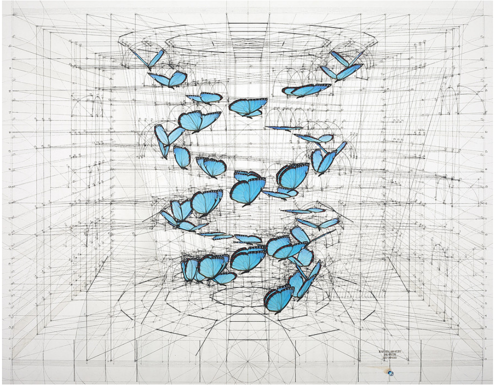
Teoremas de punto fijo en variedades



Rafael Araujo: *Blue Morpho, Double Helix*

El inicio de la teoría de variedades

En 1895 Poincaré publica el *Analysis Situs* – el primer tratado sistemático sobre topología.

El inicio de la teoría de variedades

L.E.J. Brouwer (1881 - 1966)

Matemático holandés interesado en la filosofía y fundamentos de la matemática (cf. *intuicionismo*).

En 1909 conoce a Poincaré, Hadamard, Borel, y se convence de la importancia de entender a fondo la topología de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$.

Esto condujo a lo que hoy conocemos como *el teorema de punto fijo de Brouwer*.

El inicio de la teoría de variedades

El teorema de punto fijo de Brouwer, 1910

Toda aplicación continua

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$$

de la bola cerrada $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ en sí misma tiene al menos un punto fijo.

El inicio de la teoría de variedades

Teoremas fundamentales sobre la topología de $\mathbb{R}^n$

- Teorema de punto fijo de Brouwer, 1910.
- Teorema de separación de Jordan-Brouwer, 1911.
- Invarianza del dominio, 1912.
- Invarianza de la dimensión, 1912.
- Teorema de la bola peluda para S^{2n}, 1912.

- Teorema de Borsuk-Ulam.
- Teorema de no-retracción.

El inicio de la teoría de variedades

Fundamentos de la teoría de variedades

Basados en ideas de Gauss / Riemann / Poincaré, e integrando nuevos conceptos de la emergente área de *topología* matemáticos como Weyl y Whitney formalizaron el concepto de una variedad topológica.

El teorema de encaje de Whitney, 1936:
Unifica los tratados extrínseco e intrínseco de lo que es una variedad.

- El teorema de punto fijo de Brouwer fue fundamental para este efecto.
- Pregunta: ¿podemos generalizarlo?

El teorema de punto fijo de Lefschetz

Solomon Lefschetz (1884 - 1972)

Es bien conocido por:

- Teoremas sobre la topología de variedades algebraicas.
- Teorema de punto fijo que lleva su nombre.
- Homología relativa.
- Teorema de dualidad en variedades con frontera.
- Editor de the Annals of Mathematics (1928 - 1958).
- Trabajo en sistemas dinámicos.

El teorema de punto fijo de Lefschetz

El problema

Sea X una variedad compacta. Si $f\colon X \to X$ es una aplicación continua, ¿cuándo podemos asegurar que f tiene un punto fijo?

La estrategia

Nótese que un punto fijo es un punto de intersección entre la gráfica de f y la diagonal Δ, i.e.

$$\mathrm{Fix}(f) = \Gamma_f \cap \Delta \subset X \times X.$$

El *número de intersección* $\#(\Gamma_f \cap \Delta)$ depende únicamente de las clases de homología de Γ_f y Δ en $H^n(X \times X, \mathbb{Z})$.

Conclusión: Deberíamos ser capaces de detectar si hay puntos fijos o no usando herramientas de teoría de homología.

El teorema de punto fijo de Lefschetz

El teorema

El *número de Lefschetz* de f se define como

$$L(f) = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}(f_* \colon H_k(X;\mathbb{Q}) \to H_k(X;\mathbb{Q})).$$

Teorema: *Si* $L(f) \neq 0$ *entonces* f *tiene algún punto fijo.*

Teorema (Fórmula de punto fijo de Lefschetz, 1926)

Asumamos que a X ha sido dada una orientación y f tiene únicamente puntos fijos aislados. Entonces $L(f) \in \mathbb{Z}$ y f tiene exactamente $L(f)$ puntos fijos (contados con multiplicidad).

$$\sum_{x \in \operatorname{Fix}(f)} \iota(f,x) = L(f).$$

El teorema de punto fijo de Lefschetz

Algunos corolarios

Con el teorema de Lefschetz podemos demostrar:

- El teorema de punto fijo de Brouwer.
- Todo endomorfismo de una variedad contraíble tiene al menos un punto fijo.
- Todo endomorfismo de una variedad $\mathbb{Q}$-acíclica tiene al menos un punto fijo.
  - Como caso particular tenemos $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}$.

El teorema de punto fijo de Lefschetz

Conclusiones

La fórmula de Lefschetz tiene un gran alcance ya que no sólo garantiza la existencia de puntos fijos sino que también nos dice exactamente cuántos hay.

Observación

Podemos usar la fórmula de Lefschetz para deducir el teorema de índice de Poincaré-Hopf para campos de vectores.

