Cvičení 6: Lineární harmonický oscilátor.

Motivace: vlastnosti LHO a procvičení formalismu kreačních a anihilačních operátorů

Úloha 1: závislost výchylky na čase

Mějme lineární harmonický oscilátor s hmotností m a s vlastní úhlovou frekvencí ω připravený ve stavu

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ se standardní fázovou konvencí (tj. $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$).

1. Najděte α, β pro něž je střední hodnota $\langle\hat{X}\rangle$ operátoru polohy maximální.
2. Najděte časovou závislost této veličiny v tomto stavu.
3. Najděte střední hodnotu $\langle\hat{X}\rangle$ ve stavu $|n\rangle$.
4. Najděte varianci ΔX ve stavu $|n\rangle$.

Nápověda: použijte algebraických vlastností kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2: Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy lze určit pomocí vytvářejícího funkcionálu $S(t,x) = \exp(-t^2+2tx)$ pomocí formule

$$S(t,x) = \sum_n \frac{H_n(x)}{n!}t^n.$$

1. Najděte tímto způsobem první tři Hermitovy polynomy.
2. Porovnejte nalezený výsledek s rerkurentní relací $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, $H_{-1} = 0$, $H_0 = 1$.
3. Ověřte pomocí vytvářejícího funkcionálu relaci $\int e^{-x^2}H_n(x)H_m(x) = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$.
4. Najděte explicitně vlnové funkce prvních pár stavů: $\langle x|0\rangle$, $\langle x|1\rangle$, $\langle x|2\rangle$.

Nápověda: Pro nalezení integrálu ve třetím bodě vyšetřujte $I(t,u) = \int \exp(-x^2)S(t,x)S(u,x)dx$.

Úloha 3: p-reprezentace

Jak vypadají vlnové funkce stacionárních stavů LHO $\langle p|n\rangle$ v p-reprezentaci? Oscilátor je připraven ve stavu $|\psi\rangle = |0\rangle + i|1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost najít kladnou hybnost?

Opakování - pravidla práce s komutátory

Před následující úlohou si zopakujte následující tvrzení pro práci s komutačními relacemi, případně se pokuste některá trvrzení dokázat.

- $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}], \qquad [\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B},$
- $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}], \qquad [\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}.$
- POKUD $[\hat{A},\hat{B}]=0$ PAK $\exp(\hat{A}+\hat{B})=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$
- POKUD $[\hat{A},\hat{C}]=[\hat{B},\hat{C}]=0$, kde $\hat{C}=[\hat{A},\hat{B}]$ PAK $[\hat{A},f(\hat{B})]=\hat{C}f'(\hat{B})$ a $[f(\hat{A}),\hat{B}]=f'(\hat{A})\hat{C}$.

Úloha 4: Operátor posunutí

1. Ověřte, že operátor $\hat{U}=(\alpha)\exp(-\alpha(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}))$ je unitární ($\alpha\in\mathbb{R}$).
2. Najděte transformaci $\hat{U}\hat{a}\hat{U}^{\dagger}$ anihilačního operátoru.
3. Najděte transformaci operátoru $\hat{H}=\hbar\omega[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\lambda(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})]$, kde λ je reálná konstanta.
4. Jaké je spektrum $\hat{H}$?