Faktoriál lze rozšířit na všechna reálná čísla vyjma záporných celých čísel. Tímto rozšířením je speciální funkce Γ, která splňuje $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a navíc platí $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots, -2, -1, 0\}$. S Γ funkcí se čtenář zajisté setká v předmětu BI-PST.

platí

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right),$$
$$\prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Kombinační čísla nacházejí často uplatnění v praktických výpočtech. Pro přirozené n a celé k splňující $0 \leq k \leq n$ definujeme

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ačkoliv tato definice vypadá nepřehledně, skutečný význam kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ je prostý. Toto číslo představuje počet způsobů, jak z n objektů vybrat k objektů, nezáleží-li na pořadí a neuvažujeme-li opakování již vybraného objektu.

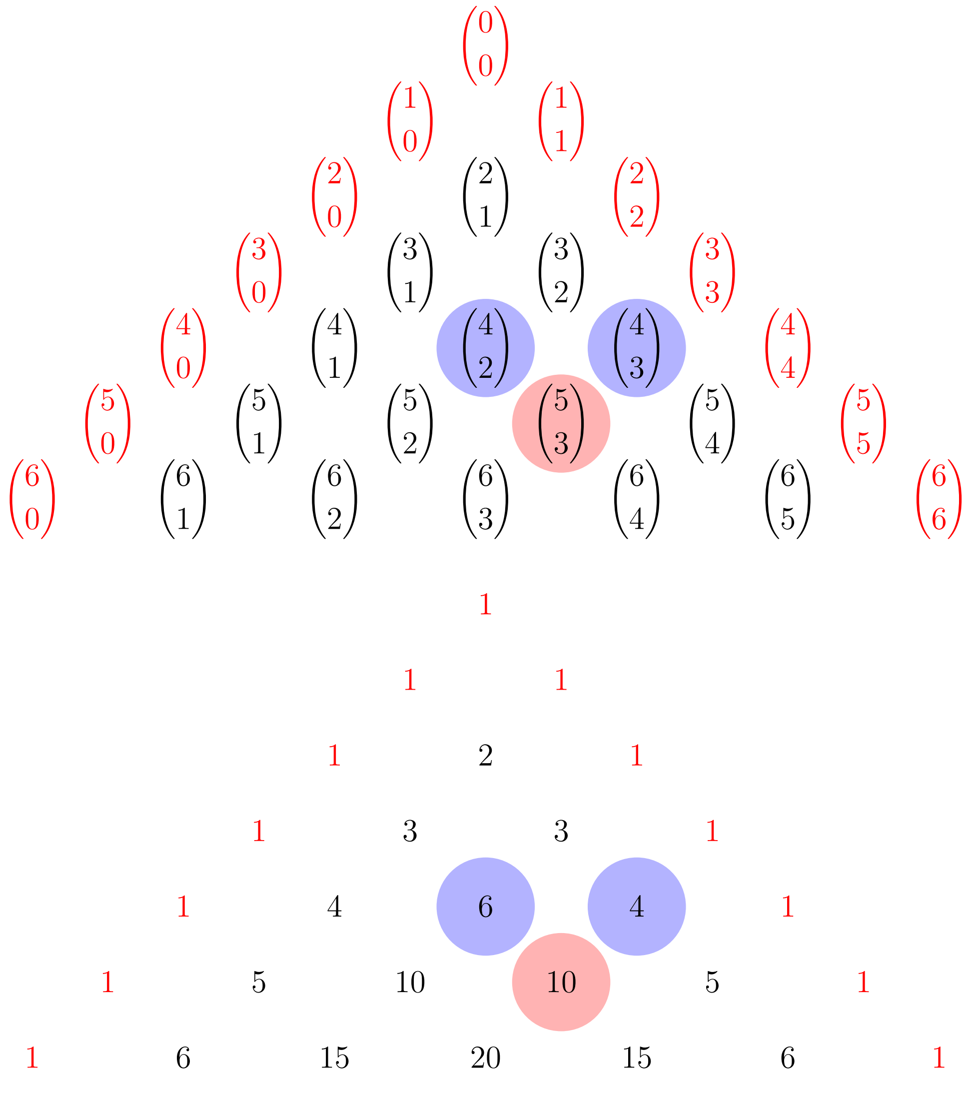
Často se hodí znát všechna kombinační čísla pro pevné n. K jejich výpočtu lze použít Pascalův trojúhelník. Nejprve si všimněme, že platí rovnost

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1.19}$$

Skutečně,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}}_{\frac{n+1}{(n-k+1)k}}\Bigg) = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Představme si, že uspořádáme kombinační čísla do tzv. **Pascalova trojúhelníku**. Vzorec (1.19) nám pak říká, že součet sousedních kombinačních čísel najdeme o řádek níže. Vizte obrázek č. 1.8.



Obrázek 1.8: Pascalův trojúhelník.

1.7 Významné konstanty

Při aplikaci velmi často narazíme na potřebu počítat s **Eulerovým číslem** (ozn. e) a **Ludolfovým číslem** (ozn. π). Přibližné hodnoty těchto konstant jsou uvedeny v tabulkách č. 1.3 a 1.2. Definicí Eulerova čísla se budeme podrobně zabývat na přednáškách BI-ZMA. Význam čísla π asi není třeba zdůrazňovat. Jedna z aplikací čísla e souvisí s jeho použitím jako základu v přirozeném logaritmu.

Konstanta	Přibližná hodnota na 1000 desetinných míst
π	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 827 785 771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224 953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542 019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960 518 707 211 349 999 998 372 978 049 951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302 642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303 598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882 353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001 927 876 611 195 909 216 420 199

Tabulka 1.2: Ludolfovo číslo. V době psaní tohoto textu držel rekord v zapamatování čísla π Chao Lu. Pamatuje si 67 890 cifer čísla π.

Konstanta	Přibližná hodnota na 1000 desetinných míst
e	2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547 594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059 921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630 738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251 019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167 509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742 345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838 606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 560 297 606 737 113 200 709 328 709 127 443 747 047 230 696 977 209 310 141 692 836 819 025 515 108 657 463 772 111 252 389 784 425 056 953 696 770 785 449 969 967 946 864 454 905 987 931 636 889 230 098 793 127 736 178 215 424 999 229 576 351 482 208 269 895 193 668 033 182 528 869 398 496 465 105 820 939 239 829 488 793 320 362 509 443 117 301 238 197 068 416 140 397 019 837 679 320 683 282 376 464 804 295 311 802 328 782 509 819 455 815 301 756 717 361 332 069 811 250 996 181 881 593 041 690 351 598 888 519 345 807 273 866 738 589 422 879 228 499 892 086 805 825 749 279 610 484 198 444 363 463 244 968 487 560 233 624 827 041 978 623 209 002 160 990 235 304 369 941 849 146 314 093 431 738 143 640 546 253 152 096 183 690 888 707 016 768 396 424 378 140 592 714 563 549 061 303 107 208 510 383 750 510 115 747 704 171 898 610 687 396 965 521 267 154 688 957 035 035

Tabulka 1.3: Eulerovo číslo.

1.8 Shrnutí důležitých bodů

- Význam různých matematických symbolů.
- Význam sjednocení, průniku a doplňku množin. Kartézský součin množin.

- Vztah mezi přirozenými, celými, racionálními reálnými a komplexními čísly.
- Zkrácený zápis součtů.
- Faktoriál, kombinační čísla a Pascalův trojúhelník.

Kapitola 2

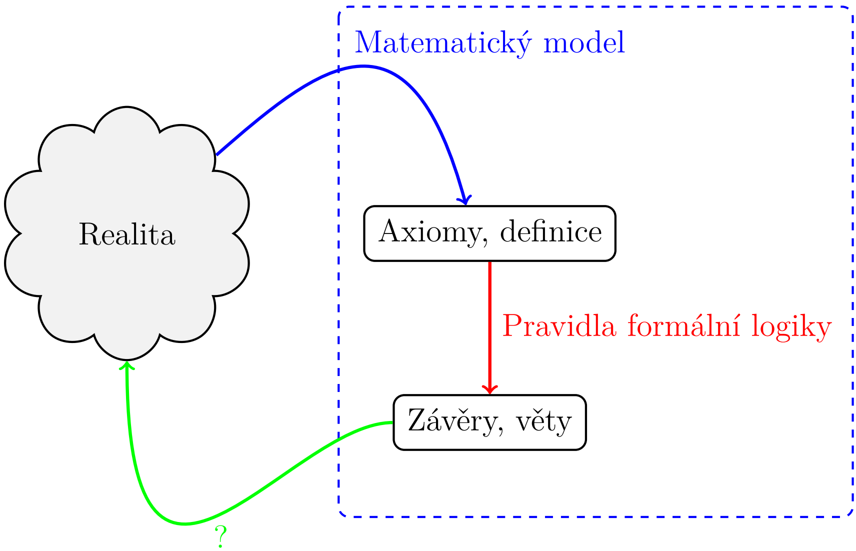
Věty a důkazy

2.1 Co je to důkaz?

Slovíčko „důkaz“ vyvolává v řadě studentů iracionální odpor. V této kapitole se pokusíme jeho pověst očistit. Důkaz není nic jiného než logický argument zajišťující platnost zkoumaného tvrzení. V této kapitole se pokusíme nastínit význam tohoto pojmu v širších souvislostech a ukážeme si některé jednoduché standardní důkazy.

Nejdříve se zamysleme nad tím, jak vlastně člověk zkoumá svět kolem sebe. Technologický pokrok posledních několika staletí stojí na tzv. vědecké metodě poznání. Ke zkoumanému problému (realitě) je sestaven matematický idealizovaný model. Ten je tvořen matematickými objekty, které se snaží popsat zadaný problém. Analýzou tohoto modelu pomocí logických pravidel docházíme k závěrům (často ve formě předpovědí), tedy tvrzením o vlastnostech či chování zkoumaných objektů. Následně se tyto závěry porovnávají s realitou. Viz obrázek č. 2.1 s odpovídajícím barevným označením.

