Universidad de Valladolid

MÁSTER EN PROFESOR EN ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

JUNIO 2015

PASEO POR LOS GRUPOS DE SIMETRÍA MONO Y BIDIMENSIONALES, EN EL URBANISMO DECORATIVO DE VALLADOLID

ALUMNO

Álvaro Romo García

DIRECTOR

A. Carmelo Prieto Colorado

Contenido

Contenido......i
Introducción......1
Ubicación en el currículo......4
Competencias......4
Objetivos......5
Simetría......6
¿Qué es la simetría?......6
Grupos de simetría......7
Grupo de simetría puntual......9
Grupo de simetría espacial (GSE)......9
GSE 1D......9
GSE 2D......14
Redes de Bravais......14
Grupos de Simetría Puntual (GSP)......15
Grupos de Simetría Espacial (GSE-2D)......16
Metodología......19
Otras propuestas......19
Evaluación de la actividad......20
Paseo por los GSE-1D......21
Grupo F11......22
Grupo F12......23
Grupo F1m......24
Grupo Fm1......25
Grupo Fmm......26
Grupo F1g......27
Grupo Fmg......28
Paseo por los GSE-2D......29
Grupo p1......30
Grupo p2......31
Grupo pm......32
Grupo p2mm......33
Grupo pg......34
Grupo p2gg......35
Grupo p2mg......36
Grupo cm......37
Grupo c2mm......38
Grupo p4......39
Grupo p4mm......40
Grupo p4mg......41
Grupo p3m1......42
Grupo p6mm......43
Los grupos no localizados en Valladolid......44
Grupo p3......44
Grupo p31m......44
Grupo p6......45
Discusión......46
Referencias bibliográficas......47

Introducción

> *Why water boils at 100ºC and methane at -161ºC, why blood is red and grass is green, why diamond is hard and wax is soft, why glaciers flow and iron gets hard when you hammer it, how muscles contract, how sunlight makes plants grow and how living organisms have been able to evolve into ever more complex forms? – The answers to all these problems have come from structural analysis*[1].

El estudio de los minerales y las rocas, es la puerta al estudio de la vida, en tanto en cuanto es la primera aproximación a los elementos que podemos hacer desde una perspectiva científica. No obstante, su comprensión es difícil, dada la variabilidad en la que se nos presentan las mismas especies; tanto, que los expertos solo se atreven a caracterizar algunos cientos de ellas con un mero análisis visual. Se hacen, pues, imprescindibles, métodos más precisos para el reconocimiento de los distintos elementos y compuestos minerales, fundamentados, claro, en características que nos dirijan unívocamente a cada uno de ellos.

Una de las más cautivadoras facetas de la mineralogía es la cristalografía, que nace de la fascinación que despierta tanto en el no iniciado como en el experto, la presencia de impresionantes simetrías en los cristales, que son, por su estética, seductoras de todas las miradas. La sensación de magia se multiplica al darnos cuenta de que esas «piedras» son como son ya en la naturaleza; que no han sido «maltratadas» por la mano del ser humano; que así sean generadas en la tierra, en el suelo, así las encontraremos.

No importa cuánto profundicemos en el estudio de estos cristales (en la cristalografía en sí misma), se hace imprescindible fijar la atención en las relaciones espaciales que presentan los cuerpos, es decir, en su geometría. En el instante en el que dejamos de «simplemente mirar» y empezamos a «observar», los niveles de abstracción y concreción se alteran descolocándonos irremediablemente, cambiando nuestra percepción de la realidad para aproximarnos a una visión más precisa de lo que tenemos delante. Pero la complejidad del entorno nos obliga a modelizar, a simplificar, y para ello necesitamos una serie de reglas básicas que nos permitan avanzar en este juego y disfrutarlo en las más altas cotas. Lograr ese liviano dominio de la geometría supone comprenderla un poco más, adentrarnos en sus fundamentos, y eso es algo que puede costar mucho al adolescente (inquieto por lo inmediato y a veces indiferente al estudio sosegado de cualquier materia).

Podemos comenzar definiendo al **cristal** de una manera clásica como la forma poliédrica regular limitada por caras lisas, que es asumida por un compuesto químico debido a la acción de fuerzas atómicas cuando este pasa de los estados líquido o gaseoso al sólido en unas

1 Max Ferdinand Perutz, Premio Nobel de Química en 1962, pronunció estas palabras en el aniversario de la cristalografía de rayos X: «¿Por qué el agua hierve a 100ºC y el metano lo hace a -161ºC?, ¿por qué la sangre es roja y la hierba es verde?, ¿por qué el diamante es duro y la cera blanda?, ¿por qué los glaciares se deslizan y el hierro se vuelve más duro a medida que lo golpeamos con el martillo?, ¿cómo se contraen los músculos?, ¿cómo es que el sol hace crecer las plantas? ¿y cómo han conseguido los organismos vivos evolucionar a formas más complejas? –La respuesta a todas estas preguntas ha llegado de la mano del análisis estructural».

condiciones ideales. De un modo más actual se puede considerar al cristal como una estructura con alineamiento de orden a larga distancia resultado de empaquetamiento no casual de átomos o celdas unidad, presentando una función de correlación oscilatoria que no se anule a largas distancias.

Detrás de esa –más o menos- compleja definición, se esconde una de las herramientas más importantes de la ciencia: la posibilidad de dilucidar, a partir de la estructura que adquieren los átomos, qué especie mineral tenemos ante nosotros y qué propiedades tiene. Gracias a las características de los cristales nació y creció la cristalografía de rayos X que luego sirvió, por ejemplo, para comprender la doble hélice de ADN y descifrar el código genético. Es la llamada Ley de Bragg[2]: al lanzar un haz de rayos X sobre un cristal, parte de estos se difracta y al imprimirse sobre un detector forma un patrón. Esto permite asociar un patrón determinado a una geometría molecular concreta, es decir, un patrón para cada especie mineral. Antes de la invención de esta técnica, Pierre Currie escribió:

> *Lorsque certaines causes produisent certains effects, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Lorsque certains effets rélèvent une certain dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes que lui ont donné naissance*[3].

Así que esta ley (de la simetría) de Curie, junto con la ley de Bragg, ponen a nuestra disposición dos de las herramientas básicas para empezar a trabajar. Pero, ¿qué nos falta? Algo básico: conocer las simetrías posibles.

Evidentemente, las moléculas de un cristal se ordenan en las tres dimensiones del espacio en una de muchas opciones posibles; concretamente, en uno de los 32 grupos[4] puntuales de simetría, agrupados hoy en día en 7 sistemas, a saber: cúbico o isométrico, tetragonal, ortorrómbico, hexagonal, trigonal, monoclínico y triclínico. No es momento de profundizar en estos grupos (el autor tampoco sería capaz), aunque sí de plantearse cómo ayudar al alumnado a integrar estas nociones en su saber. Quizá obviar las tres dimensiones y simplificar las cosas a las dos o, incluso, a una dimensión sea un posible e interesante camino a seguir.

Partiendo de la sencillez de los grupos de simetría unidimensionales, entre los que solo se dan 7 posibilidades, pasando por la dificultad intermedia de elucidar los 17 grupos de simetría plana o bidimensional, aplicando todos a algo cotidiano, como la decoración urbana (tabiques,

2 William Henry Bragg y su hijo William Lawrence Bragg (padre e hijo) determinaron la estructura cristalina del $NaCl$ (cloruro de sodio o sal común), del ZnS (sulfuro de cinc, una sal fotoluminiscente) y del diamante (la segunda forma más estable del carbono, siendo la primera el grafito), lo que les valió el Premio Nobel de Física en 1915.

3 Pierre Curie, ganador del Nobel de Física en 1903 junto a su esposa Marie Curie, dijo en su trabajo sobre la simetría en los fenómenos físicos, la simetría de un campo eléctrico y de un campo magnético (1894): «Cuando ciertas causas producen ciertos efectos, los elementos de simetría de las causas deben encontrarse en los efectos producidos. Cuando ciertos efectos revelan una cierta asimetría (ausencia de elementos simétricos), esta asimetría debe encontrarse en las causas que los han generado».

4 En realidad, existen 230 grupos de simetría puntual, pero al aplicar el *Teorema de restricción cristalográfica* (que limita las simetrías rotacionales de un cristal a los órdenes 2, 3, 4 y 6), quedan solamente 32 posibilidades para el ordenamiento de las moléculas de un cristal.

frisos, adornos urbanos, embaldosado, etc.), podría ser más sencillo para la alumna o el alumno, asimilar estos conceptos, en apariencia abstractos, y extrapolarlos a la mineralogía.

Podemos continuar dividiendo la cristalografía en tres secciones: geométrica, física y química. Las dos últimas, relacionan propiedades físico químicas del mineral con su geometría, explican por qué un mineral es más duro que otro a partir de la ordenación de sus moléculas, aspectos, estos, que se escapan del presente trabajo; pero sí introduciremos aquí, brevemente, la rama matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio: la Geometría.

Sus orígenes se remontan al milenio II AEC, en las antiguas Mesopotamia y Egipto, cuando se hicieron numerosos descubrimientos empíricos relacionados con longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. En nuestro caso, trabajaremos con la geometría euclidiana, que se fundamenta en los cinco postulados[5] que Euclides dejó reflejados en su obra «Los Elementos» (~300 AEC).

5 Postulados de la geometría euclidiana:
I. Dados dos puntos cualesquiera se puede trazar un segmento o una recta que los una.
II. Cualquier segmento se puede prolongar de forma continua en una recta ilimitada con la misma dirección.
III. Se puede trazar una circunferencia dados un punto y un radio cualesquiera.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
V. Este postulado, denominado «de las paralelas», tiene dos variantes:
a) Si los ángulos internos formados a un mismo lado de una recta que corta a otras dos, forman ángulos menores que dos ángulos rectos, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado de esos ángulos.
b) Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Ubicación en el currículo

En casi cualquier curso de la Educación Secundaria pueden encontrarse numerosas referencias a la geometría y a la simetría[6]. En cuanto a las Ciencias Naturales (Biología y Geología), es en 4º de ESO y en 1º de Bachillerato cuando se ha de abordar la cristalización de los minerales con más profundidad, de modo que es en estas materias en las que se encuadra el presente trabajo.

Se trataría, pues, de incluir un recorrido peatonal en una de dos modalidades:

- Organizado → la profesora o el profesor con el grupo, haciendo paradas en los hitos marcados e incluyendo las explicaciones pertinentes.
- Dirigido → la profesora o el profesor dan las indicaciones al alumnado para que sea éste el que, por su cuenta y en su tiempo libre, complete el paseo, fijándose en los hitos propuestos.

Competencias

LOE	**LOMCE**	**Justificación**
Competencia matemática	Competencia Matemática y Competencia Básica en Ciencia y Tecnología.	El alumnado hace una aproximación científica a algo tan cotidiano en nuestro entorno como las formas geométricas y su simetría.
Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.		
Tratamiento de la información y competencia digital.	Competencia Digital	El alumnado puede recurrir a un software muy variado para mejorar su comprensión del contenido y para localizar simetrías.
Autonomía e iniciativa personal.	Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor	El alumnado puede buscar y construir figuras que presenten las simetrías estudiadas.
Competencia para aprender a aprender.	Aprender a Aprender	

6 Matemáticas de 1º, 2º, 3º y 4º de ESO, Dibujo Técnico de 1º de ESO y de 1º de Bachillerato, Diseño de 2º de Bachillerato.

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo final de máster es:

> Catalogar una muestra de los siete grupos de simetría espacial monodimensional (frisos) y de los diecisiete grupos de simetría espacial bidimensional (mosaicos) en el mobiliario urbano de la ciudad de Valladolid. Se pretende así dar al alumnado herramientas atractivas que le faciliten la correcta comprensión y entendimiento de la geometría intrínseca a estas estructuras, extrapolable luego a numerosas áreas del conocimiento como la matemática, la física, la química, la cristalografía o la geología.

Son objetivos específicos de este trabajo:

1. Localizar un ejemplo de cada uno de los siete grupos de simetría espacial monodimensional en el mobiliario urbano de la ciudad de Valladolid.

2. Localizar un ejemplo de cada uno de los diecisiete grupos de simetría espacial bidimensional en el mobiliario urbano de la ciudad de Valladolid.

