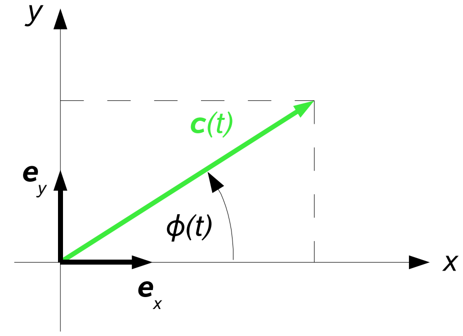
2. Translation und Rotation

2.1 Rotation eines Vektors

- Gesucht wird die zeitliche Änderung eines Vektors, der nur seine Richtung, nicht aber seine Länge ändert.
- Zuerst wird der ebene Fall betrachtet.
- Das Ergebnis wird anschließend auf den Fall einer Rotation im Raum erweitert.

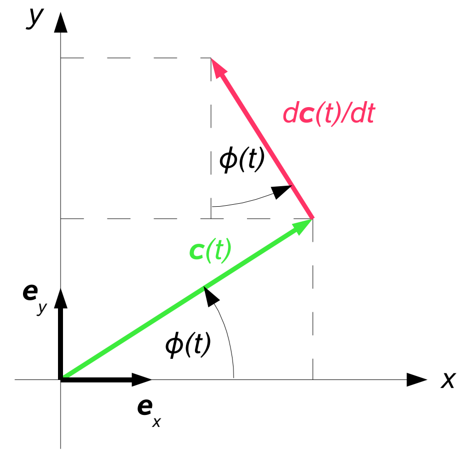
2.1.1 Ebene Rotation

- In der *xy*-Ebene kann ein Vektor konstanter Länge, dessen Richtung von der Zeit abhängt, dargestellt werden in der Form



$$\boldsymbol{c}(t) = c\left(\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_y\right)$$

- Für die zeitliche Ableitung folgt



$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \frac{d\,\boldsymbol{c}}{dt}(t)$$
$$= c\left(-\dot{\phi}(t)\sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_x + \dot{\phi}(t)\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_y\right)$$
$$= c\,\dot{\phi}(t)\left(-\sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_y\right)$$

2.1.1 Ebene Rotation

- Es gilt: $$\boldsymbol{c}\cdot\dot{\boldsymbol{c}}=c^2\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y\right)\cdot\left(-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y\right)$$ $$=c^2\dot{\phi}\left(-\cos\phi\sin\phi+\sin\phi\cos\phi\right)=0$$
- Die Ableitung des Vektors steht also senkrecht auf dem Vektor selbst.
- Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit wird definiert durch $$\boldsymbol{\omega}=\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_z$$
- Für das Vektorprodukt folgt $$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}=c\,\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_z\times\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y\right)=c\,\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y\right)$$ $$=c\,\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x\right)=\dot{\boldsymbol{c}}$$

2.1.1 Ebene Rotation

- Ergebnis:
  - Für die zeitliche Ableitung eines Vektors konstanter Länge gilt

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}}$$

  - Dabei ist $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\, \boldsymbol{e}_z$ die Winkelgeschwindigkeit.

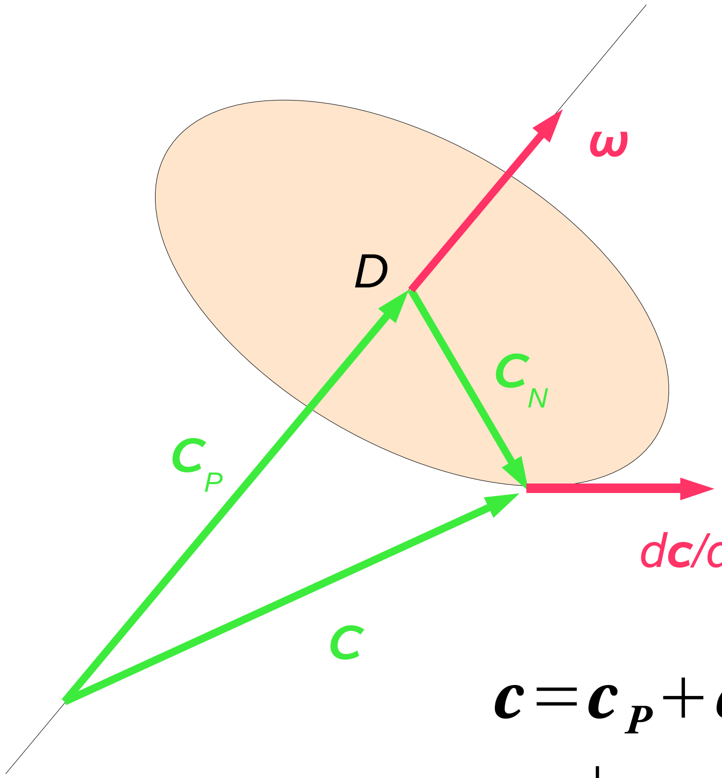
2.1.2 Räumliche Rotation

- Eine räumliche Rotation wird durch einen beliebig im Raum liegenden Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beschrieben.
- Die Richtung des Vektors definiert die Drehachse.
- Der Betrag des Vektors entspricht der Winkelgeschwindigkeit.