El teorema de punto fijo de Lefschetz

De lo global a lo local

La moraleja de la historia

La topología global de X, en particular el modo en que f^* actúa sobre $H^\bullet(X;\mathbb{Q})$, restringe la existencia y el comportamiento de los puntos fijos.

Pero, ¿qué significa el comportamiento de un punto fijo?

El teorema de punto fijo de Lefschetz
De lo global a lo local

Sea X una variedad diferenciable y $f : X \to X$ una aplicación diferenciable.

Definición

Un punto fijo $x \in \mathrm{Fix}(f)$ es *no-degenerado* si

$$\det(I - Df(x)) \neq 0.$$

Nótese que esto ocurre si y sólo si $\Gamma_f \pitchfork_x \Delta$.

Si x es un punto fijo no-degenerado entonces la matriz $I - Df(x)$ determina el comportamiento de primer orden de f alrededor de x. Esto es precisamente el comportamiento de f alrededor x.

El teorema de punto fijo de Lefschetz

Volviendo a la moraleja...

Pregunta

¿Es cierto que la topología de X restringe el comportamiento de los puntos fijos?

Respuesta

No del todo. La homología racional $H^\bullet(X;\mathbb{Q})$ es demasiado burda para distinguir el comportamiento de los puntos fijos.

Ni siquiera $H^\bullet_{dR}(X) \cong H^\bullet(X;\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$ es suficiente.

Necesitamos de estructura extra en X y f.

La estructura necesaria es una estructura compleja.

Hacia el mundo de lo complejo

Esta diapositiva es más importante de lo que creen

Sea V un espacio vectorial complejo y $L\colon V \to \mathbb{C}$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

- Notemos que L es $\mathbb{C}$-lineal $\iff L(iv) = iL(v)$.
- Decimos que L es $\mathbb{C}$-antilineal $\iff L(iv) = -iL(v)$.

Proposición

Toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ se descompone de forma única como

$$L = L' + L'',$$

con L' $\mathbb{C}$-lineal y L'' $\mathbb{C}$-antilineal. En particular se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, \mathbb{C}).$$

Hacia el mundo de lo complejo
Esta diapositiva es más importante de lo que creen

Podemos reescribir de forma más corta la descomposición anterior como

$$V^* = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)},$$

y por tanto el producto exterior $\wedge^k V^*$ se descompone como

$$\wedge^k V^* = \bigoplus_{p+q=k} V^{(p,q)},$$

where $V^{(p,q)} = (\wedge^p V^{(1,0)}) \wedge (\wedge^q V^{(0,1)})$.

Hacia el mundo de lo complejo

Ahora sí, hablemos de variedades complejas

Sea X una *variedad compleja compacta* de dimensión n. Sea $\mathcal{A}^k(X)$ el espacio de k-formas diferenciales con valores complejos. Al igual que antes, tenemos una descomposición:

$$\mathcal{A}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(X).$$

La derivada exterior $d\colon \mathcal{A}^k(X) \to \mathcal{A}^{k+1}(X)$ se descompone como

$$d = \partial + \overline{\partial},$$

$$\partial\colon \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(X), \qquad \overline{\partial}\colon \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X).$$

Hacia el mundo de lo complejo

Ahora sí, hablemos de variedades complejas

El operador $\overline{\partial}$ es conocido como *operador de Dolbeault* y es de fundamental importancia en la geometría compleja.

El operador de Dolbeault en $\mathbb{C}$

El plano complejo $\mathbb{C}$, visto como una variedad real, puede ser descrito por dos coordenadas (x, y).
Sea $f = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathcal{A}^0(\mathbb{C})$, i.e. f es $\mathbb{R}$-diferenciable.
Tenemos

$$\overline{\partial} f = \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} d\overline{z}.$$

Notemos que en particular f es una función holomorfa si y sólo si $\overline{\partial} f = 0$. Esto es cierto en cualquier variedad compleja.

Hacia el mundo de lo complejo
Cohomología de Dolbeault

Es fácil verificar que $\overline{\partial}^2 = 0$ y así para todo p, $0 \leq p \leq n$, obtenemos un complejo de co-cadenas

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{p,0}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \quad \dots \quad \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}(X) \longrightarrow 0.$$

Definición

La *cohomología de Dolbeault* de X se define como

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) = H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(X), \overline{\partial}).$$

Hacia el mundo de lo complejo

Cohomología de Dolbeault

En cierta forma la cohomología de Dolbeault es un refinamiento de la cohomología de de Rham, aunque no siempre hay una relación clara entre ellas.

Un caso especial

Supongamos que X es una *variedad proyectiva lisa*, es decir, es una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo $\mathbb{CP}^m$. Entonces tenemos

$$H^k_{dR}(X;\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X).$$

De modo que la cohomología de Dolbeault mide no sólo aspectos topológicos de X sino también aspectos más finos que dependen de la estructura compleja de X.

La fórmula holomorfa de Lefschetz

Sea X una variedad compacta compleja y $f : X \to X$ un endomorfismo holomorfo.