3. Plantear sendos recorridos peatonales, que permitan apreciar cada uno de los grupos de simetría.

4. Plantear alternativas al recorrido para situaciones en las que sea imposible o poco recomendable salir del centro educativo.

5. Plantear actividades que impliquen la participación activa del alumnado en el proceso de aprendizaje.

6. Plantear un método de evaluación.

Simetría

¿Qué es la simetría?

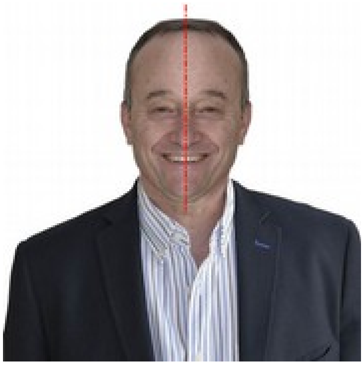


Figura 1. Magnífico Sr. Rector de la Universidad de Valladolid. Cara simétrica respecto a una línea vertical

Figura 2. Magnífico Sr. Rector de la Universidad de Valladolid. Cara real

Cuando decimos que algo es simétrico, normalmente estamos pensando en la simetría derecha-izquierda. Un diseño o un objeto es simétrico en estos términos si la mitad de la derecha es la imagen especular de la mitad de la izquierda. El eje de simetría separa las dos mitades y, si colocamos un espejo a lo largo de esta línea el objeto parecerá estar completo. La reflexión de la mitad derecha hace las veces de la mitad izquierda oculta. Es lo que se denomina un fenómeno de ***enantiomorfismo***, ya que las dos mitades consideradas no son idénticas, no pueden superponerse, sino que cada punto tiene un equivalente en el reflejo. Tendemos a considerar nuestro cuerpo, nuestras extremidades y nuestro propio rostro, ejemplos de esta simetría especular, incluso cuando podemos detectar la más sutil diferencia entre las dos mitades.

Figura 3. Copos de nieve en la naturaleza

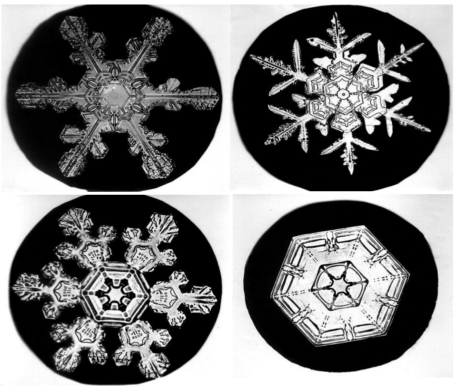


Figura 4. Distintas configuraciones en copos de nieve

Pero este es solo un ejemplo de simetría geométrica. Un copo de nieve tiene más complicación. Podemos girarlo en ángulos de 60º en torno a su centro y encajaría exactamente en su forma original. Esto es lo que se llama simetría rotacional. El número de veces que hay que hacer este movimiento para que todos los puntos del objeto vuelvan a su posición original es el llamado orden de rotación. Habría que realizar una rotación de 60º seis veces para lograr una revolución completa de 360º, así que la rotación del copo de nieve es de orden 6, o lo que es lo mismo, presenta simetría séxtuple. Es evidente que una rotación de 120º o una de 180º, también giran el copo de nieve a una posición equivalente a la original, en la que cada punto individual ocupa una posición diferente, pero definimos los cuerpos por el grado de simetría rotacional de mayor orden.

La última operación básica implicada en la simetría es la translación, en la que un elemento se repite a lo largo de una línea, como lo pueden hacer los olivos en un olivar (suponiendo que cada árbol es idéntico al anterior, y se comportan como unidades repetitivas).

Por tanto, podemos definir la simetría como: la transformación que aplicada a un objeto conserva todas sus dimensiones y sus relaciones angulares, de modo que el objeto coincide consigo mismo.

Figura 5. Olivar en Jaén (Andalucía)

Grupos de simetría

Una operación simétrica, para un subconjunto X del plano, es una isometría f del plano que proyecta X en sí mismo, es decir, que $f(X)=X$. Los puntos individuales de X no tienen por qué ser fijos, pero el conjunto como un todo lo es. El conjunto de todas las operaciones simétricas de X se denota como $Sym(X)$ y recibe el nombre de grupo de simetría de X. En resumen, un grupo de simetría es la colección de simetrías de una figura (plana, en nuestro caso).

La palabra «grupo» se ha incluido en esta definición porque los grupos de isometría son más que simples conjuntos de estas, de forma que tienen cierta estructura algebraica. Podemos multiplicar dos operaciones simétricas cualesquiera y si cada una de ellas fija cierto subconjunto del plano, entonces, eso mismo hace el producto. Decimos que un conjunto de operaciones de simetría es cerrado para un conjunto plano, respecto de la multiplicación, cuando el producto de dos o más operaciones de simetría es equivalente a una transformación ya descrita por otro elemento de simetría del Grupo.

Un Grupo es un tipo concreto de sistema algebraico. Nos encontramos ante un conjunto en el que una operación binaria queda definida de forma que satisface ciertas propiedades llamadas axiomas de grupo. La operación que llamamos «producto» no tiene por qué estar relacionada con la multiplicación de números; de hecho, los elementos del conjunto no tienen por qué ser números, podrían ser matrices, funciones o incluso puntos. Para el tipo de grupos que estamos observando, los elementos del conjunto son operaciones simétricas como rotaciones, translaciones o simetrías especulares. Determinamos que las operaciones simétricas son binarias cuando podemos aplicarlas consecutivamente.

Para que un sistema algebraico con operaciones binarias pueda considerarse un grupo, ha de satisfacer los cuatro **axiomas de grupo**:

1. Es **cerrado**: el producto de dos elementos cualesquiera del conjunto es otro elemento del conjunto.

   $$\forall a, b \in G \ : \ a \cdot b \in G$$

2. **Propiedad asociativa**: las operaciones simétricas pueden asociarse de cualquier forma (mientras mantengan el orden).

   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. **Elemento neutro**: en el grupo ha de haber una operación simétrica neutra (e) que deje invariable la figura.

   $$\exists e \ \forall a \in G \ : \ e \cdot a = a \cdot e = a$$

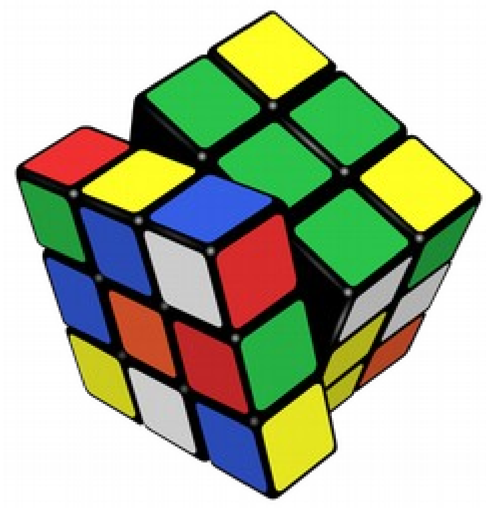


Figura 6. La variedad de manipulaciones que podemos hacer a un cubo de Rubik forman un grupo

4. **Elemento inverso**: en el grupo ha de haber una operación simétrica inversa (b) por cada operación simétrica (a), que al multiplicarlas entre sí, den como resultado el el elemento neutro.

   $$\forall a \in G \ \exists a^{-1} \ : \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Grupo de simetría puntual

En geometría, un grupo puntual es un grupo de simetrías geométricas (isometrías) que mantiene invariante al menos un punto. Los grupos puntuales pueden existir en un espacio euclidiano con cualquier dimensión, y cada grupo puntual en la dimensión d es un subgrupo del grupo ortogonal $O(d)$.

Grupo de simetría espacial (GSE)

Un grupo de simetría espacial, ha de ser cerrado, debe cumplir la propiedad asociativa y contar con elemento neutro y elemento inverso. Los elementos de simetría que se asocian respecto de la operación producto para dar en estas estructuras de grupo, cuando solo están implicadas dos dimensiones o sea, el plano, son:

- elementos que fijan como invariante un punto
  - rotación
  - (elemento identidad)
  - simetría especular
- traslaciones axiales
  - longitudinal (1D y 2D)
  - transversal (2D)
- simetría especular de deslizamiento

GSE 1D

Prieto et al. (2014), en un trabajo reciente sobre decoraciones cerámicas de época vaccea, ilustran aspectos de los GSE unidimensionales, de esta manera:

> Cuando observamos los ornamentos decorativos […] nos llaman poderosamente la atención los motivos geométricos dispuestos en composiciones de simetría, que realzan la belleza de estos […]. Analizando estas disposiciones, se constata que muchas de ellas son fruto de la repetición de una pequeña unidad básica —en términos cristalográficos, motivo o base estructural— que se desplaza a lo largo de una dirección, […] lo que da lugar a frisos o grecas, como un sistema repetitivo periódico monodimensional. Estas repeticiones se pueden extender a dos direcciones que generan figuras repetitivas bidimensionales ocupando el espacio sin dejar huecos, como lo hacen los mosaicos. Estas vistosas estructuras decorativas, que son elementos comunes de la geometría y la pintura, se dispusieron a menudo de acuerdo con las leyes de la simetría. Si esta simetría plana se extiende al espacio tridimensional, se obtienen edificios cristalinos simétricos, tal como sucede con sólidos cristalinos y minerales. Todas estas

repeticiones simétricas cumplen con una serie de propiedades derivadas del formalismo matemático de la teoría de grupos, en la que un conjunto de operaciones o transformaciones geométricas deja invariante cierta entidad geométrica o física.

Existen 7, 17 y 230 posibles asociaciones de elementos de simetría espacial con estructura matemática de grupo, respecto de la operación producto, dando lugar a los grupos de simetría espacial mono, bi y tridimensional (Hahn & International Union of Crystallography, 2005), respectivamente.

Así pues, son los 7 grupos de simetría espacial los que […] [explican la] distribución unidimensional continua, ordenada y periódica (red lineal) de un motivo o celda unidad que constituye, sin dejar huecos, una cenefa, greca o friso. Esta decoración se puede efectuar considerando diversos procesos y utilizando elementos de simetría, que repiten un motivo periódicamente de modo que rellenan el espacio de forma regular e ilimitada. En el caso de cenefas, frisos y grecas, las repeticiones de espaciado constante, denominado parámetro traslacional "***t***", a lo largo de una dirección se denominan traslaciones. A partir de un motivo simple, se puede generar un friso por simple traslación de dicho motivo de modo repetitivo y periódico en una dirección axial. De modo que los motivos simples, generalmente rectangulares, se superpongan sobre su homologo simétrico al desplazarse un numero entero de parámetros ***t***, arista del paralelogramo, en la dirección axial. También se pueden generar frisos mediante otro tipo de transformaciones, en torno a elementos geométricos denominados de simetría, que hacen que los motivos sean idénticos e indistinguibles. Los elementos de simetría básicos (ES) pueden ser simples o compuestos.

En el espacio plano, los elementos simples, además de las traslaciones (***t***), son puntos de rotación (***n***) y líneas de reflexión (***m***). Los primeros generan figuras simétricas, homologas por rotación en torno a un punto geométrico, hasta alcanzar el motivo generador de partida. Ello implica rotaciones angulares de 2π/n, siendo n el orden de rotación que caracteriza al elemento de simetría.

En el caso unidimensional de grecas, cenefas y frisos solo son compatibles los órdenes de rotación 1 y 2. Es decir, giros de 360º o de 180º para generar motivos repetitivos homólogos y simétricos. El primero de los elementos de simetría se denomina identidad, "***1***", y el segundo punto de rotación binario, "***2***". Generan respectivamente, uno y dos motivos idénticos dispuestos a lo largo de la dirección axial en la que se repite el motivo decorativo. Se representan internacionalmente mediante su orden de rotación "***1***" y "***2***" y en el plano de proyección, mediante un punto hueco "" y una lente biconvexa "⬮", respectivamente. La reflexión (***m***) genera la repetición de motivos, como imágenes especulares equidistantes, a un lado y otro de la línea de reflexión. Este elemento de simetría puede ser co-lineal con la dirección de repetición periódica del motivo decorativo, línea de reflexión axial, o perpendicular a dicho eje de periodicidad, línea de reflexión transversal. Ambas líneas de reflexión se representan por la letra “***m***” y mediante una línea de trazo continuo “———”, en el plano de proyección. Estos operadores simples pueden combinarse entre si y generan los operadores de simetría compuestos. En la simetría del plano solo es posible generar líneas de reflexión con deslizamiento, como resultado del producto de una línea de reflexión axial ***m***, con una traslación de modulo [t/2], en la dirección axial de periodicidad. Su representación internacional es mediante la letra “***g***” y en el plano de proyección mediante una línea de trazos discontinuos “---------”.