Pokud předpovědi modelu neodpovídají realitě, pak je zřejmě model nedostatečný a je třeba ho nahradit dokonalejším. Mějme na paměti, že model může přesně vystihnout velké množství pozorování, ale stačí **jediný** nesoulad s realitou pro to, aby byl zavrhnut. Demonstrujme tento přístup na několika známých astronomických příkladech. Zkoumanou realitou je pohyb planet ve sluneční soustavě a modelem v tomto případě pak Newtonova mechanika (matematicky jistá soustava obyčejných diferenciálních rovnic, podrobněji v BI-ZMA).



Obrázek 2.1: Matematická/vědecká metoda poznání.

Příklad 5 (Objevení planety Neptun)**:** Na začátku 19. století bylo díky pozorování známo, že trajektorie planety Uran se znatelně odchyluje od trajektorie, po které by se měla pohybovat podle Newtonovy mechaniky (beroucí do úvahy v té době známé planety). Na základě dat z pozorování bylo vypočteno, po jaké trajektorii by se měla pohybovat nová planeta (později nazvaná Neptun) tak, aby vysvětlila pozorovaný pohyb Uranu. Po zaměření dalekohledů na místo udané Urbainem Le Verrierem byl Neptun skutečně nalezen. Le Verrier se ve svém výpočtu mýlil pouze o 1°.

Příklad 6 (Znovuobjevení Ceresu)**:** Na začátku 19. století pozoroval astronom Giuseppem Piazzim po dobu několika měsíců pozorována malou planetku Ceres. Pak se mu však ztratila a nikomu se ji znovu nedařilo objevit. Na pomoc přišel Gauss a z dříve naměřených dat vypočítal, kde by se planetka měla aktuálně nacházet. Mýlil se o $0,5^\circ$. Při této příležitosti poprvé použil některé, do té doby neznámé, matematické aproximační nástroje (nejmenší čtverce, FFT).

Tyto dva příklady mluví ve prospěch Newtonovy mechaniky. Následující příklad ale již ukazuje na její omezené pole působnosti.

Příklad 7 (Chování planety Merkur)**:** Pozorováním trajektorie planety Merkur se zjistilo, že její perihelium (bod elipsy nejblíže ke slunci) se pohybuje o $43'$ za století rychleji, než jak předpovídá Newtonova mechanika. Tento rozpor byl vysvětlen až na začátku 20. století Einsteinovou Obecnou teorií relativity. V rámci Newtonovy mechaniky ho nelze vysvětlit.

Vraťme se nyní zpět k obrázku č. 2.1. „Důkaz“ je v tomto schématu naprosto esenciální a můžeme ho zde umístit na červenou spojnici.

Studenti na naší fakultu často přicházejí s názorem, že důkazy přeci nejsou potřeba, že stačí znát pouze tvrzení vět. To je však velmi krátkozraký přístup zejména z následujících důvodů.

- Důkaz není nic jiného než logický argument. Vychází se z předpokladů a logickými kroky se dochází k závěrům. Studium důkazu proto zlepšuje nejen znalost zkoumaných objektů, ale i argumentační schopnosti.

- Důkaz studentovi odhaluje, proč dané tvrzení platí. Je pak snadnější zapamatovat si i dané tvrzení (např. jeho předpoklady). Bez studia důkazů student přichází o chápání souvislostí a uchyluje se k učení vět zpaměti (což pro něj není nijak obohacující[1] ani zvládnutelné).

- Řada důkazů, zejména tzv. konstruktivních, dává přímo k dispozici návod (algoritmus) na řešení daného problému.

Matematický text bývá zpravidla strukturovaný do definic, vět a důkazů. Cílem je zpřehlednění logické struktury textu. Čtenář často narazí na následující **prostředí**:

- **Definice**: Zde se zavádějí (definují) nové pojmy.

- **Lemma**: Pomocné tvrzení, které samo o sobě nemá širší uplatnění[2], ale použije se v důkazu některé z následujících vět.

[1] Vyjma tréninku paměti.

[2] Výjimky potvrzují pravidlo, například známé „Rieszovo lemma“ nebo „Riemann-Lebesgueovo lemma“, jsou velmi důležité samy o sobě, ale přesto nadále nesou označení „lemma“. Je tomu tak z historických důvodů. Tato tvrzení byla v původních článcích použita jako lemmata, ale později se využila i v řešení dalších problémů.

- **Věta**: Důležité tvrzení, které se zaslouží číslo, či dokonce jméno po svých objevitelích.
- **Důsledek**: Tvrzení velmi přímočaře plynoucí z předešlých vět, přeformulování předchozích vět do jiného kontextu. Typicky s velmi jednoduchým důkazem (prakticky jen použití daných vět).
- **Důkaz** Prostředí obsahující důkaz předcházejícího tvrzení (lemmatu, věty, důsledku). Poněvadž je typicky delší než formulace věty, bývá jeho konec označen symbolem pro konec[3] důkazu. V BI-ZMA používáme Halmosův symbol náhrobku □. Čtenář také může často narazit na zkratku Q.E.D. pocházející z latinského *quod erat demonstrandum* („což bylo dokázati“).

Čtenáři může být bližší notace pomocí XML jazyka. Strukturu matematického textu si lze pak představovat třeba následovně:

```
<definice>
  ...
</definice>
<veta>
  ...
</veta>
<dukaz>
  ...
</dukaz>
```

Očividně, sepsat text tímto způsobem by bylo typograficky ztřeštěné.

2.2 Co není důkaz?

„Důkaz“ příkladem

Pravdivost obecného tvrzení nelze založit na několika konkrétních příkladech podporujících jeho pravdivost. Oproti tomu pravdivost tvrzení lze vyvrátit udáním i jenom jednoho protipříkladu.

[3] Představte si ukončovací XML tag.

Uveďme jako demonstrativní příklad tvrzení, s kterým přišel v roce 1650 Fermat[4]:

Každé číslo tvaru $2^{2^n}+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, je prvočíslo.

Prozkoumáním hodnot výrazu pro několik malých n dostáváme čísla: 3, 5, 17, 257, 65 537, která skutečně jsou prvočísla. Ovšem hned následující hodnota pro $n = 6$ není prvočíslo,

$$2^{2^6}+1 = 18446744073709551617 = 274177 \times 67280421310721. \tag{2.1}$$

Tento rozklad ve Fermatově době samozřejmě nebyl znám. Rozklad v rovnici (2.1) je tedy **protipříkladem** k Fermatovu tvrzení uvedenému výše. Tento příklad Fermatovo tvrzení uvedené výše **vyvrací**.

Samozřejmě, příklady podporující dané tvrzení jsou také užitečné. Mohou člověka i navést na důkaz obecného tvrzení. Nelze z nich ale odvodit pravdivost původního tvrzení.

2.3 Ukázka několika typů důkazů

V této sekci si ukážeme několik jednoduchých důkazů známých a důležitých tvrzení. S důkazy jsme se však v tomto textu již setkali. V kapitole 1.6 jsme dokazovali formulky pro jisté součty. Uvedené důkazy lze považovat za **přímé** důkazy (z předpokladů jsme se přímočarými úvahami dostali k dokazovanému tvrzení). Následující větu dokážeme pomocí tzv. **sporu**. Myšlenka je jednoduchá. Jeden z logických axiomů říká, že tvrzení T je buď pravdivé, nebo nepravdivé. Ukážeme-li, že logický opak (negace) tvrzení T je nepravdivý, pak je původní tvrzení pravdivé.

Věta 8: Číslo odmocnina ze 2 je iracionální.

Důkaz sporem. Předpokládejme opak, tedy že $\sqrt{2}$ **je** racionální. Protože se jedná o kladné číslo, existují přirozená a **nesoudělná** čísla p a q splňující

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

[4]Pierre de Fermat, 17. srpna 1601 – 12. ledna 1665, francouzský matematik.

Odtud ale plyne rovnost

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{čili} \quad p^2 = 2q^2.$$

Odtud plyne, že p je sudé (jinak bychom měli rovnost sudého a lichého čísla, což je nemožné), tedy $p = 2k$, kde k je přirozené. Dosazením do rovnice výše a po vydělení obou stran číslem 2 dostáváme rovnost $2k^2 = q^2$. Použijeme-li stejný argument znovu, dostáváme nutně, že i q je sudé. Čísla p i q jsou **soudělná** (obě dělitelná číslem 2). Předpokládali jsme však nesoudělnost p a q, a tím jsme dospěli ke sporu. □

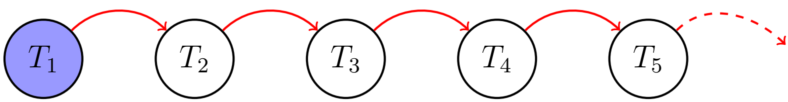
Dále si ukážeme důkaz **matematickou indukcí**. Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy[5] $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Důkaz se provede ve dvou krocích

i) Pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**:

$$\text{pokud platí } T_n, \text{ pak platí } T_{n+1}.$$

ii) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

Grafické znázornění tohoto postupu je na obrázku 2.2. Indukčnímu kroku odpovídají červené šipky. Druhý bod, důkaz T_1, je naznačen modrou barvou.



Obrázek 2.2: Schéma důkazu matematickou indukcí. Místo abychom dokázali všechna T_n, $n = 1, 2, \ldots$, dokážeme T_1 a indukční krok, tj. tvrzení $T_n \Rightarrow T_{n+1}$ (červené šipky).

