UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Anillo de Chow de Variedades Toricas

Autor: Ariel Molinuevo
Director: Fernando Cukierman
Fecha de Presentación: 17/03/2008

Agradecimientos:

En primer lugar quisiera agradecer a mis padres, Hector y Anna, que me han ayudado, soportado e incentivado estoicamente durante todos estos años. A mis hermanitos (Martin y Christian) y a todo el resto de la flia.

A Lucia, mi novia, que siempre esta conmigo y me soporta (quizas con un perfil mas epicureo).

A mi director, Fernando Cukierman, que siempre demuestra una gran disponibilidad y conocimiento en todos estos temas y ha sido realmente muy importante para mi formacion.

A Eduardo Dubuc y Alicia Dickenstein que fueron profesores mios y ahora son el jurado de mi tesis.

A mis amigos con los que convivimos en el SGA que son Matias, Federico, Lucio, Cesar, Nicolas.

Y a mis amigos de la vida: el Dr., Guillermo, Martin, Rafael, Mauricio, Joaquin y todos los demas que no estan por aca (por Baires).

Índice

1. Introduccion

El grupo de Chow de una variedad algebraica X sobre un cuerpo k es el grupo que se obtiene al considerar todas las subvariedades de la variedad modulo deformaciones algebraicas, i.e., deformaciones parametrizadas por $\mathbb{P}^1(k)$. En el caso en que la variedad X es no singular, en base al Moving Lemma de Chow 3.4.6, dadas subvariedades cualesquiera V y W de X, siempre puede deformarse la variedad V en otra subvariedad V' de forma tal que V' y W se intersequen transversalmente. Esto permite calcular la multiplicidad de interseccion entre dos subvariedades cualesquiera y asi definir una estructura de anillo en el grupo de Chow.

Las variedades toricas pueden definirse en base a los semigrupos que se obtienen al considerar las potencias de los monomios de Laurent que forman a las funciones regulares definidas en ellas. Estos semigrupos se ven como un conjunto de conos en un reticulado al que se denomina fan. Utilizando esta clasificacion de variedades toricas como variedades construidas en base a un fan se pueden obtener los generadores de los grupos de Chow y las relaciones que estos verifican [F-McP-S-S]. En base a esto se eligieron estas variedades para dar ejemplos particulares del calculo de grupos de Chow; mas especificamente, se definen los espacios proyectivos con pesos y se calculan los fans que los definen y con eso los grupos de Chow.

La multiplicidad de interseccion surgio a mediados del siglo XIX al considerar la interseccion de dos curvas en el plano y construir un polinomio resultante eliminando una variable de forma tal que se obtenga una biyeccion entre los puntos de interseccion de las curvas y las raices del polinomio resultante. Se observo que las raices de este polinomio resultante tenian una multiplicidad que era invariante por reorientaciones de los ejes. A esa multiplicidad se la llamo multiplicidad de interseccion. A medida que se consideraban estructuras algebraicas mas generales el calculo de la multiplicidad fue cambiando hasta llegar a su version mas evolucionada en terminos de la caracteristica de Euler de las longitudes de los Tor de las dos subvariedades 2.5.6. Todo este desarrollo se encuentra en la primera parte de esta tesina.

2. Multiplicidad de interseccion

2.1. Teorema de Bezout

2.1.1 Teorema. Dos curvas $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$, suficientemente generales, de grados n y m, respectivamente, intersecan en $n.m$ puntos.

Este teorema fue enunciado por Mac-Laurin en el año 1720, ver [M-L]. Los primeros intentos para probar este resultado fueron dados por Euler, ver [Eul], y por Cramer en el apendice de su tratado. Una demostracion mas completa fue dada por Bezout, ver [Bez], el cual es a quien hoy en dia se le atribuye el resultado y, finalmente, demostraciones rigurosas fueron obra de Lagrange y Gauss, ver [Enriq].

Para enunciar el teorema de una manera mas rigurosa es necesario enunciarlo en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y contar los puntos de interseccion con multiplicidad. De cualquier manera, al hablar de curvas suficientemente generales no solo se requiere que las curvas tengan todas sus intersecciones en el espacio afin. Para aclarar eso, en lo que sigue tratare de dar una idea de la demostracion del teorema con el fin de ilustrar cual es el sentido geometrico al hablar de dos curvas en situacion general y el significado de la multiplicidad de interseccion.

Con respecto a la multiplicidad de interseccion, en los trabajos realizados para calcularla explicitamente se destacan dos enfoques:

1. *El dinamico*

   Una buena sintesis de este enfoque es el "principio de continuidad" de Poncelet, [Pon]: tomemos dos curvas f, g y P un punto de interseccion. Sean f_t, g_t dos familias de curvas con puntos de interseccion $P_{j,t}$ tales que $f_t \to f$, $g_t \to g$ y $P_{j,t} \to P$, para todo j, si $t \to 0$. Entonces

   $$I(P, f.g) = \sum_j I(P_{j,t}, f_t.g_t)$$

   donde $i(P, f.g)$ es la multiplicidad de interseccion de f y g en P y t esta en un entorno suficientemente chico del 0.

2. *El estatico*

   Desde este punto de vista la multiplicidad de interseccion se obtiene sin variar las ecuaciones y en base a una ecuacion resultante obtenida con las dos curvas. Esta manera de obtener la multiplicidad de interseccion fue generalizada por Macaulay [Mac] en 1915 a ideales sobre un anillo. En ese contexto fue evolucionando el concepto hasta la formula actual de Serre del '58, [Serre] , pasando por otras versiones dadas por Chevalley [Chevall1] y Samuel [Sam].

queremos construir un polinomio $R(a,b)(x)$, tomando $a = (a_0, \ldots, a_n)$ y $b = (b_0, \ldots, b_m)$, de forma tal que se verifique la siguiente propiedad.

2.1.2 Propiedad. Sea x tal que $R(a,b)(x) = 0$, entonces existe un y tal que $P = (x,y)$ es un punto de interseccion de las curvas f y g.

Para ver la existencia de tal polinomio se toman $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}[x]$ las raices de f y $y'_1, \ldots, y'_m \in \mathbb{C}[x]$ las raices de g y se considera el producto de las diferencias

$$\prod_{i,j} y_i - y'_j$$

Este producto es simetrico en las y_i y en las y'_j y por lo tanto se expresa en funcion de los cocientes a_i/a_n y b_j/b_m (puesto que al dividir por los coeficientes principales a_n y b_m, los coeficientes de los polinomios se expresan como polinomios simetricos de sus raices).

Tomando ahora

$$R(a,b) = a_n^m . b_m^n \prod_{i,j} y_i - y'_j$$

se tiene que $R(a,b)$ es un polinomio homogeneo en las a_i y en las b_j de grado m y n respectivamente. Mas aun, como polinomio en x tiene grado menor o igual que $n.m$ y se anula en un punto x_0 si y solo si existe y_0 de forma tal que el punto $P = (x_0, y_0)$ esta en la interseccion de f y g. Es decir que el metodo anterior es una demostracion de existencia de un polinomio R que verifique 2.1.2. Esta fue la base de las demostraciones dadas por Euler y Cramer.

Un metodo constructivo para obtener el polinomio resultante $R(a,b)$ fue dado por Sylvester en 1839. La idea consiste en que la compatibilidad del sistema $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ implica la compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{llcllcl}
y^0 & f(y) & = & a_n.y^n & + \ldots + & a_0.y^0 & = & 0 \\
y & f(y) & = & a_n.y^{n+1} & + \ldots + & a_0.y & = & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
y^{m-1} & f(y) & = & a_n.y^{n+m-1} & + \ldots + & a_0.y^{m-1} & = & 0 \\
y^0 & g(y) & = & b_m.y^m & + \ldots + & b_0.y^0 & = & 0 \\
y & g(y) & = & b_m.y^{m+1} & + \ldots + & b_0.y & = & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
y^{n-1} & g(y) & = & b_m.y^{n+m-1} & + \ldots + & b_0.y^{n-1} & = & 0
\end{array}\right. \tag{1}$$

en las incognitas $y^0, \ldots, y^{n+m-1}$. La condicion de compatibilidad se exprime entonces anulando el determinante del sist. (1) (puesto que y^0 claramente no puede ser 0).

Sea entonces $\mathrm{F} = \mathrm{F}(x)$ el determinante obtenido, se tiene que F es un polinomio de grado menor o igual que $n.m$ y que verifica la propiedad 2.1.2. Por lo tanto $\mathrm{F} = \lambda R(a, b)$, donde λ es una constante.

Al utilizar el metodo del determinante de Sylvester puede suceder que el determinante $F \equiv 0$ o que el grado de $F < m.n$. La primer situacion es equivalente a que los polinomios f y g admitan un polinomio h de grado positivo que los divida. Una manera de ver esto consiste en dividir primero f por g vistos como polinomios en y, luego dividir g por el resto de la primer division y asi siguiendo hasta encontrar un resto que no dependa de y. Este resto es un polinomio en x que tambien resulta ser la resultante de f y g ([1]). En el caso en que f y g tienen resultante igual a 0 se puede ver que el ultimo resto no nulo en esta serie de divisiones es un factor comun de f y g. Para evitar esta situacion, vamos a considerar curvas que no admitan componentes comunes.

Por otro lado, si las curvas f y g tienen una asintota vertical al eje y que pasa por el punto x_0, entonces x_0 es raiz del polinomio resultante pero su coordenada y_0 esta en el infinito.

Si, en cambio, f y g tienen una asintota no paralela al eje y, el grado del polinomio resultante es $< n.m$ y hay un punto de interseccion cuya coordenada x se esta yendo (o ya se fue) al infinito.

Ejemplo. Si tomamos $f(x, y) = xy - 1$, $g(x, y) = x$ y $g_\epsilon(x, y) = x - \epsilon$. Se tiene que $g_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} g$ y que f y g_ϵ intersecan en $P_\epsilon = (\epsilon, 1/\epsilon)$. Por otro lado, $P_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} P = (0, \infty)$ y 0 es raiz del polinomio resultante de f y g que es $R(x) = x^2$.
Eliminando la variable x en lugar de la variable y, se tiene que $R(y) = y$ y el grado es menor que 2.

Para evitar estas situaciones basta hacer un cambio de variables rotando los ejes y listo ([2]).

Teniendo en cuenta estas salvedades, supongamos que tenemos el polinomio resultante R de dos curvas y que x_0 es una raiz. Puede suceder que existan puntos distintos y_0 e y_1 tales que los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_0, y_1)$ sean puntos de interseccion de las curvas dadas, es decir que la recta paralela al eje y que pasa por x_0 pasa tambien por P_0 y P_1. Esta situacion hace que la raiz x_0 sea una raiz multiple de R pero que los puntos P_0 y P_1 no absorban tantos puntos de interseccion como la multiplicidad de x_0, hecho que contradice el principio de continuidad de Poncelet. Para evitar esta situacion basta, nuevamente, con realizar una rotacion conveniente de los ejes. De esta manera se obtiene una biyeccion entre las raices del polinomio resultante R y los puntos de interseccion.

[1] Este metodo fue utilizado por Stevin (1585) para encontrar la resultante de polinomios de grado 3 y 4

[2] Es bueno remarcar que el cambio de variables no tiene como objetivo llevar las curvas a una situacion excepcional donde realizar los calculos sino que el cambio da variables busca llevar las curvas de una situacion excepcional a una general y es por esto que casi cualquier deformacion sirve.

Ejemplo. un ejemplo de esta situacion se obtiene al tomar $f(x,y) = x-y^2+1$ y $g(x,y) = x$. La resultante $R(x) = x^2$ y los puntos $P_0 = (0,1)$ y $P_1 = (0,-1)$ son simples. Nuevamente tomando una perturbacion conveniente $f_\epsilon = x-y^2+1-\epsilon$ se resuelve el problema en sintonia con el principio de Poncelet.

Ahora bien, cuando hablamos de dos curvas en "posicion general" nos referimos a que no suceden ninguna de las patologias anteriores. En resumen son:

- componentes comunes de las curvas
- comportamientos asintoticos
- puntos de interseccion distintos sobre una recta paralela al eje y

Se tiene que una raiz x_0 del polinomio resultante R puede todavia tener multiplicidad, digamos l. En esta situacion la multiplicidad es invariante respecto de la orientacion de los ejes y siempre se puede realizar una perturbacion de una de las curvas de forma tal que existan l puntos distintos que colapsen en el punto de interseccion dado por x_0, ver [Enriq].

2.1.3 Definicion. Sean f y g dos curvas en posicion general, sea x_0 una raiz del polinomio resultan $R(x)$ y sea P el unico punto de interseccion entre f y g donde x_0 es la primer coordenada de P. Si l es la multiplicidad de x_0 entonces vamos a decir que el punto P tiene multiplicidad de interseccion l y lo notamos $\mathrm{I}(f.g, P) = l$.

Suponiendo todas las curvas en posicion general, algunas propiedades basicas de la multiplicidad de interseccion son:

2.1.4 Propiedad. $\mathrm{I}(f.(g_1.g_2), P) = \mathrm{I}(f.g_1, P).\mathrm{I}(f.g_2, P)$

Demostracion. Basta pensar en el polinomio resultante como

$$R(x) = \prod y_i - y'_j = \prod y_i - y'_{g_1} \prod y_i - y'_{g_2},$$

donde y'_{g_i} indica las raices de g_i. ♠

2.1.5 Propiedad. $\mathrm{I}(f.g, P) = \mathrm{I}(f.(g+\lambda f), P)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

Demostracion. Tomando ahora el polinomio resultante como el determinante de la matriz de Sylvester la propiedad es inmediata. $\diamond$

2.1.6 Propiedad. Regla de Halphen ([3]): si x_0 es una raiz de multiplicidad l de $R(x)$ entonces $R(x-x_0) = O((x-x_0)^l)$.

2.1.7 Corolario. Si P es un punto no singular de f y g y los polinomios tienen tangentes distintas entonces $\mathrm{I}(f.g, P) = 1$.