2.1.2 Räumliche Rotation

- In der Ebene, die durch den Punkt D geht und auf der der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ senkrecht steht, liegt eine ebene Rotation vor.
- Also gilt: $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}_N$
- Wegen $\boldsymbol{c}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$ gilt aber auch: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}_P = \boldsymbol{0}$
- Also gilt wie im ebenen Fall:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}}$$



$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_P + \boldsymbol{c}_N$$

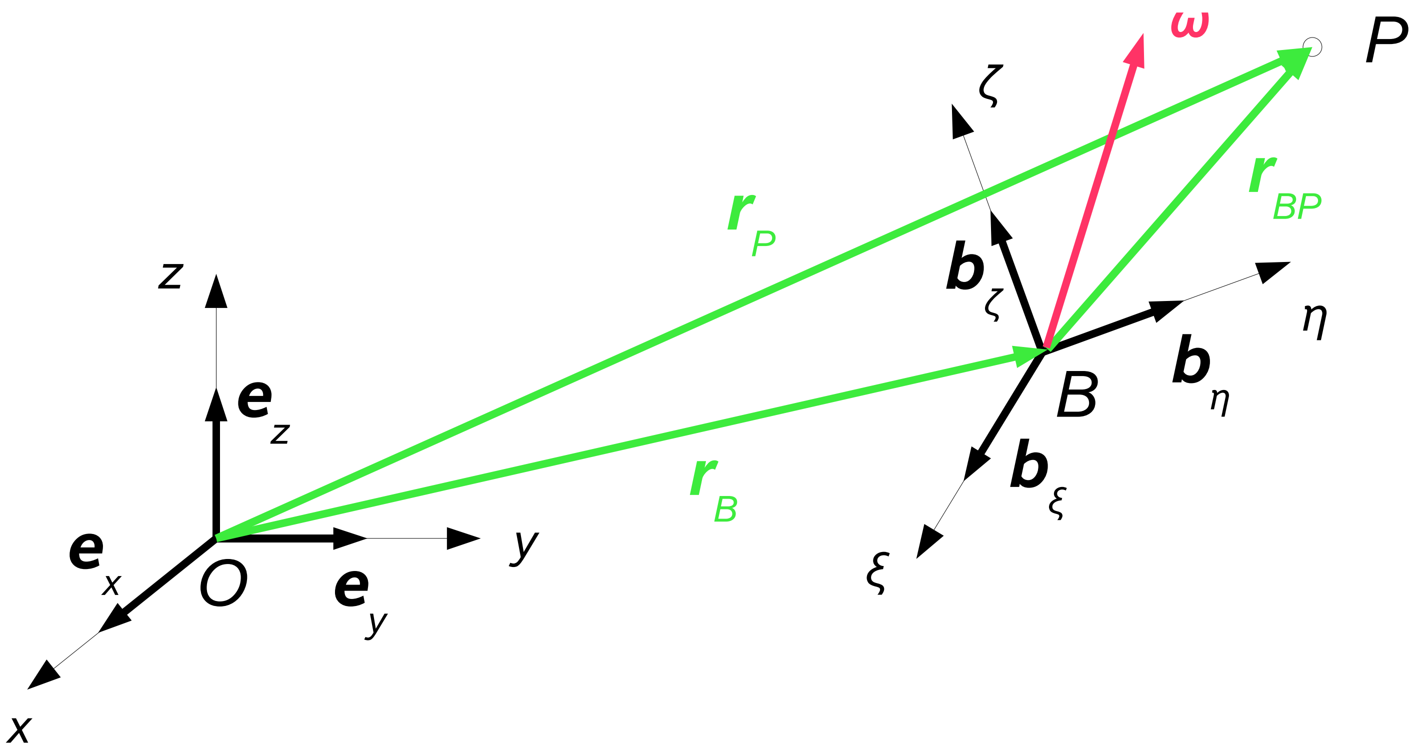
$$\boldsymbol{c}_N \perp \boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}}_P = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{c}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Untersucht wird die Bewegung eines Punktes *P* in Bezug auf 2 Koordinatensysteme:
  - System *Oxyz* ist ruhend:
    - Ursprung *O*
    - Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$
    - Koordinaten *x, y, z*
  - System *Bξηζ* bewegt sich translatorisch und rotatorisch:
    - Ursprung *B*
    - Einheitsvektoren $\boldsymbol{b}_\xi(t)$, $\boldsymbol{b}_\eta(t)$, $\boldsymbol{b}_\zeta(t)$
    - Koordinaten ξ , η , ζ
    - Die Richtung der Einheitsvektoren hängt jetzt von der Zeit ab.


ω
P
ζ
r
P
r
BP
b
ζ
η
z
B
b
η
e
z
r
B
b
ξ
y
e
x
O
e
y
ξ
x

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Ortsvektoren:
  - Für den Ortsvektor des Punktes *P* im System *Oxyz* gilt

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BP}$$

  - Dabei ist $\boldsymbol{r}_{BP} = \xi\, \boldsymbol{b}_\xi(t) + \eta\, \boldsymbol{b}_\eta(t) + \zeta\, \boldsymbol{b}_\zeta(t)$

    der Ortsvektor des Punktes *P* im System *Bξηζ*.

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Geschwindigkeiten:
  - Für die Absolutgeschwindigkeit gilt

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_P = \dot{\boldsymbol{r}}_B + \dot{\boldsymbol{r}}_{BP}$$

  - Da sich bei einem rotierenden Bezugssystem die Richtungen der Einheitsvektoren $\boldsymbol{b}_\xi(t)$, $\boldsymbol{b}_\eta(t)$ und $\boldsymbol{b}_\zeta(t)$ ändern, gilt jetzt

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{BP} = \left(\dot{\xi}\,\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\eta}\,\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\zeta}\,\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\zeta}}\right) + \left(\xi\,\dot{\boldsymbol{b}}_\xi + \eta\,\dot{\boldsymbol{b}}_\eta + \zeta\,\dot{\boldsymbol{b}}_\zeta\right)$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Die Geschwindigkeit

$$^{B}\boldsymbol{v}_{P}=\frac{^{B}d\,\boldsymbol{r}_{BP}}{dt}=\dot{\xi}\,\boldsymbol{b}_{\xi}+\dot{\eta}\,\boldsymbol{b}_{\eta}+\dot{\zeta}\,\boldsymbol{b}_{\zeta}$$

ist die Geschwindigkeit, die ein mit dem System $B\xi\eta\zeta$ mitbewegter Beobachter misst.