Matematickou indukci lze přirovnat k bourání hada sestaveného z dominových kostek. Každá kostka domina představuje „výrok“ a může se nacházet

[5] Konkrétní způsob očíslování není podstatný, stejně tak není podstatné, od jakého čísla začínáme. Vždy je možné tvrzení vhodně přečíslovat.

ve dvou stavech. Kostka může být stojící, nebo spadlá (podobně výrok může být pravdivý, nebo nepravdivý). Pokud chceme zjistit, jestli námi sestavený dominový had celý spadl, máme dvě možnosti. Můžeme zkontrolovat každou z kostek a zjistit, jestli spadla. Druhou možností je zkontrolovat tyto skutečnosti:

- Dvě sousední kostky jsou umístěny v takové vzdálenosti, že pokud spadne první, pak spadne i její soused (analog indukčního kroku).
- První kostka spadla.

Potom automaticky víme, že spadly všechny kostky. Zdůrazněme, podstatný rozdíl v těchto přístupech. Druhý způsob kontroluje stav pouze první kostky, u ostatních se nedívá jestli stojí nebo ne.

Matematickou indukci si ukážeme na důkazu známé binomické věty.

Věta 9 (Binomická věta)**:** Pro reálná a a b a celé nezáporné n platí rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.2}$$

Důkaz matematickou indukcí. Ověřme, že zkoumaná rovnost platí pro $n = 1$. Levá strana (2.2) je rovna $a + b$ a pro pravou stranu téže rovnosti platí

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = a + b.$$

Předpokládejme, že (2.2) platí pro dané přirozené n. Potom[6]

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{!}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}}\Bigg)a^k b^{n+1-k} + \\
&\quad + \underbrace{\binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0}}_{b^{n+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

□

Tvrzení minulé věty obsahuje dobře známé algebraické „vzorečky"

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}
$$

Velmi podobně lze indukcí (ale i přímo) dokázat často používaný vzorec

$$
a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}, \quad n = 1, 2, \dots.
$$

Vypíchněme známé speciální případy tohoto vzorce,

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}
$$

Tyto vzorce se nám budou v budoucnu hodit při výpočtu limit.

[6]Představte si, jak by vypadal zápis postupu níže **bez použití sumační notace**!

Otázka 9: Dokažte platnost následující formule

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$$

pro každé přirozené n. Například tedy platí

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 &= 3^2, \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 4^2, \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 5^2, \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

2.4 Shrnutí důležitých bodů

- Vysvětlili jsme význam a roli důkazu.
- Zmínili jsme několik typů důkazů (přímý, sporem a matematickou indukcí).

Kapitola 3

Elementární funkce

V této kapitole probereme vlastnosti několika známých typů reálných funkcí reálné proměnné f. Množinu všech reálných x, pro která má $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo, nazýváme **přirozeným definičním oborem** takovéto funkce f. Definiční obor funkce f značíme D_f případně $D(f)$. Čtenář je jistě zvyklý zadávat $f(x)$ pomocí explicitního vzorce udávajícího, jaké operace je potřeba s x provést, abychom získali $f(x)$. Toto není jediný (ani nejčastější) způsob zadání funkce f. Další způsoby si ukážeme v BI-ZMA.

Dále zavádíme obor hodnot H_f funkce f jakožto množinu

$$H_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

Jinak řečeno, jedná se o množinu všech možných výstupů funkce f. K znázornění takovéto funkce lze použít její graf. Zavedeme-li v rovině dvě pravoúhlé souřadné osy označované standardně x (vodorovná, nezávisle proměnná) a y (svislá, závisle proměnná), pak grafem funkce f nazýváme množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňujících $y = f(x)$. Platí tedy

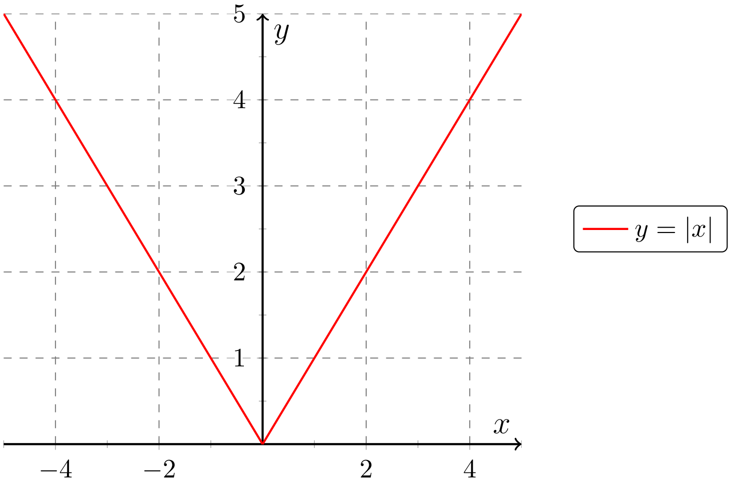
$$\operatorname{graf} f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

3.1 Absolutní hodnota

Pro reálné číslo x klademe

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Funkci $|\cdot|$ nazýváme **absolutní hodnota**. Zápis použitý v rovnici (3.1) je třeba interpretovat následovně: Pokud je dané x větší nebo rovno 0, pak je $|x|$ definováno jako x a v případě, že x je záporné, je $|x|$ definováno jako $-x$. Graf absolutní hodnoty je vynesen na obrázku č. 3.1.



Obrázek 3.1: Graf absolutní hodnoty.

Shrňme nyní několik základních vlastností absolutní hodnoty. Přímo z definice (3.1) jasně plyne, že pro každé reálné x a y platí

$$|-x| = |x|, \quad x \le |x|, \quad -x \le |x|, \tag{3.2}$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ pokud } y \neq 0.$$

Veledůležitou vlastností absolutní hodnoty je tzv. **trojúhelníková nerovnost**.

Věta 10 (trojúhelníková nerovnost)**:** Pro každé reálné x a y platí nerovnost

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

Důkaz. Uvažme libovolně pevně daná reálná x a y. Pokud

- $x + y \ge 0$, pak $|x+y| = x + y \le |x| + |y|$.

- $x + y < 0$, pak $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$.

Využili jsme definici absolutní hodnoty a její vlastnosti z (3.2). □

Otázka 10: Načrtněte graf funkce $f(x) = |x - 1| - |2x + 1|$.

3.2 Dolní a horní celá část

Dalšími často používanými a užitečnými funkcemi jsou **dolní celá část** a **horní celá část** reálného čísla.

Dolní celá část reálného čísla x je definována jako největší celé číslo menší nebo rovné x a značíme ji $\lfloor x \rfloor$. Podobně horní celá část reálného čísla x je definována jako nejmenší celé číslo větší nebo rovné x a značíme ji $\lceil x \rceil$. Explicitně bychom tedy mohli psát

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\},$$
$$\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}.$$

Grafy horní a dolní celé části jsou uvedeny na obrázku č. 3.2.

3.3 Lineární funkce

Lineární[1] funkcí[2] nazýváme každou funkci, pro níž existují konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že rovnost

$$f(x) = ax + b \tag{3.3}$$

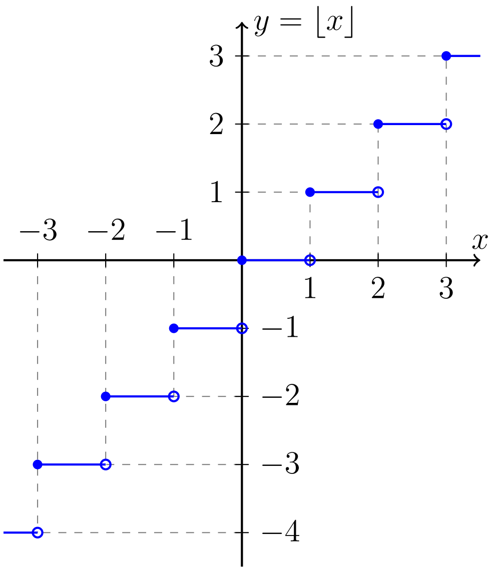
platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka, viz obrázek č. 3.3.

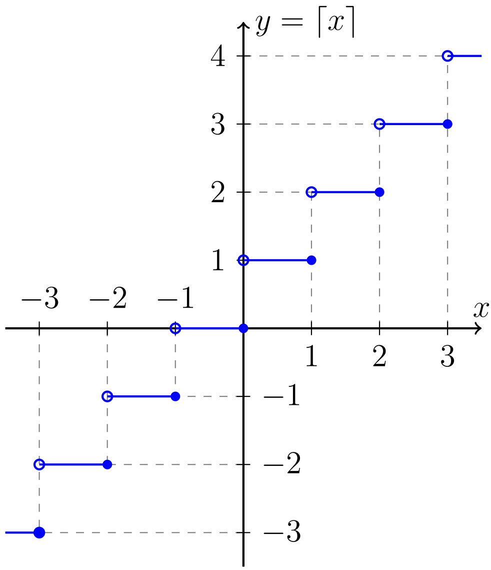
Dle definice je definičním oborem lineární funkce celá reálná osa. Pokud $a \neq 0$, pak oborem hodnot funkce (3.3) je opět celá reálná osa. V případě $a = 0$ je oborem hodnot funkce (3.3) pouze jednobodová množina $H_f = \{b\}$. Shrnuto

$$D_f = \mathbb{R},$$
$$H_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & a \neq 0, \\ \{b\}, & a = 0. \end{cases}$$

[1] Z latinského *linealis*, což znamená „přímý“ či „rovný“.

[2] Toto názvosloví není kompatibilní s linearitou ve smyslu Lineární algebry, BI-LIN.





Obrázek 3.2: Grafy dolní (vlevo) a horní (vpravo) celé části.

Speciální případ s nulovým a, tj. $f(x) = b$, nazýváme **konstantní funkcí**.