[3]Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 3 (1874, 75), pag.76

Demostracion. Supongamos que $P = (0, 0)$ y que las pendientes de las rectas tangentes de f y g son α y α', respectivamente. Sea $R(x) = \prod y_i - y'_j$ el polinomio resultante y supongamos que $y_1 - y'_1$ es la (unica) diferencia que se anula en $x = 0$. Se tiene que $y_1 - y'_1 \simeq (\alpha - \alpha')x$ y, por lo tanto, $R(x)$ es de orden 1 alrededor del 0. Entonces x no puede tener multiplicidad mayor. ♡

2.1.8 Corolario. Sea P un punto no singular que esta en la interseccion de f y g, donde f y g tienen el mismo desarrollo de Taylor de orden $r-1$ y distinto a partir de r. Entonces $\mathrm{I}(f.g, P) = r$

Demostracion. Tomando $P = (0, 0)$ y con la misma notacion que la demostracion anterior, tenemos que

$$y_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{r-1}x^{r-1} + \alpha_r x^r$$
$$y'_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{r-1}x^{r-1} + \alpha'_r x^r$$

entonces $R(x) \simeq (\alpha_r - \alpha'_r)x^r$ alrededor del 0, y por Halpen, $\mathrm{I}(f.g, P) = r$. ♣

Observacion. Dada una curva $f \in \mathbb{C}[x, y]$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ en la curva, al considerar $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, el circulo osculador de f en P, lo que se esta haciendo es encontrar una curva que interseque a f con multiplicidad ≥ 3 en base a ideas geometricos, puesto que $\rho = 1/\kappa$, donde κ es la curvatura de f en P.

2.2. Longitud y multiplicidad de interseccion

Repitiendo el proceso de eliminacion y calculo de multiplicidad de raices de un polinomio, vamos a obtener una forma mas sintetica de expresar la multiplicidad de interseccion en terminos de la longitud de un modulo sobre un anillo. Esta forma se generaliza facilmente al calculo de multiplicidad de interseccion de n curvas en n variables y define lo que se llama la multiplicidad de una componente irreducible de una variedad en los casos mas generales.

Sean nuevamente $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ de grados n y m respectivamente, tales que las curvas que definen se intersecan en puntos; o equivalentemente, por 5.2.15, que

$$\ell_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C}[x, y]/(f, g)) < \infty$$

Supongamos que las curvas se intersecan sobre el eje y. Si f es de la forma $a_n(x).y^n + \ldots + a_0(x)$, se tiene que $a_n(0) \neq 0$, puesto que si no pasara el resultante tendria grado $< nm$. Considerando el anillo $A = \mathbb{C}[x]_{(x)}$ que es el que representa al eje y, tenemos que $a_n(x) \in \mathcal{U}(A)$ y entonces la extension de anillos $A \subset A[y]/f$ es entera, lo que hace que $A[y]/f$ este finitamente generado por A como A-modulo. Mas aun, se tiene que $\{1, y, \ldots, y^{n-1}\}$ es una base.

2.2.1 Propiedad. Si $A[y]/f \xrightarrow{g} A[y]/f$ denota el endomorfismo de multiplicacion por g entonces $\det(g) = R$, donde R es el polinomio resultante de f y g.

Demostracion. Para ver esto, solo es necesario escribir la transformacion en la base $\{1, \ldots, y^{n-1}\}$ y calcular el determinante, observando que las clases y^{n+k}, con $k \geq 0$, son combinaciones lineales de las y^i donde los coeficientes son los coeficientes de f. ♠

Como $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ tiene longitud finita y por 5.2.11 y 5.2.14, sabemos que $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ se escribe como $\bigoplus \mathbb{C}[x,y]/(f,g)_{P_i}$, donde P_i son los puntos de interseccion. Si escribimos $P_k = (x_k, y_k)$, para aquellos puntos P_k que no estan sobre el eje y, se tiene que $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)_{(x,y_k)} = 0$. Entonces, $A/(f,g)_{P_k} = 0$ y, usando la misma descomposicion, $A[y]/g = \bigoplus \mathbb{C}[x,y]/(f,g)_{(x,y-y_j)}$, donde y_j son las coordenadas sobre el eje y de los puntos de interseccion. Sin perdida de generalidad, sabemos que podemos suponer que existe un unico punto P sobre el eje y en el cual las curvas se intersecan, pongamos $P = (0, y_0)$. Finalmente $\ell_{\mathbb{C}[x,y]}(A[y]/g) = \ell_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C}[x,y]/(f,g)_P)$.

Por otro lado, si escribimos a R como $R(x) = x^s.G(x)$, con $G(0) \neq 0$, entonces

$$(\mathbb{C}[x]/R)_{(x)} = (\mathbb{C}[x]/x^s)_{(x)} \qquad \text{y} \qquad \ell_{\mathbb{C}[x]}((\mathbb{C}[x]/x^s)_{(x)}) = s.$$

Queremos ver ahora que $\ell_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C}[x,y]/(f,g)_P)$ y $\ell_{\mathbb{C}[x]}((\mathbb{C}[x]/x^s)_{(x)})$ son iguales. Para eso observemos que la imagen del morfismo de multiplicacion por g en $A[y]/f$ es $(\mathbb{C}[x,y]/(f,g))_{(x)}$, cuya longitud coincide con la de $\ell_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C}[x,y]/(f,g)_P)$. Se tiene que la igualdad buscada vale por el siguiente lema, ver [Ful2],

2.2.2 Lema. Sea M es un A_p-modulo libre de rango finito y A una k-algebra finitamente generada, con p principal. Entonces dado un endomorfismo $\phi : M \to M$ se tiene

$$\ell_{A_p}(M/\phi(M)) = \ell_{A_p}(A_p/\det(\phi))$$

En base a todo lo anterior tenemos la siguiente prop:

2.2.3 Propiedad. Si f y g son dos curvas en $\mathbb{C}[x,y]$ y P es un punto de interseccion, entonces

$$\mathrm{I}(f.g, P) = \ell_{\mathbb{C}[x,y]}((\mathbb{C}[x,y]/(f,g))_P)$$

Esta formula para calcular la multiplicidad de interseccion se puede caracterizar por verificar los siguientes axiomas, ver [Ful1]:

1. $\mathrm{I}(f.g, P) > 0$ y $\mathrm{I}(f.g, P) = \infty$ si y solo existe una componente comun a f y g que pasa por P
2. $\mathrm{I}(f.g, P) = 0$ si y solo si P no pertence a la interseccion entre f y g
3. $\mathrm{I}(f.g, P) = \mathrm{I}(f(T).g(T), Q)$ si T es un cambio de coordenadas afin, tal que $T(Q) = P$
4. $\mathrm{I}(f.g, P) = \mathrm{I}(g.f, P)$
5. $\mathrm{I}(f.g, P) \geq \mathrm{I}(f.L_1, P).\mathrm{I}(g.L_2, P)$, donde L_1 y L_2 son rectas no tangentes a las curvas que pasan por P, y vale la igualdad, si y solo si, f y g no tienen tangentes comunes en P

6. si $f = \prod f_i^{r_i}$ y $g = \prod g_j^{s_j}$ entonces $\mathrm{I}(f.g, P) = \sum r_i.s_j \mathrm{I}(f_i.g_j, P)$

7. $\mathrm{I}(f.g, P) = \mathrm{I}(f.(g + \lambda f), P)$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Esta manera de calcular la multiplicidad se extiende sin problemas al espacio afin en n variables. Un ejemplo donde falla, en el sentido de que no verifica el principio de continuidad de Poncelet, fue dado por Van der Waerden alrededor de 1924. Consiste en el siguiente caso:

Ejemplo. Consideremos la aplicacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^4 \\ (s,t) & \longmapsto & \phi(s,t) = (s^4, s^3 t, s t^3, t^4). \end{array}$$

Se tiene que $\mathrm{Im}(\phi) = V$ es la variedad dada por el anillo $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_4]/I$, donde el ideal I esta generado por $(x_1 x_4 - x_2 x_3 \ , \ x_1^2 x_3 - x_2^3 \ , \ x_4^2 x_2 - x_3^3)$.

Consideremos a V como el espacio ambiente, y tomemos $W_1, W_2 \subset V$ subvariedades definidas por $f_1 = x_1$ y $f_2 = x_4$ respectivamente. Los modulos sobre A asociados a W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$ estan dados por A/x_1 , A/x_4 y $A/(x_1, x_4) = M \simeq \mathbb{C}[x_2, x_3]/J$, donde $J = (x_2^3 \ , \ x_2 x_3 \ , \ x_3^3)$.

Tenemos entonces que $\mathrm{Supp}(A/(x_1, x_4)) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ y, por lo tanto, el $(0,0,0,0)$ es el unico punto de interseccion. Por otro lado

$$0 \subset (x_2^2).M \subset (x_2).M \subset (x_2, x_3^2).M \subset (x_2, x_3).M \subset M$$

es una cadena maximal de M y entonces $\ell_A(M) = 5$

Si tomamos ahora una perturbacion de W_1, pongamos $W_{1,\epsilon}$ dada por $f_{1,\epsilon} = x_1 + \epsilon$, tenemos que la variedad de interseccion esta dada por

$$A/(x_1 + \epsilon, x_4) = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_2 x_3 \ , \ x_1^2 x_3 - x_2^2 \ , \ x_1 + \epsilon)$$

y los puntos de interseccion son $(-\epsilon, 0, 0, 0) \xrightarrow{\epsilon \to 0} (0,0,0,0)$.

Se tiene que $(x_2 x_3 \ , \ x_1^2 x_3 - x_2^2 \ , \ x_1 + \epsilon) = (x_2^4 \ , \ x_3 - (1/\epsilon^2) x_2^3)$, y entonces el modulo de la variedad interseccion M_ϵ es isomorfo a $\mathbb{C}[x_2]/x_2^4$ el cual tiene longitud 4 sobre el anillo A.

2.3. El modelo algebraico

Vamos a entender por variedad (afin) a un anillo conmutativo A que sea una k-algebra finitamente generada, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado (esencialmente $k =$

$\mathbb{C}$). Vamos a llamar Spec(A) al conjunto de ideales primos p de A; los puntos geometricos de la variedad A estan dados por Spec$^m(A)$ que es el conjunto de ideales maximales.

Si $I \subset A$ es un ideal, este define una subvariedad al mirar el conjunto de puntos en los que se anulan todos los polinomios de I; en nuestro caso, la variedad esta dada por los ideales primos $p \in \operatorname{Spec}(A)$ tales que $I \subset p$, o bien, por los $p \in \operatorname{Spec}(A)$ tales que $\operatorname{ann}(A/I) \subset p$. Mas generalmente, podemos considerar como subvariedad de A a un modulo M sobre A, de forma tal que la subvariedad geometrica esta dada por $V(M) = \{p \in \operatorname{Spec}(A)/ \operatorname{ann}(M) \subset p\}$; en 5.2.10 se define este conjunto como el soporte de M y se ve que coincide con el conjunto $\{p \in \operatorname{Spec}(A)/ M_p \neq 0\}$.

Si M_1 y M_2 son subvariedades de A, $M_1 \otimes_A M_2$ representa a la subvariedad interseccion. Notar que si $M_1 = A/I$ y $M_2 = A/J$ con $I, J \subset A$ ideales, entonces $A/I \otimes A/J = A/(I+J)$, y tenemos que $p \in V(A/I) \cap V(A/J)$ si y solo si $p \in V(A/I+J)$. Esto ultimo vale en general, es decir $\operatorname{ann}(M_1 \otimes M_2) = \operatorname{ann}(M_1) \cap \operatorname{ann}(M_2)$.

El Spec(A) esta dotado de la topologia de Zariski, donde una base de cerrados son los conjuntos de la forma $W(I) = V(A/I)$ y una base de abiertos esta dada por $D(f) = \{p \in \operatorname{Spec}(A) | f \notin p\}$ (algunas propiedades estan en 3.1).

Sea $M \in A$-mod y sea p de forma tal que $W(p)$ es una componente irreducible de $V(M)$, ver 5.2.6. Entonces $M_p \in A_p$-mod, donde $V(M_p)$ esta formada solo por el ideal maximal p y, por lo tanto, tiene longitud finita.

Observacion. En general, si $q \subsetneq p$ entonces $M_q = 0$ y $\ell_{A_q}(M_q) = 0$, y si $p \subsetneq q$ entonces $\ell_{A_q}(M_q) = \infty$.

2.3.1 Definicion. En la situacion anterior, vamos a decir que $\ell_{A_p}(M_p)$ es la multiplicidad de la componente irreducible $W(p)$ de M en A.

Observacion. Por lo visto en el ejemplo 2.2.3, tenemos que si W es una componente irreducible de la interseccion de dos subvariedades, entonces su multiplicidad y su multiplicidad de interseccion pueden diferir. Esto se debe a que la multiplicidad es un concepto estatico de una variedad, en cambio, la multiplicidad de interseccion es un concepto dinamico que tiene en cuenta como se cruzan las dos subvariedades.

2.4. Multiplicidad de interseccion por Samuel

Sean $M, N \in A$-mod dos subvariedades y sea $p \in \operatorname{Ass}^m(M \otimes N)$, i.e, $W(p) \subset \operatorname{Spec}(A)$ es una componente irreducible de la interseccion de M y N. Sea $I = \operatorname{ann}(M)$ y $J = \operatorname{ann}(N)$, se tiene entonces que $V((M/J.M)_p) = V((M/(I+J)M)_p) = \{p\}$ en A_p y, por lo tanto, $(M/a.M)_p$ tiene longitud finita, donde $a = I + J$. Mas aun, la filtracion a-adica en M_p es tal que $\ell_{A_p}((M/a^n M)_p) < \infty$ y entonces tiene sentido calcular el polinomio de Samuel asociado, llamemoslo $P_a(M, n)$. Si $P_a(M)$ tiene grado r podemos escribir

$$P_a(M, n) = \frac{e}{r!} n^r + \text{ terminos de menor grado}$$

teniendo que $\Delta^r P_a(M) = e := e_a(M)$, ver 5.3. Como $P_a(M,n) = \ell_{A_p}(M/a^{n+1}M)$ tenemos que $e \geq 0$. Sea $P_a(N,n) = \frac{e'}{s!}n^s +$ terminos de menor grado el polinomio asociado a N. Samuel, en [Sam], demostro que $e = e'$ y que este valor, pongamos $e = e' = e(M.N, p)$, es la multiplicidad de interseccion de las subvariedades M y N en p.