– Mit $\dot{\boldsymbol{b}}_{\xi}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_{\xi}\,,\quad \dot{\boldsymbol{b}}_{\eta}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_{\eta}\,,\quad \dot{\boldsymbol{b}}_{\zeta}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_{\zeta}$

folgt für den Ausdruck in der zweiten Klammer:

$$\xi\,\dot{\boldsymbol{b}}_{\xi}+\eta\,\dot{\boldsymbol{b}}_{\eta}+\zeta\,\dot{\boldsymbol{b}}_{\zeta}=\boldsymbol{\omega}\times\left(\xi\,\boldsymbol{b}_{\xi}+\eta\,\boldsymbol{b}_{\eta}+\zeta\,\boldsymbol{b}_{\zeta}\right)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BP}$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Damit gilt:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{BP} = \frac{{}^{B}d\,\boldsymbol{r}_{BP}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$$

– Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Ableitung in Bezug auf das bewegte System und der zeitlichen Ableitung in Bezug auf das ruhende System.

– Sie gilt sinngemäß für beliebige Vektoren.

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Für die Absolutgeschwindigkeit gilt also:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} + {}^B\boldsymbol{v}_P$$

– Dabei ist

- $\boldsymbol{v}_B = \dot{\boldsymbol{r}}_B$ die Geschwindigkeit des Punktes *B*, die ein Beobachter im System *Oxyz* misst,
- ${}^B\boldsymbol{v}_P$ die Geschwindigkeit des Punktes *P*, die ein mitbewegter Beobachter im System *Bξηζ* misst, und
- $\boldsymbol{r}_{BP}$ der Ortsvektor des Punkts *P*, den ein Beobachter im System *Bξηζ* misst.

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Die Absolutgeschwindigkeit setzt sich zusammen
  - aus der Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$
  - und der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_r = {}^B\boldsymbol{v}_P$
- Die Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_f$ ist die Geschwindigkeit, die der Punkt P hätte, wenn er im System $B\xi\eta\zeta$ ruhen würde.
- Die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_r$ ist die Geschwindigkeit, die ein im System $B\xi\eta\zeta$ mitbewegter Beobachter misst.

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Beschleunigungen:
  - Die Absolutbeschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Absolutgeschwindigkeit:
    $$\boldsymbol{a_P} = \dot{\boldsymbol{v}}_P = \dot{\boldsymbol{v}}_B + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{BP}}\right) + {}^B\dot{\boldsymbol{v}}_P$$
  - $\dot{\boldsymbol{v}}_B = \boldsymbol{a_B}$ ist die Beschleunigung des Punktes *B* im System *Oxyz*.
  - Die Beschleunigung ${}^B\dot{\boldsymbol{v}}_P$ berechnet sich zu
    $$\begin{aligned} {}^B\dot{\boldsymbol{v}}_P &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\xi}\,\boldsymbol{b_\xi} + \dot{\eta}\,\boldsymbol{b_\eta} + \dot{\zeta}\,\boldsymbol{b_\zeta}\right) \\ &= \left(\ddot{\xi}\,\boldsymbol{b_\xi} + \ddot{\eta}\,\boldsymbol{b_\eta} + \ddot{\zeta}\,\boldsymbol{b_\zeta}\right) + \left(\dot{\xi}\,\dot{\boldsymbol{b}}_\xi + \dot{\eta}\,\dot{\boldsymbol{b}}_\eta + \dot{\zeta}\,\dot{\boldsymbol{b}}_\zeta\right) \\ &= \frac{{}^B d\,{}^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{v_P}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times {}^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{v_P} \end{aligned}$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Die Beschleunigung

$$ {}^{B}\boldsymbol{a}_{P} = \frac{{}^{B}d\,{}^{B}\boldsymbol{v}_{P}}{dt} = \ddot{\xi}\,\boldsymbol{b}_{\xi} + \ddot{\eta}\,\boldsymbol{b}_{\eta} + \ddot{\zeta}\,\boldsymbol{b}_{\zeta} $$

ist die Beschleunigung, die ein mit dem System $B\xi\eta\zeta$ mitbewegter Beobachter misst.

– Für den zweiten Summanden ergibt sich

$$ \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BP}\right) = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{BP} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{{}^{B}d\,\boldsymbol{r}_{BP}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BP}\right) $$

$$ = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega}\times{}^{B}\boldsymbol{v}_{P} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BP}\right) $$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Ergebnis: Die Absolutbeschleunigung berechnet sich zu

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} \right) + {}^{B}\boldsymbol{a}_P + 2\boldsymbol{\omega} \times {}^{B}\boldsymbol{v}_P$$

Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_f$

Relativbeschleunigung $\boldsymbol{a}_r$

Coriolisbeschleunigung $\boldsymbol{a}_c$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Die Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_f$ ist die Beschleunigung, die der Punkt P hätte, wenn er im System $B\xi\eta\zeta$ ruhen würde.
- Sie setzt sich zusammen aus
  - der linearen Beschleunigung $\boldsymbol{a}_B$ des Bezugspunktes B,
  - der Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^B\boldsymbol{r}_P$ infolge der Drehbeschleunigung, und
  - der Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}\right)$
- Die Relativbeschleunigung $\boldsymbol{a}_r$ ist die Beschleunigung, die ein im System $B\xi\eta\zeta$ mitbewegter Beobachter misst.

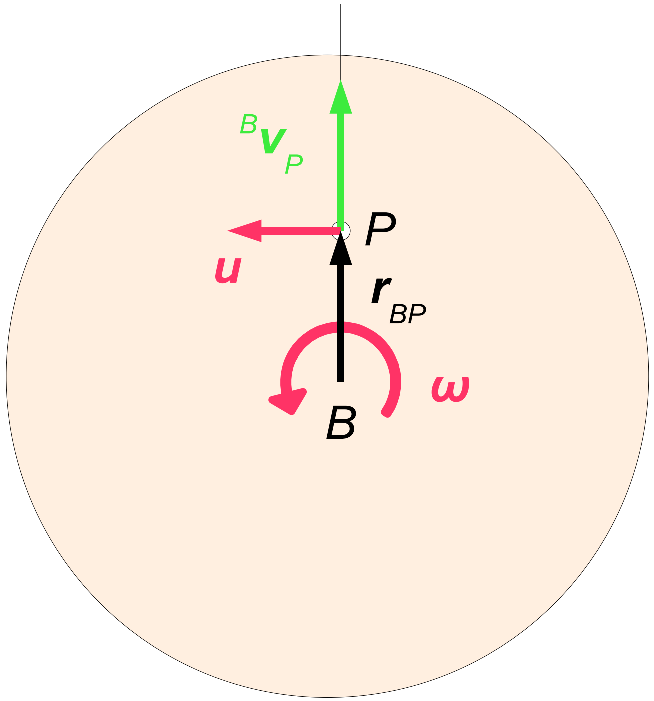
2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Die Coriolisbeschleunigung $\boldsymbol{a}_c$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und ${}^B\boldsymbol{v}_P$. Sie verschwindet für

  - $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ oder
  - ${}^B\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{0}$ oder
  - wenn $\boldsymbol{\omega}$ und ${}^B\boldsymbol{v}_P$ parallel sind.

