9.1 Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad y = y(x)$$

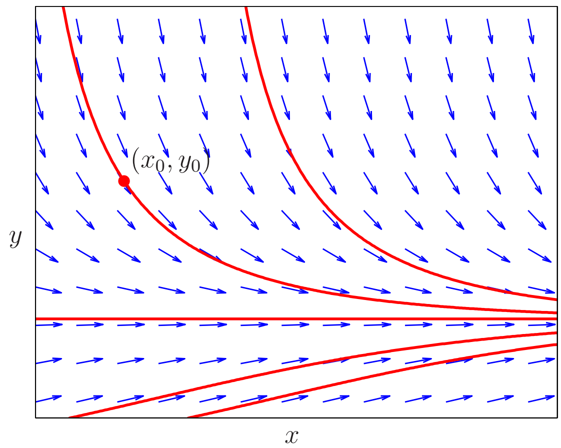
Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Richtungsfeld

Visulisierung der durch die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

bestimmten Steigungen von Lösungskurven, festgelegt durch Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$



Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = py + q$$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + y_h$$

mit

$$y_h = c\exp(P(x)), \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(s)\, ds$$

der allgemeinen Lösung der der homogenen Differentialgleichung ($q(x) = 0$) und einer partikulären Lösung

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \exp(P(x) - P(s))q(s)\, ds$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow c = y_0$

Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + pu = qu^k, \quad k \neq 0, 1\,,$$

Substitution

$$y = u^{1-k}, \quad y' = (1-k)u^{-k}u'$$

$\rightsquigarrow$ lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-k}\,y' = -py + q$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = py + q, \quad p \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen y_p

- $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \to y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$
- $q(x) = c\exp(\lambda x)$, $\lambda \neq p$, $\to y_p = \dfrac{c}{\lambda - p}\,\exp(\lambda x)$
- $q(x) = c\exp(px) \;\to y_p = cx\exp(px)$
- $q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \to y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + c\exp(px)$$

Separable Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{p(x)g(y)}_{f(x,y(x))}$$

Lösung durch Bilden von Stammfunktionen

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f(y/x)$$

Substitution

$$xz(x) = y(x), \quad z + xz' = f(z)$$

$\rightsquigarrow$ separable Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

Exakte Differentialgleichung

$$q(x,y)y' + p(x,y) = 0$$

mit

$$p = F_x,\ q = F_y \quad \Leftrightarrow \quad (p,q)^{\mathrm{t}} = \operatorname{grad} F$$

notwendig: Integratibilitätsbedingung $p_y = q_x$
hinreichend bei einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet

implizite Darstellung der Lösungen

$$F(x,y) = c$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Integrierender Faktor

Multiplikation der Differentialgleichung

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

mit einer Funktion $a(x,y)$, die auf eine exakte Differentialgleichung führt, d.h.

$$(ap)_y = (aq)_x$$