2.4.1 Definicion. En base a la situacion anterior vamos a llamar $\mathrm{d}(M) = \mathrm{grad}(P_a(M))$.

Observacion. En el caso en que $p \in \mathrm{Ass}^m(M)$ y $N = A/p$ tenemos que $e(M.A/p, p) = \ell_{A_p}(M_p)$ que es la multiplicidad de la componente p en M. Esto esta claro, pues tenemos que $\mathrm{ann}(M_p) = \{p\}$ y entonces existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $p^n \subset \mathrm{ann}(M)$. Entonces $\ell_{A_p}((M/p^nM)_p) = \ell_{A_p}(M)$ constantemente, lo que implica $P_p(M,n) = \ell_{A_p}(M)$.

2.4.2 Teorema. Sea (A, m) un anillo local que es una k-algebra finitamente generada, y sea M un A-mod finitamente generado de longitud finita sobre A. Entonces $d(M) = \dim(V(M))$.

Demostracion. Sea $a = \mathrm{ann}(M)$, como M tiene longitud finita sobre A, entonces existe un n tal que $m^n \subset a \subset m$ lo que implica que $P_a(M)$ tiene el mismo grado que $P_m(M)$. En base a la filtracion m-adica, tenemos por un lado el polinomio de Samuel de M, $P_m(M)$, que es el polinomio asociado a la funcion $\ell_A(M/M_n)$, donde $M_n = m^nM$; si, en cambio, consideramos el modulo graduado asociado a M, $\mathrm{Gr}(M) = \bigoplus M_n/M_{n+1} = \bigoplus M^n$ sobre el anillo $\mathrm{Gr}(A) = \bigoplus A_n/A_{n+1}$, con $A_n = m^nA$, tenemos que la funcion $\ell_{\mathrm{Gr}(A)}(M^n)$ es polinomial y su polinomio asociado es el polinomio de Hilbert de $\mathrm{Gr}(M)$, $P(\mathrm{Gr}(M), n)$ y verifica que, ver 5.3.5,

$$P_m(M,n) = \int_0^n P(\mathrm{Gr}(M), k)dk$$

En base a la igualdad anterior $\mathrm{grad}(P_m(M)) = \mathrm{grad}(P(\mathrm{Gr}(M))) + 1$. Para probar el teorema vamos a ver que $\mathrm{grad}(P(\mathrm{Gr}(M))) = \dim(V(M)) - 1$, pero $\dim(V(M)) - 1 = V(\mathrm{Gr}(M))$, donde $V(\mathrm{Gr}(M))$ se lo ve incluido en el espectro de ideales homogeneos de $\mathrm{Gr}(A)$ y, por lo tanto, la dimension topologica cae en 1. Es decir que al homogeneizar todo la dimensiones se igualan y resta ver que $\mathrm{grad}(P(\mathrm{Gr}(M))) = \dim(V(\mathrm{Gr}(M)))$.

Los primeros dos terminos de $\mathrm{Gr}(A)$ son k y m/m^2, donde m es un ideal maximal finitamente generado. Por lo tanto $\mathrm{Gr}(A)$ esta generado por elementos de grado 1 y es de la forma $H_0[x_0, \ldots, x_n]/I$ con I un ideal homogeneo y H_0 un anillo de longitud finita sobre k. Por comodidad llamemos N a $\mathrm{Gr}(M)$, S a $\mathrm{Gr}(A)$ y $P(N) = P(\mathrm{Gr}(M))$.

Sea $0 \twoheadrightarrow N' \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow N'' \twoheadrightarrow 0$ una sucesion exacta de S-modulos, por 5.1.3 se tiene que $\ell_S(N) = \ell_S(N') + \ell_S(N'')$ y, es facil ver, que $V(N) = V(N') \cup V(N'')$, por lo tanto si la propiedad vale para N' y N'' vale para N.

Por un teorema analogo a 5.2.9 para el caso graduado, se tiene que existe una filtracion creciente de N, digamos $N_0 \subset \ldots, N_n$, tal que $N_{n+1}/N_n \simeq (S/p_i)(l_i)$, donde $p_i \in \mathrm{Ass}(N)$ es un primo homogeneo y l_i es un cambio de graduacion de n a $n + l_i$. Nuevamente, como la longitud es una funcion aditiva y como el shift l se reduce a un cambio de variables $x \mapsto x + l$, podemos reducirnos al caso donde $N \simeq S/p$.

Si $p = (x_0, \ldots, x_n)$ entonces $P(N) = 0$ y $V(N) = \emptyset$, tomando la convencion de que el grado del polinomio nulo y la dimension del conjunto vacio es -1 tenemos que $\mathrm{grad}(P(N)) = \dim(M)$. Si existe algun $x_i \notin p$ consideramos la sucesion exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{.x_i} N \xrightarrow{\pi} N'' \longrightarrow 0$$

donde $N'' = N/x_iN$.

Entonces $P(N'', k) = \Delta P(N, k-1)$, lo que implica que $\mathrm{grad}(P(N'')) = \mathrm{grad}(P(N)) - 1$, y $V(N'') = V(N) \cap H$, donde H es el hiperplano definido por $x_i = 0$, y entonces $\dim(V(N'')) = \dim(V(N)) - 1$. Finalmente por induccion se tiene el teorema. $\diamond$

Ejemplo. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_r]$ un polinomio de grado s. Consideramos el polinomio $\overline{f} \in k[x_0, \ldots, x_r]$ que es f homogeneizado. Algebraicamente tenemos $M = S/\overline{f}$, donde $S = k[x_0, \ldots, x_r]$. Calculemos el polinomio de Hilbert $P(M)$.

Se tiene una sucesion exacta corta

$$0 \longrightarrow S(-s_i) \xrightarrow{\overline{f}} S \xrightarrow{\pi} (S/f) \longrightarrow 0$$

y entonces $P(M, l) = P(H, l) - P(M, l-s) = P(H, l) - P(H, l-s)$ para $l >> 0$. Contando la cantidad de monomios de grado l en $r+1$ variables llegamos a que

$$P(M, l) = \binom{l+r}{r} - \binom{l-d+r}{r} = \frac{s}{(r-1)!}.l^{r-1} + \text{ t.d.m.g}$$

Por lo tanto, el coeficiente principal por el factorial del grado es el grado del polinomio f.

2.4.3 Definicion. Sea (A, r) un anillo semilocal con r la interseccion de sus ideales maximales y sea $M \in A$-mod. Sea $\overline{a} = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset r$ un conjunto. Vamos a decir que $\overline{a}$ es una M-sucesion, o una sucesion M regular, si:

1. $\mathrm{ann}(a_1) = 0$
2. $\mathrm{ann}(\overline{a_i}) = 0$, donde $\overline{a_i}$ es la clase de a_i en el cociente $M/(a_1, \ldots, a_{i-1}) := M_{i-1}$

Es facil ver que una tal sucesion existe si y solo si el ideal $r \notin \mathrm{Ass}(M)$, es decir, si y solo si $\exists x \in r$ tal que x no es un divisor de 0 en M, ver 5.2.

O bien, sea $k = A/r$ entonces existe $x \in r$ tal que x no es un divisor de 0 si y solo si $\mathrm{Hom}_A(k, M) = 0$. Basta con ver que si $x \in r$ y si $f \in \mathrm{Hom}(k, M)$, entonces

$$0 = f(0) = f(\overline{x}) = x.f(\overline{1}) = x.m$$

En base a lo anterior y conservando la notacion, se tiene la siguiente propiedad:

2.4.4 Propiedad. $\mathrm{Hom}(k, M_p) = \mathrm{Ext}^p(k, M)$.

Demostracion. La demostracion de esta propiedad sale por induccion teniendo en cuenta por un lado que si $\{a_1, \ldots, a_p\}$ es una M sucesion entonces $\{a_2, \ldots, a_p\}$ es una $M_1 = M/a_1M$ sucesion y por otro lado que al considerar la sucesion exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a_1} M \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

y al aplicar δ funtor $\mathrm{Ext}^\bullet(k, -)$ a la sucesion exacta corta de resoluciones de esos objetos se obtiene el resultado deseado por induccion. ♡

Es facil ver que toda sucesion M regular tiene una sucesion maximal y que todas las maximales tienen la misma cantidad de elementos, llamemosla p. Por lo visto, p coincide con el infimo de los n tales que $\mathrm{Ext}^n(k, M) \neq 0$. Vamos a decir que p es la codimension homologica de M y la notamos $\mathrm{codh}(M)$ (en algunos libros se llama profundidad, depth).

2.4.5 Definicion. Sea (A, r) un anillo semilocal noetheriano y sea M un A modulo de dimension n. Sea $\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_s\} \subset M$ un conjunto. Vamos a decir que $\overline{x}$ es un sistema de parametros de M si:

1. $s = n$
2. $\ell_A(M/\overline{x}M) < \infty$

Observacion. La cantidad de elementos de un conjunto $\overline{x} \subset M$ tal que $\ell_A(M/\overline{x}M)$ es una suerte de dimension de la subvariedad M, la vamos a notar como $s(M)$.

2.4.6 Teorema. Sea (A, r) un anillo semilocal noetheriano y sea M un A modulo finitamente generado. Entonces

$$\dim(M) = d(M) = s(M)$$

Demostracion. Las primeras dos igualdades ya las vimos mas arriba. Restan las que incumben a $s(M)$, para esas ver [Mat]. ♠.

2.4.7 Propiedad. Sea $I \subset A$ un ideal generado por $(a_1, \ldots, a_r)$ y sea p un ideal primo minimal que contiene a I. Entonces $\mathrm{ht}(p) \leq r$ (este teorema es el famoso Krulls Hauptidealsatz).

Demostracion. tenemos que $\mathrm{ht}(p) = \dim(A_p) = s(A_p) \leq r$. ⋄

2.4.8 Corolario. siempre vale que $\dim(M) \geq \mathrm{codh}(M)$, es decir, $s(M)$ es mayor o igual a la cantidad de elementos de una M-sucesion.

Demostracion. Es inmediata en base a la prop anterior. ♣.

2.4.9 Definicion. Vamos a decir que un modulo M de tipo finito sobre un anillo (A, r) semilocal noetherian es un modulo de Cohen-Macaulay (C-M) si $\dim(M) = \mathrm{codh}(M)$.

2.4.10 Teorema. Sea $M \in A$-mod. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es C-M

2. un conjunto es una M-sucesion si y solo si es un sistema de parametros.

3. para todo sistema de parametros $\overline{x}$ se tiene que $e(\overline{x}, M) = \ell_A(M/\overline{x}.M)$

Demostracion. Tenemos $i) \Leftrightarrow ii)$ por 2.4.7 y su corolario. La igualdad de $iii)$ implica que todo sistema de parametros es una M-sucesion en base a la que veremos mas adelante sobre el complejo de Koszul. ♡

Observacion. El teorema anterior caracteriza a los modulos Cohen-Macaulay como aquellos modulos donde la multiplicidad de interseccion en una componente coincide con la multiplicidad de la componente en la subvariedad interseccion.

2.5. Multiplicidad de interseccion por Serre

Sea $M \in A$-mod. Vamos a definir:

$$\begin{aligned}\mathrm{dp}_A(M) &= \sup_p\{p/\ \mathrm{Ext}^p_A(M,N) \neq 0, N \in A\text{-mod}\}\\ \mathrm{di}_A(M) &= \sup_p\{p/\ \mathrm{Ext}^p_A(N,M) \neq 0, N \in A\text{-mod}\}\\ \mathrm{dhg}(A) &= \sup_p\{p/\ ext^p_A(M,N) \neq 0, M, N \in A\text{-mod}\}\end{aligned}$$

que son las dimensiones proyectivas e inyectivas de M y la dimension homologica global de A.

2.5.1 Definicion. Vamos a decir que un anillo A es regular si $\mathrm{dhg}(A) < \infty$.

2.5.2 Propiedad. Sea (A, m) un anillo local regular tal que $\mathrm{dhg}(A) = n$. Sea $k = A/m$ y M un A-modulo. Se tiene que

$$\mathrm{dp}_A(M) + \mathrm{codh}_A(M) = n$$

Demostracion. Veamos primero el caso donde $\mathrm{codh}_A(M) = 0$, es decir, en base a 2.4.3, que no existe ningun elemento en $a \in A$ tal que a no sea divisor de 0 en M o, equivalentemente, que $\mathrm{Hom}(k, M) \neq 0$. Entonces se tiene una sucesion exacta $0 \longrightarrow k \longrightarrow M$. Como $\mathrm{dhg}(A) = n$ entonces el Tor_n es exacto a izquierda y se obtiene una inyeccion

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(k, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(M, k)$$

Nuevamente por la dimension de A resulta $\mathrm{Tor}_n(k, k) \neq 0$ lo que implica la no nulidad de $\mathrm{Tor}_n(M, k)$. Por lo tanto $\mathrm{dh}_A(M) = n$.

Por induccion, supongamos ahora que $\mathrm{codh}_A(M) \geq 0$. Entonces existe un $a \in m$ tal que a no es divisor de 0 en M. Construimos la sucesion exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{.a} M \longrightarrow M/a.M = M_1 \longrightarrow 0$$

y $\mathrm{codh}_A(M_1) = \mathrm{codh}_A(M) - 1$, entonces por hipotesis inductiva tenemos que $\mathrm{dp}_A(M_1) + \mathrm{codh}_A(M_1) = n$. Para probar el resultado hay que probar que $\mathrm{dh}_A(M_1) + 1 = \mathrm{dh}_A(M)$.