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Veranschaulichung der Coriolisbeschleunigung:
  - Der Punkt P bewegt sich auf der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe mit der konstanten Relativgeschwindigkeit ${}^B\boldsymbol{v}_P$ nach außen.



2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Während der Zeit Δt vergrößert sich der Abstand des Punktes P vom Drehpunkt B um $\Delta \boldsymbol{r} = {}^B\boldsymbol{v}_P \Delta t$.

– Dazu muss sich die Umfangsgeschwindigkeit um

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Delta} r = \boldsymbol{\omega} \times {}^B\boldsymbol{v}_P \Delta t$$

vergrößern.

– Das entspricht einer Beschleunigung von $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{\omega} \times {}^B\boldsymbol{v}_P$.

– Gleichzeitig ändert sich infolge der Drehung die Richtung des Vektors ${}^B\boldsymbol{v}_P$. Daraus resultiert eine Beschleunigung von

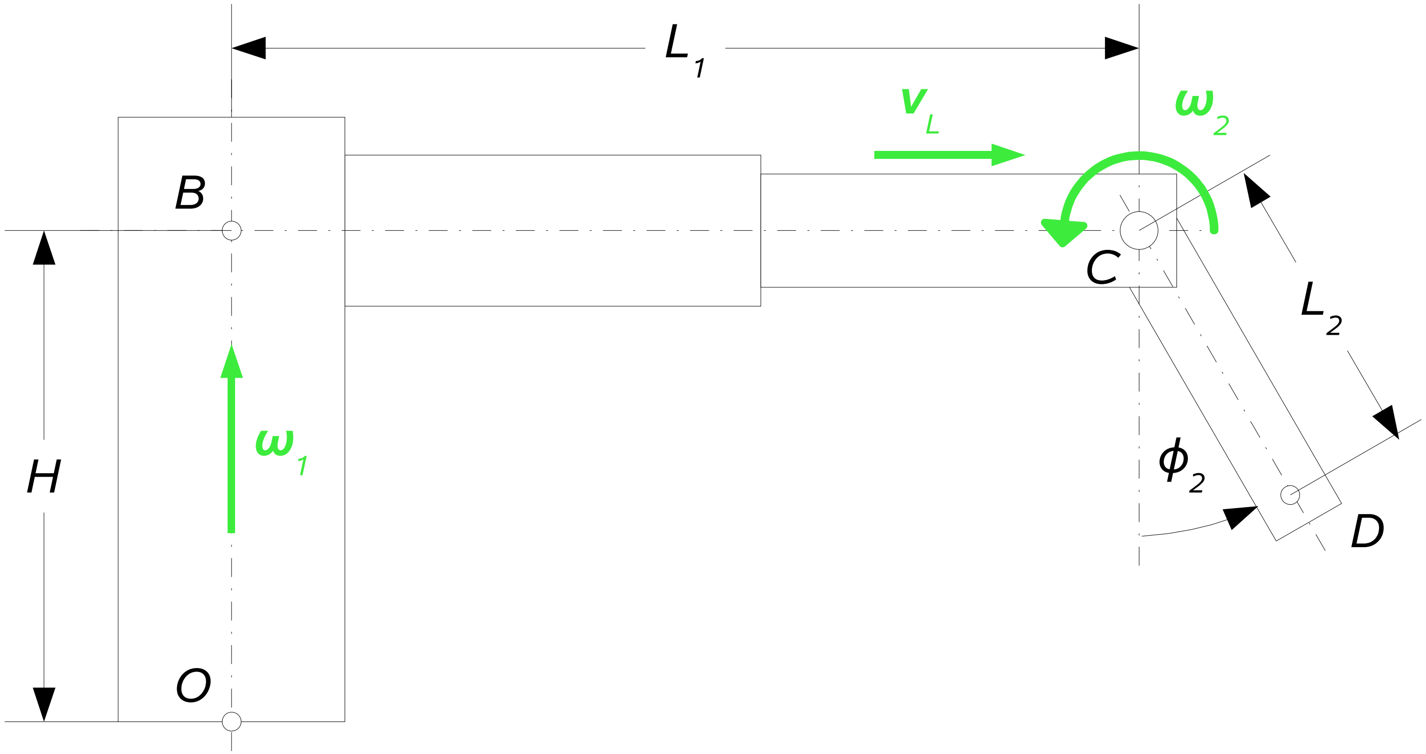
$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\omega} \times {}^B\boldsymbol{v}_P$$

– Die gesamte Beschleunigung ist also

$$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{\omega} \times {}^B\boldsymbol{v}_P$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Beispiel: Roboterarm