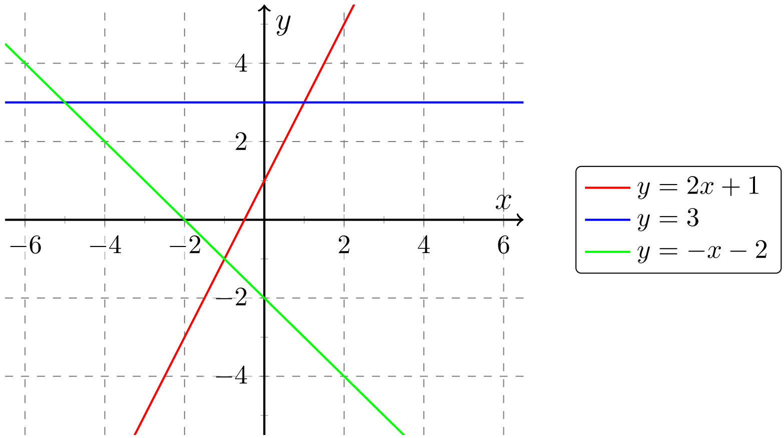
Kořeny lineární funkce je snadné nalézt, například rovnice $ax + b = 0$ má řešení $x = \frac{-b}{a}$ za předpokladu, že a je nenulové. Pokud je a nulové a b nenulové, pak příslušná rovnice nemá žádné řešení a žádný průsečík s osou x neexistuje. V případě, že a je nulové a b taktéž, jedná se o nulovou funkci, jejímž kořenem je každé reálné číslo.

Otázka 11: Na začátku této sekce bylo řečeno, že grafem každé lineární funkce je přímka. Je naopak každá přímka grafem lineární funkce?

3.4 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, pro níž existují konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ takové, že rovnost

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.4}$$



Obrázek 3.3: Grafy několika lineárních funkcí.

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je parabola, viz obrázek č. 3.4. Souřadnice jejího vrcholu snadno odhalíme po úpravě na čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{3.5}$$

Kvadrát závorky je vždy nezáporný. Odtud pak plyne, že vrchol paraboly se nachází v bodě o souřadnicích

$$\left(-\frac{b}{2a},\, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Pro průsečíky s osou x platí známý vztah

$$x_\pm = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right). \tag{3.6}$$

Rovnice má tedy reálná řešení za předpokladu nezápornosti **diskriminantu** $b^2 - 4ac$.

Důkaz vztahu (3.6). Vzorec pro kořeny můžeme také odvodit z úpravy na čtverec. Hledáme-li kořeny, tj. řešení rovnice $ax^2+bx+c=0$ a použijeme-li rovnosti (3.5), dostáváme

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Odtud lze řešení vyjádřit následovně:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}.$$

Díky znaménku $\pm$ lze psát souhrnně

$$x_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{3.7}$$

což je přesně hledaný vztah (3.6). □

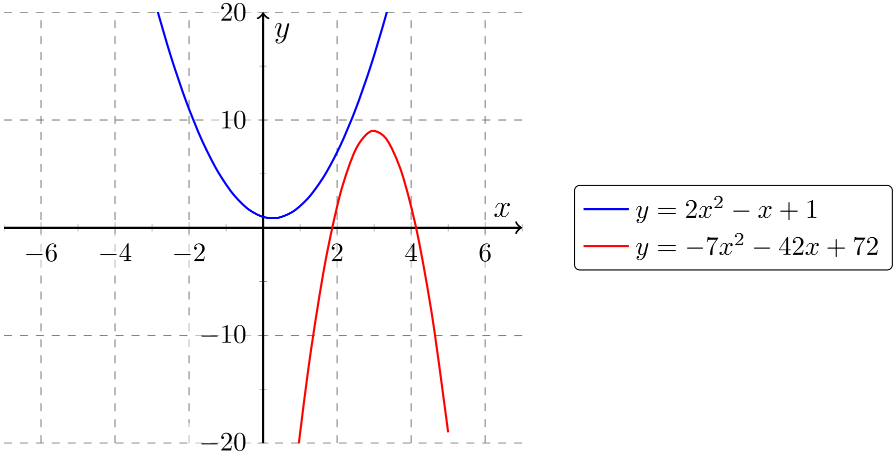
Na tomto místě je vhodné zdůraznit, že korektních důkazů různých tvrzení může být více. Některé mohou být snazší, některé komplikovanější. Například pokud bychom chtěli ověřit platnost předkládaného tvrzení, tedy že $x_\pm$ dané vztahy (3.6) jsou skutečně kořeny kvadratické funkce (3.4), stačí postupovat následovně[3]:

Alternativní důkaz vztahu (3.6). Platnost vztahu (3.6) můžeme snadno ověřit prostým dosazením. Ukažme, že x_+ je kořenem naší kvadratické funkce (3.4).

$$\begin{aligned} ax_+^2+bx_++c &= a\cdot\frac{1}{4a^2}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)^2+\frac{b}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)+c= \\ &= \frac{1}{4a}\left({\color{red}b^2}-{\color{blue}2b\sqrt{b^2-4ac}}+{\color{red}b^2}-{\color{green}4ac}\right)-{\color{red}\frac{b^2}{2a}}+{\color{blue}\frac{b}{2a}\sqrt{b^2-4ac}}+{\color{green}c}= \end{aligned}$$

Bod x_+ je tedy kořenem! Zcela analogicky se dá ověřit, že bod x_- je taktéž kořenem paraboly (3.4). □

[3] Samozřejmě abychom toto mohli provést, museli jsme onen vztah pro kořeny od někoho dostat, nebo jsme ho mohli v záchvatu geniality uhodnout.



Obrázek 3.4: Ukázka grafů různých kvadratických funkcí.

Otázka 12: Nechť $a > b > 0$. O číslech a a b říkáme, že jsou ve zlatém poměru[4], pokud poměr $a + b$ ku a je stejný jako a ku b. Jaký je tento poměr, tedy $\varphi = \frac{a}{b}$?

3.5 Polynomy

Čtenáři je jistě dobře známo, jak definovat celočíselnou mocninu reálného čísla a. Na tomto místě si ji připomeneme. Pro přirozené n klademe

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\,\text{členů}} \tag{3.8}$$

a pro $n = 0$ pak $a^0 := 1$. Pro záporná celá čísla n dále definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$. Číslo $-n$ je pak kladné a ve jmenovateli můžeme použít (3.8). Například platí

$$\pi^0 = 1, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \quad 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Dle této definice mocniny je zřejmé, že pro každá celá k a n platí důležité vztahy

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n} \quad \text{a} \quad \left(a^k\right)^n = a^{kn}. \tag{3.9}$$

[4]Hodnota tohoto poměru se také někdy nazývá zlatým řezem.

Operaci „mocnění“ s $a > 0$ lze definovat nejen pro celočíselné koeficienty. V tento okamžik není jasné, jak definovat (natož pak vypočíst) hodnotu výrazu 3^π či $1.2^{2.8}$. Podrobněji se touto otázkou budeme zabývat v BI-ZMA.

Zobecněním lineárních a kvadratických funkcí jsou polynomy. **Polynomem** nazýváme každou funkci tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in D_f = \mathbb{R}.$$

Pokud $a_n \neq 0$, pak n nazýváme **stupněm polynomu** f. Konstanty a_0, a_1, $\ldots$, a_n určují funkci f stejně jako v předchozích případech konstanty a, b, c u lineární, resp. kvadratické, funkce. Tyto konstanty často nazýváme koeficienty polynomu. V české literatuře se také o polynomech občas mluví jako o **mnohočlenech**.

Mezi polynomiální funkce patří samozřejmě jak lineární, tak kvadratické funkce. Společným rysem polynomů je, že pro výpočet jejich funkčních hodnot vystačíme pouze s operacemi sčítání a násobení. V tomto smyslu se tedy skutečně jedná o jedny z nejjednodušších (elementárních) funkcí. Tyto operace lze navíc levně počítat na CPU, resp. FPU, a proto i vyhodnocování funkčních hodnot polynomů je snadné.

Definičním oborem libovolného polynomu je celá reálná osa, $D_f = \mathbb{R}$. Pokud je stupeň polynomu lichý, pak je jeho oborem hodnot také celé $\mathbb{R}$ (vyjma případu konstantního polynomu). Pokud však je stupeň polynomu sudý, pak je oborem hodnot pouze část reálné osy (konkrétně jistá polopřímka nebo bod).

Hledání kořenů polynomů je obecně komplikovaná úloha. Explicitní vzorečky, jako například (3.6), jsou známé pouze pro polynomy stupně 1, 2, 3 a 4. Pro polynomy vyššího stupně nejen že nejsou známy vzorce pro kořeny, ale je **dokázáno**, že takovéto vzorce neexistují. Zdůrazněme tento fakt ještě jednou. Je-li zadán polynom stupně alespoň pět, pak vzorec udávající přímo jeho kořeny neexistuje a ani nikdy existovat nebude. Při hledání kořenů se pak musíme uchýlit k numerickým metodám[5].

Otázka 13: Která z následujících funkcí je polynomem?

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x}$,

[5] Viz například metoda půlení intervalu či Newtonova metoda probíraná v BI-ZMA.

b) $f(x) = x\sin(2) - x^3$,

c) $f(x) = e^{2\ln(1+x^2)}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

Otázka 14: Nalezněte kořeny následujících polynomů.

a) $x^2 + x - 12$,

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,

c) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

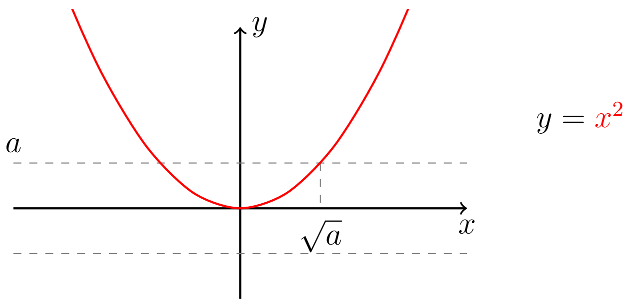
3.6 Odmocniny

Uvažme nyní reálné číslo a a přirozené číslo n. Pomocí přirozené mocniny definujeme **přirozené odmocniny** jako jisté reálné řešení rovnice $x^n = a$. Toto řešení pak označujeme symbolicky

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Je nutné rozlišit případy lichého a sudého n.