Ahora bien, la sucesion exacta corta induce una sucesion exacta larga en homologia

$$\mathrm{Tor}_p(M,K) \xrightarrow{.a} \mathrm{Tor}_p(M,K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_p(M_1,K) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_p(M,K) \xrightarrow{.a} \mathrm{Tor}_{p-1}(M,K)$$

donde a pertenece al anulador de k, entonces se tienen sucesiones exactas parciales

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_p(M,K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_p(M_1,K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{p-1}(M,K) \longrightarrow 0$$

Finalmente, como la nulidad del $\mathrm{Tor}_{p-1}(M,k)$ implica la del $\mathrm{Tor}_p(M,k)$, se tiene la equivalencia

$$\mathrm{Tor}_p(M_1,k) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_{p-1}(M,k) = 0.$$

♠

2.5.3 Corolario. Si (A,m) es un anillo local regular entonces es C-M

Demostracion. Como A es A-libre, entonces la dimension proyectiva es 0 y $\mathrm{codh}_A(A) = \dim(A)$. ♡

2.5.4 Teorema. Las proposiciones siguientes son equivalentes, con (A,m) anillo local tal que $\dim(A) = n$:

1. A es regular
2. m esta generado por $n = \dim(A)$ elementos
3. $\dim_k(m/m^2) = n$
4. $\mathrm{Gr}_m(A) = k[x_1,\ldots,x_n]$

Demostracion. Por el momento queda como ejercicio para el lector. ⋄

Sean $M,N \in A$-mod de tipo finito y A de dimension n. Siempre se tiene que

$$\dim(M) + \dim(N) \leq n + \dim(M \otimes N)$$

2.5.5 Definicion. Vamos a decir que M y N se intersecan propiamente si

$$\dim(M) + \dim(N) = n + \dim(M \otimes N)$$

o, equivalentemente, si

$$\dim(M) - \mathrm{codim}(N) = \dim(M \otimes N)$$

2.5.6 Teorema. La formula de multiplicidad de interseccion dada por Serre en [Serre] consiste en lo siguiente: sean $M,N \in A$-mod de tipo finito donde A es una k-algebra finitamente generada y regular. Supongamos que M y N se intersecan propiamente y sea p un primo minimal de $M \otimes N$. Entonces la multiplicidad de interseccion de M y N en p se puede calcular como

$$I(M.N,p) = \sum_i (-1)^i (\mathrm{Tor}^i_{A_p}(M_p, N_p))$$

Demostracion. (O una idea de la demostracion) sea $I = \mathrm{ann}(M)$ y $J = \mathrm{ann}(N)$, entonces $\mathrm{ann}(M \otimes N) = I + J$. Supongamos que $\mathrm{ht}(J) = r$ y $J = (x_1, \ldots, x_r)$ (dicese que la subvariedad N es interseccion completa). Entonces se tiene que $\ell_{A_p}((M/J.M)_p) < \infty$ y, por lo tanto, $\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ es un sistema de parametros. Como A es un anillo regular, entonces tambien lo es A_p y entonces $\overline{x}$ es una sucesion M_p-regular.

Por la propiedad 5.4.2 el complejo de Koszul $K_\bullet(\overline{x})$ es aciclico y $H_0(K_\bullet(\overline{x})) = (A/J)_p$, por lo que

$$0 \longrightarrow K_n(\overline{x}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} K_0(\overline{x})$$

es una resolucion proyectiva (libre) de A/J. Se tiene entonces que

$$H_i(\overline{x}, M) \simeq \mathrm{Tor}^i_{A_p}((A/J)_p, M_p).$$

Tomando una sucesion espectral asociada a la filtracion $(I + J)$-adica se ve que:

1. los modulos $H_i(\overline{x}, M_p)$ tiene longitud finita sobre A_p
2. la caracteristica de Euler del complejo de Koszul verifica que

$$\sum (-1)^i \ell_{A_p}(H_i(\overline{x}, M_p)) = e_{(I+J)_p}(M_p)$$

   donde $e_{(I+J)_p}(M_p) = \Delta^r P_{(I+J)_p}(M_p)$ es la forma de calcular la multiplicidad de interseccion $I(M.N, p)$ en el sentido de Samuel.

En el caso general, utilizamos el siguiente metodo conocido como la reduccion a la diagonal: consideramos la k-algebra $B = A \otimes_k A$ y la subvariedad $M \otimes_k N \in B$-mod.

Ejemplo. Sean $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $M = A/(f_1, \ldots, f_r)$ y $N = A/(g_1, \ldots, g_s)$ y B el anillo $B = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$. La variedad $M \otimes_k N$ esta dada por B/I donde I es el ideal generado por $I = (f_1(x), \ldots, f_n(x), g_1(y), \ldots, g_n(y))$. En este caso, la variedad interseccion original $M \otimes_A N$ se obtiene al intersecar $M \otimes_k N$ con la diagonal Δ, donde Δ es la variedad definida por el ideal $(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$.

Al igual que en el ejemplo, consideramos la diagonal sobre el anillo B que esta dada por los ceros del ideal difinido por

$$\Delta = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)_{(a \in A)}$$

En [Car-Eil] se encuentra la demostracion del isomorfismo entre

$$\mathrm{Tor}^k_B(M \otimes_k N, \Delta) = \mathrm{Tor}^k_A(M, N)$$

En el caso en que A es regular, tenemos que el graduado asociado a A_p es de la forma $k[x_1, \ldots, x_n]$. La multiplicidad de interseccion de Samuel no cambia al considerar los graduados asociados y en este caso tenemos que las variedades a intersecar son $\mathrm{Gr}(M \otimes N)$ y $\Delta = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ que es interseccion completa y nos reducimos al caso ya calculado. ♡

Ejemplo. Volvamos a calcular la multiplicidad de interseccion del ejemplo 2.2.3, ahora en terminos de la formula de Serre: nuestra variedad esta dada por el anillo $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_4]/I$, donde $I = (x_1x_4 - x_2x_3\ ,\ x_1^2x_3 - x_2^3\ ,\ x_4^2x_2 - x_3^3)$, y las subvariedades son $A/(x_1)$ y $A/(x_4)$. Para calcular la multiplicidad de interseccion en el 0 (que es el unico punto de interseccion) tenemos que calcular, primero, una resolucion proyectiva de $A/(x_1)$ que podemos construir utilizando el complejo de Koszul. Tenemos entonces:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x_1} A \longrightarrow A/(x_1) \xrightarrow{\epsilon} 0$$

luego, al tensorizar,

$$0 \longrightarrow A/(x_4) \xrightarrow{x_1} A/(x_4)$$

y la homologia es

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Tor}_A^0(A/(x_1), A/(x_4)) = A/(x_1, x_4) & \text{con longitud } 5 \\ \mathrm{Tor}_A^1(A/(x_1), A/(x_4)) = (x_1x_3^2) & \text{y } 1 \text{ sobre } A_{(0)} \end{array}$$

Por lo tanto la suma alternada de los Tors es $5 - 1 = 4$ que es la multiplicidad de interseccion que habiamos calculado antes.

3. Anillo de Chow

3.1. Generalidades sobre esquemas

En esta seccion vamos a hacer mencion de algunas definiciones y propiedades basicas de esquemas que vamos a utilizar mas adelante. La notacion y la terminologia son las de [Hart] que, en general, son las mismas que utiliza Grothendieck en los EGA.

Sea A un anillo conmutativo. Definimos el conjunto $X = \mathrm{Spec}(A)$ como el conjunto de todos los ideales primos de A. Para un ideal I de A definimos $W(I) = \{p \in \mathrm{Spec}(A)/\ I \subset p\} \subset \mathrm{Spec}(A)$, y si $f \in A$ definimos $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \setminus W((f))$. Las siguientes propiedades son bien conocidas y son las que definen en $\mathrm{Spec}(A)$ una topologia, la topologia de Zariski, donde los conjuntos $W(I)$ son una base de cerrados y los $D(f)$ una base de abiertos:

1. $W(0) = X$ y $W(1) = \emptyset$
2. $W(I.I') = W(I) \cup W(I')$
3. $W(\sum I_i) = \cap W(I_i)$
4. si $U \subset X$ es un abierto, entonces $U = X \setminus W(I)$ y $W(I) = \bigcap_{f \in I} D(f)$ de donde $U = \bigcup_{f \in I} D(f)$
5. $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$

Es facil ver que $\mathrm{Spec}(A_f)$ se identifica de manera natural con el abierto $D(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ y que $\mathrm{Spec}(A/I)$ se identifica de manera natural con el cerrado $W(I) \subset W(I)$

3.1.1 Definicion. Vamos a decir que un punto x de un espacio topologico X es un punto generico si $\overline{\{x\}} = X$. Vamos a decir que x es un punto cerrado si $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

3.1.2 Propiedad. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ entonces todo cerrado irreducible admite un unico punto generico.

Demostracion. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible. Tenemos que $\mathrm{Spec}(A)$ se identifica con $\mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})$ y entonces podemos suponer que A es un anillo integro, donde esta claro que el unico punto generico del espectro de un anillo integro es el 0. ♣

Sobre el anillo A se define el haz de anillos espectro de A como $(X, \mathcal{O}_A)$, donde $X = \mathrm{Spec}(A)$, como el haz asociado al prehaz de anillos que asocia

$$D(f) \xmapsto{\Gamma} \Gamma(D(f), \mathcal{O}_A) = A_f$$

De la misma manera si $M \in A$-mod entonces se define un haz de A modulos $(X, \widetilde{M})$ como el haz asociado al prehaz

$$D(f) \overset{\Gamma}{\longmapsto} \Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f$$

En base a la construccion del haz asociado a un prehaz se tiene que, en un abierto $U \subset X$ las secciones de $\mathcal{O}_A$ son de la forma $\Gamma(U, \mathcal{O}_A) = \{s : U \to \coprod_{p \in U} A_p / \ s$ verifica $i)$ y $ii)\}$, donde

1. $s(p) \in A_p$
2. $\forall p \in U$ existe $V \subset U$ entorno de p y existen elementos $a, f \in A$ tal que $\forall q \in V$ se tiene que $f \notin q$ y $s(q) = a/f$

es decir que localmente las aplicaciones $s : U \to \coprod_{p \in U} A_p$ son fracciones de elementos de A.

Para $(X, \widetilde{M})$ se tiene un construccion analoga.

3.1.3 Propiedad. Sea $\mathcal{O}_{A,p}$ el stalk en el punto p de espectro de A, entonces $\mathcal{O}_{A,p} \simeq A_p$

Demostracion. Ver [Hart]. $\diamond$

Vamos a decir que un haz de anillos $(X, \mathcal{O})$ es un haz de anillos local si el stalk $\mathcal{O}_x$ en un punto $x \in X$ es un anillo local. Dados dos haces de anillos locales $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ y un morfismo de haces de anillos $(f, f^\sharp)$ de X en Y, vamos a decir que el morfismo es un morfismo de haces de anillos locales si $\forall x \in X$ el morfismo inducido en el stalk

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{f_x^\sharp} \mathcal{O}_{X,x}$$

es un morfismo de anillos locales, i.e., la preimagen del ideal maximal en $\mathcal{O}_{X,x}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$.

3.1.4 Propiedad.

1. Si A es un anillo entonces $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ es un haz de anillos locales
2. Si $\varphi : A \to B$ es un morfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo de anillos locales
$$(\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_B) \xrightarrow{(f, f^\sharp)} (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$$
3. Todo morfismo de haces de anillos locales de $\mathrm{Spec}(B)$ en $\mathrm{Spec}(A)$ esta inducido por un morfismo de anillos de A en B (la categoria de anillos es una subcategoria plena de la categoria de haces de anillos locales)

Demostracion. Ver [Hart]. ♠

3.1.5 Definicion. Vamos a decir que un haz de anillos locales $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afin si es isomorfo al espectro de algun anillo A. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es un haz de anillos locales dotado de un cubrimiento por esquemas afines. Vamos a llamar a $\mathcal{O}_X$ el haz estructural del esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ al cual, eventualmente, notaremos solo por el espacio topologico X. Un morfismo de esquemas es un morfismo de haces de anillos locales.

3.1.6 Definicion. Vamos a decir que un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es irreducible (resp. conexo) si el espacio topologico X es irreducible (conexo).

3.1.7 Definicion. Vamos a decir que un esquema es reducido si $\forall U \subset X$ abierto afin el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes, equivalentemente, si $\forall p \in X$ el anillo $\mathcal{O}_{X,p}$ no tiene elementos nilpotentes.

3.1.8 Definicion. Un esquema X se dice integro si $\forall U \subset X$ abierto afin el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es integro, equivalentemente, si X es reducido e irreducible.

3.1.9 Definicion. Sea X un esquema integro y sea ξ el unico punto generico de X. El stalk en ξ, $\mathcal{O}_{X,\xi}$, es un cuerpo y se denomina el cuerpo de fracciones de X.

Observacion. Es una cuenta sencilla ver que si X es un esquema integro entonces para todo $x \in X$, si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ entonces $K(X)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones de A.

3.1.10 Definicion. Un subesquema abierto de un esquema X es un esquema Y dotado de una inclusion abierta en X y de forma tal que el haz estructural $\mathcal{O}_Y$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X|_U$, el haz estructural de X restringido a un abierto U.

3.1.11 Definicion. Un subesquema cerrado de un esquema X es un esquema Y dotado de una inclusion cerrada $i : Y \to X$, donde el morfismo en los haces estructurales $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ es suryectivo.

Dado un subesquema cerrado Y de un esquema X en base al morfismo de inclusion $(i, i^\sharp)$ se tiene definido un haz de ideales $\mathscr{I}_Y$ sobre X tomando en cada abierto $U \subset X$

$$\mathscr{I}_Y(U) := \mathrm{Ker}(i^\sharp(U)) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathcal{O}_Y(U)$$

3.1.12 Definicion. Un morfismo de esquemas $X \xrightarrow{f} Y$ se dice:

- de tipo finito si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, de forma tal que $f^{-1}(V_i)$ admite un cubrimiento finito por abiertos afines $U_{i,j} = \mathrm{Spec}(A_{i,j})$ tal que cada $A_{i,j}$ es una B_i-algebra de tipo finito
- finito si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, de forma tal que $f^{-1}(V_i)$ es un abierto afin, $\mathrm{Spec}(A_i)$, y A_i es un B_i-modulo de tipo finito.
- separado si el morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ es una inmersion cerrada en el pullback de X via el morfismo f.
- propio si es separado, universalmente cerrado y de tipo finito.

3.1.13 Definicion. Vamos a decir que un haz de modulos $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_X$-mod es coherente si existe un cubrimiento afin de X dado por abiertos $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ de forma tal que existen $M_i \in A_i$-mod finitamente generados tal que $\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.

3.1.14 Propiedad. Sea $f : X \to Y$ un morfismo propio de esquemas y sea $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_X$-mod coherente, entonces $f_*(\mathscr{F})$ es un $\mathscr{O}_Y$-mod coherente (ver [EGA III, 4.4.2]).