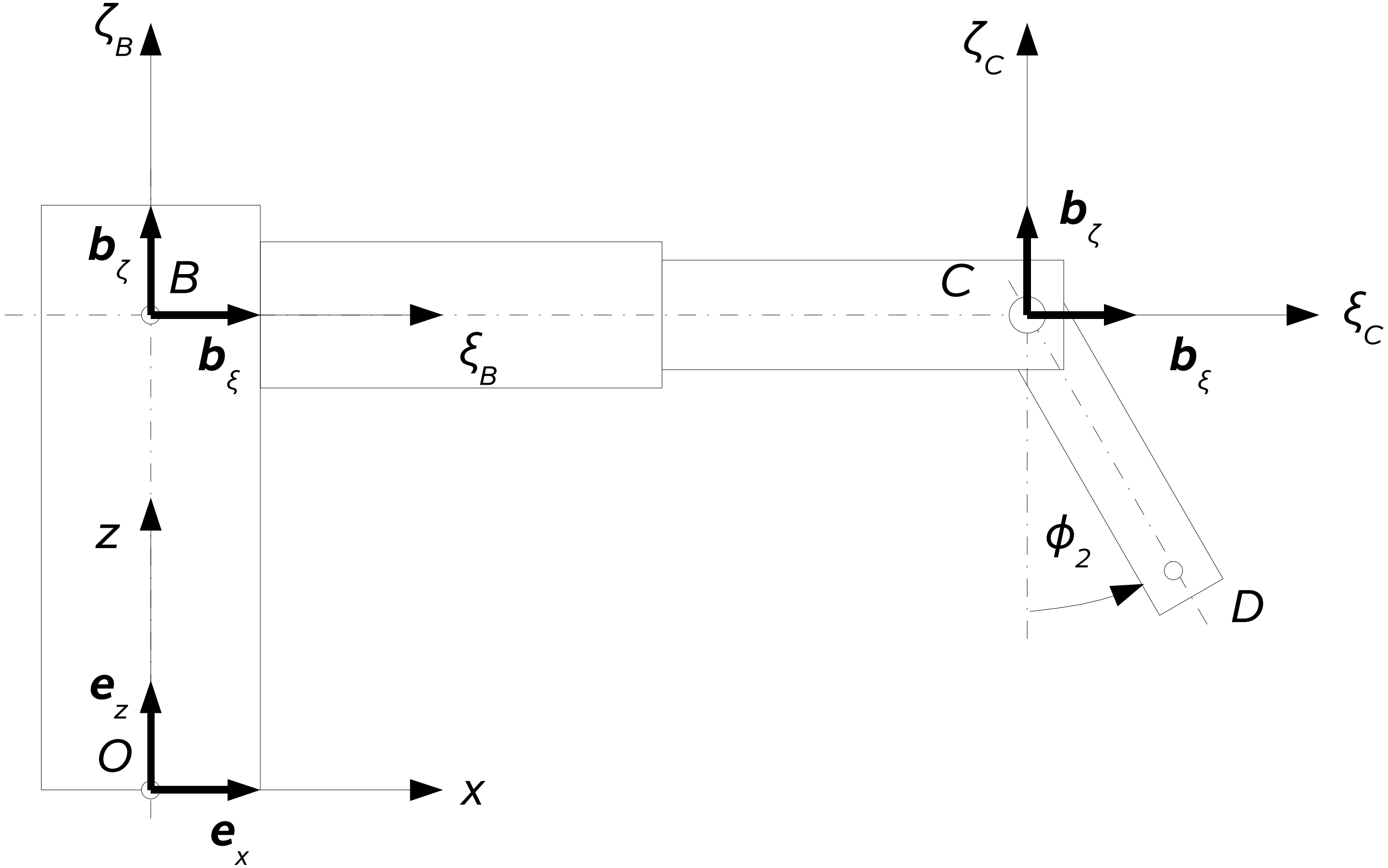


2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Gegeben:
  - Der Roboter dreht sich um die Achse *OB* mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1.
  - Der Arm *BC* wird mit einer konstanten Geschwindigkeit v_L ausgefahren.
  - Der Arm *CD* wird mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 geschwenkt.
- Gesucht:
  - Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktes *D*

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Koordinatensysteme:



2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Koordinatensystem *Oxyz* ist ruhend:
  - Ursprung *O*
  - Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$
  - Koordinaten *x*, *y*, *z*
- Koordinatensystem $B\xi_B\eta_B\zeta_B$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die Achse *OB*:
  - Ursprung *B*
  - Einheitsvektoren $\boldsymbol{b}_\xi$, $\boldsymbol{b}_\eta$, $\boldsymbol{b}_\zeta$
  - Koordinaten ξ_B, η_B, ζ_B

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Koordinatensystem $C\xi_C\eta_C\zeta_C$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_L relativ zum Koordinatensystem $B\xi_B\eta_B\zeta_B$:
  - Ursprung C
  - Einheitsvektoren $\boldsymbol{b}_\xi$, $\boldsymbol{b}_\eta$, $\boldsymbol{b}_\zeta$
  - Koordinaten ξ_C, η_C, ζ_C
- Alle Ergebnisse werden im Koordinatensystem $B\xi_B\eta_B\zeta_B$ angegeben.

2.2 Rotierendes Koordinatensystem

– Punkt *C*:

- Ortsvektor im Koordinatenystem $B\xi_B\eta_B\zeta_B$: $\boldsymbol{r}_{BC}=L_1(t)\,\boldsymbol{b}_\xi$

- Relativgeschwindigkeit bezüglich Bezugssystem $B\xi_B\eta_B\zeta_B$:

  $^{B}\boldsymbol{v}_C=v_L\,\boldsymbol{b}_\xi$ mit $v_L=\dot{L}_1$

- Absolutgeschwindigkeit: $\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{r}_{BC}+{}^{B}\boldsymbol{v}_C$

  Mit $\boldsymbol{v}_B=\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\omega}_1=\omega_1\,\boldsymbol{b}_\zeta$ folgt:

$$\boldsymbol{v}_C=\omega_1 L_1(t)\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\boldsymbol{b}_\xi+v_L\,\boldsymbol{b}_\xi=v_L\,\boldsymbol{b}_\xi+\omega_1 L_1(t)\,\boldsymbol{b}_\eta$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Absolutbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \boldsymbol{r}_{BC} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{BC} \right) + {}^B\boldsymbol{a}_C + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^B\boldsymbol{v}_C$$