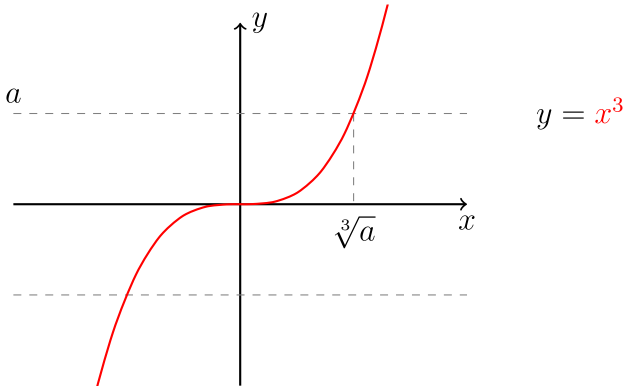
Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice $x^n = a$ má reálné řešení jen pro $a \geq 0$. Tato situace je graficky znázorněna na obrázku č. 3.5. Pro $a > 0$ jsou tato řešení právě dvě, neboť $x^{2k} =$



Obrázek 3.5: Ke konstrukci sudé odmocniny čísla a.

$(-x)^{2k}$. **Sudou odmocninu** $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako nezáporné řešení rovnice $x^{2k} = a$. Proto například $\sqrt{x^2}$ je rovna $|x|$ a nikoli x. Pro $a = 0$ je toto řešení právě jedno a tedy $\sqrt[2k]{0} = 0$.

Je-li $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má jediné řešení, o kterém mluvíme jako o **liché odmocnině** a značíme ji opět $\sqrt[2k-1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$. Viz obrázek č. 3.6.



Obrázek 3.6: Konstrukce liché odmocniny čísla a.

Z výše uvedeného je patrné, že definičním oborem sudé odmocniny je množina $\langle 0, +\infty)$. Naproti tomu, definičním oborem liché odmocniny je celá množina $\mathbb{R}$. Lichá mocnina a příslušná lichá odmocnina jsou k sobě navzájem inverzní, tedy platí

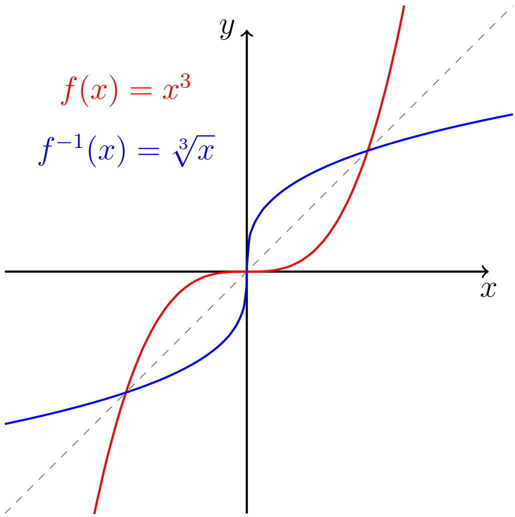
$$\sqrt[2k-1]{x^{2k-1}} = \left(\sqrt[2k-1]{x}\right)^{2k-1} = x \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Pro ilustraci viz obrázek č. 3.7.

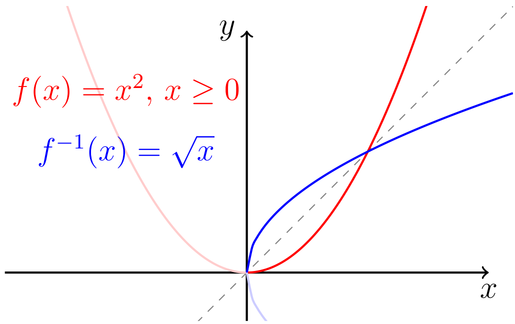
V případě sudé odmocniny je potřeba dát pozor na definiční obory. Platí rovnosti

$$\sqrt[2k]{x^{2k}} = \left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x \quad \text{pro každé } x \geq 0.$$

Jinak řečeno, $\sqrt[2k]{x}$ je inverzní funkcí k x^2 zúžené na množinu $\langle 0, +\infty)$. Viz obrázek č. 3.8. Těmito pojmy se podrobněji budeme zabývat v BI-ZMA.



Obrázek 3.7: Třetí mocnina a třetí odmocnina.



Obrázek 3.8: Druhá mocnina a druhá odmocnina.

3.7 Racionální lomená funkce

Racionální lomená funkce je každá funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy. Obecně lze říci, že definičním oborem takovéto funkce je množina všech reálných čísel bez kořenů polynomu Q, tj.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Mezi racionální lomené funkce patří lineární, kvadratické funkce a všechny polynomy. Skutečně, stačí volit $Q(x) = 1$, pro $x \in \mathbb{R}$ a P libovolný polynom.

O oboru hodnot už není snadné jednoduše něco říci a tuto otázku proto vynecháme. Na několika příkladech si alespoň ukážeme, že mohou nastat velmi různorodé situace (viz obrázek č. 3.9).

3.8 Trigonometrické funkce

Mezi trigonometrické funkce řadíme sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tg) a kotangens (cotg). Dále se v této kapitole zmíníme o jejich **vhodně zvolených** inverzích, tedy funkcích arkus sinus (arcsin), arkus kosinus (arccos) a arkus tangens (arctg).

Funkce sinus a kosinus jsou definovány pomocí následující geometrické konstrukce či algoritmu. Na vstupu je zadán úhel α a výsledkem bude hodnota $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$.

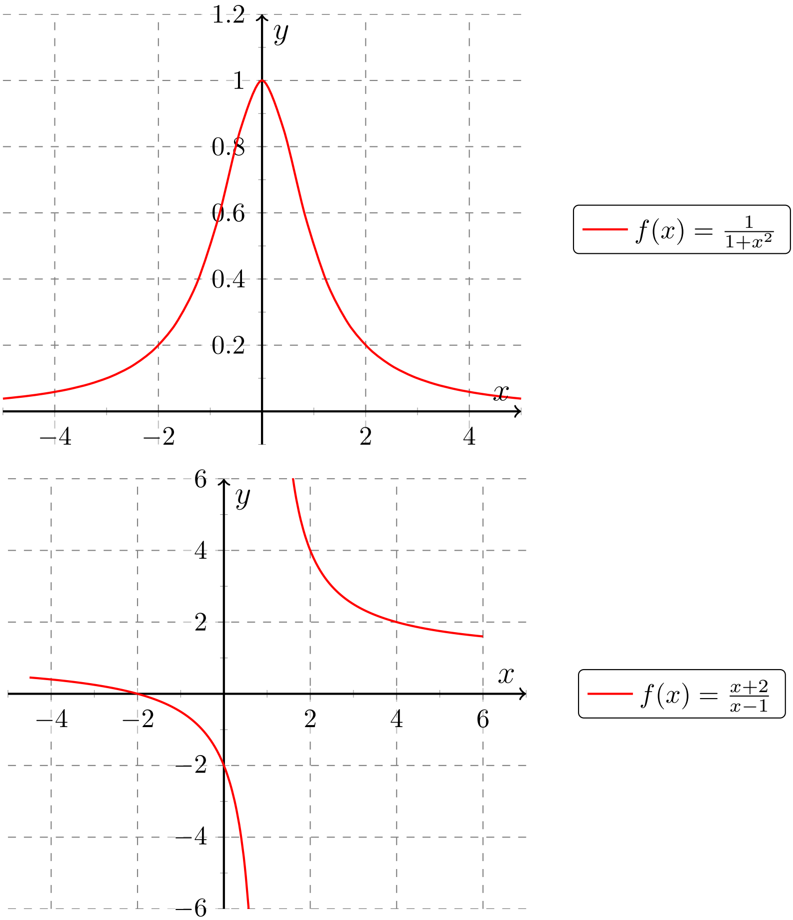
i) V počátku souřadného systému s pravoúhlými osami x a y sestroj jednotkovou kružnici K (tj. kružnici s poloměrem 1 v daných jednotkách os a středem v bodě $(0, 0)$).

ii) Od kladného směru osy x vynes úhel[6] α proti směru hodinových ručiček. Jedním ramenem tohoto úhlu je kladná část osy x a druhé rameno označme p.

iii) Označme A průnik p a K. Dále sestrojme bod P, průnik osy x a rovnoběžky s osou y procházející bodem A. Tímto způsobem získáváme pravoúhlý trojúhelník OPA.

iv) (Orientovaná) délka strany OP představuje $\cos(\alpha)$ a délka strany PA představuje $\sin(\alpha)$.

[6] Úhel měříme v radiánech.



Obrázek 3.9: Příklady racionálních lomených funkcí.

Tento postup dobře ilustruje náčrtek na obrázku č. 3.10. Přesnost výsledku samozřejmě závisí na přesnosti našich rýsovacích nástrojů. Nekonečné přesnosti lze dosáhnout pouze v případě nekonečně přesných nástrojů (zde pravítko, kružítko a úhloměr). Je zřejmé, že tato metoda „výpočtu“ není příliš praktická. V předmětu BI-ZMA si ukážeme, jak efektivně vyhodnocovat funkční hodnoty (nejen) těchto funkcí.

Přímo z konstrukce funkcí sinus a kosinus ihned plyne důležitá vlastnost těchto funkcí,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

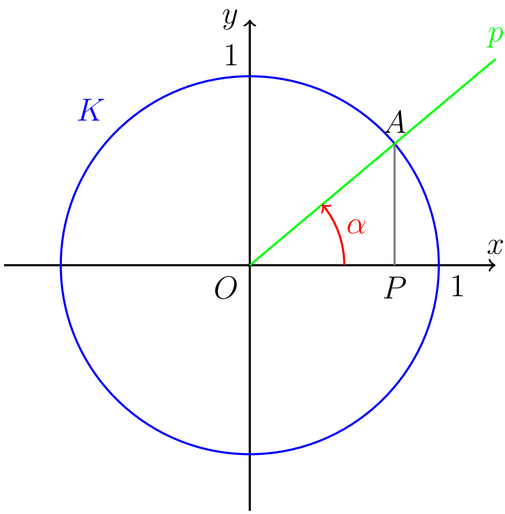
Tato rovnost pouze vyjadřuje Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku OPA s přeponou délky 1 a odvěsnami délky $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Dále je z konstrukce patrné, že funkce sinus je lichá a kosinus sudá, tedy

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{a} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro obory hodnot také platí

$$H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle.$$

Konečně, obě funkce jsou periodické s periodou 2π.