3.1.15 Definicion. Sea ahora $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, sea $y \in Y$ un punto cualquiera y sea $k(y)$ el cuerpo residuo en y. Se tiene un morfismo natural $\operatorname{Spec}(k(y)) \to Y$. Vamos a definir la fibra del morfismo f en el punto, y X_y, como

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{pull back}"] & k(y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sea S un anillo graduado, $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$. Vamos a notar $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$. Definimos el espacio $\operatorname{Proj}(S)$ como el conjunto de todos los ideales primos de S que no contienen a S_+. Al igual que con el caso no graduado, definimos una topologia de Zariski en $\operatorname{Proj}(S)$ como, $\forall a \subset S$ graduado, $W(a) = \{p \in \operatorname{Proj}(S)/\ a \subset p\}$. Si $p \in \operatorname{Proj}(S)$, vamos a notar por $S_{(p)}$ al subanillo de elementos de grado 0 de S_p. Para darle a $\operatorname{Proj}(S)$ una estructura de haz de anillos, en cada abierto U tomamos el conjunto de funciones $\{s : U \to \coprod_{p \in U} S_{(p)}/\ s$ verifica $i)$ y $ii)\}$, donde

1. $s(p) \in S_{(p)}$
2. $\forall p \in U$ existe $V \subset U$ entorno de p y elementos $a, f \in S$ del mismo grado, tal que $\forall q \in V$ se tiene que $f \notin q$ y $s(q) = a/f$

Con todo esto se tiene que $(\operatorname{Proj}(S), \mathscr{O}_S)$ verifica:

1. el stalk $\mathscr{O}_S \simeq S_{(p)}$
2. $\Gamma(\mathscr{O}_S, D(f)^+) \simeq S_{(f)}$

y, por lo tanto, es un esquema. En general, si A es un anillo definimos el espacio proyectivo de dimension n sobre A como $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$.

Observacion. Si tomamos $\mathbb{P}^n_k$, con k un cuerpo algebraicamente cerrado, se tiene que el conjunto de puntos cerrados de $\mathbb{P}^n_k$ es homeomorfo al espacio proyectivo n-dimensional usual.

3.1.16 Definicion. Si Y es un esquema cualquiera, definimos el espacio proyectivo n-dimensional sobre Y como $\mathbb{P}^n_X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \otimes_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} X$. Vamos a decir que un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es un morfismo proyectivo si se factoriza como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & Y \\ & \mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es una inmersion cerrada cualquiera y π es el morfismo de proyeccion del cuadrado pullback que define al espacio proyectivo. Continuando con el mismo morfismo, vamos a decir que es un morfismo quasi-proyectivo si f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & Y \\ & X' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde j es una inmersion abierta y g es un morfismo proyectivo.

3.1.17 Definicion. Vamos a decir que un esquema X es algebraico cuando esta dotado de un morfismo de tipo finito sobre el esquema de un cuerpo algebraicamente cerrado k. Cuando hablemos de una variedad X vamos a entender que X es un esquema algebraico; una subvariedad de X sera un subesquema cerrado de X.

3.1.18 Definicion. Dado un esquema integro X y V una subvariedad, definimos el anillo local de V en X como $\mathscr{O}_{V,X}$, donde $\mathscr{O}_{V,X}$ es el stalk de X en el punto generico de V.

3.1.19 Propiedad. Un morfismo proyectivo de esquemas algebraicos es propio. Un morfismo quasi-proyectivo de esquemas algebraicos es de tipo finito y separado.

Demostracion. Ver [Hart]. ♠

3.1.20 Definicion. Vamos a decir que un esquema X es no singular si $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo regular para todo $x \in X$.

3.2. Dimension

Sea X un esquema algebraico y sea Y una subvariedad irreducible de X. La dimension de Y, $\dim(Y)$, sera la dimension topologica de Y. La codimension de Y en X, $\operatorname{codim}(Y,X)$, es el supremo de las longitudes de cadenas estrictamente crecientes que empiezan por Y y estan contenidas en X. Si Y no es irreducible, entonces definimos la codimension de Y en X como

$$\operatorname{codim}(Y,X) = \inf_Z \operatorname{codim}(Z,X)$$

donde Z es irreducible y $Z \subset Y$.

Si Y es una subvariedad, entonces $\dim(Y) = \dim(\widetilde{Y})$, donde $\widetilde{Y}$ es el esquema reducido de Y que en cada abierto $U \subset Y$ se define como

$$\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}(U) = \mathscr{O}_Y(U)/\sqrt{0}$$

Por lo tanto, si Y es una subvariedad irreducible para medir la dimension se puede suponer que Y es un esquema integro.

Sea entonces Y una subvariedad integra de X y sea $p \in$ un punto cerrado, entonces la dimension de X coincide con la dimension de Krull del anilo $\mathscr{O}_{X,p}$.

3.2.1 Lema de normalizacion de Noether. Sea A una k-algebra finitamente generada, entonces existen elementos $x_1, \ldots, x_n \in A$ algebraicamente independientes sobre k tales que la extension de anillos $B = k[x_1, \ldots, x_n] \subset A$ es separable.

Demostracion. Ver [Serre]. ♣

Por los teoremas de Cohen-Seidenberg (going-up y going-down), ver [A-M], se tiene que si $B \subset A$ es una extension entera de anillos entonces $\dim(A) = \dim(B)$. Por otro lado, utilizando el lema de normalizacion de Noether se puede ver que la dimension de $k[x_1, \ldots, x_n]$ es igual a n. Si denotamos por $\mathrm{gr.tr.}_k(A)$ al grado de trascendencia de A sobre k, tenemos entonces tenemos que $\dim(A) = \mathrm{gr.tr.}_k(A)$

3.2.2 Propiedad. Si X es un esquema algebraico irreducible sobre k, entonces

$$\dim(X) = \mathrm{gr.tr.}_k(K(X))$$

3.2.3 Teorema. (Chevalley, ver [EGA IV, 13.1.1]) Sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante de esquemas algebraicos y sea $e = \dim(X) - \dim(Y)$. Para todo $h \geq 0$ se define:

- $E_h = \{x \in X / \dim(X_{f(x)}) \geq h\}$
- $C_h = \{y \in Y / \dim(X_y) = h\}$.

Entonces $E_e = X$, C_e contiene un abierto denso de Y y E_h y C_h, $h > e$, no son densos en X e Y respectivamente.

Sea entonces $f : X \to Y$ un morfismo propio de esquemas algebraicos y sea $Z \subset X$ una subvariedad (cerrada) de dimension r. Como f es propio entonces $f(Z) \subset Y$ es una subvariedad de Y de dimension $\leq r$; si consideramos la restriccion de f a Z se tiene entonces un morfismo propio y dominante.

Consideremos el caso en que f es un morfismo dominante de X en Y y $\dim(X) = \dim(Y)$. Sea η el punto generico de Y y sea ξ el punto generico de X, claramente se tiene que $f(\xi) = \eta$. En base al teorema 3.2.3, consideremos $V \subset C_0 \subset Y$ un abierto denso de Y. Entonces $\eta \in V$ y $\xi \in f^{-1}(V)$ y al ver el morfismo

$$f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V$$

en los stacks, $\mathscr{O}_{X,\xi}$ y $\mathscr{O}_{Y,\eta}$ resulta que f es un morfismo finito y entonces la extension de cuerpos $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ es finita. En base a esto ultimo tenemos la siguiente definicion:

3.2.4 Definicion. Sea $f : X \to Y$ un morfismo propio y dominante, vamos a llamar grado de f, $\mathrm{grad}(f)$, al numero

$$d = [K(X) : K(Y)]$$

3.3. Grupo de ciclos

Sea X un esquema noetheriano, vamos a notar con $\mathscr{L}(X)$ al grupo de ciclos de X definido como el grupo abeliano libre generado por los subesquemas cerrados integros de X. $\mathscr{L}(X)$ es un grupo graduado por la dimension y por la codimension de las subvariedades; vamos a escribir $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}_\bullet(X) = \bigoplus \mathscr{L}_k(X)$ para graduar en base a la dimension, y $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}^\bullet(X) = \bigoplus \mathscr{L}^r(X)$ para graduar en base a la codimension.

Sea $\mathscr{F}$ un haz de $\mathscr{O}_X$-mod coherente, sean $W_1, \ldots, W_n$ las componentes irreducibles del $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = \{x \in X / \ \mathscr{F}_x \neq 0\}$, y $\xi_1, \ldots, \xi_n$ los puntos genericos de las componentes irreducibles. Vamos a definir el ciclo de $\mathscr{F}$ como

$$[\mathscr{F}] = \sum_{i=1}^{n} \ell_{\mathscr{O}_{\xi_i}}(\mathscr{F}_{\xi_i}).[W_i].$$

donde $[W_i]$ indica la clase del subesquema integro de X con soporte en W_i. La longitud de $\mathscr{F}_{\xi_i} \in \mathscr{O}_{\xi_i}$-mod puede calcularse localmente y $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = \{\xi_i\}$, por lo tanto es finita y la definicion del ciclo es buena.

Si Y es un subesquema cerrado de X y $Y \xrightarrow{i} X$ el morfismo canonico de inclusion; $i_*\mathscr{O}_Y$ es la extension de Y por 0 a X y es un $\mathscr{O}_X$-mod. Se define entonces el ciclo de Y como el ciclo de $i_*\mathscr{O}_Y$. En particular si $X_1, \ldots, X_n$ son las componentes irreducibles de X, $x_1, \ldots, x_n$ los puntos genericos y $m_i = \ell_{\mathscr{O}_{x_i}}(\mathscr{O}_{x_i})$ la multiplicidad de cada componente, entonces X determina un ciclo fundamental $[X] = \sum m_i.[X_i]$.

Observacion. Otra forma de ver la aplicacion ciclo es la siguiente: dada la categoria de $\mathcal{C}o(X)$ de haces de modulos coherentes sobre X se pueden considerar las subcategorias $\mathcal{C}o_k(X)$ de haces de modulos coherentes de dimension $\leq k$ que dan una filtracion creciente $\mathcal{C}o(X)$. Sea entonces $\mathscr{F} \in \mathcal{C}o_k(X)$ y sea ξ un punto generico de un subesquema integro de $W \subset X$ de codimension k. Siempre tiene sentido calcular la longitud $\ell_{\mathscr{O}_\xi}(\mathscr{F}_\xi)$, por lo tanto se puede definir una aplicacion

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}o_k(X) & \xrightarrow{Z_k} & \mathscr{L}_k(X) \\ \mathscr{F} & \longmapsto & Z_k(\mathscr{F}) = \sum_\xi \ell_{\mathscr{O}_\xi}(\mathscr{F}_\xi).[W] \end{array}$$

donde la suma se realiza en todos los puntos genericos ξ de subvariedades integras W de codimension k. Esta suma es finita porque el esquema es algebraico (de tipo finito sobre un cuerpo entonces noetheriano). Mas aun, en base a 2.3 tenemos que

$$Z_k|_{\mathcal{C}o_{k-1}(X)} \equiv 0$$

Ahora bien, esta claro que Z_k es una funcion aditiva y, reciprocamente, una funcion aditiva sobre $\mathcal{C}o_k(X)$ que se anula en $\mathcal{C}o_{k-1}(X)$ y que en un subesquema integro de dimension k con soporte en W vale $1.[W]$ necesariamente tiene que ser Z_k debido a la descomposicion 5.2.9. Por lo tanto la funcion Z_k es la funcion aditiva universal sobre $\mathcal{C}o_k(X)$.

Dado $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_X$-mod coherente, vamos a notar con $Z_k(\mathscr{F})$ a la componente graduada de $[\mathscr{F}]$ de dimension k, y con $Z^r(\mathscr{F})$ a la componente de codimension r.

Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un morfismo propio de esquemas. Sea V un subesquema integro de X, si $W = f(V)$ es tal que $\dim(V) = \dim(W)$ vimos que se tiene una aplicacion de $K(W)$ en $K(V)$ inducida por f que es una extension finita de cuerpos de grado $d = [R(V) : R(W)]$.

Se define la aplicacion $f_* : \mathscr{L}_\bullet(X) \to \mathscr{L}_\bullet(Y)$ como

$$f_*([V]) = \begin{cases} d.[W] & \text{si } \dim(V) = \dim(W) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

en cada subesquema V integro, luego se extiende linealmente.

Sea A un anillo integro de dimension 1, sea $r \in K(A) = A_0^*$ una funcion racional y sean $a, b \in A$ tales que $r = a/b$. Tenemos que $\ell_A(A/a) < \infty$, entonces definimos el orden de r como $\mathrm{ord}(r) = \ell_A(A/a) - \ell_A(A/b)$. Mas generalmente, si X es una variedad integra y V una subvariedad de codimension 1, tenemos que el anillo local de V en X, $\mathscr{O}_{V,X} = A$, es un anillo de dimension 1. Sea $U = \mathrm{Spec}(S)$ un abierto afin de X, entonces $V \cap U$ se identifica con un ideal primo $p \subset S$ de codimension 1 y $A \simeq S_p$. Si $r \in K(A)^*$, vamos a decir que el orden de r en V es $\mathrm{ord}_V(r) = \mathrm{ord}(r)$.

Por otro lado, como X es integro el stalk de X en el punto generico ξ coincide con el cuerpo de fraciones $K(A)^*$ para cualquier abierto afin U, entonces definimos el ciclo de r como

$$[\mathrm{div}(r)] = \sum_{V/\mathrm{codim}(V,X)=1} \mathrm{ord}_V(r).[V]$$

Al ciclo inducido por r lo llamamos el divisor de r.

Observacion. La suma $\sum_{V/\mathrm{codim}(V,X)=1} \mathrm{ord}_V(r).[V]$ es finita puesto que el soporte de r, i.e. los $x \in X/\ r \notin \mathscr{O}^*_{X,x}$, es un cerrado propio de X luego existen finitas subvariedades de codimension 1 que la intersecan.

3.3.1 Propiedad. Sean X, Y esquemas integros de la misma dimension, $f : X \to Y$ un morfismo propio suryectivo y sea d el grado del morfismo f. Sea $N : K(X)^* \to K(Y)^*$ la norma. Entonces si $r \in K(X)^*$, se tiene que $f_*[\mathrm{div}(r)] = [\mathrm{div}(N(r))]$.