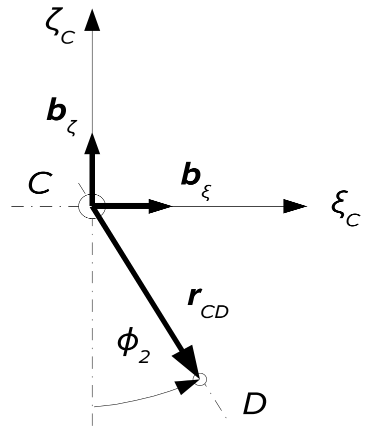
Mit $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \boldsymbol{0}$ und ${}^B\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{0}$ folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_C &= \omega_1^2 L_1(t)\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi \right) + 2\omega_1 v_L\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi \\ &= \omega_1^2 L_1(t)\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta + 2\omega_1 v_L\, \boldsymbol{b}_\eta = -\omega_1^2 L_1(t)\, \boldsymbol{b}_\xi + 2\omega_1 v_L\, \boldsymbol{b}_\eta \end{aligned}$$

– Punkt *D*:

- Ortsvektor im Koordinatensystem $C\xi_C\eta_C\zeta_C$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{CD} &= L_2 \left(\sin\phi_2\, \boldsymbol{b}_\xi - \cos\phi_2\, \boldsymbol{b}_\zeta \right) \\ &= L_2 \left(\sin(\omega_2 t)\, \boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\, \boldsymbol{b}_\zeta \right) \end{aligned}$$



2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Relativgeschwindigkeit bezüglich Bezugssystem $C\xi_c\eta_c\zeta_c$:

$$ {}^{C}\boldsymbol{v}_{D} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{CD} \qquad \text{(Rotation um Punkt } C\text{)} $$

Mit $\boldsymbol{\omega}_2 = -\omega_2 \boldsymbol{b}_\eta$ folgt:

$$ \begin{aligned} {}^{C}\boldsymbol{v}_{D} &= -\omega_2 L_2 \boldsymbol{b}_\eta \times \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta \right) \\ &= \omega_2 L_2 \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta + \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi \right) \end{aligned} $$

- Absolutgeschwindigkeit:

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{v}_D &= \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{CD} + {}^{C}\boldsymbol{v}_D \\ &= v_L \boldsymbol{b}_\xi + \omega_1 L_1(t)\boldsymbol{b}_\eta + \omega_1 L_2 \boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta \right) \\ &\quad + \omega_2 L_2 \left(\cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi + \sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta \right) \\ &= \left(v_L + \omega_2 L_2 \cos(\omega_2 t) \right)\boldsymbol{b}_\xi + \omega_1 \left(L_1(t) + L_2 \sin(\omega_2 t) \right)\boldsymbol{b}_\eta \\ &\quad + \omega_2 L_2 \sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta \end{aligned} $$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

- Relativbeschleunigung bezüglich Bezugssystem $C\xi_c\eta_c\zeta_c$ (Zentripetalbeschleunigung der Rotation von Punkt D um Punkt C):

$$
\begin{aligned}
{}^C\boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{\omega}_2 \times {}^C\boldsymbol{v}_D = -\omega_2^2 L_2 \boldsymbol{b}_\eta \times \left(\cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi + \sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta\right) \\
&= -\omega_2^2 L_2 \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta\right)
\end{aligned}
$$

- Absolutbeschleunigung:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{CD}\right) + {}^C\boldsymbol{a}_D + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^C\boldsymbol{v}_D \\
&= -\omega_1^2 L_1(t)\boldsymbol{b}_\xi + 2\omega_1 v_L \boldsymbol{b}_\eta \\
&\quad + \omega_1^2 L_2 \boldsymbol{b}_\zeta \times \left[\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta\right)\right] \\
&\quad - \omega_2^2 L_2 \left(\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta\right) \\
&\quad + 2\omega_1\omega_2 L_2 \boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\cos(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\xi + \sin(\omega_2 t)\boldsymbol{b}_\zeta\right)
\end{aligned}
$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

$$\boldsymbol{a}_D = -\omega_1 L_1(t)\,\boldsymbol{b}_\xi + 2\omega_1 v_L\,\boldsymbol{b}_\eta + \omega_1^2 L_2\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \sin(\omega_2 t)\,\boldsymbol{b}_\eta$$

$$-\omega_2^2 L_2\left(\sin(\omega_2 t)\,\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\omega_2 t)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right) + 2\omega_1\omega_2 L_2 \cos(\omega_2 t)\,\boldsymbol{b}_\eta$$

$$= -\left[\omega_1^2 L_1(t) + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) L_2 \sin(\omega_2 t)\right]\boldsymbol{b}_\xi$$

$$+ 2\omega_1\left(v_L + \omega_2 L_2 \cos(\omega_2 t)\right)\boldsymbol{b}_\eta + \omega_2^2 L_2 \cos(\omega_2 t)\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

2.2 Rotierendes Bezugssystem

– Ergebnis:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} = \left(v_L + \omega_2 L_2 \cos(\omega_2 t) \right) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\xi}}$$
$$+ \omega_1 \left(L_1(t) + L_2 \sin(\omega_2 t) \right) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+ \omega_2 L_2 \sin(\omega_2 t) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\zeta}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{D}} = -\left[\omega_1^2 L_1(t) + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \right) L_2 \sin(\omega_2 t) \right] \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\xi}}$$
$$+ 2 \omega_1 \left(v_L + \omega_2 L_2 \cos(\omega_2 t) \right) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+ \omega_2^2 L_2 \cos(\omega_2 t) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\zeta}}$$

2.3 Kinetik

- Im ruhenden Bezugssystem lautet das Newtonsche Grundgesetz für den Massenpunkt *P*:

$$m\boldsymbol{a}_P = m\left(\boldsymbol{a}_f + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c\right) = \boldsymbol{F}$$

- Auflösen nach der Relativbeschleunigung $\boldsymbol{a}_r$ liefert die Bewegungsgleichung für das bewegte System:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_f - m\boldsymbol{a}_c$$