Obrázek 3.10: Geometrická konstrukce trigonometrických funkcí sinus a kosinus.

Velmi užitečné jsou tzv. **součtové vzorce** pro funkce sinus a kosinus. Tyto vzorce lze nejsnadněji odvodit pomocí vlastností násobení komplexních čísel s využitím goniometrického tvaru komplexního čísla

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{3.11}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \tag{3.12}$$

Díky sudosti funkce kosinus a lichosti funkce sinus ze vzorců (3.11) a (3.12) ihned dostáváme analogické vzorce pro rozdíl

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta),\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

Analogické vzorce lze odvodit pro funkce tangens i kotangens. Dále ze vzorců (3.11) a (3.12) plynou vzorce pro tzv. **dvojnásobný úhel**, které se používají velmi často:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha),\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pomocí vztahů (3.10) a (3.13) ihned odvodíme vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu,

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha/2) &= \frac{1}{2}\Big(1+\cos(x)\Big), & \Big|\cos(\alpha/2)\Big| &= \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\cos(x)\Big)},\\ \sin^2(\alpha/2) &= \frac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big), & \Big|\sin(\alpha/2)\Big| &= \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big)}.\end{aligned}$$

O znaménku musíme rozhodnout na základě úhlu α, přesněji jeho příslušnosti do některého ze čtyř kvadrantů.

Základní hodnoty funkcí sinus a kosinus jsou shrnuty v následující tabulce č. 3.1 a jejich grafy si můžete připomenout na obrázku č. 3.11.

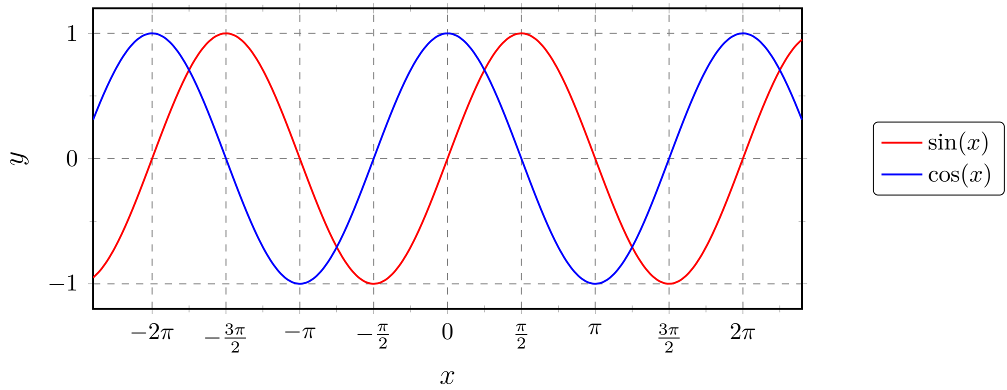
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

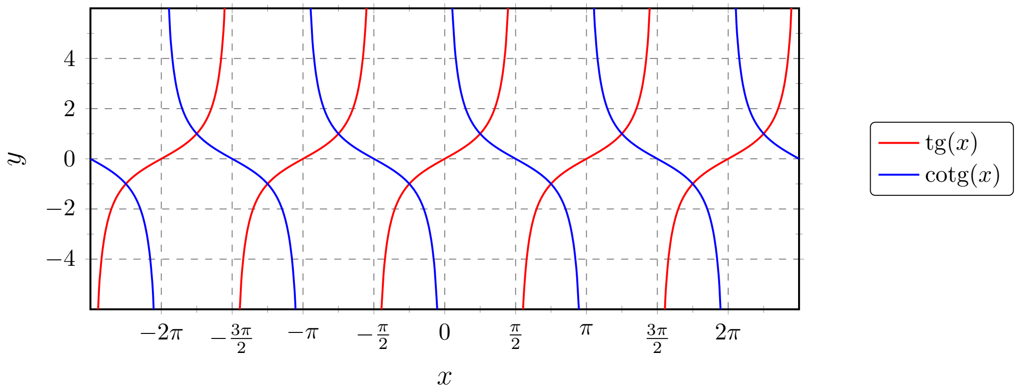
Tabulka 3.1: Hodnoty funkcí sinus a kosinus pro význačné úhly v prvním kvadrantu.

Pomocí funkcí sin a cos definujeme funkce tangens tg a kotangens cotg předpisy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &:= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \operatorname{cotg}\alpha &:= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Jejich obory hodnot jsou tvořeny celou množinou $\mathbb{R}$. Pro názornost uvádíme i jejich grafy na obrázku č. 3.11.





Obrázek 3.11: Trigonometrické funkce sin, cos, tg a cotg.

Ani jedna z doposud zavedených trigonometrických funkcí není prostá na svém definičním oboru. Pokud zvolíme libovolné y z oboru hodnot funkce sin, pak existuje nekonečně mnoho x z definičního oboru funkce sin tak, že $\sin(x) = y$. Nelze tedy zadanému $y \in H_{\sin}$ jednoznačně přiřadit $x \in D_{\sin}$ splňující $y = \sin(x)$. Stejná poznámka platí i pro cos, tg a cotg. Trigonometrické funkce nejsou prosté, a proto k nim neexistují inverzní funkce.

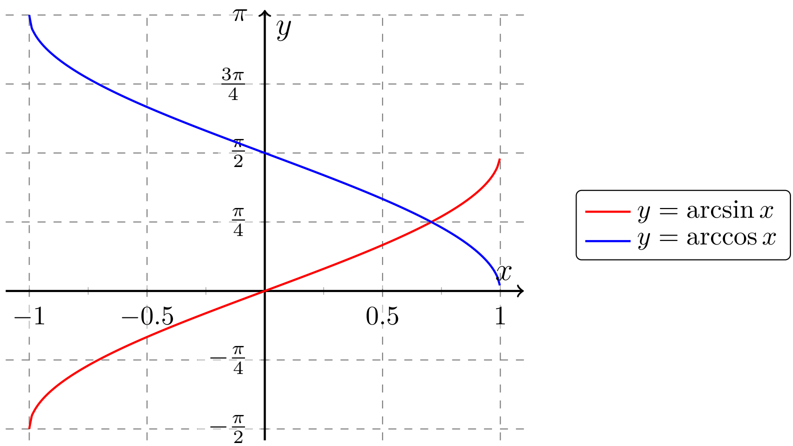
K vyřešení tohoto problému musíme trigonometrické funkce vhodně zúžit, tedy zmenšit jejich definiční obor. Ve shodě se zažitou konvencí definujeme

i) **arkus sinus**, arcsin, jako inverzní funkci k sin zúžené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,

ii) **arkus kosinus**, arccos, jako inverzní funkci k cos zúžené na interval $\langle 0, \pi\rangle$,

iii) **arkus tangens**, arctg, jako inverzní funkci k tg zúžené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

iv) **arkus kotangens**, arccotg, jako inverzní funkci k cotg zúžené na interval $(0, \pi)$.



Obrázek 3.12: Grafy funkcí arcsin a arccos.

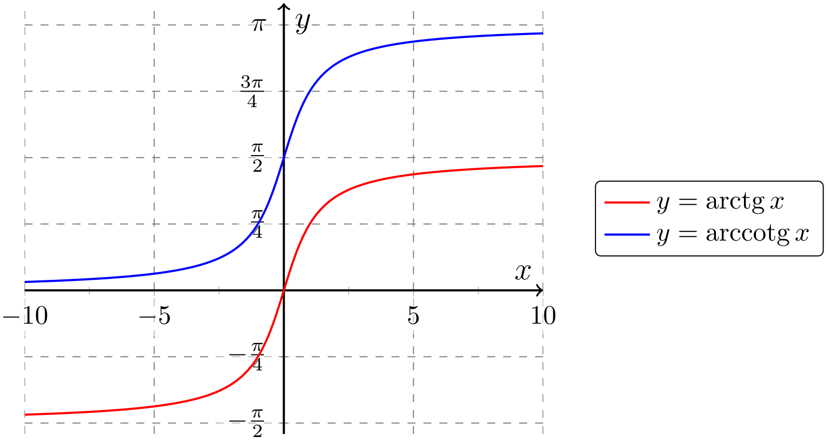
Otázka 15: Z geometrické definice funkcí sin a cos odvoďte hodnoty $\sin\frac{\pi}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{4}$.

Otázka 16: Vypočtěte hodnotu následujících výrazů.

a) $\arcsin \sin \dfrac{9\pi}{4}$,

b) $\sin \dfrac{7\pi}{4}$

Otázka 17: Odvoďte součtový vzorec pro funkci tg. Tzn. vyjádřete $\operatorname{tg}(x+y)$ pomocí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$.



Obrázek 3.13: Grafy funkcí $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.