Las restricciones impuestas por el espacio unidimensional hacen que las combinaciones de elementos de simetría congruentes, no repetitivas y con estructura de grupo respecto de la operación producto, sean exclusivamente siete. Cristalográficamente se denominan grupos espaciales monodimensionales y son los que dejan invariante la recta que hemos denominado dirección axial o de periodicidad. En la Figura 7, se recoge en la primera columna una representación ilustrativa de la disposición de motivos que originan el grupo espacial; la segunda columna recoge la nomenclatura general, anteponiendo la letra F mayúscula —identificativa de sistemas de una dimensión, frisos— y entre paréntesis su notación internacional; en la tercera columna se referencia y efectúa una descripción de los elementos de simetría que poseen cada uno de los 7 Grupos de Simetría Espacial (GSE) mono dimensionales.

Los dos primeros GSE (11) y (12) surgen de considerar como únicos elementos de simetría generadores, las traslaciones y las rotaciones binarias. En ambos grupos además de los elementos generadores, existe la identidad “***1***” como elemento de simetría, dado que cada motivo se superpone consigo mismo, quedando invariante. En el primer caso, mediante un giro de 360º y, en el segundo, mediante la aplicación de las potencias sucesivas al operador de simetría, 2, $2^2 \equiv 1$, lo que le confiere la característica de grupo cíclico. La presencia de líneas de reflexión como elemento generador del grupo espacial da lugar a dos nuevos GSE, (11m) y (1m1), según la línea de reflexión se disponga longitudinal (m//t), o transversal (m⊥/t), a la dirección axial de periodicidad, respectivamente. En la notación simbólica internacional para frisos, el primer dígito hace referencia al orden del elemento de rotación característico del GES, el segundo al elemento de simetría transversal y el tercero a la simetría de recta invariante tomada como dirección axial de periodicidad. La presencia de dos líneas de reflexión (***m***), transversal y longitudinal a la dirección de traslación, da lugar a la existencia de un punto de rotación binario en su intersección, generando el grupo espacial (***2mm***). Por ultimo, la transformación de los elementos de simetría de reflexión (***m***), en líneas de deslizamiento (***g***), genera dos nuevos grupos espaciales (***11g***) y (***2mg***). Así pues, todo grupo espacial tiene un subgrupo constituido por el conjunto de traslaciones “***t***”, que a su vez es conmutativo, todas sus representaciones son monodimensionales y en todos los GSE existe la identidad.

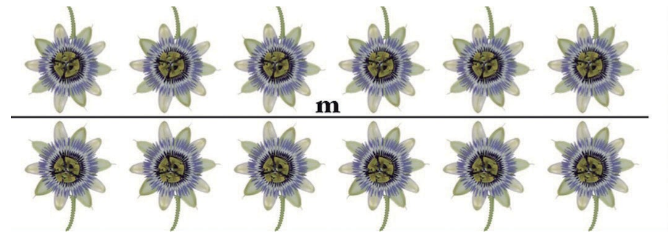
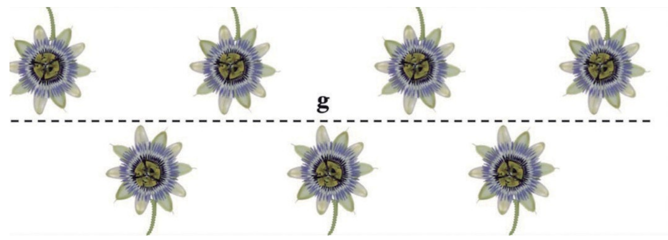
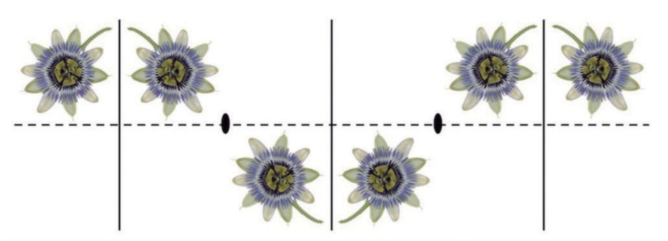
Grupos Espaciales de Simetría Monodimensional	GSE	Elementos de Simetría
	F11 (11)	Traslación axial. El periodo de traslación, ***t,*** es la distancia entre dos puntos idénticos y consecutivos.
	F12 (12)	Traslación axial junto a un punto de rotación binario (***2***), que implica rotaciones de 180º en la propia línea de traslación.
	F1m (11m)	Traslación axial combinada con una línea de simetría especular de reflexión (***m***), longitudinal a la traslación.
	Fm1 (1m1)	Traslación axial combinada con una línea de reflexión especular (***m***), perpendicular a la traslación.
	Fmm (2mm)	Combinación de dos líneas de simetría especulares de reflexión (***m***), una transversal y otra longitudinal a la traslación, que generan puntos de rotación binaria (***2***) en su intersección.
	F1g (11g)	Combina traslación con una línea de simetría especular de deslizamiento (***g***), fruto de combinar una reflexión con una traslación fraccionaria ½t.
	Fmg (2mg)	Tiene líneas de simetría especular, transversales y longitudinales a la dirección de traslación, de reflexión ***m***, y de deslizamiento ***g***, respectivamente. Generan puntos de rotación binarios.

Figura 7. Nomenclatura, representación y elementos de simetría en los siete Grupos de Simetría Espacial (GSE) monodimensionales (Prieto et al., 2014)

GSE 2D

En este apartado se hace referencia a los grupos de simetría espacial en dos dimensiones, los llamados mosaicos. Se puede observar que este tipo de ornamentos simétricos surgen de la repetición de una unidad básica, denominada motivo, celdilla o paralelogramo fundamental, de forma que recubre el espacio bidimensional sin dejar huecos entre sus unidades básicas, mediante traslaciones periódicas simples o combinadas, de las dos direcciones del espacio.

Cuáles y cuántos grupos de simetría bi (2D) o tridimensional (3D) pueden existir, fue determinado por Pólya y Niggli en 1924. Determinaron que solo son posibles 17 grupos planos, los cuales son la base para generar mediante apilamiento, según ciertas reglas de simetría, los 230 grupos cristalográficos tridimensionales. Estos 17 grupos cristalográficos de simetría bidimensional (GSE-2D) eran conocidos mucho antes de que se encontrara la resolución matemático-cristalográfica, y utilizados en el recubrimiento ornamental de numerosas obras de arte.

Antes de pasar a la descripción de los 17 GSE-2D veamos algunos conceptos fundamentales.

Redes de Bravais

Si tomamos cualquier punto de un patrón repetitivo y le aplicamos todas las translaciones posibles, se obtiene una red compuesta por unidades básicas. Estas unidades básicas con forma de paralelogramos, y constituidas por motivos que repetidos periódicamente en 1, 2 o 3 direcciones del espacio dan lugar a frisos y cenefas, mosaicos o cristales, sin dejar huecos entre sí, son conceptualmente las denominadas redes de Bravais. Estas redes describen los centros geométricos de ordenamiento de los puntos de la red, definiendo la simetría translacional de la figura (o del cristal). Aplicando la teoría de grupos se puede demostrar que existe una única red de Bravais unidimensional, 5 redes bidimensionales y 14 tridimensionales, respectivamente. Las unidades repetitivas que genera la red de Bravais, celdas o paralelogramos fundamentales, deben poseer una determinada simetría para poder recubrir el espacio sin dejar huecos (compatibilidad con las traslaciones periódicas) y además, para asegurar que ese recubrimiento es periódico, es necesario que, sobre dicha celda unidad, actúen determinados elementos de simetría, para dar lugar a la simetría de la red plana. En el caso 2D se presentan tan solo cinco redes bidimensionales que cumplen con las dos condiciones indicadas, y que quedan descritas por paralelogramos primitivos (***p***), con nodos solo en los vértices y con las siguientes características:

- Oblicua: **a ≠ b**; **γ ≠ 90º**
- Rectangular: **a ≠ b**; **γ = 90º**
- Rómbica: **a = b**; **γ≠60º**, **90º**, **120º**
- Cuadrada: **a = b**; **γ = 90º**
- Hexagonal: **a = b**; **γ = 60º ó 120º**

No obstante, la red Rómbica puede ser descrita mediante una red Rectangular de multiplicidad 2, respecto de la celda Rómbica y que tiene nodos en los vértices y centro del rectángulo, celda múltiple centrada (***c***). Por consiguiente, las redes bidimensionales también pueden ser descritas mediante 4 sistemas cristalográficos bidimensionales: Oblicuo (**a≠b**; **γ≠90º**), Rectangular (**a≠b**; **γ=90º**), Cuadrado (**a=b**; **γ=90º**) y Hexagonal (**a=b**; **γ=60º** ó **120º**) con la consideración de que todas las celdas son primitivas, con nodos en los vértices (***p***) y la red Rectangular también puede ser descrita por una celda múltiple centrada en el interior, (***c***). En la figura 1 se recoge una representación gráfica de estas cinco redes cristalográficas bidimensionales y sus celdas fundamentales representativas.

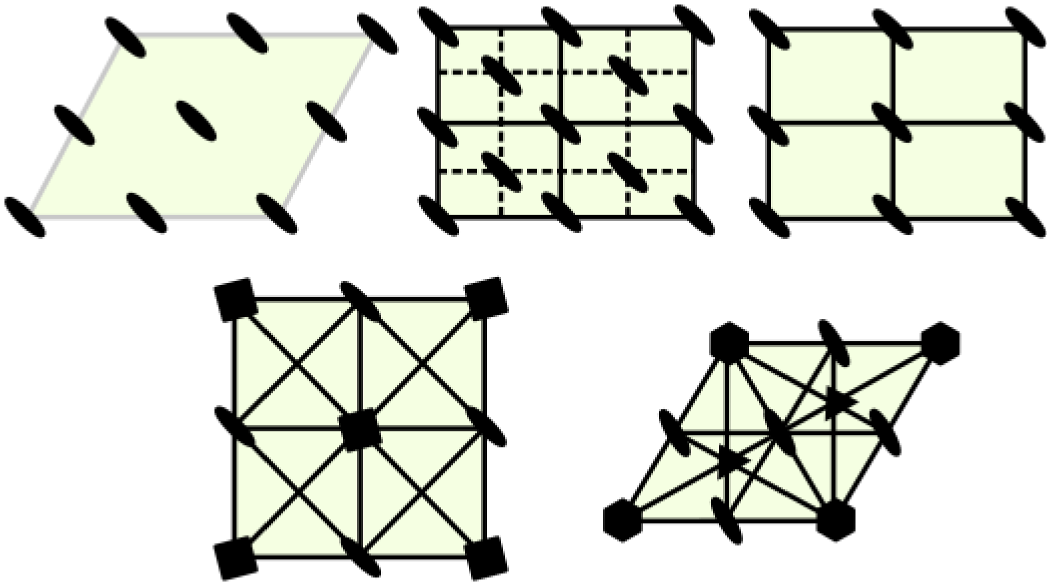


Figura 8: Redes de Bravais para las cristalografías bidimensionales (de izquierda a derecha y de arriba a abajo): oblicua (p), rectangular (c), rectangular (p), cuadrada (p) y hexagonal (p)

Grupos de Simetría Puntual (GSP)

De todas las posibles combinaciones de elementos de simetría (***1, n, -n*** y ***m***), compatibles con la periodicidad {**T**=u**a**+v**b**+w**c**} en el espacio bi y tridimensional, solo existen 10 y 32 posibles asociaciones de elementos de simetría con estructura de grupo matemático, respectivamente. Son los grupos puntuales cristalográficos, denominados así porque dejan invariante un punto en el espacio. Ese punto invariante -común a todos los elementos de simetría del grupo- se toma como centro u origen del sistema de referencia cristalográfico. Así pues, es fácil deducir que la existencia de un elemento de rotación de orden **1**, **2**, **3**, **4** y **6** genera, cada uno de ellos junto con sus potencias sucesivas, un grupo puntual diferente. Si a esos 5 grupos puntuales les combinamos con la operación de reflexión "***m***", surgen otros cinco grupos puntuales, denominados como **m**, **2mm**, **3m**, **4mm** y **6mm**, completando el total de 10 GSP (Figura 9), bidimensionales. En la figura…. se recoge una representación gráfica de estas 10 estructuras de los grupos cristalográficos bidimensionales.