- Mit der
  - Führungskraft

$$\boldsymbol{F}_f = -m\boldsymbol{a}_f$$

  - und der Corioliskraft

$$\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{a}_c$$

  folgt:

$$\boxed{m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_c}$$

2.3 Kinetik

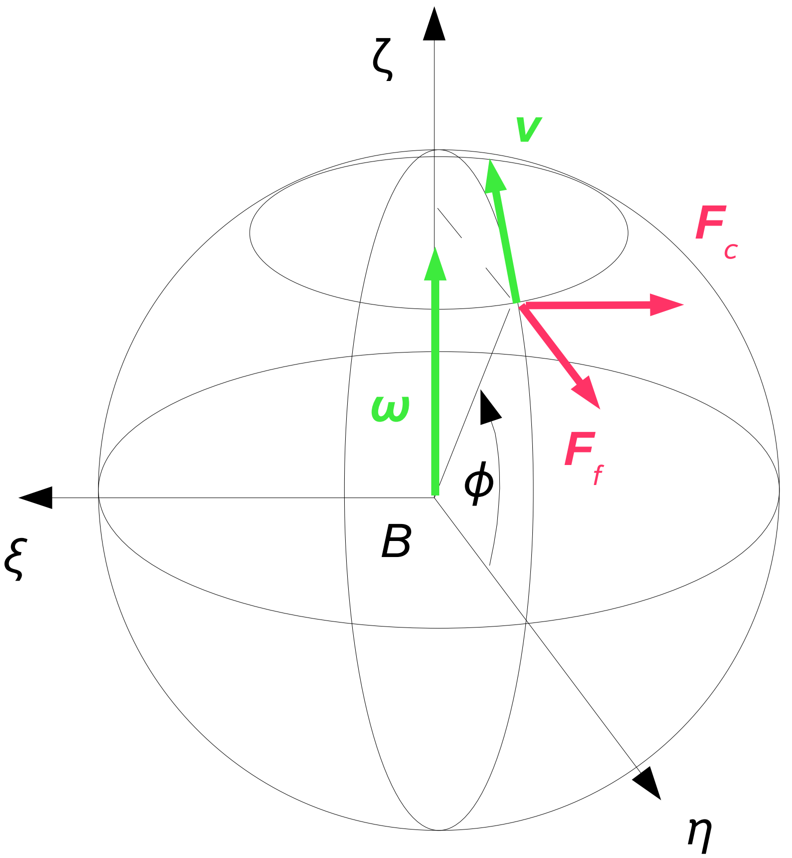
- Im bewegten System müssen neben den tatsächlichen Kräften $\boldsymbol{F}$ die Führungskraft $\boldsymbol{F}_f$ und die Corioliskraft $\boldsymbol{F}_c$ als Scheinkräfte berücksichtigt werden.
- Wenn das bewegte System eine reine Translation mit konstanter Geschwindigkeit ausführt (gleichförmige Bewegung), ist die Führungskraft und die Corioliskraft gleich Null.
- Ruhende oder gleichförmig bewegte Systeme werden als Inertialsysteme bezeichnet.
- In Inertialsystemen treten keine Scheinkräfte auf:

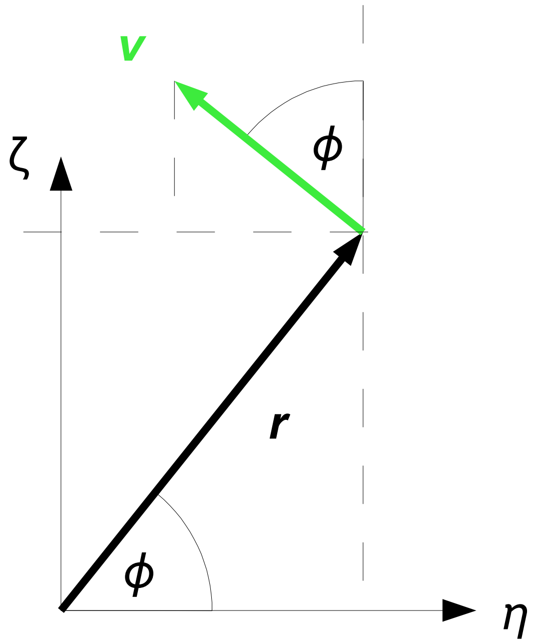
$$m\,\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}$$

2.3 Kinetik

- Beispiel:
  - Die Erde (Radius R = 6371km) ist ein rotierendes Bezugs-system.
  - Wie groß ist die Führungskraft und die Corioliskraft, vergli-chen mit der Gewichtskraft G, für einen Körper, der sich mit einer Geschwindigkeit von 100km/h auf einem Großkreis nach Norden bewegt?
  - Die Bewegung der Erde um die Sonne kann dabei vernach-lässigt werden.

2.3 Kinetik





2.3 Kinetik

- Die Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\, s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\, s^{-1}$$

- Vektoren im erdfesten System $B\xi\eta\zeta$:
  - Winkelgeschwindigkeit: $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{b}_\zeta$
  - Ortsvektor: $\boldsymbol{r} = R\left(\cos\phi\, \boldsymbol{b}_\eta + \sin\phi\, \boldsymbol{b}_\zeta\right)$
  - Geschwindigkeitsvektor: $\boldsymbol{v} = v\left(-\sin\phi\, \boldsymbol{b}_\eta + \cos\phi\, \boldsymbol{b}_\zeta\right)$
- Die Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_f$ ist gleich der Zentripetalbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_f = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right) = \omega^2 R\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \left[\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\cos\phi\, \boldsymbol{b}_\eta + \sin\phi\, \boldsymbol{b}_\zeta\right)\right]$$

$$= -\omega^2 R\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \cos\phi\, \boldsymbol{b}_\xi = -\omega^2 R \cos\phi\, \boldsymbol{b}_\eta$$

2.3 Kinetik

- Für die Coriolisbeschleunigung gilt:

$$\boldsymbol{a}_c = 2\omega \times \boldsymbol{v} = 2\omega\, \boldsymbol{b}_\zeta \times v\left(-\sin\phi\, \boldsymbol{b}_\eta + \cos\phi\, \boldsymbol{b}_\zeta\right) = 2\omega\, v \sin\phi\, \boldsymbol{b}_\xi$$

- Für die Führungskraft folgt:

$$\boldsymbol{F}_f = -m\,\boldsymbol{a}_f = m\,\omega^2 R \cos\phi\, \boldsymbol{b}_\eta = \frac{\omega^2 R}{g} \cos\phi \cdot G\, \boldsymbol{b}_\eta$$

Zahlenwert: $F_f = 3{,}435 \cdot 10^{-3}\, G \cos\phi$

- Die Führungskraft hat ihr Maximum am Äquator. Sie steht senkrecht auf der Drehachse der Erde und ist von der Erdachse weg gerichtet.