Demostracion. [EGA IV, 20.1.8]. ♡

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas con Y no singular. Sean $x \in \mathscr{L}_p(X)$ y $y \in L^q(Y)$ dos ciclos; vamos a notar con $|x|, |y|$ al soporte de x e y, donde $\mathrm{Supp}(x) = \{V \subset X/\ V$ es una subvariedad y el coeficiente de x en V es $\neq 0\}$. Similarmente a lo hecho en la seccion 2.5 vamos a decir que los ciclos x e y se intersecan propiamente si todas las componentes de $|x| \cap f^{-1}(|y|)$ tienen dimension $p - q$.

3.3.2 Definicion. Sean $\mathscr{F} \in \mathscr{O}_X$-mod, $\mathscr{G} \in \mathscr{O}_Y$-mod coherentes, y sean $x = Z_p(\mathscr{F})$, $y = Z^q(\mathscr{G})$ tales que x e y intersecan propiamente entonces, acorde a la formula de multiplicidad de interseccion de Serre, vamos a definir el ciclo interseccion $x \bullet_f y \in \mathscr{L}_{p-q}(X)$ como

$$x \bullet_f y = \sum_i (-1)^i Z_{p-q}(\mathrm{Tor}^i_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$$

Si $X = Y$ y $f = \mathrm{Id}$, vamos a notar simplemente $x \bullet y$ al ciclo interseccion.

3.3.3 Propiedad. Si tenemos morfismos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ con Y, Z no singulares y x, y, z ciclos en X, Y, Z respectivamente, tales que todas las intersecciones son propias entonces

$$x \bullet_f (y \bullet_g z) = (x \bullet_f y) \bullet_g z$$

Demostracion. Para probar esta propiedad de asociatividad del Tor se utiliza la sucesion espectral del triple Tor; para una demostracion mas acabada ver [Serre]. ♠

3.3.4 Propiedad. Por otro lado, la conmutatividad del producto de ciclos $x \bullet_f y = y_f \bullet x$ es evidente en base a la conmutatividad del producto tensorial.

3.4. Equivalencia racional y Moving Lemma

Sea $\alpha \in Z_k(X)$ un ciclo. Vamos a decir que α es racionalmente equivalente a 0, $\alpha \sim 0$, si existen finitas subvariedades integras de X, $W_1, \ldots, W_l$ de dimension $k+1$ y funciones racionales $r_i \in K(W_i)^*$ tales que

$$\alpha = \sum [\mathrm{div}(r_i)]$$

y donde $[\mathrm{div}(r_i)]$ se calcula en el subesquema integro de cada W_i.

Tenemos que esta definicion es equivalente a pedir que existan esquemas integros Y_i, funciones racionales $r_i \in K(Y_i)^*$ y morfismos propios $\pi_i : Y_i \to X$ tales que

$$\alpha = \sum \pi_{i*}[\mathrm{div}(r_i)]$$

Una version mas geometrica de esta nocion de equivalencia racional fue dada por Chevalley en [Cheval2] de la siguiente manera: sean U, T variedades algebraicas, vamos a notar por $\mathscr{L}'(U \times T)$ al grupo de ciclos de $U \times T$ generado por las subvariedades Z tales que $\forall t \in T$ el ciclo $[Z] \bullet ([U \times \{t\}])$ esta definido.

Sean $z = \dim(Z)$, $u = \dim(U) = \dim(U \times \{t\})$ y $t = \dim(T)$, como la interseccion es propia tenemos que $\dim(Z \cap (U \times \{t\})) + u + t = \dim(Z) + \dim(U)$, por lo tanto $\dim(Z \cap (U \times \{t\})) = z - t$. Sea $\pi : U \times T \to T$ la proyeccion natural, entonces para todo $t \in \pi(Z)$ resulta $\dim(Z \cap \pi^{-1}(t)) = z - t$ constantemente y la imagen de Z por la proyeccion es densa en T.

3.4.1 Definicion. Vamos a decir que una funcion $\mathscr{X} : T \to \mathscr{L}(U)$ es una familia algebraica de ciclos parametrizada por T, si existe un ciclo $Z \in \mathscr{L}'(U \times T)$ tal que $\forall t \in T$ se tiene

$$Z \bullet (U \times \{t\}) = \mathscr{X}(t) \times \{t\}$$

Observacion. Se puede ver que la aplicacion que hace corresponder a cada familia algebraica de ciclos el ciclo correspondiente en $\mathscr{L}'(U \times T)$ es un isomorfismo.

Claramente el conjunto de familias algebraicas de ciclos es un grupo, y esta graduado en base a la dimension de los ciclos que representan.

3.4.2 Definicion. Vamos a decir que un ciclo $Z \in \mathscr{L}(U)$ es racionalmente equivalente a 0, en el sentido de Chevalley, si existe una familia algebraica de ciclos $\mathscr{X}$, parametrizada por el cuerpo de base k de la variedad U, tal que $\mathscr{X}(0) = 0$ y $\mathscr{X}(1) = Z$; o, equivalentemente, si existe una familia algebraica de ciclos $\mathscr{X}$, parametrizada por $\mathbb{P}^1(k)$, tal que, $\mathscr{X}(0) = 0$ y $\mathscr{X}(\infty) = Z$.

La siguiente propiedad muestra que las dos definiciones de equivalencia racional son equivalentes:

3.4.3 Propiedad. Sea X un esquema algebraico y sean

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{P}^1 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{P}^1 \\ X & \end{tikzcd}$$

las proyecciones. Sea $x \in \mathscr{L}_k(X)$ un ciclo, entonces $x \sim 0$ si y solo si existe $z \in \mathscr{L}_{k+1}(X \times \mathbb{P}^1)$ tal que $z \bullet_q ([o] - [\infty])$ esta definido y $x = p_*(z \bullet_q ([o] - [\infty]))$.

Demostracion. Sea $x = \sum[\mathrm{div}(r_i)]$, con r_i funciones racionales en subvariedades Y_i de X $k+1$-dimensionales. Sea Γ_i la clausura del grafico de r_i en $X \times \mathbb{P}^1$. Entonces tomando $z = \sum[\mathrm{div}(\Gamma_i)]$ se tiene el resultado, pues $[\mathrm{div}(r_i)] = p_*(\Gamma_i \bullet_q ([0] - [\infty]))$ por 3.3.1. ♡

3.4.4 Definicion. Sea X una variedad algebraica. Vamos a definir el grupo de Chow de X, $A(X)$, como el grupo de ciclos de X modulo equivalencia racional, i.e.:

$$A(X) = \mathscr{L}(X)/\sim$$

Tenemos que $A(X)$ es un grupo graduado en base a la dimension, $A_\bullet(X)$, y en base a la codimension, $A^\bullet(X)$.

3.4.5 Propiedad. Si X es una variedad integra de dimension n entonces $A_n(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Demostracion. Esto esta claro pues el ciclo fundamental de X es $[X] = 1.[X]$, dado que X es irreducible y reducido. ♣

3.4.6 Moving Lemma. Sea Y no singular y quasi-proyectiva, $X_i \xrightarrow{f_i} Y$ morfismos, x_i ciclos en X_i con $i = 1, \ldots, m$ e y un ciclo en Y. Existe entonces un ciclo y' en Y, tal que $y \sim y'$ y y' interseca propiamente los ciclos x_i a lo largo de las f_i, para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demostracion. [Cheval2]. ♠.

En base al teorema anterior, tenemos que para cualquier par de ciclos $x, y \in A(X)$ se tienen representantes de clase en $\mathscr{L}(X)$ que intersecan propiamente. De esta forma, se tiene que el grupo $A(X)$ es un anillo en base a la multiplicacion definida por la formula de Serre 3.3.2. Mas aun, por las propiedades 3.3.3 y 3.3.4 tenemos que $A(X)$ es un anillo asociativo y conmutativo.

Por otro lado, si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas en base a la propiedad 3.3.1 el morfismo f define un morfismo de anillos

$$A(X) \xrightarrow{f_*} A(Y)$$

para una demostracion completa ver [Ful2].

3.4.7 Teorema. Sea X una variedad algebraica y sea U un subesquema abierto de X. Si $Z = X \setminus U$, entonces la inclusion cerrada de Z en X define un haz de anillos en Z. Se tiene una sucesion exacta corta:

$$A(Z) \xrightarrow{i_*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U) \longrightarrow 0$$

donde i_* es la extension por 0 y j^* es el morfismo de restriccion.

Demostracion. Si Y_0 es un subesquema integro de U y $r_0 \in K(Y_0)^*$ entonces $Y = \overline{Y_0}$ es un subesquema cerrado integro de X y r_0 determina una funcion racional r en $K(Y)^*$, de forma tal que $j^*([\mathrm{div}(r)]) = [\mathrm{div}(r_0)]$. La exactitud se obtiene de la siguiente manera: si z es un ciclo en X que es racionalmente equivalente a 0 en U, entonces $z - \sum[\mathrm{div}(r_i)]$ tiene soporte en $Z = X \setminus U$, donde los r_i son funciones racionales de subvariedades Y_i de X. ♠

3.4.8 Propiedad. Sea $X = \mathrm{Spec}(S)$, con S un DFU entonces $A^1(X) = 0$.

Demostracion. Si S es un DFU, se tiene que todo ideal de altura 1 es principal. Entonces si V es una subvariedad de codimension 1, V esta dada por un ideal de altura 1 y entonces tiene que ser de la forma $V = \mathrm{Spec}(S/f)$, para algun $f \in S$. Esta claro que $[\mathrm{div}(f)] = [V]$, entonces $[V] = 0$ en $A_1(X)$. $\diamond$

Ejemplo. Sea X la variedad definida por el anillo $\mathbb{C}[x, y, z]/(y^2 - xz) = A$ de dimension 2. Tomemos la subvariedad Z definida por el ideal $I = (x, y)$; tenemos que Z es una subvariedad de dimension y codimension 1. Por otro lado, $U = X \setminus Z$ se identifica con el espectro del anillo A_x y Z con $\mathbb{C}[z]$.

Utilizando 3.4.7 en grado 1 tenemos

$$A_1(Z) \longrightarrow A_1(X) \longrightarrow A_1(U) \longrightarrow 0$$

y como Z es una variedad integra de dimension 1, entonces $A_1(Z) \simeq \mathbb{Z}$ y esta generado por el ciclo fundamental $[Z]$. La variedad U tiene dimension 2, por lo tanto $A_1(U) = A^1(U)$

donde $U = \mathrm{Spec}(S)$ con S el anillo $(\mathbb{C}[x,y,z]/(y^2 - xz))_x$, entonces $z = x^{-1}y^2$ y $S \simeq \mathbb{C}[x, x^{-1}, y]$ que es un DFU y con la propiedad 3.4.8 se vio que $A^1(U) = 0$. Por lo tanto, el ciclo $[Z]$ genera $A_1(X)$.

Considerando el divisor $r = x \in K(A)^*$, se tiene que $[\mathrm{div}(r)] = \mathrm{ord}_Z.[Z]$ y $\ell_{A_p}((A/p)_x) = 2$, donde $p = (x,y)$ y $A_p/x = (\mathbb{C}[y,z]/(y^2))_y$. Entonces $2.[Z] = 0$ en $A_1(X)$.
Por otro lado, $[Z]$ no es racionalmente equivalente a 0, puesto que no es localmente principal. Esto se puede ver tomando el anillo localizado A_0 y mirando el ideal maximal m. El ideal de Z, (x,y), esta generado por $(\overline{x}, \overline{y})$ en m/m^2 sobre A_0/m. De esta manera, concluimos que $A_1(X) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$. Y como X es integro, $A_2(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Falta calcular $A_0(X)$. Para eso tomemos el punto $0 = (0,0,0) \in X$, dado por el ideal $m_0 = (x,y,z)$. Consideremos otro punto cualquiera

$$m = (x-a, y-b, z-c) \leftrightsquigarrow (a,b,c) \in X,$$

tal que $b^2 = ac$. Si se considera la subvariedad Z_2 dada por el ideal (y,z), el divisor $r \in K(A)^* /\ [\mathrm{div}(r)] = [Z] - [Z_2]$ esta dado por $r = y/z$. Si tomamos la subvariedad de A dada por $S = A/(f)$, donde $f = cx - 2y^2 + az$, tenemos que si $r = y/y - b \in K(S)^*$ entonces $[\mathrm{div}(r)] = [m_0] - [m]$. Entonces todos los puntos son racionalmente equivalentes a $[m_0]$, y $[m_0] \neq 0$ en $A_0(X)$, pues no es principal.

De esta manera, concluimos que

$$A(X) = A_0(X) \oplus A_1(X) \oplus A_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

4. Variedades toricas

Las variedades toricas son generalizaciones del espacio afin y el espacio proyectivo usual. Son una familia de variedades que sirve de ejemplo para muchas situaciones, por ejemplo, para la teoria de interseccion y el calculo del anillo de Chow como es el caso. A muchas variedades algebraicas les resulta mas natural ser vistas dentro de una variedad torica que dentro de un espacio proyectivo, como muchas veces se hace para comparar propiedades entre la variedad y el espacio ambiente. Por otro lado, tambien esta en juego la eleccion de la inclusion de una variedad no compacta en una variedad compacta, y nuevamente son una buena alternativa a los espacios proyectivos.

Hay distintas maneras de definir una variedad torica. La definicion de la cual se desprende el nombre las caracteriza como variedades separadas y normales que contienen al toro algebraico n-dimensional, T^n, como un abierto denso cuya operacion de multiplicacion se extiende a toda la variedad.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ tiene un cubrimiento natural dado por abiertos $U_0, \ldots U_n$, donde el conjunto U_i esta formado por los puntos $(x_0 : \ldots : x_n)$ con $x_i \neq 0$. Para cada abierto U_i se tiene definido un homeomorfismo a k^n como

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\quad\varphi_i\quad} & k^n \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

donde podemos escribir a φ_i como $\varphi_i = (\varphi_i^1, \ldots, \varphi_i^n)$ y $\varphi_i^j(x) = x_j/x_i$. Si tomamos $\overline{x} \in U_i \cap U_j$ tenemos que la coordenada k-esimo del morfismo $\varphi_j : U_j \to k^n$ se pudede escribir como

$$\varphi_j^k(\overline{x}) = \frac{x_k}{x_j} = \frac{x_k}{x_i}.\frac{x_i}{x_j} = \varphi_i^k(\overline{x})(\varphi_i^j)^{-1}(\overline{x})$$

Lo que da para destacar en este caso, es que las coordenadas de la aplicacion φ_j se pueden escribir como monomios de Laurent en las coordenadas de φ_i.