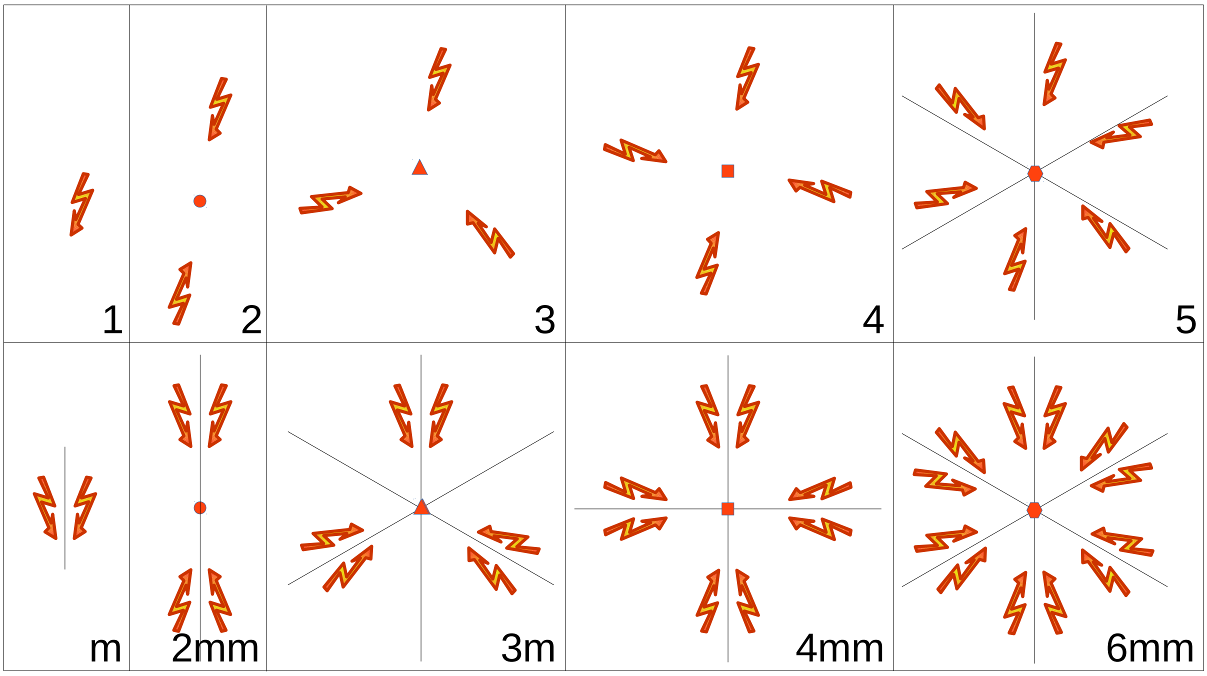


Figura 9: Ejemplos de los 10 grupos de simetría puntual

Grupos de Simetría Espacial (GSE-2D)

Los grupos de simetría espacial 2D surgen de modo directo al aplicar la operación producto a los grupos puntuales de simetría 2D con el conjunto de las traslaciones globales (tipos de redes) y las traslaciones fraccionarias (líneas especulares de deslizamiento). Para generar los GSE-2D se precisa, en primera opción, mantener una relación biunívoca de los elementos de simetría de las 4 celdas fundamentales y de los grupos puntuales, asociándolos de modo congruente, lo cual restringe a tan solo 17 las posibles combinaciones. Una exploración directa de las celdas fundamentales bidimensionales permite deducir la máxima simetría compatible con una celda oblicua solo con los puntos de rotación binarios. Asimismo, se puede apreciar que las celdas rectangulares pueden compatibilizar, además de puntos de rotación de orden 2, líneas especulares de reflexión. Análogamente, los puntos de rotación de orden 4 y las reflexiones, pueden compatibilizarse con una red cuadrada, y por último una celda hexagonal, es compatible con órdenes de rotación 3, 6 y reflexiones especulares. La identidad y la traslación presentan compatibilidad con todo tipo de red.

Así pues, la aplicación directa de las 5 redes de Bravais a los 10 grupos de simetría 2D de modo congruente con la simetría implícita de la red, genera los siguientes GSE directos:

- Sistema Oblicuo: **p1** y **p2**
- Sistema Rectangular: **pm**, **p2mm**, **cm** y **c2mm**
- Sistema Cuadrado: **p4**, **p4mm**
- Sistema Hexagonal: **p3**, **p3m1**, **p31m**, **p6** y **p6mm**

Luego la aplicación de los 5 tipos de celdas bidimensionales a los 10 GSP, genera de modo directo 13 estructuras de grupo que recubren sin dejar huecos el espacio bidmiensional. Si a esos GSP les aplicamos la posibilidad de transformar las líneas especulares ***m*** en líneas de deslizamiento ***g* –**aplicación de las traslaciones fraccionarias- a la simetría puntual, de modo que no se generen redundancias con los grupos existentes, surgen los grupos de simetría espacial **pg**, **p2mg**, **p2gg** y **p4gm**, que junto con los precedentes dan lugar a los 17 GSE-2D.

Por tanto, para poder describir la notación de los grupos cristalográficos planos, de forma homogéneos con los tratados de cristalografía, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Primero la letra ***p*** o ***c*** en función de que estemos ante una red *primitiva* o ante una red *centrada.*
- Después de una ***p*** hay un número (***1, 2, 3, 4*** o ***6***) que indica el mayor orden del punto de rotación.
- Si hay simetría especular perpendicular al eje X[7] se indica con una ***m*** (*mirror*). En cambio, ***g*** (*glide-reflection*) significa que no la hay pero que sí presenta simetría de deslizamiento.
  Un ***1*** indica que no hay ningún eje de simetría perpendicular al eje X.
- El último lugar lo ocupan los posibles ejes de simetría oblicuos al eje X.

La tabla de la Figura 10 ayuda a identificar estos grupos de simetría por sus características:

7 El «eje X» es en realidad el borde izquierdo de la celda.

Tipo	Red	Rotación más pequeña	Simetrías especulares	Simetrías de deslizamiento	Región generatriz	Notas
p1	Oblicua	Ninguna	No	No	1 unidad	Las únicas simetrías son las traslaciones
p211 **p2**	Oblicua	½ revolución	No	No	½ unidad	4 tipos a 180º
p1m1 **pm**	Rectangular	Ninguna	Sí	No	½ unidad	2 tipos de líneas especulares de reflexión paralelos
p2mm pmm	Rectangular	½ revolución	Sí	No	¼ unidad	2 tipos de líneas especulares de reflexión horizontales y verticales
p1g1 **pg**	Rectangular	Ninguna	No	Sí	½ unidad	
p2gg pgg	Rectangular	½ revolución	No	Sí	¼ unidad	
p2mg pmg	Rectangular	½ revolución	Sí	Sí	¼ unidad	Las líneas especulares de reflexión son paralelas entre sí
c1m1 **cm**	Rómbica	Ninguna	Sí	Sí	½ unidad	
c2mm cmm	Rómbica	½ revolución	Sí	Sí	¼ unidad	Las líneas especulares de reflexión son perpendiculares entre sí
p4	Cuadrada	¼ revolución	No	No	¼ unidad	
p4mm p4m	Cuadrada	¼ revolución	Sí	Sí	⅛ unidad	Los centros de rotación están en las líneas especulares de reflexión
p4gm p4g	Cuadrada	¼ revolución	Sí	Sí	⅛ unidad	Los centros de rotación están en las líneas especulares de reflexión
p3	Hexagonal	⅓ revolución	No	No	⅓ unidad	
p3m1	Hexagonal	⅓ revolución	Sí	Sí	1/6 ud.	Los centros de rotación están en las líneas especulares de reflexión
p31m	Hexagonal	⅓ revolución	Sí	Sí	1/6 ud.	Los centros de rotación están en las líneas especulares de reflexión
p6	Hexagonal	1/6 rev.	No	No	1/6 ud.	
p6mm p6m	Hexagonal	1/6 rev.	Sí	Sí	1/12 ud.	

Figura 10: Características de los grupos de simetría espacial bidimensionales

Metodología

La propuesta que se presenta desde este Trabajo Final de Máster es la realización de un recorrido peatonal con varias paradas, que permita apreciar y reconocer los distintos grupos de simetría espacial mono y bidimensionales en el mobiliario urbano de la ciudad de Valladolid.

Se trata,en realidad de dos conjuntos de puntos representativos, uno para los GSE-1D y otro para los GSE-2D, localizados en sendos mapas, que habría que recorrer, sin importar el orden, en su totalidad. Aunque se han localizado varios mplos de la mayoría de frisos y mosaicos, solo se han marcado en el mapa los más representativos a juicio del autor.

Se proponen dos maneras de realizar estos paseos peatonales, a saber:

1. Paseo peatonal dirigido: En esta modalidad, el profesor o profesora determina el orden de la visita y guía a los alumnos acompañándoles durante todo el recorrido. En cada parada será la persona encargada de resaltar lo más destacado de cada elemento, cada grupo espacial de simetría, aclarando cualquier duda a los alumnos *in situ*.

2. El profesor o la profesora reparten los planos entre los alumnos, que deberán visitar cada hito y localizar el GSE señalado. La ventaja de este método es que puede que en el cada punto encuentre GSE diferentes al mostrado en este trabajo, lo que podría ser especialmente enriquecedor para el grupo, que dispondría de más ejemplos que comparar y estudiar.

Se han confeccionado dos planos, uno para cada paseo peatonal, a la manera de otros trabajos similares (Delgado Iglesias & Medina García, 2014). También se ha imitado el modo de hacer de otros autores a la hora de exponer las fotografáis correspondientes a los distintos GSE (Gilsanz Mayor & Martínez Serrano, 2007; Hernando Pérez, 2012).

Otras propuestas

Una manera directa e inmediata de incorporar las **TIC** (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en este trabajo es la utilización de plataformas como Marble (Rahn, Beschow, Gridel, & Goffmann, 2006), Open Street Map (Haklay & Weber, 2008) o Google Maps (Rasmussen et al., 2005) para, en la vista aérea, intentar localizar grupos de simetría puntual, grupos de simetría espacial mono y bidimensionales (en la planta de edificios, parques, jardines y calles).

Buena parte de los paseos propuestos también se pueden hacer con la funcionalidad *street view* de Google Maps, lo que también supondría una incursión en el uso de estas tecnologías.

Ante la dificultad que podría suponer realizar una salida organizada del centro (aunque es lo más recomendable) se proponen otras alternativas:

- La profesora o el profesor puede confeccionar unas fichas con las fotografías de los elementos expuestos en este trabajo, proponiendo al alumnado que localice e identifique en ellas todos los grupos de simetría espacial que aparezcan en ellas.

- La profesora o el profesor puede confeccionar unas fichas con las fotografías de los elementos expuestos en este trabajo, proponiendo al alumnado que localice e identifique en ellas todos los grupos de simetría espacial concretos que se han descrito para cada una de ellas en este trabajo.
- Formando grupos de entre 4 y 6 alumnos, se les pide localizar en la ciudad de Valladolid dos o tres grupos de simetría espacial tridimensional (los asignados por el docente) y todos los GSE monodimensionales. Deberán elaborar un recorrido al estilo del propuesto aquí.

Evaluación de la actividad

Una vez concluida la actividad o cualquiera de las alternativas propuestas, será menester evaluar el aprendizaje del alumnado. Se proponen para ello dos modelos, uno para 4º de ESO y otro para 1º de Bachillerato, ambos con el mismo fundamento: se trata de desarrollar en el plano algunos de los GSE-1D y GSE-2D estudiados.