3.9 Exponenciální a logaritmické funkce

Pro $0 < a \neq 1$ funkci

$$f(x) = a^x, \quad x \in D_f = \mathbb{R},$$

nazýváme **exponenciálou o základu** a. Tato funkce rozšiřuje mocninnou funkci ze začátku této podkapitoly. Pro libovolná reálná x a y platí

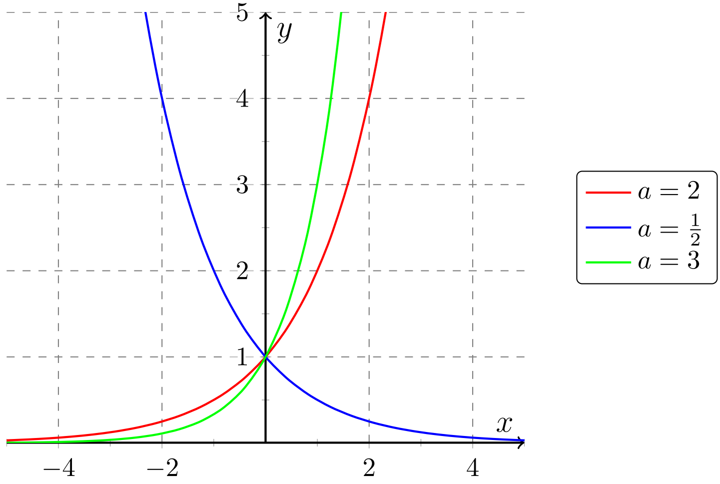
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{a} \quad \left(a^x\right)^y.$$

Na obrázku č. (3.14) je znázorněn známý průběh funkce f pro různé základy a. Obecně lze říci, že pro

$a > 1$ je f ostře rostoucí ($f(x) < f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$.

$a < 1$ je f ostře klesající ($f(x) > f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$.

Logaritmus je funkce inverzní k exponenciální funkci (přirozeně pouze v případě základu různého od jedné, kdy není exponenciální funkce prostá). Přesněji řečeno, z průběhu exponenciální funkce $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ vidíme, že



Obrázek 3.14: Exponenciální funkce.

pro každé reálné číslo y existuje právě jedno x splňující $a^x = y$. O takovéto funkci také říkáme, že je prostá (v tomto případě na celém $\mathbb{R}$).

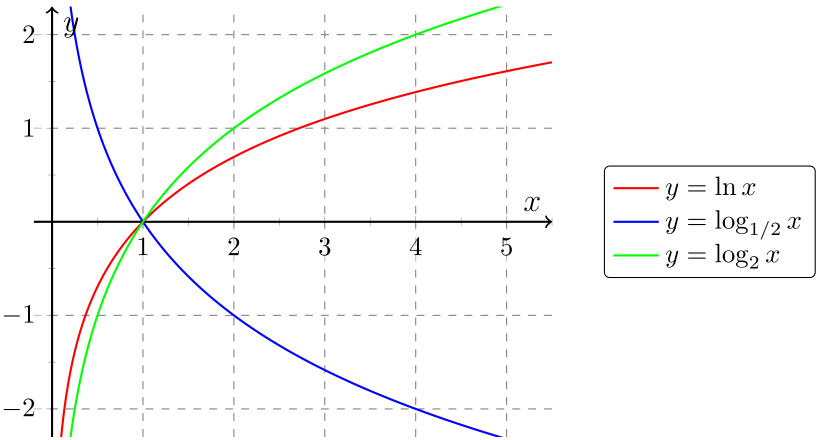
Inverzní funkci k exponenciální o základu a, $0 < a \neq 1$, nazýváme logaritmem o základu a a značíme $\log_a$. Definičním oborem exponenciální funkce bylo celé $\mathbb{R}$ a oborem hodnot interval $(0, +\infty)$. Odtud plyne, že definičním oborem logaritmu je $D_{\log_a} = (0, +\infty)$ a oborem hodnot logaritmu je $H_{\log_a} = \mathbb{R}$.

S logaritmem se čtenář již v praxi jistě nepřímo setkal. Například Richterova stupnice (vyjadřující intenzitu otřesů) nebo decibelová škála (měřící intenzitu zvuku) jsou logaritmické.

Z vlastností exponenciály lze odvodit důležité vlastnosti logaritmu,

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, \tag{3.14}$$
$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0, \tag{3.16}$$
$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0 \text{ a } y \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

První dvě vlastnosti, (3.14) a (3.15), jsou pouze vyjádřením inverzního vztahu mezi exponenciálou a logaritmem, platí tedy definitoricky. Dokažme si vlastnost



Obrázek 3.15: Grafy několika logaritmických funkcí s různými základy.

(3.16). Pro kladná x, y existují reálná u, v taková, že

$$x = a^u \quad \text{a} \quad y = a^v.$$

Odtud

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Takže

$$\log_a xy = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Podobným způsobem lze dokázat vlastnost (3.17).

Otázka 18: Jaký je definiční obor funkce $f(x) = \log_a x^2$?

3.10 Shrnutí důležitých bodů

- Zavedli jsme polynomy, zobecnění lineárních a kvadratických funkcí.
- Umíme nalézt kořeny a vrchol paraboly.
- Definovali jsme trigonometrické funkce sin, cos, tg, cotg a jejich vhodně zvolené inverzní funkce.

- Známe důležité vlastnosti funkcí sin, cos a jejich funkční hodnoty pro speciální hodnoty argumentu.
- Probrali jsme vlastnosti exponenciální a logaritmické funkce.
- Zopakovali jsme definici absolutní hodnoty a dokázali platnost tzv. trojúhelníkové nerovnosti.
- Zavedli jsme dolní a horní celou část reálného čísla.

Kapitola 4

Analytická geometrie v rovině

4.1 Základní pojmy

Připomeňme, jak lze pomocí rovnic popisovat geometrické objekty v rovině. Tyto pojmy jsou velmi užitečné, neboť jak každý ví, výstupní zařízení drtivého množství elektronických zařízení je dvourozměrné (monitory, papír, projektory atd.).

Uvažme v rovině pravoúhlý souřadný systém s osami x, y a počátkem O. Bod v této rovině je popsán dvěma čísly nazývanými **souřadnice bodu**. Má-li například bod A souřadnice $(1, 2)$, píšeme[1] $A = (1, 2)$. Bod A leží na průsečíku přímky rovnoběžné s osou y procházející $x = 1$ a přímky rovnoběžné s osou x procházející $y = 2$. Podrobně je tato situace znázorněna na Obrázku 4.1.

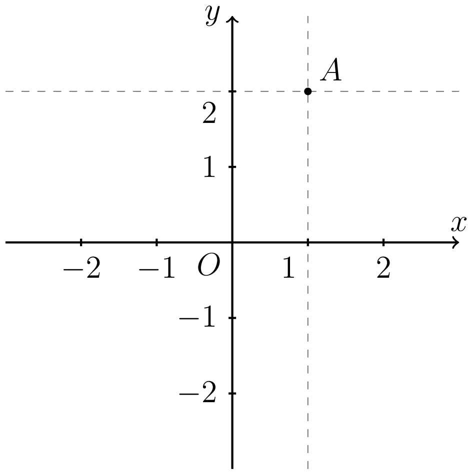
Dalším důležitým geometrickým objektem je **vektor**. Vektory budeme označovat malým písmenem se šipkou, např. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Vektor chápeme jako dvojici čísel[2] udávající směr; je-li dán vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, pak čísla a_1 a a_2 nazýváme **složkami vektoru** $\vec{a}$. Vektory můžeme násobit číslem a sčítat podle předpisů

$$\alpha \cdot (a_1, a_2) := (\alpha a_1, \alpha a_2), \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \tag{4.1}$$

O operacích násobení číslem a sčítání vektorů zavedených v (4.1) se někdy ze zřejmých důvodů říká, že působí „po složkách“. Rovnost mezi vektory je

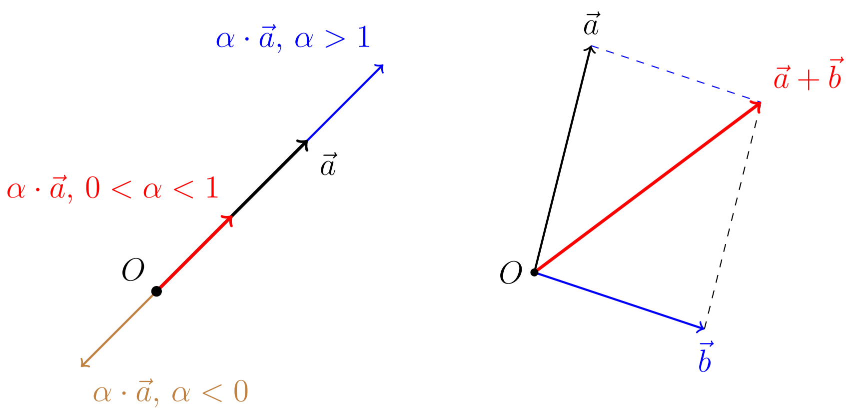
[1] Značení souřadnic bodu pomocí výrazů typu $A[1, 2]$ nepoužíváme. Toto značení ve čtenáři spíše evokuje pocit, že A je jakási funkce dvou proměnných.

[2] Budeme stále používat řádkový zápis, i když korektnější by bylo psát vektory do sloupců. Více na toto téma se dozvíte v BI-LIN.



Obrázek 4.1: Provoúhlý souřadný systém a bod $A = (1, 2)$.

definována intuitivně. Řekneme, že dva vektory $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ jsou si rovny, právě když se jejich složky rovnají, tedy když $a_1 = b_1$ a $a_2 = b_2$. Rovnost pak přirozeně zapisujeme jako $\vec{a} = \vec{b}$. Geometrická interpretace operací násobení číslem a sčítání vektorů je znázorněna na obrázku č. 4.2.



(a) (b)

Obrázek 4.2: Geometrický význam násobení (a) a sčítání vektorů (b).

Vektor můžeme násobit číslem. Můžeme násobit dva vektory mezi sebou? K tomuto účelu slouží **skalární součin**. Standardní skalární součin dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ je definován předpisem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Součin se nazývá „skalární“, protože jeho výsledkem není vektor, ale číslo (skalár). Skalární součin dále souvisí s úhlem mezi vektory. Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel $\alpha \in \langle 0, \pi)$, právě když

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}.$$

Délka vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je opět dána pomocí Pythagorovy věty. Značíme ji $\|\vec{a}\|$ a platí

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{pro } \vec{a} = (a_1, a_2).$$

Všimněme si, že délku lze vyjádřit pomocí skalárního součinu jako $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Těmito a dalšími geometrickými objekty se budete podrobněji zabývat v předmětu BI-LIN, a to nejen ve dvou dimenzích.