Si uno quiere definir una variedad torica X no singular en terminos de un atlas, lo que se debe pedir es que los morfismos de las cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to k^n$, sean tales que en los puntos de interseccion con otra carta U_β las coordenadas del morfismo φ_β sean monomios de Laurent de las funciones coordenadas de φ_α.

Sea X es una variedad torica en ese sentido, U_α una carta con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ y U_β otra carta. Entonces si se toma una funcion regular $f : U_\beta \to k$, al restringir f a $U_\alpha \cap U_\beta$ y haciendo un cambio de variables, f puede expresarse como un polinomio de Laurent, $\widetilde{f}$, en terminos de $x_1, \ldots, x_n$. Resulta que la regularidad de una aplicacion puede expresarse en terminos del soporte del polinomio de Laurent que la representa, donde por soporte entendemos los monomios con coeficientes no nulos. De esta forma, a la carta U_β se le asocia el conjunto de vectores $\mathrm{Supp}(\widetilde{f}) \subset \mathbb{Z}^n$, donde los vectores representan las potencias de los monomios en el soporte de los polinomios de Laurent en $x_1, \ldots, x_n$ que representan funciones regulares en U_β. Por esto, muchas cuestiones en base al conjunto de funciones regulares, que es el anillo de coordenadas de una variedad, se responden en base a la combinatoria existente entre los vectores que inducen los polinomios de Laurent.

La definicion de variedad torica que se va a utilizar aca es la de una variedad construida en base a un fan, donde un fan es un conjunto de conos polihedricos convexos, definidos en un grupo abeliano libre. Los vectores que generan a estos conos van a definir los monomios con los cuales generar los elementos de los anillos locales de las variedades. Esta construccion permite reducir muchos calculos algebraicos y geometricos a calculos con vectores y conjuntos convexos; de ahi, como se vera, se obtiene una simplificacion en los calculos. En [K-K-M-B] se demuestra la equivalencia de la primer definicion con esta ultima.

4.1. Definiciones y propiedades basicas

4.1.1 Definicion. Vamos a decir que N es un reticulado si es un grupo abeliano libre de rango finito $N \simeq \mathbb{Z}^n$.

A partir de un reticulado N, vamos a considerar los objetos: $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ su reticulado dual, $N_\mathbb{R}$ el $\mathbb{R}$-e.v. $N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ y $M_\mathbb{R}$ el $\mathbb{R}$-e.v. dual de $N_\mathbb{R}$.

4.1.2 Definicion. Vamos a decir que σ es un cono polihedrico convexo, cpc de ahora en mas, en N si es un conjunto de la forma $\sigma = \{\sum r_i.v_i/\ r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset N_\mathbb{R}$ para un conjunto finito $v_1, \ldots, v_n \in N_\mathbb{R}$; en ese caso, diremos que σ esta generado por los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Vamos a entender por $\dim(\sigma)$ a la dimension del espacio vectorial $\sigma + (-\sigma)$.

Se tiene una aplicacion natural $N_\mathbb{R} \times M_\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $< v, u >:= u(v)$ si $v \in N_\mathbb{R}$ y $u \in M_\mathbb{R}$. En base a esta aplicacion, definimos el dual de un cono σ como $\check{\sigma} = \{u \in M_\mathbb{R} \mid < u, v > \geq 0\ \forall v \in N_\mathbb{R}\}$.

4.1.3 Definicion. Vamos a decir que τ es una cara de σ, $\tau \prec \sigma$, si existe un $u \in \check{\sigma}$ tal que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid < u, v >= 0\}$.

Observacion. En particular, $\sigma = \sigma \cap 0^\perp$, entonces σ siempre es una cara de si misma.

Sea σ un cpc en N, si existen $v_1, \ldots, v_n \in N$ tales que generan σ, entonces diremos que el cono σ es racional (cpcr).

4.1.4 Propiedad. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\check{(\check{\sigma})} = \sigma$
2. si τ es una cara de σ entonces τ es un cono (cpc)
3. si τ y τ' son caras de σ entonces $\tau \cap \tau'$ tambien

4. si η es una cara de τ y τ una cara de σ entonces η es una cara de σ

5. si σ es un cpc en N entonces $\check{\sigma}$ es un cpc en M

6. si σ es un cpcr en N entonces $\check{\sigma}$ es un cpcr en M

7. si τ es una cara de σ entonces $\check{\sigma} \cap \tau^{\perp}$ es una cara de $\check{\sigma}$ y $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^{\perp}) = \dim(N_{\mathbb{R}})$

8. si $u \in \check{\sigma}$ y $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ entonces $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$

9. si σ y σ' son cpc y $\tau = \sigma \cap \sigma'$ es una cara de ambos, entonces existe $u \in \check{\sigma} \cap (-\sigma')\check{}$ tal que $\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \sigma' \cap u^{\perp}$

Dado un cono σ, definimos el semi-grupo S_{σ} como $S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$. Se tiene el siguiente resultado fundamental para toda la teoria y las siguientes propiedades en base a la definicion dada:

4.1.5 Lema de Gordan. Si σ es un cpcr entonces S_{σ} es un semi-grupo finitamente generado.

1. si σ es un cpcr y $u \in S_{\sigma}$ entonces $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ es un cpcr y $S_{\tau} = S_{\sigma} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$

2. si σ y σ' son cpcr y $\tau = \sigma \cap \sigma'$ es una cara de ambos, entonces $S_{\tau} = S_{\sigma} + S_{\sigma'}$

3. si τ es una cara de σ y $v_1, v_2 \in \sigma$ entonces $v_1 + v_2 \in \tau$ si y solo si $v_1, v_2 \in \tau$; mas aun, si σ' es un cono contenido en σ que verifique esa propiedad entonces es una cara de σ

4.1.6 Propiedad/Definicion. Dado σ un cpc vamos a decir que σ es un cono polihedrico fuertemente convexo (cpfc) si verifica los siguientes enunciados equivalentes:

1. $\sigma \cap (-\sigma) = 0$

2. σ no contiene ningun subespacio no trivial

3. existe un $u \in \check{\sigma}$ tal que $\sigma \cap u^{\perp} = 0$

4. $\check{\sigma}$ genera $M_{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R}$-e.v.

De aqui en mas, por cono entederemos un cono polihedrico fuertemente convexo racional (cpfcr). Diremos que un cono es simplicial si esta generado por un conjunto linealmente independiente de vectores.

4.2. Variedades toricas afines

Dado un reticulado N y un cono σ en N sabemos que S_σ es un semi-grupo finitamente generado. Entonces el anillo $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es una $\mathbb{C}$-algebra de tipo finito; la llamaremos A_σ. Tenemos que A_σ como $\mathbb{C}$-e.v. puede ser visto como

$$A_\sigma = \bigoplus_{u \in S_\sigma} \mathbb{C}.\chi^u$$

donde la multiplicacion esta dada por $\chi^u.\chi^{u'} = \chi^{u+u'}$.

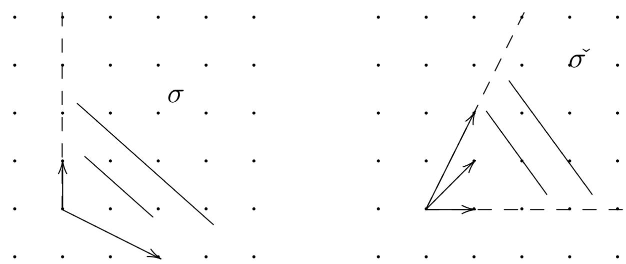
Definimos el espacio topologico U_σ como el espectro del anillo A_σ, lo notamos $U_\sigma = \mathrm{Spec}(A_\sigma)$. Al referirnos a un punto $x \in U_\sigma$ vamos a hacer referencia solo a los puntos cerrados, i.e., $x = \overline{x}$ o, equivalentemente, x en el espectro maximal de A_σ ($\mathrm{Spec}^m(A_\sigma) = U_\sigma^m$).

De esta manera, un cono σ en N define una variedad algebraica, que llamaremos variedad torica afin, que es el esquema afin (U_σ, A_σ).

Ejemplo. 1. Si tomamos $N = \mathbb{Z}^n$ y $\sigma = (e_1, \ldots, e_n)$, donde los e_i son los vectores canonicos, tenemos que $\check{\sigma} = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ y entonces escribiendo, como haremos habitualmente, $\chi^{e_i^*} = X_i$ se tiene que $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y (U_σ, A_σ) es el espacio afin usal

2. Si tomamos N como antes y $\sigma = 0$ entonces $\check{\sigma} = (\pm e_1^*, \ldots, \pm e_n^*)$, por lo tanto, $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ y $U_\sigma^m = (\mathbb{C}^*)^n$ que es el toro algebraico n-dimensional, $(\mathbb{C}^*)^n = T_N$

3. Un ejemplo mas interesante se puede obtener considerando, para $N = \mathbb{Z}^2$, el cono $\sigma = (2e_1 - e_2, e_2)$. El cono dual se puede ver generado por $\check{\sigma} = (e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*)$. Graficamente



De esta manera, se tiene que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X, XY, XY^2] \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(V^2 - UW)$$

que es una conica singular en $\mathbb{C}^3$.

Si $\tau \prec \sigma$, entonces existe un $u \in \check{\sigma}$ tal que $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$. Por x) se tiene que $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$ lo que implica que $A_\tau = (A_\sigma)_{\chi^u}$, por lo tanto la variedad inducida por τ es un abierto principal de la variedad inducida por σ, i.e.,

$$U_\tau = \mathrm{Spec}(A_\tau) = D(\chi^u) = \{p \in \mathrm{Spec}(A_\sigma) \mid \ \chi^u \notin p\}.$$

4.2.1 Propiedad. Si $\tau \prec \sigma$ entonces se tiene un morfismo de esquemas

$$U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$$

que es una inmersion abierta, y la aplicacion $A_\sigma \to A_\tau$ es el morfismo de localizacion.

Como un cono σ (de un reticulado N de rango n) siempre contiene al 0, se tiene que $T_N = (\mathbb{C}^*)^n$ es un abierto de U_σ para todo σ; por otro lado, como A_σ es un anillo integro, entonces U_σ es irreducible y, por lo tanto, T_N es un abierto denso.

Ahora bien, los puntos de una variedad torica afin U_σ se identifican con los ideales maximales de A_σ, por lo tanto las siguientes aplicaciones establecen una biyeccion entre los respectivos objetos

$$\begin{array}{rcl} U_\sigma^m & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\text{s-g}}(S_\sigma, \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto \overline{\varphi}_x \ , \ \mathrm{Ker}(\overline{\varphi}_x) = x & \\ & \overline{\varphi}_x \longmapsto & \varphi_x := \overline{\varphi}_x|_{S_\sigma} \end{array}$$

En el caso en que se toma al cono 0, se tiene que $S_0 = M$ que es un grupo, entonces $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$; por otro lado, para cualquier cono σ, $0 \prec \sigma$ entonces $S_\sigma \subset S_0$.

En base a esto ultimo, definimos una accion de T_N en U_σ como

$$\begin{array}{rcl} T_N \times U_\sigma & \longrightarrow & U_\sigma \\ (t, x) & \longmapsto & t.x \sim \overline{\varphi}_t|_{S_\sigma} . \overline{\varphi}_x \end{array}$$

Esta accion del toro T_N es compatible con las inmersiones abiertas inducidas por una cara τ de σ, es decir,

$$\begin{tikzcd} T_N \times U_\sigma \arrow[r] & U_\sigma \\ T_N \times U_\tau \arrow[r] \arrow[u, hook, shift left] \arrow[u, equal, shift right=6] & U_\tau \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

En particular, la accion de T_N es compatible con la accion del toro en si mismo que es la muliplicacion en $(\mathbb{C}^*)^n$.

Verifiquemos estas dos ultimas afirmaciones. Para el primer caso observemos que si $\tau \prec \sigma$ entonces $S_\sigma \subset S_\tau$ y, via las identificaciones antes mencionadas, el morfismo de inclusion se puede ver como

$$\begin{array}{ccc} U_\tau & \hookrightarrow & U_\sigma \\ x & \longmapsto & x \\ & \Big\updownarrow \wr & \\ \mathrm{Hom}(S_\tau,\mathbb{C}) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(S_\sigma,\mathbb{C}) \\ \varphi_x & \longmapsto & \varphi_x|_{S_\sigma} \end{array}$$

lo que trivializa la demostracion, puesto que para un $t \in T_N$

$$(\varphi_t|_{S_\tau} + \varphi_x)|_{S_\sigma} = \varphi_t|_{S_\sigma} + \varphi_x|_{S_\sigma}.$$

Para la segunda afirmacion (la que dice que la accion del toro en si mismo es la multiplicacion en $(\mathbb{C}^*)^n$) tomemos dos elementos en T_N, digamos $t = (t_1, \ldots, t_n)$ y $s = (s_1, \ldots, s_n)$. t y s se identifican con morfismos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[M] & \xrightarrow{\overline{\varphi}_t} & \mathbb{C} \\ X_i & \longmapsto & t_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[M] & \xrightarrow{\overline{\varphi}_s} & \mathbb{C} \\ X_i & \longmapsto & s_i \end{array}$$

entonces $\overline{\varphi}_t.\overline{\varphi}_s(X_i) = t_i.s_i$ y se identifica con $t.s = (t_1.s_1, \ldots, t_n.s_n)$ que es justamente el producto en $(\mathbb{C}^*)^n$.