Evaluación 4º ESO

A cada alumno se le asignará al azar un GSE-1D, elegirá un GSE-2D y el profesor o profesora le asignará otro GSE-2D de tal modo que se ajuste la dificultad de forma equitativa para todas y todos los estudiantes (atendiendo en este punto al alumnado de necesidades especiales).

Conocidos los 3 GSE, cada estudiante deberá diseñar y elaborar, en papel celofán (transparente), varias copias de la celda que prefiera, montando el friso o el mosaico correspondiente.

El alumno/ deberá identificar el grupo espacial, con celda unidad repetitiva, así como dibujar sobre ella todos y cada uno de los elementos de simetría del grupo.

El profesor o profesora evaluará si ha sido capaz de producir el friso y los mosaicos asignados correctamente y dónde se localizan las dificultades, en caso de haberlas.

Evaluación 1º Bachillerato

A cada alumno se le asignará al azar un GSE-1D, elegirá un GSE-2D y el profesor o profesora le asignará otro GSE-2D de tal modo que se ajuste la dificultad de forma equitativa para todas y todos los estudiantes (atendiendo en este punto al alumnado de necesidades especiales).

Conocidos los 3 GSE, cada estudiante deberá diseñar las celdas necesarias y dibujar, en hojas de papel DIN-A4, el friso y los mosaicos correspondientes.

El alumno/a deberá identificar el grupo espacial, con celda unidad repetitiva, así como dibujar sobre ella todos y cada uno de los elementos de simetría del grupo.

El profesor o profesora evaluará si ha sido capaz de producir el friso y los mosaicos asignados correctamente y dónde se localizan las dificultades, en caso de haberlas.

Paseo por los GSE-1D

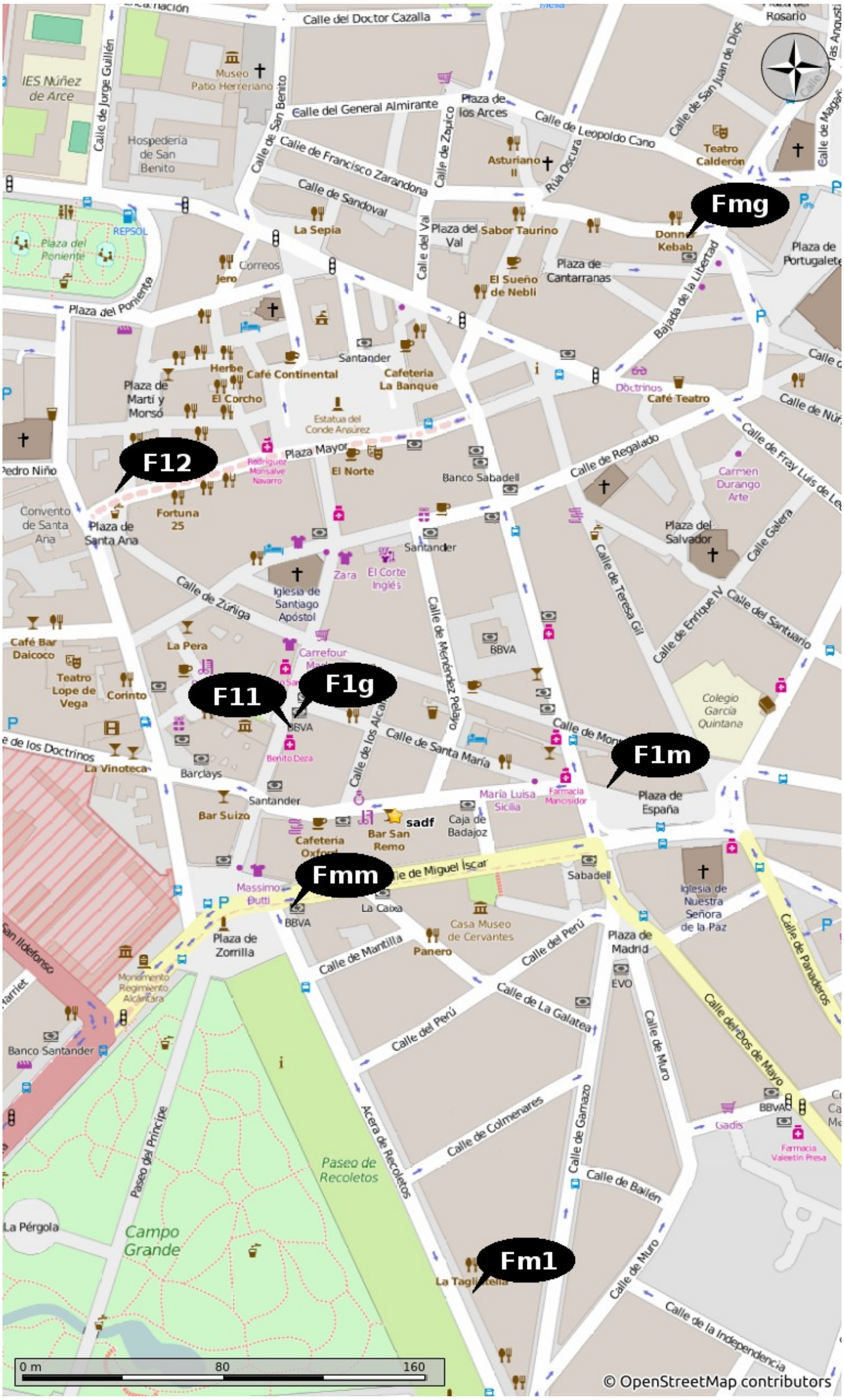


Figura 11: Plano de Valladolid con ejemplos de GSE-1D señalados

La Figura 11 de la página anterior muestra la localización de los siete Grupos de Simetría Espacial monodimensionales en el plano del centro de Valladolid. Fachadas, balcones, y vallas representan los siete GSE-1D en un paseo que puede llevar, en función del detalle con el que se quiera apreciar cada elemento, entre 30 y 90 minutos.

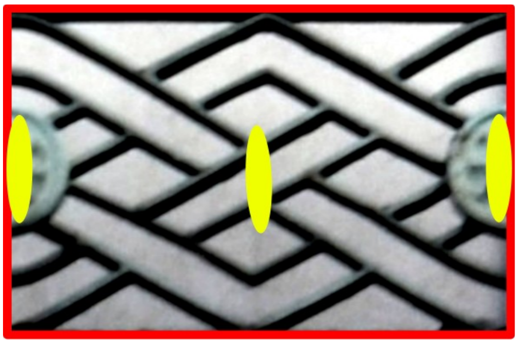
Grupo F11

Es el friso más sencillo, un grupo cíclico finito, conteniendo únicamente las traslaciones múltiplo del vector fundamental que generador. Recuérdese que presentan traslación axial con periodo de traslación, *t*, la distancia entre dos puntos idénticos consecutivos.

La fachada del 19 de la calle Santiago presenta varios frisos que siguen este patrón traslacional a partir de la repetición de motivos vegetales, por lo general hojas, que se repiten en una dirección manteniendo una orientación clara.

···FFFFFFFFFFFFFFFFFFFF···

Grupo F12



Este grupo de simetría, fácil de encontrar en el centro de Valladolid, se caracteriza por incorporar un giro de 180º (π rad) a la traslación propia del grupo anterior, de manera que presenta traslación axial junto a un punto de rotación binario (2) que implica rotaciones de 180º en la propia línea de traslación.

Para representar este Grupo de simetría se han seleccionado los balcones del número 7 de la plaza Santa Ana; más concretamente, el friso que decora los pies de las barandas que, aunque puede costar un poco identificarlo con este grupo por lo intrincado del diseño, es de una belleza incuestionable.

···NNNNNNNNNNNNNNNNN···

Grupo F1m

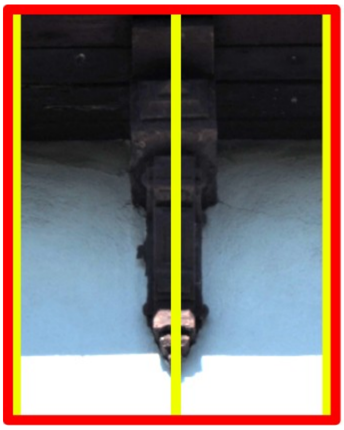
Este grupo, comparado con el primero, incluye una línea de simetría en el propio eje de traslación, por lo que incluye los siguientes elementos de simetría: traslación axial combinada con una línea de simetría especular de reflexión (*m*), longitudinal a la traslación.

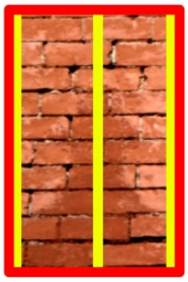
En una de las fachadas más cargadas de adornos de la plaza España, enmarcando el portal número 2, en lo alto de las columnas blancas que flanquean los balcones, se encuentra el motivo que responde a este grupo de simetría.

···EEEEEEEEEEEEEEEEEE···

Grupo Fm1

Presenta una traslación axial combinada con una línea de reflexión especular (*m*), perpendicular a la traslación.



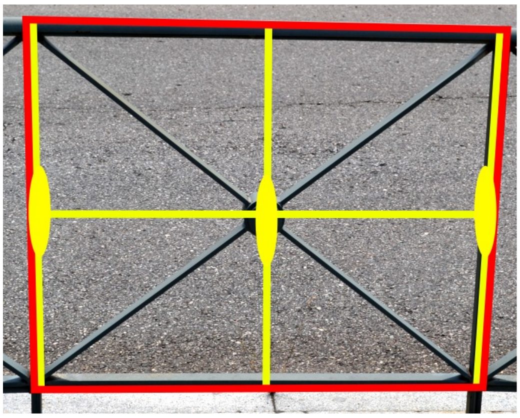


Es este tipo de friso uno de los más abundantes en la arquitectura vallisoletana, de manera que no ha sido difícil dar con un ejemplo ilustrativo. En lo alto de la fachada del 17 de la Acera de Recoletos pueden observarse las vigas que sustentan el tejado, equidistantes, formando este grupo de simetría. Cumpliendo de forma más evidente el requisito de los frisos de no dejar hueco entre sus celdas, bajando un poco la mirada se apreciarse dos tonalidades distintas de ladrillo, conformando una especie de sombra de las propias vigas.

···AAAAAAAAAAAAAAAAA···

Grupo Fmm

Combinando dos líneas de simetría especulares de reflexión (*m*), una transversal y otra longitudinal a la traslación, se generan puntos de rotación binaria (2) en su intersección.



El modelo elegido es una valla presente en numerosos puntos del casco urbano de la ciudad, común también en otras urbes, sito, en este caso, en la esquina de la Acera de Recoletos con la calle Miguel Íscar.

···HHHHHHHHHHHHHHHHH···

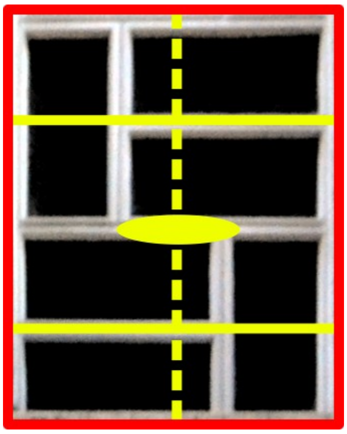
Grupo F1g

En este friso se conjuga la traslación con una línea de simetría especular de deslizamiento (*g*), fruto de combinar una reflexión con una traslación fraccionaria de valor *t*½.

Este ha sido uno de los frisos que más ha costado localizar, y se encuentra en la esquina de la calle Santiago con la calle Sta. María, la fachada contigua a aquella en la que se mostraba el grupo F11. Hay que fijarse en lo alto de la baranda de los balcones, en el friso que los adorna en la parte más alta; solo debemos fijarnos en la mitad de éste para observar, como si fueran el avance del motivo a uno y otro lado de un eje, igual que si fueran las huellas de los pasos en la arena de la playa.

···pbpbpbpbpbpbpbpbpbpb···

Grupo Fmg



Este friso tiene líneas de simetría especular, transversales y longitudinales a la dirección de traslación, de reflexión *m*, y de deslizamiento *g*, respectivamente. Genera puntos de rotación binarios (2).