Definición

Definimos el *número holomorfo de Lefschetz* de f como

$$L(f, \mathcal{O}_X) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \operatorname{tr}\left(f^* \colon H_{\bar\partial}^{0,q}(X) \to H_{\bar\partial}^{0,q}(X)\right).$$

Theorem (Teorema de punto fijo holomorfo de Lefschetz)

Si f tiene únicamente puntos fijos no degenerados entonces

$$\sum_{x \in \operatorname{Fix}(f)} \frac{1}{\det(I - Df(x))} = L(f, \mathcal{O}_X).$$

La fórmula holomorfa de Lefschetz

Un ejemplo en la esfera de Riemann

Tomemos $X = \mathbb{CP}^1$ y $f\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ la rotación $f(z) = e^{i\theta} z$.
Esta aplicación tiene dos puntos fijos: $z_1 = 0$ and $z_2 = \infty$.
La derivada de f en z_1 es $Df(z_1) = e^{i\theta}$.
Cambiando a la coordenada $w = \frac{1}{z}$, f está dado por

$$w \mapsto \frac{1}{e^{i\theta} \cdot \frac{1}{w}} = e^{-i\theta} w,$$

y podemos ver que $Df(z_2) = e^{-i\theta}$.

La fórmula holomorfa de Lefschetz nos dice que

$$\frac{1}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1}{1 - e^{-i\theta}} = 1 = L(f, \mathcal{O}_X).$$

La fórmula holomorfa de Lefschetz
Algunas consecuencias

Observación

Cuando $X = \mathbb{CP}^n$ siempre se tiene que $L(f, \mathcal{O}_x) = 1$.

Implicaciones:

- Todo endomorfismo holomorfo de $\mathbb{CP}^n$ tiene algún punto fijo.
- Todo endomorfismo lineal de $\mathbb{C}^{n+1}$ tiene un vector propio.
- Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz (i.e. el teorema fundamental del álgebra).

Ahora sí podemos decir que:

La estructura global de X, medida por la cohomología de Dolbeault, restringe la existencia y el comportamiento de los puntos fijos.

La fórmula holomorfa de Lefschetz

¿Qué sigue?

Un resultado fundamental en la geometría compleja es el teorema de Dolbeault, que liga la *cohomología de Dolbeault* con la *cohomología de gavillas* de $\mathcal{O}_X$, la gavilla de funciones holomorfas en X, via el isomorfísmo

$$H^{0,q}_{\bar{\partial}}(X) \cong H^q(X, \mathcal{O}_X).$$

Conclusión

El número holomorfo de Lefschetz $L(f, \mathcal{O}_X)$ nos da información de la acción de f en la cohomología de la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$.

La fórmula de Woods Hole

Sea X una variedad compleja compacta, $f\colon X \to X$ un endomorfismo holomorfo y $\mathscr{F}$ una gavilla analítica coherente.

Pregunta

¿Es cierto que f actúa sobre la cohomología $H^k(X, \mathscr{F})$?

No! Sólo exite una transformación $f^*\colon H^k(X, \mathscr{F}) \to H^k(X, f^*\mathscr{F})$.

Definición

Un *levantamiento* de f a $\mathscr{F}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\varphi\colon f^*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Un levantamiento φ nos dota de transformaciones lineales

$$\tilde{\varphi}^k\colon H^k(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{f^*} H^k(X, f^*\mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi} H^k(X, \mathscr{F}).$$

La fórmula de Woods Hole

Definición

Definimos el número de Lefschetz de φ como

$$L(f, \varphi, \mathscr{F}) = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}\left(\tilde{\varphi}^k \colon H^k(X, \mathscr{F}) \to H^k(X, \mathscr{F})\right).$$

Por otro lado, dado un punto fijo $x \in \operatorname{Fix}(f)$ tenemos transformaciones en los gérmenes de secciones y en las fibras

$$\varphi_x \colon (f^*\mathscr{F})_x \cong \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x \qquad \varphi(x) \colon \mathscr{F}(x) \to \mathscr{F}(x)$$

(aquí llamamos fibra a $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}_x$, el cual es un espacio vectorial de dimensión finita).

La fórmula de Woods Hole

La fórmula de Woods Hole (Atiyah - Bott, 1965)

Si f tiene sólo puntos fijos no-degenerados se tiene

$$\sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} \frac{\mathrm{tr}(\varphi(x))}{\det(I - Df(x))} = L(f, \varphi, \mathscr{F}).$$

Observaciones:

- En caso que f sea holomorfa, Woods Hole implica todos los teoremas mencionados en esta charla.
- También implica la *fórmula de caracteres de Weyl* en Teoría de Representaciones.
- También fue un precursor del *teorema de índice de Atiyah-Singe* para complejos elípticos.

La fórmula de Woods Hole

Más observaciones

- M. Atiyah y R. Bott demostraron originalmente este resultado para *complejos elípticos* en variedades reales compactas.
- J.L. Verdier demostró la misma fórmula para variedades proyectivas suaves y cohomología étale.
- El nombre *Woods Hole* proviene del puerto en Massachusetts dónde Atiyah y Bott encontraron la demostración.