4.2 Přímka

Nejjednodušším geometrickým útvarem (mimo bod samotný) je **přímka**. K úplnému popsání přímky p stačí zadat bod A, kterým přímka prochází, a směr, ve kterém přímka běží, tedy nenulový vektor $\vec{a}$. Přímka p je pak tvořena všemi body se souřadnicemi

$$(x, y) = A + t \cdot \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Číslu t se říká parametr, neboť parametrizuje body na přímce. Všimněme si, že omezíme-li množinu, ze které bereme hodnoty t, dostaneme pouze části přímky. Například pro $t \in \langle 0, +\infty)$ dostáváme polopřímku začínající v bodě A a mířící ve směru $\vec{a}$, zatímco pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ dostaneme úsečku spojující body A

a $A+\vec{a}$. Tento způsob zadání přímky, tj. pomocí rovnice (4.2), se často nazývá **parametrické vyjádření přímky**.

Zmiňme nyní alternativní způsob udání přímky. Přímka je tvořena všemi body se souřadnicemi (x, y), které splňují **rovnici přímky**

$$ax + by + c = 0. \tag{4.3}$$

Konstanty a, b, c jsou parametry dané přímky. V rovnici (4.3) vystupují symboly x a y jako neznámé. Bod (α, β) na zadané přímce leží, právě když po dosazení α za x a β za y do (4.3) dostaneme platnou rovnost $(0 = 0)$. Rozeberme konkrétněji příklad přímky p zadané rovnicí

$$x - 2y + 1 = 0. \tag{4.4}$$

Bod $(1, 2)$ na přímce p neleží, protože po dosazení do (4.4) dostáváme $-2 = 0$, což není pravda. Naopak body $(-1, 0)$ a $(0, 1/2)$ po dosazení dávají $0 = 0$ a na přímce tedy leží. Dva body nám stačí k načrtnutí přímky.

Předpokládáme, že čtenář umí přecházet od parametrického popisu přímky k její rovnici a naopak.

Otázka 19: Udejte rovnici přímky zadané parametricky: $(x, y) = (1, 2) + (2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Otázka 20: Udejte parametrické vyjádření přímky zadané rovnicí $3x-2y+1 = 0$.

Otázka 21: Sestrojte rovnici přímky procházející body $(1, -3)$ a $(2, 4)$.

4.3 Kružnice a elipsa

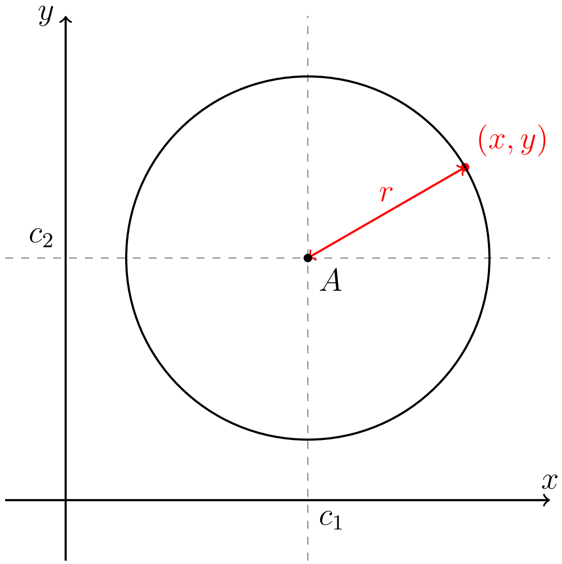
Rovnici kružnice lze snadno sestavit, vzpomeneme-li si opět na Pythagorovu větu. Kružnice se středem v bodě $C = (c_1, c_2)$ a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů (x, y), jejichž vzdálenost od bodu C je rovna r. Tedy

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Tato situace je podrobně znázorněna na obrázku č. 4.3.

Rovnice elipsy má tvar

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1,$$

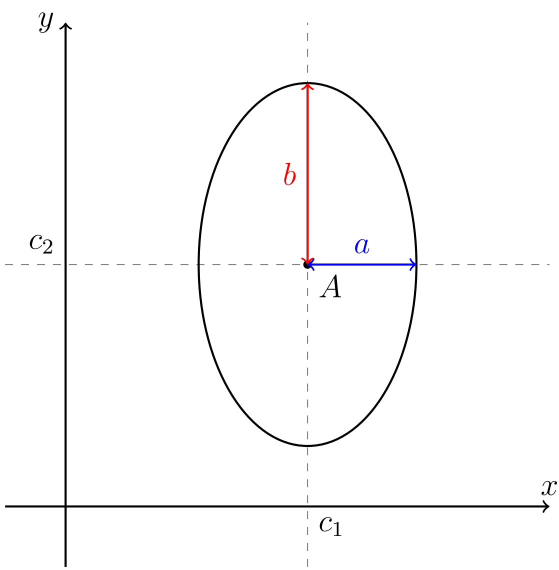


Obrázek 4.3: Kružnice se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ a poloměrem $r > 0$.

kde a a b jsou kladné parametry a $A = (c_1, c_2)$ je střed elipsy. Parametry a a b udávají délku hlavní a vedlejší poloosy. Pokud je $a = b$, dostáváme samozřejmě kružnici. Ilustrace typické elipsy je na obrázku 4.4.

4.4 Shrnutí důležitých bodů

- Zavedli jsme rovinný souřadný systém a pojem bodu a vektoru.
- Ukázali jsme, jak v rovině popsat přímku, kružnici a elipsu.



Obrázek 4.4: Elipsa se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ a parametry $0 < a < b$.

Kapitola 5

Varování

Předmět BI-ZMA se přednáší na Fakultě informačních technologií, řada studentů má proto vřelý vztah k různým počítačovým algebraickým systémům (CAS), ať už se jedná o samostatné programy (Mathematica, Maple, Matlab, Sage, Maxima, ...) či on-line aplikace (WolframAlpha, SageMathCloud). Rádi bychom na tomto místě upozornili, že ačkoliv používání těchto systémů v zásadě vítáme, mohou být jejich výstupy a chování pro uživatele nedostatečně zasvěceného do různých partií matematiky matoucí.

Namátkou zmíníme již klasické pasti.

- Jak to, že $\ln(-1)$, či $\sin(\mathrm{i})$, jsou vyhodnoceny a nevracejí chybu?

  Odpověď: Prakticky všechny elementární funkce lze rozšířit takřka na celou množinu komplexních čísel. Ano, platí $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$ a $\sin(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\sinh(1)$. Komplexní analýzou se však v BI-ZMA z časových důvodů zabývat nemůžeme. Na přednášce však alespoň zmíníme, jak definovat e^z pro libovolné komplexní z.

- Jak to, že $\sqrt[3]{-1}$ je vyhodnocena jako $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ a ne jako -1?

  Odpověď: Pokud jste zvídaví, snadno ověříte, že tento výsledek není špatný:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3}{4}}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\Bigg)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) =$$
$$= -\frac{3}{4}-\frac{1}{4} = -1.$$

„Problém“ tkví v tom, že v komplexních číslech má úloha

$$z^3 = -1, \quad z \in \mathbb{C},$$

celkem tři řešení. To, které jsme dostali, je tzv. principiální řešení – řešení s nejmenším „argumentem“. Opět, komplexní analýzou se v BI-ZMA zabývat nebudeme.

- V CAS Mathematica mají různé symboly rovnosti následující význam.
  - Symbol `==` se používá ve smyslu logické rovnosti (porovnání, zápis rovnic).
  - Symbol `=` se používá ve smyslu přiřazení.
  - Symbol `:=` má význam „opožděného vyhodnocení“.

Demonstrujme tento rozdíl na příkladě. Výstupem tohoto kódu

```
a = 4;
b = a;
Print[b]
a = 2;
Print[b]
```

je

```
4
4
```

Naopak vyhodnocení buňky s obsahem

```
a = 4;
b := a;
Print[b]
a = 2;
Print[b]
```

má za následek výstup

```
4
2
```

Mezi **neomluvitelné hříchy** dále patří následující nepravdy (nemá cenu je podrobněji komentovat, snad jen zmíníme, že se skutečně objevují v písemkách):

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$
$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c},$$
$$\log(a+b) = \log(a) + \log(b).$$

Odpovědi na některé otázky

1 $|A| \cdot |B|$

3 a) $\operatorname{Re} z = 10$, $\operatorname{Im} z = -5$, b) $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -4$, c) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$, d) $\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.

4 a) omezená, b) pouze zdola omezená, c) není zdola ani shora omezená, d) omezená.

5 a) $\min A = -1$, $\max A = 3$, b) nemá minimum, $\max B = a$, c) $\min C = -1$, $\max C = 1$, d) $\min D = -1$, nemá maximum, e) nemá maximum ani minimum.

6 Ano, v případě $q = 1$ platí $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = n$.

7 5, -6.

8 Ani jeden ze zápisů není správný.

9 Využijte matematické indukce.

11 Není. Například libovolná přímka rovnoběžná s osou y není grafem žádné funkce, tedy ani funkce tvaru $y = ax + b$ s reálnými a, b.

12 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13 a) ne, b) ano, c) ano, d) ano.

14 a) 3 a -4, b) 1, -2 a 3, c) -2 a 2.

16 a) $\frac{\pi}{4}$, b) $-\frac{7\pi}{4}$.

18 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

19 $x + 2y - 5 = 0$.

20 $(x, y) = (-1, -1) + t \cdot (2, 3)$.

21 $7x - y - 10 = 0$.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Rejstřík

Literatura

[1] Bartsch, Hans-Jochen, *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha, 2000

[2] Confuted, Using Quaternion to Perform 3D rotations, `http://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html`, 28. 9. 2013

[3] Devlin, Keith, *The Man of Numbers*, Bloomsbury, 2011.

[4] Weisstein, Eric W., *Euler-Mascheroni Constant*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html`, 13. 10. 2013