En el número 16 de la calle Macías Picavea encontramos este último ejemplo de friso en una cristalera que, presumiblemente, sirve de iluminación natural a la escalera del inmueble.

···MWMWMWMWMWMWM···

Paseo por los GSE-2D

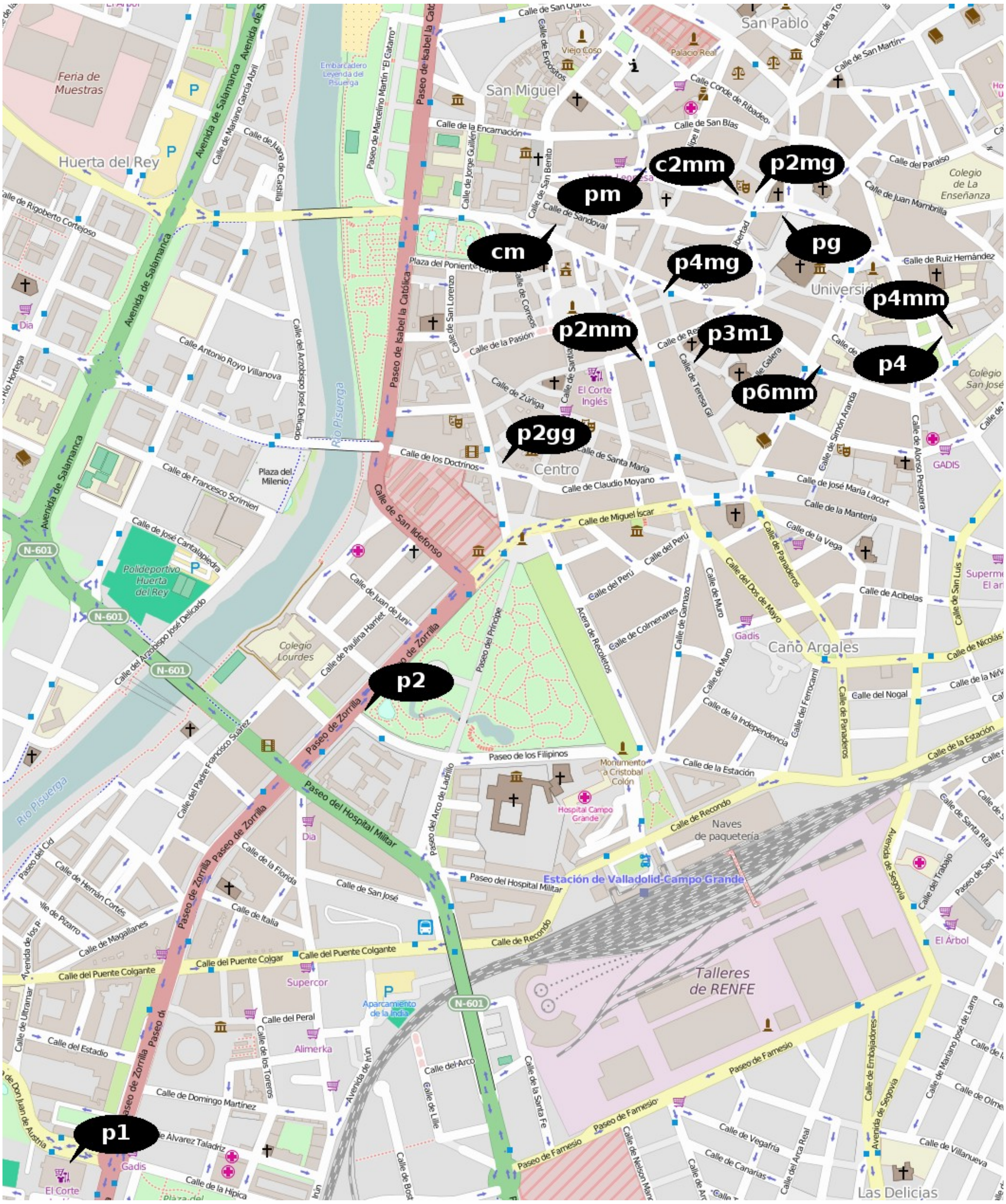
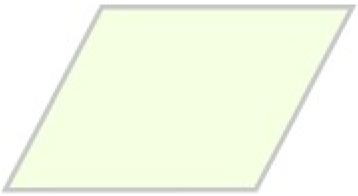


Figura 12: Plano de Valladolid con ejemplos de GSE-2D señalados

La Figura 12 muestra la localización de algunos de los diecisiete Grupos de Simetría Espacial bidimensionales en el plano del centro de Valladolid. Fachadas, balcones, ventanas, y baldosas representan estos GSE-2D en un paseo que puede llevar, en función del detalle con el que se desee apreciar cada elemento, entre 30 y 90 minutos.

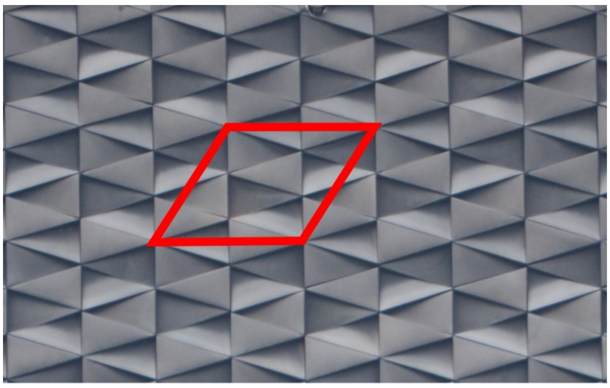
Si lugares como la Alhambra de Granada (Pérez Gómez, 2004) cuentan con los 17 GSE-2D, Valladolid no parece ser tan afortunado, al menos sin ampliar el recurso a los interiores de los edificios. Se describe la simetría para cada GSE-2D y se acompaña esa descripción del diagrama estructural[8] de cada celda.

Grupo p1



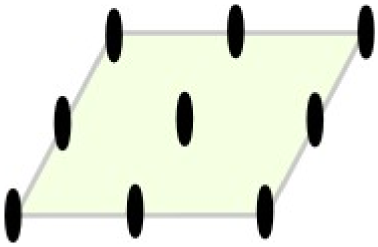
Por no contener giros, reflexiones especulares ni reflexiones con deslizamiento, nos encontramos ante el grupo más sencillo, en el que los únicos movimientos que lo dejan invariable son las traslaciones.

Encontramos un ejemplo de este mosaico, que se repite sin simetrías ni rotaciones, en el adorno del edificio del Corte Inglés del paseo Zorrilla, en cualquiera de sus fachadas.



8 Todos los diagramas son diseños de Martin von Gagern, Wikimedia Commons.

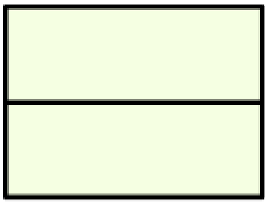
Grupo p2



Este segundo GSE bidimensional añade a las traslaciones del p1 giros de 180º (π rad), es decir, de orden 2.

El ejemplo elegido para este grupo es la tapa de registro de alumbrado público. La de la foto, en concreto, se encuentra en la esquina del paseo de Zorrilla con el paseo de Filipinos, en la acera del Campo Grande.

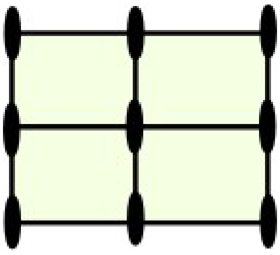
Grupo pm



Este mosaico es el primer grupo de red rectangular que se presenta, con traslaciones determinadas por dos lados perpendiculares y líneas especulares de reflexión paralelos. No contiene giros ni líneas de deslizamiento.

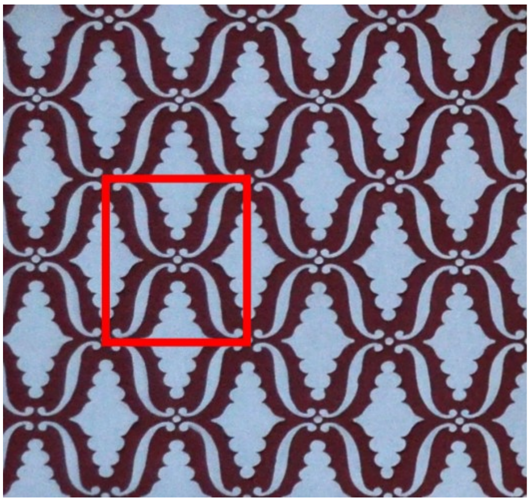
La fachada de ladrillo del número 2 de la calle de San Antonio de Padua ilustra este GSE-2D. Hay que ignorar las puertas de las ventanas y fijarse en el dibujo que hacen los ladrillos: una línea vertical de simetría divide en dos cada balcón; otra separa un balcón del siguiente.

Grupo p2mm

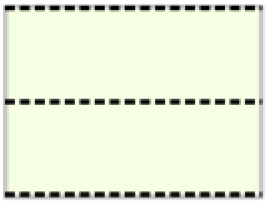


Otro grupo rectangular en el que, además de traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, contiene reflexiones especulares perpendiculares y giros de 180º situados en la intersección de estas.

El edificio de la fotografía se encuentra en la esquina entre las calles Duque de la Victoria y Constitución. La fachada esta adornada con mosaico pintado al estilo árabe, en líneas granates o rojas sobre fondo claro. Es fácil apreciar los dos líneas especulares de reflexión paralelas en cada celda y cómo esta es a la vez simétrica con respecto a las que la rodean por los cuatro puntos cardinales.

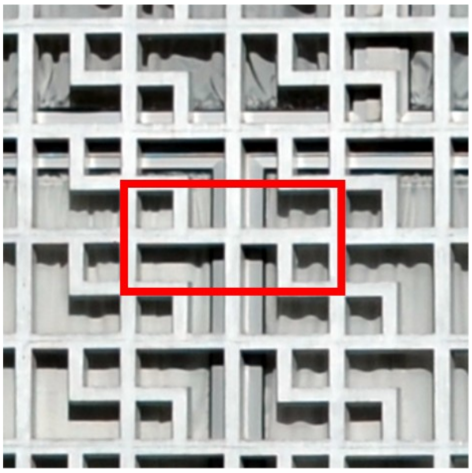


Grupo pg

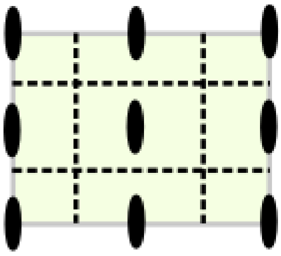


Este grupo únicamente contiene reflexiones de deslizamiento cuyas líneas son paralelas. No hay rotaciones ni reflexiones especulares.

En la plaza de Portugalete, frente a las ruinas de la colegiata de Santa María la Mayor, encontramos esta cubierta en los balcones, que sirve de representación de este GSE-2D.

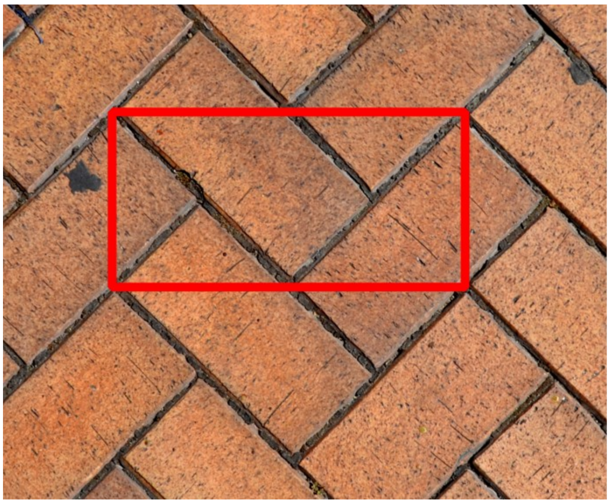


Grupo p2gg

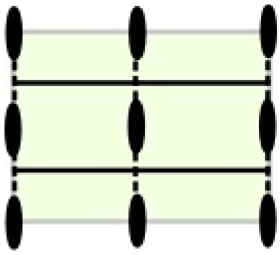


Este GSE-2D contiene centros de rotación de orden 2 (180º) y reflexiones de deslizamiento en dos direcciones perpendiculares. Los centros de rotación no se localizan en las líneas deslizamiento y no hay reflexión especular.