- Für die Corioliskraft folgt:

$$\boldsymbol{F}_c = -m\,\boldsymbol{a}_c = -2\,m\,\omega\,v \sin\phi\,\boldsymbol{b}_\xi = -\frac{2\,\omega\,v}{g}\sin\phi\cdot G\,\boldsymbol{b}_\xi$$

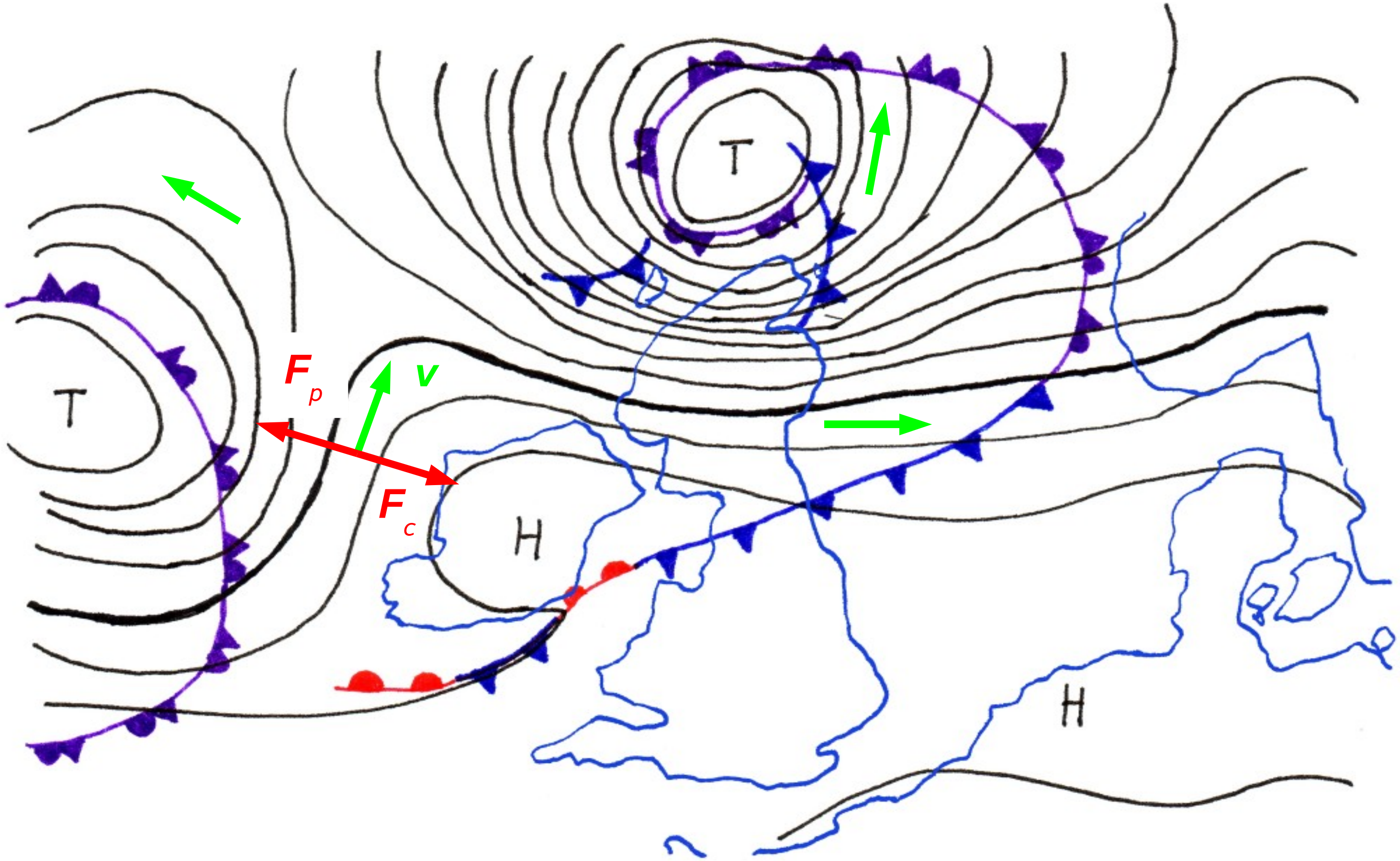
Zahlenwert: $F_c = 4{,}117\cdot 10^{-4}\,G\sin\phi$

- Die Corioliskraft hat ihr Maximum am Pol (ϕ = 90°). Sie zeigt auf der nördlichen Halbkugel nach rechts und auf der südlichen Halbkugel nach links.

2.3 Kinetik

- Für kurzzeitige und kleinräumige Vorgänge ist die Erde in guter Näherung ein Inertialsystem.
- Bei Vorgängen, die über lange Zeiten oder große Entfernungen ablaufen, spielt die Corioliskraft eine große Rolle.
- Beispiele:
  - Luftströmungen
  - Meeresströmungen

2.3 Kinetik



2.3 Kinetik

- Der Wind weht parallel zu den Isobaren.
- Die Druckkraft ist im Gleichgewicht mit der Corioliskraft.
- Daher strömt die Luft auf der Nordhalbkugel im Gegenuhr-zeigersinn um ein Tief und im Uhrzeigersinn um ein Hoch.
- Auf der Nordhalbkugel drehen Hurrikane im Gegenuhr-zeigersinn und auf der Südhalbkugel im Uhrzeigersinn.

2.3 Kinetik

Hurrikan Wilma,
Oktober 2005