

Úloha II.5 ... Nečekaný odraz

8 bodů; průměr 5,13; řešilo 32 studentů

Tři organizátoři Výfuku Petr, Petr a Petr zkoušeli revoluční způsob odpalování míčků. Vzali si dva pružné míčky s hmotnostmi m a M . Lehčí míček opatrně umístili těsně nad těžší ve výšce h nad zemí¹ a míčky nechali padat volným pádem. Po srážce obou míčků u země se ale stalo něco nevídaného. Těžší míček zůstal ležet na zemi, zatímco lehčí míček byl katapultován do veliké výšky.

- Pomocí zákona zachování energie vyjádřete vztah pro rychlost míčků těsně před dopadem na zem.
- Odraz u země probíhá tak, že nejdříve se těžší spodní míček pružně odrazí od země (velikost jeho rychlosti se nezmění), a pak se pružně srazí s lehčím míčkem, který stále letí dolů. I během této srážky budou platit dva zákony zachování – hybnosti a energie. Matematicky je oba zapište, předpokládáte-li, že po srážce zůstává těžší míček stát a lehčí míček odlétá rychlostí u .
- Předešlé dva zákony jsou současně splněny pouze pro nějaký speciální poměr hmotností M/m . Úpravou zapsaných rovnic nalezněte tento poměr.
- Do jaké výšky vyletí lehčí míček? Výsledek vyjádřete jako násobek původní výšky h .

Na začátku našeho příkladu se oba míčky nacházejí v klidu a, jak nám říká zadání, prakticky ve stejné výšce h . Jejich kinetické energie jsou nulové, tedy mechanické energie se sestávají pouze z energií potenciálních: $E_{p1} = mgh$ a $E_{p2} = Mgh$. Poté oba dva míčky začnou padat k zemi. Jejich potenciální energie se bude postupně měnit na energii kinetickou, až do chvíle těsně před dopadem, kdy potenciální energie bude nulová (neboť výška míčů nad zemí je nulová²). Ze zákona zachování energie proto pro kinetické energie před dopadem platí

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{p1} = mgh, \quad E_{k2} = \frac{1}{2}Mv_2^2 = E_{p2} = Mgh.$$

Obě rovnice můžeme na obou stranách vydělit hmotnostmi míčků. Úpravou získaných rovnic dostáváme, že rychlosti míčků se při dopadu rovnají

$$v_1 = v_2 = v = \sqrt{2gh}.$$

To odpovídá známému poznatku, že všechny předměty padají bez vlivu vzduchu, např. ve vakuu, se stejných zrychlením.

Přístupme ke srážce: zákony zachování nám říkají, že celková hybnost i mechanická energie obou míčků musí být před srážkou a po srážce stejné. Zde je ale nutné pohlídat si směr rychlosti obou předmětů. Pokud bude horní míček padat k zemi rychlostí v a spodní míček se po odrazu od země bude pohybovat stejnou rychlostí v opačném směru, musíme tuto rychlost zapsat jako $-v$. Stejně tak i výsledná rychlost horního míčku, který se odrazil nahoru, bude $-u$.

Toto není podstatné pro zákon zachování kinetické energie, kde se rychlosti vyskytují v druhých mocninách

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mu^2,$$

ale je to naprosto zásadní pro zákon zachování hybnosti

$$mv - Mv = -mu.$$

¹Poloměry míčků jsou proti výšce h zanedbatelné, můžete tedy předpokládat, že oba padají ze stejné výšky.

²Rozměry míčů opět zanedbáváme.

Spodní míček o hmotnosti M se nám na pravé straně v obou zákonech nevyskytuje, protože v zadání se píše, že po srážce zůstává v klidu.

Tyto dva zákony musíme upravit tak, abychom dostali hledaný poměr M/m . Upravovat začneme zákon zachování hybnosti

$$\begin{aligned}mv - Mv &= -mu, \\(m - M)v &= -mu.\end{aligned}\tag{1}$$

V zákonu zachování energie vykrátíme polovinu a vytkneme v^2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 &= \frac{1}{2}mu^2, \\(m + M)v^2 &= mu^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Všimněme si, že tato rovnice má rychlosti v druhé mocnině. Umocníme proto rovnici (1) na druhou. Dostaneme taky rovnici, která má rychlosti v druhé mocnině. Navíc se zbavíme znaménka mínus

$$(m - M)^2 v^2 = m^2 u^2.$$

Tuto rovnici pak vydělíme rovnicí 2. Rovnice se dělí tak, že levou stranu vydělíme levou stranou a pravou stranu pravou stranou druhé rovnice

$$\frac{(m - M)^2 v^2}{(m + M)v^2} = \frac{m^2 u^2}{mu^2}.$$

Vidíme, že obě rychlosti se vykrátí, stejně jako hmotnost m na pravé straně. Můžeme dále upravovat

$$\begin{aligned}\frac{(m - M)^2}{m + M} &= m, \\(m - M)^2 &= m(m + M), \\m^2 - 2mM + M^2 &= m^2 + mM.\end{aligned}$$

Zde jsme využili vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Pokračujeme v úpravách, nejdříve odečteme člen m^2 , který se vyskytuje na obou stranách rovnice

$$\begin{aligned}M^2 - 2mM &= mM, \\M^2 &= 3mM.\end{aligned}$$

Po vydělení rovnice M dostáváme $M = 3m$, neboli spodní míč musí být třikrát těžší než míč horní.

Na závěr určíme výšku, do které míček vyletí. Vrátime se zpět k zákonu zachování energie. Úplně na začátku je energie obou míčů E_{p1} a E_{p2} , ovšem na konci je spodní míč v klidu a na zemi. Poněvadž se energie zachovává, všechnu tuto energii bude obsahovat míč horní, který v nejvyšším bodě svého letu bude stát a všechna tato energie bude proměněna na potenciální energii. Můžeme tedy napsat

$$mgh + Mgh = mgh',$$

kde h' je hledaná výška. Jelikož víme, že $M = 3m$, můžeme psát

$$mgh + 3mgh = mgh'.$$

Odtud po vydělení obou stran rovnice členem mg dostáváme

$$4h = h'.$$

Menší míček tedy po odrazu vyskočí do čtyřnásobné výšky než ze které padal.

Petr Doležal

petr@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.