Diseños como este no son raros en el adoquinado de Valladolid, y se ha seleccionado este de la esquina de la calle María de Molina con la calle de los Doctrinos.



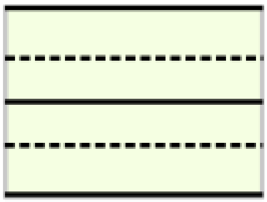
Grupo p2mg



Esta clase de mosaicos tiene dos centros de rotación de orden 2 (180º) y reflexión especular en una única dirección. Presenta reflexiones de deslizamiento cuyos ejes son perpendiculares a la línea especular de reflexión. Los centros de rotación se sitúan en las líneas de deslizamiento.

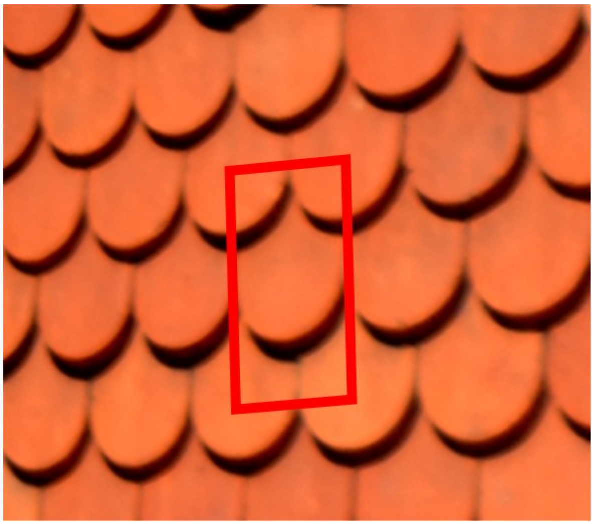
El edificio del Teatro Calderón está adornado por varios mosaicos de distintos tipos (dos de ellos recogidos en el presente trabajo), que lo convierten en una parada especialmente interesante de nuestra propuesta de recorrido. En este caso nos centramos en el mosaico que adorna la fachada principal justo sobre los arcos.

Grupo cm

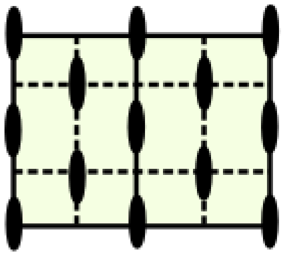


Pertenecen a este grupo aquellos mosaicos con filas desplazadas *t*½ con respecto a la anterior, lo que produce una línea especular de reflexión perpendicular al eje de traslación.

Desde el borde de la acera de la plaza de la rinconada, levantando la vista hacia la fachada lateral del número 9 de la plaza de la Rinconada, la que sobresale por encima del tejado del número 8, podemos ver el cómo la han decorado con estas tejas-escamas que sirven aquí para representar al GSE cm.

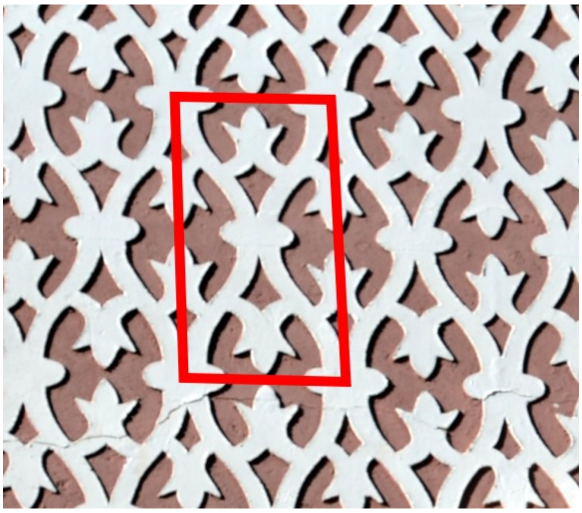


Grupo c2mm

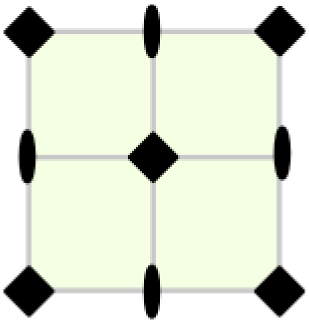


Este grupo tiene líneas especulares de reflexión en dos direcciones paralelas y una rotación de orden 2 (180º) cuyo centro no está en ninguna de ellas: también presenta dos que sí lo están.

Volvemos a considerar el Teatro Calderón, esta vez, una de sus fachadas laterales. Aquí se localizan tres mosaicos a distintos niveles. El que nos ocupa es el superior, con el que representamos este grupo, c2mm.

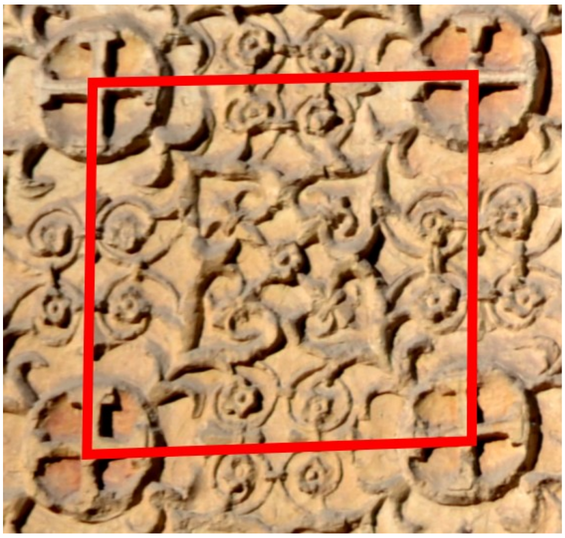


Grupo p4

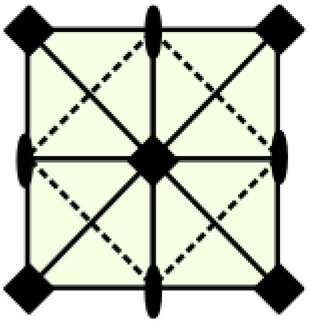


Este mosaico tiene dos centros de rotación de orden 4 (90º) y un centro de rotación de orden 2 (180º). No presenta reflexiones especulares ni de deslizamiento.

La portada del Palacio de Santa Cruz (plaza de Santa Cruz) contiene un mosaico del grupo p4 detrás de los reyes, en lo que sería la luz del arco de medio punto.

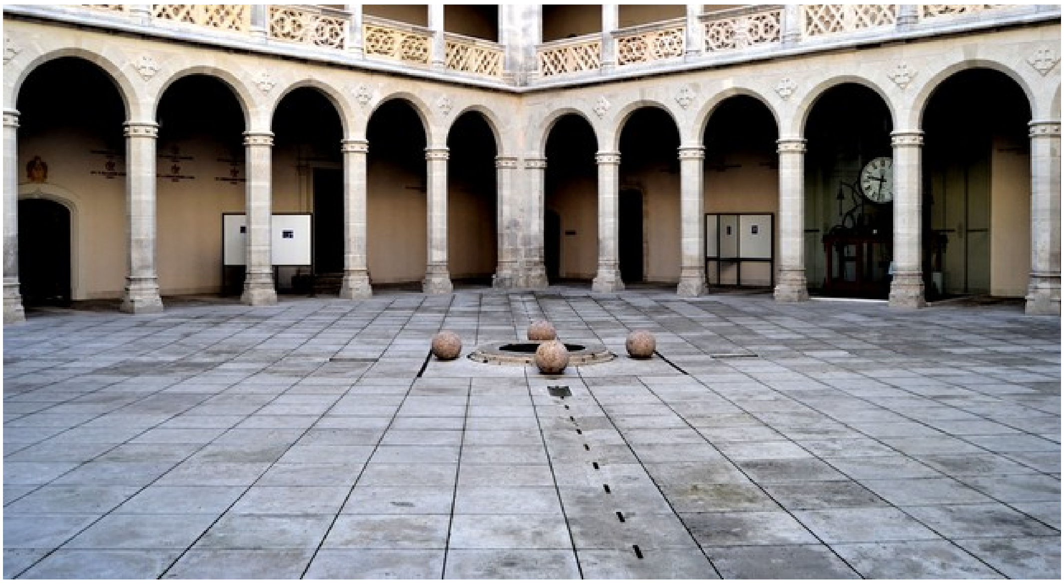


Grupo p4mm

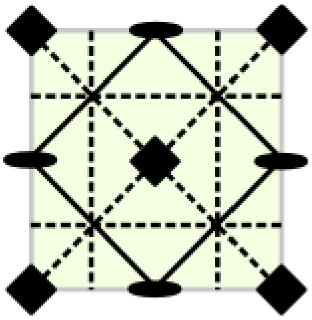


Esta clase de mosaicos tiene dos centros de rotación de orden 4 (90º) y líneas especulares de reflexión en cuatro direcciones distintas (horizontal, vertical y diagonales). Tiene líneas de deslizamiento en cuyas intersecciones se sitúan puntos de giro de orden 2 (180º).

Entrando al patio del Palacio de Santa Cruz (plaza de Santa Cruz), patrimonio de la Universidad de Valladolid, mirando al suelo, de baldosa cuadrada, encontramos un ejemplo de mosaico p4m.

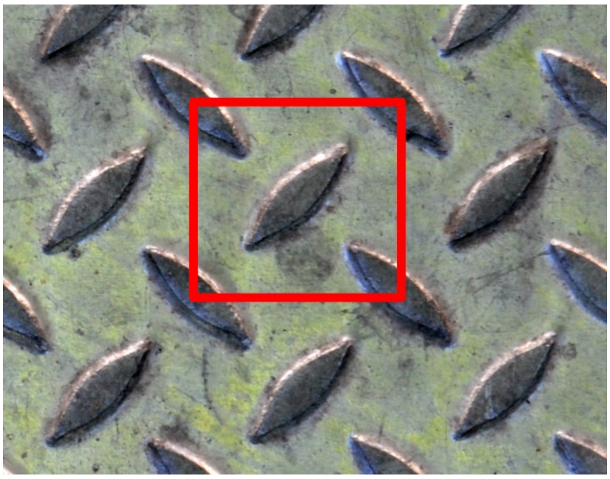


Grupo p4mg

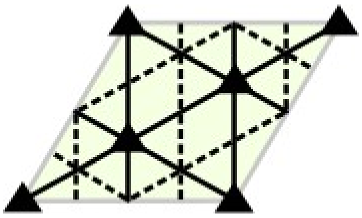


Este GSE tiene dos puntos de rotación de orden 4 (90º), que son imágenes especulares el uno del otro; pero solo tiene reflexiones especulares en dos direcciones perpendiculares. Hay rotaciones de orden 2 cuyos centros se localizan en las intersecciones de las líneas especulares de reflexión. Presenta líneas de deslizamiento paralelas a las de simetría especular, entre ellas y formando un ángulo de 45º con ellas.

Para encontrar un ejemplo evidente de este grupo no hay más que acercarse a cualquiera de los puntos de préstamo de bicicletas de la ciudad de Valladolid (Vallabici) y mirar al suelo de la estructura. Los ejemplos mostrados son de la plaza de Zorrilla y de la plaza de la Fuente Dorada.

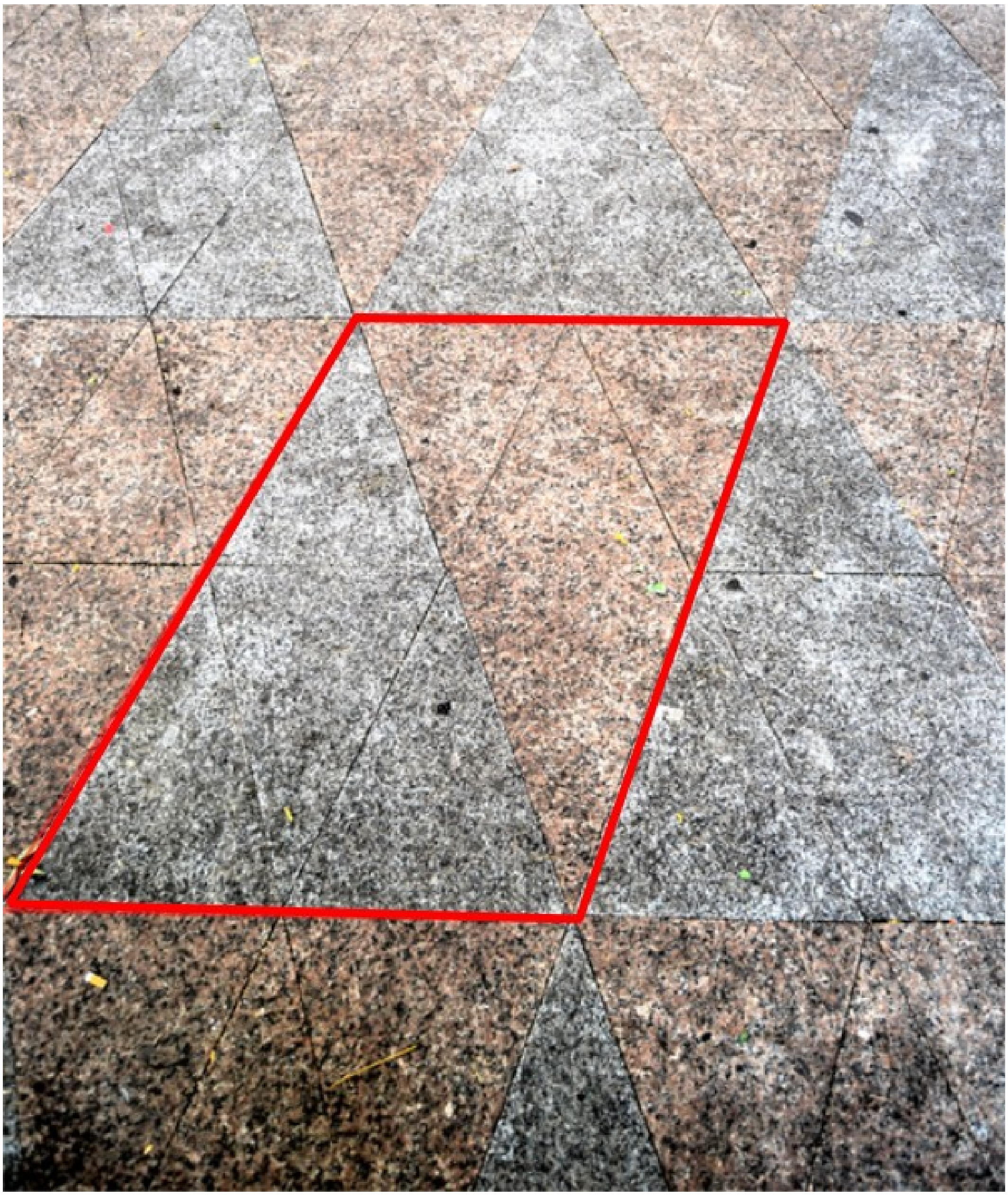


Grupo p3m1

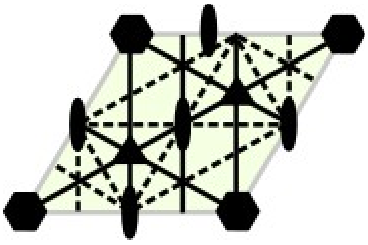


Este grupo tiene tres centros de rotación de orden 3 (120º) diferentes. Tiene reflexiones en los tres lados de un triángulo; cada uno de los centros de rotación se apoya en una línea especular de reflexión. Además presenta líneas de deslizamiento en tres direcciones.

El ejemplo representativo elegido es el suelo de una plazoleta situada en la intersección de las calles Teresa Gil (frente al número 13) y San Felipe.

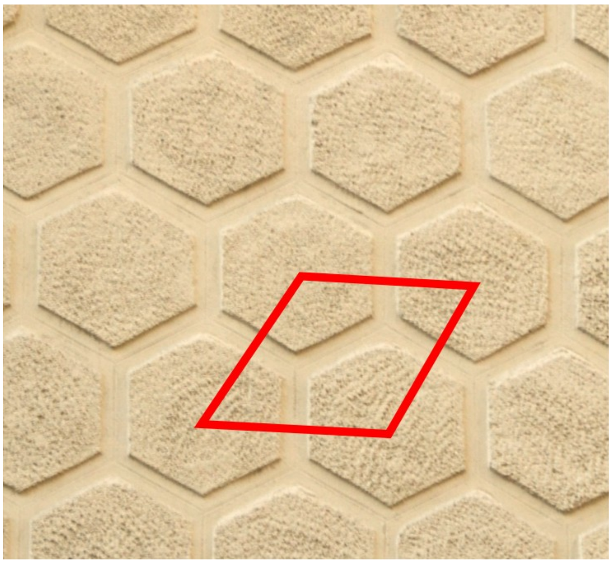


Grupo p6mm



Este GSE-2D tiene un centro de rotación de orden 6 (60º), dos centros de rotación de orden 3 (120º) y tres de orden 2 (180º). Tiene simetría especular en 6 direcciones distintas y simetría de deslizamiento en otras seis.

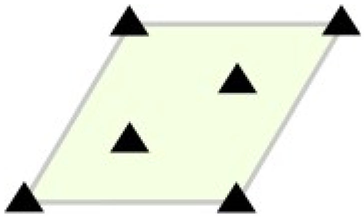
El ejemplo elegido para ilustrar este tipo de simetría es la fachada de la esquina entre las calles López Gómez y Fray Luis de León. Esta fachada nos recuerda a un panel de abejas.



Los grupos no localizados en Valladolid

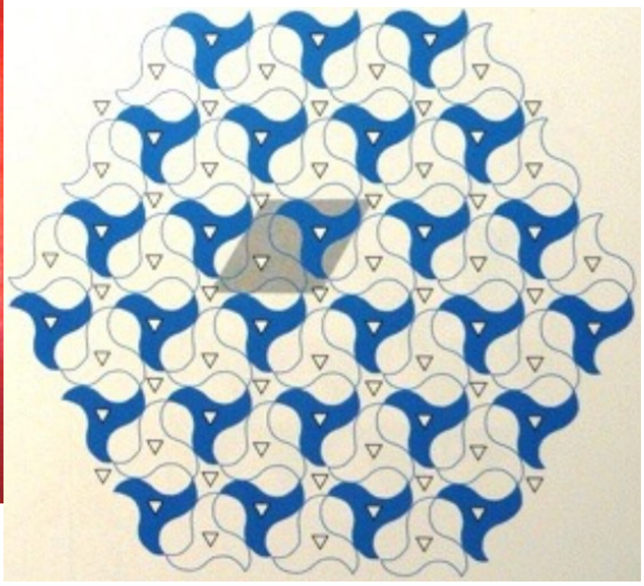
Se presentan a continuación ejemplos de los GSE-2D que no han sido localizados en Valladolid; todos los ejemplos son mosaicos de la Alhambra de Granada.

Grupo p3

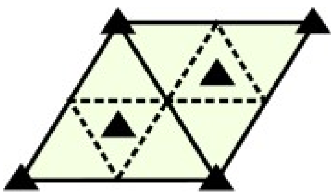


Este GES-2D cuenta con tres centros de rotación de orden 3 (120º), pero no tiene reflexiones especulares ni de deslizamiento.

Figura 13: Baldosa de la Alhambra de Granada con motivo que, completado el mosaico en la pared o en el suelo, conformaría un p3



Grupo p31m



Este tipo de mosaicos tiene tres centros de rotación de orden 3 (120º), dos de los cuales son imagen especular el uno del otro. Tiene líneas especulares de reflexión especularen tres direcciones y al menos uno de sus centros de rotación no se encuentra en ninguna de las líneas. También hay simetría de deslizamiento en tres direcciones.

Figura 14. Puerta del Vino de la Alhambra de Granada. (Fuente: Pérez Gómez, 2004)

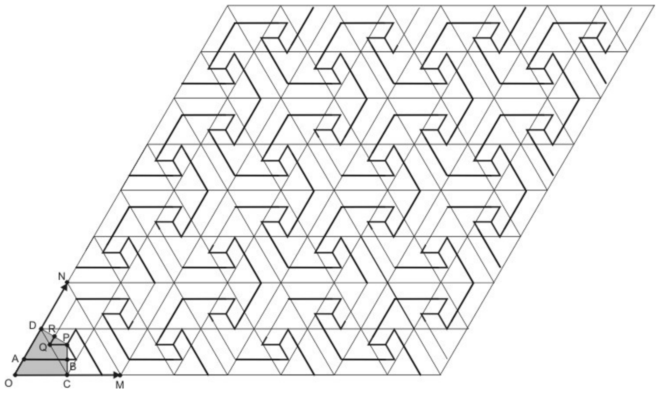
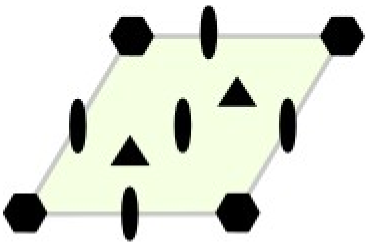


Figura 15. Esquema explicativo del mosaico de la Alhambra. (Fuente: Xarxa Telemática Educativa de Catalunya)

Grupo p6



Este grupo tiene un centro de rotación de orden seis (60º), dos de orden 3 (120º) y tres de orden 2 (180º). No presenta líneas especulares de reflexión ni de deslizamiento.

Figura 16. Mosaico p6 en la Alhambra de Granada. (Fuente: Mathematical Asociation of America)

Discusión

El presente trabajo final de máster presenta sendos recorridos peatonales que contienen muestra de todos los Grupos de Simetría Espacial monodimiensionales (los siete GSE-1D) y la mayoría de los Grupos de Simetría Espacial bidimensionales (catorce de diecisiete GSE-2D). Es probable que los tres GSE-2D que no se han localizado no se encuentren en las calles del centro de Valladolid. No obstante, un trabajo más exhaustivo podría probar lo contrario.

El mismo trabajo final de máster recoge alternativas *ex situ*, en sustitución del paseo, apoyadas en tecnologías de la información y la comunicación.

Se han propuesto además actividades grupales y no dirigidas que implican la participación activa del alumnado.

Se ha sugerido también un método de evaluación adecuado al contenido.

Referencias bibliográficas

Delgado Iglesias, J., & Medina García, J. (2014). Propuesta didáctica para la enseñanza de la cristalografía a través de elementos ornamentales de edificios históricos de Salamanca, España. *Studia Geologica Salmanticensia*, *48*(2), 179–196.

Euclides. (300AD). *Los Elementos*.

Gilsanz Mayor, M. A., & Martínez Serrano, F. (2007). Grupos de simetria en el esgrafiado segoviano. Presented at the I Jornada Nacional de Investigación en la Edificación, Madrid: U.P.M., EU. de Arquitectura Técnica.

Hahn, T., & International Union of Crystallography (Eds.). (2005). *Space-group symmetry* (5. ed., reprinted with corrections). Dordrecht: Springer.

Haklay, M. (Muki), & Weber, P. (2008). OpenStreetMap: User-Generated Street Maps. *IEEE Pervasive Computing*, *7*(4), 12–18.

Hernando Pérez, J. (2012). Los siete Grupos de Frisos en el mobiliario urbano de Alcorcón. Presented at the Jornada Internacional: Matemáticas EVERYWHERE.

Pérez Gómez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. In M. del C. Chamorro Plaza & J. López Ruiz, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*. Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Información y Publicaciones.

Prieto, C., Neto, S., Valle, A. del, Romero, F., Sanz, C., De Pablo, R., & Gorriz, C. (2014). Estudio de las síntaxis compositivas simétricas en cerámicas con decoración “a peine” vacceas procedentes del yacimiento de Pintia (pp. 265–274). Presented at the VII Simposio sobre los celtíberos. Nuevos Hallazgos, Nuevas Interpretaciones, Teruel. Retrieved from

Rahn, T., Beschow, B., Gridel, T., & Goffmann, J.-M. (2006). Marble Virtual Globe (Version 1.9.95) [Linux (KDE)].

Rasmussen, L., Jens Rasmussen, Bret Taylor, Taylor, Stephen Ma, Andrew Kirmse, … Seth LaForge. (2005). *Google Maps*. Google Inc.