Ejemplo. Calculemos explicitamente la accion del toro en una variedad: tomemos el ejemplo 3 donde $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$ y

$$A_\sigma = \mathbb{C}[X, XY, XY^2] \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(V^2 - UW)$$

Sea $t = (\lambda, \mu) \in T_N$ y $x = (a, b, c) \in U_\sigma$ tal que $b^2 = ab$; la accion esta dada por

$$t.x = (\lambda a,\ \lambda\mu b,\ \lambda\mu^2 c)$$

Si $b \neq 0$ entonces $a, b, c \neq 0$ y es una cuenta ver que la orbita del punto x esta dada por $\{(y_1, y_2, y_3) \in U_\sigma \mid y_1, y_2, y_3 \neq 0\}$ y que su clausura es todo U_σ. Si $b = 0$ y $a = 0$ y $c \neq 0$, entonces la orbita esta dada por $\{(y_1, y_2, y_3) \in U_\sigma \mid y_3 \neq 0\}$ y su clausura es isomorfa a la recta $\mathbb{C}[W] \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(U, V)$. Para el caso $b, c = 0$ y $a \neq 0$ se tiene un resultado analogo donde la clausura es la recta $\mathbb{C}[U] \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(V, W)$. Finalmente, si $a, b, c = 0$, la orbita del punto x es puntual y es igual a su clausura.

En definitiva, la conica U_σ admite 4 subvariedades invariantes por la accion del toro, que son el origen de dim 0, las rectas $\mathbb{C}[U]$ y $\mathbb{C}[W]$ de dim 1 y toda la variedad U_σ de dim 2. Mas adelante veremos la importancia de estos subespacios.

4.3. Variedades toricas no afines

4.3.1 Definicion. Vamos a decir que una familia finita Δ de conos es un fan (abanico) si verifica las siguientes propiedades:

1. si τ es una cara de σ, con $\sigma \in \Delta$ entonces $\tau \in \Delta$
2. si σ y σ' estan en Δ entonces $\sigma \cap \sigma'$ es una cara de ambos

Sea entonces Δ un fan en un reticulado N, construimos el esquema $X(\Delta)$ como la union disjunta de los espectros afines $(U_\sigma, A_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ pegado en las intersecciones $\sigma \cap \sigma'$; esto tiene sentido pues $U_{\sigma \cap \sigma'}$ es una inmersion abierta en U_σ y $U_{\sigma'}$ y el sistema es claramente compatible.

Dada una familia de conos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, vamos a decir que Δ es el fan generado por esa familia si es el menor fan que la contiene y verifica las propiedades enunciadas en 4.3.1, lo notaremos $\Delta = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

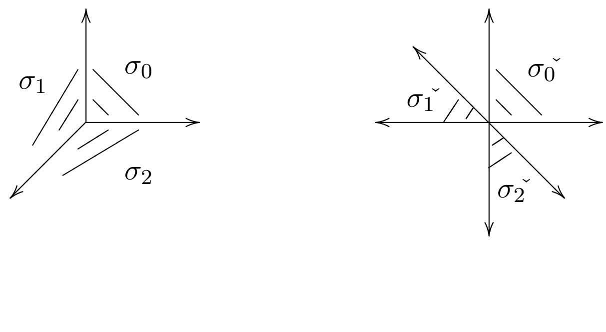
Observacion. El fan de un solo cono σ es de la forma $\Delta = (\sigma) = \{\tau\}_{\tau \prec \sigma}$

Ejemplo. 1. En $N = \mathbb{Z}$ consideremos los conos $\sigma_1 = (e_1), \sigma_2 = (-e_1)$, el fan $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2) = (e_1, -e_1, 0)$ y, en fin, la variedad torica $X(\Delta)$. Tenemos que $X(\Delta)$ tiene un cubrimiento por esquemas afines dado por $(U_{\sigma_1}, A_{\sigma_1})$ y $(U_{\sigma_2}, A_{\sigma_2})$ pegados en la interseccion de ambos por $(T_N, \mathbb{C}[X, X^{-1}])$. En resumen

$$\begin{array}{ccccc} A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[X] & \hookrightarrow & A_0 = \mathbb{C}[X, X^{-1}] & \hookleftarrow & A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[X^{-1}] \simeq \mathbb{C}[Y] \\ \mathbb{C} & \hookleftarrow & \mathbb{C}^* & \hookrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

Es bien sabido que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se puede ver geometricamente como el pegado de $\mathbb{C}$ consigmo mismo fuera del origen en base a la relacion $x \mapsto x^{-1}$; atentos a eso, no queda mas que decir que $X(\Delta) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

2. Tomemos ahora $N = \mathbb{Z}^n$ y, como siempre, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica de N. Definimos los vectores $v_j = e_j$ con $j = 1, \ldots, n$ y $v_{n+1} = -e_1 - \ldots - e_n$, y con ellos los conos $\sigma_i = (v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1})$. Sea Δ el fan generado por los conos σ_j. Afirmamos que la variedad torica $X(\Delta) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Para el caso $n = 2$ el fan que acabamos de definir se puede graficar de la siguiente manera:



Para ver como obtener $\mathbb{P}^n$ tomemos dos esquemas afines del cubrimiento de $X(\Delta)$, digamos A_{σ_i} y A_{σ_j}, veamos que son isomorfos a dos esquemas afines del cubrimiento afin canonico de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ y que se pegan de la misma manera. Con este procedimiento se requieren 3 calculos distintos en base a que i, j sean $n+1$ o no. Haremos el caso $i, j \neq n+1$:

tenemos que $\sigma_i\check{} = (e_1^* - e_i^*, \ldots, e_n^* - e_i^*, -e_i^*)$, $\sigma_j\check{} = (e_1^* - e_j^*, \ldots, e_n^* - e_j^*, -e_j^*)$, $\sigma_{i,j}\check{} = (\sigma_i \cap \sigma_j)\check{} = (e_1^* - e_i^*, e_1^* - e_j^*, \ldots, e_n^* - e_i^*, e_n^* - e_j^*, -e_i^*, -e_l^*)$, y

$$\begin{tikzcd}
A_{\sigma_i} = \mathbb{C}[X_1.X_i^{-1}, \ldots, X_n.X_i^{-1}, X_i^{-1}] \arrow[d, hook] & U_{\sigma_i} = \mathbb{C}^n \\
A_{\sigma_{i,j}} = \mathbb{C}[X_1.X_i^{-1}, X_1.X_j^{-1}, \ldots, X_n.X_i^{-1}, X_n.X_j^{-1}, X_i^{-1}, X_j^{-1}] & U_{\sigma_{i,j}} = \mathbb{C}^{n-2} \times (\mathbb{C}^*)^2 \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \\
A_{\sigma_j} = \mathbb{C}[X_1.X_j^{-1}, \ldots, X_n.X_j^{-1}, X_j^{-1}] \arrow[u, hook] & U_{\sigma_{n+1}} = \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, como esquema, es el $\operatorname{Proj}(S)$ donde S es el anillo graduado homogeneo de $\mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_{n+1}]$; el cubrimiento canonico es aquel que esta dado por los abiertos afines $D(Y_i) = \{p \in \operatorname{Spec}(S) |\ Y_i \notin p\}$. $\mathscr{O}_S(D(Y_i)) \simeq S_{(Y_i)}$, donde $S_{(Y_i)}$ denota el anillo de elementos de grado 0 del anillo localizado S_{Y_i}, y $D(Y_i) \cap D(Y_j) = D(Y_i.Y_j) = S_{(Y_i.Y_j)}$ que es igual a la localizacion en el conjunto multiplicativo generado por Y_i, Y_j.

Se tienen los siguientes isomorfismos de anillos

$$\begin{array}{rcl}
A_{\sigma_i} & \longrightarrow & S_{(Y_i)} \\
X_r.X_i^{-1} & \longmapsto & Y_r.Y_i^{-1} \\
X_i^{-1} & \longmapsto & Y_{n+1}.Y_i^{-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
A_{\sigma_{i,j}} & \longrightarrow & S_{(Y_i.Y_j)} \\
X_r.X_i^{-1} & \longmapsto & Y_r.Y_{n+1}.(Y_i.Y_j)^{-1} \\
X_i^{-1} & \longmapsto & Y_{n+1}.(Y_i)^{-1}
\end{array}$$

que hacen que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_{\sigma_i} \arrow[r, hook] \arrow[d] & A_{\sigma_{i,j}} \arrow[d] \\
S_{(Y_i)} \arrow[r, hook] & S_{(Y_i.Y_j)}
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son morfimos de localizacion. Por lo tanto, a nivel esquemas, las flechas horizontales son inclusiones, lo que evidencia que los pegados son compatibles en los dos esquemas. Concluimos positivamente que $X(\Delta) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

3. Tomemos $\sigma_1 = (e_1, e_2)$ y $\sigma_2 = (-e_1, e_2)$ en $N = \mathbb{Z}^2$, con $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$. El cono interseccion $\sigma_{1,2} = (e_2)$, entonces los anillos locales se relacionan de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[X, Y] \arrow[r, hook] & \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y] & A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[X^{-1}, Y] \arrow[l, hook'] \\
\mathbb{C}^2 & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$

que, por todo lo visto anteriormente, se pegan formando $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$.

Veamos ahora un par de propiedades generales:

4.3.2 Propiedad. Toda variedad torica $X(\Delta)$ es separada.

Demostracion. Si $\sigma, \sigma' \in \Delta$ y $\tau = \sigma \cap \sigma'$, entonces $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$ y la aplicacion $A_\sigma \otimes A_{\sigma'} \to A_\tau$ es epi. Esto implica que el morfismo $U_\tau \to U_\sigma \times U_{\sigma'}$ sea una inmersion cerrada y, por lo tanto, $X(\Delta)$ es separada. ♠

4.3.3 Propiedad. Toda variedad torica $X(\Delta)$ es normal.

Demostracion. La cuestion es claramente local, veamos entonces que U_σ es integramente cerrada para un cono σ. Si σ esta generado por vectores $v_1, \ldots, v_r$, entonces $\check{\sigma} = \cap \check{\tau_i}$, donde τ_i es la cara generada por v_i; tenemos que $A_\sigma = \cap A_{\tau_i}$ y cada A_{τ_i} es iso a un anillo de la pinta $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_2^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ que es integramente cerrado. Como la interseccion de anillos integramente cerrados es integramente cerrado, se tiene el resultado deseado. ♡

4.3.4 Propiedad. Toda variedad torica es Cohen-Macaulay, i.e., la multiplicidad de los anillos locales coincide con su longitud.

Demostracion. Ver [Dan]. ♣

4.3.5 Observacion. El toro T_N sigue siendo un abierto denso de una variedad torica no afin $X(\Delta)$ y la accion en las variedades U_σ es coherente con el pegado, lo que hace que la accion del toro se extienda a todo $X(\Delta)$:

$$\begin{tikzcd} T_N \times X(\Delta) \arrow[r] & X(\Delta) \\ T_N \times T_N \arrow[u, hook] \arrow[r] & T_N \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como se habia dicho antes, vale tambien la reciproca, toda variedad algebraica X, normal y separada, que contiene al toro y el cual actua con una accion compatible en el sentido del cuadrado anterior, se puede construir como una variedad torica para algun fan Δ.

Sea σ un cono en N, entonces por la prop vi) $\check{\sigma}$ es un cono en M, y por xii) la siguiente aplicacion es un morfismo de semi-grupos

$$\begin{aligned} S_\sigma &\xrightarrow{\varphi_\sigma} \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

El Kernel del morfismo φ_σ es un punto de U_σ que denotaremos como x_σ.

Observacion. Si el cono σ genera $N_{\mathbb{R}}$, resulta que $\sigma^{\perp} = (0)$ y $x_\sigma = (0,\ldots,0) \sim (X_1,\ldots,X_n)$. La orbita de la accion del toro en x_σ es puntual y es el unico punto que tiene esta propiedad.

Nuevamente tomemos σ que genera todo $N_{\mathbb{R}}$, entonces $\sigma^{\perp} = (0)$ y $\check{\sigma}$ genera todo S_σ. Sea m el ideal maximal correspondiente al punto x_σ. Tenemos que m esta generado por todos los $u \in S_\sigma$ tal que $u \neq 0$ y que m^2 esta generado por los $u \in S_\sigma$ que son suma de dos elementos en S_σ; en particular, los generadores de los ejes de $\check{\sigma}$ estan en m/m^2 y son no nulos. Si suponemos que U_σ es no singular, tenemos que $\dim(U_\sigma) = \dim(T_N) = n = \dim(m/m^2)$, lo que implica que $\check{\sigma}$ no puede tener mas de n ejes y los generadores deben generar todo S_σ. Como S_σ genera a M, los generadores de $\check{\sigma}$ deben formar una base de M y entonces los duales forman una base de N. Por lo tanto $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$.

4.3.6 Propiedad. Una variedad torica afin U_σ es no singular si y solo si σ es un subconjunto de alguna base del reticulado N.

Demostracion. Si σ genera todo N ya esta hecho arriba; si no, se puede considerar a N como

$$N = N_\sigma \oplus N' \qquad \text{donde} \qquad N_\sigma = (\sigma \cap N) + (-\sigma \cap N)$$

y se obtiene que $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^k \oplus (\mathbb{C}^*)^{n-k}$, si $\dim(\sigma) = k$ y σ forma una base de N_σ. $\diamondsuit$

Como a cada cara τ de un cono σ le asignamos un punto $x_\tau \in U_\tau$ que se incluye en U_σ, tiene sentido hablar de la orbita de una cara τ (lo notaremos $\mathscr{O}_\tau$) y de la clausura de esta ($\overline{\mathscr{O}}_\tau = V(\tau)$). Tomemos Δ un fan y $\tau \in \Delta$, tomamos el sublatice N_τ de N generado como grupo por $\tau \cap N$, y definimos

$$N(\tau) = N/N_\tau \qquad \text{y} \qquad M(\tau) = \tau^{\perp} \cap M$$

el latice cociente y su dual. Vamos a definir a la orbita de τ como el toro del latice cociente, i.e.,

$$\mathscr{O}_\tau = T_{N_\tau} = \mathrm{Spec}(M(\tau))$$

donde los puntos cerrados son $\mathrm{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) = N(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$. Tenemos que la dimension de O_τ es $n-k$ si la dimension de τ es k (y la dimension de N es n). Mas aun, si $\tau^{\perp} \cap M$ esta generado por vectores $u_1, \ldots, u_r$, entonces $x_\tau \sim m$ donde m es el ideal maximal generado por

$$m = (\chi^{u_i} - 1)_{\{i=1,\ldots,r\}}.$$

Por lo tanto, la orbita de x_τ son los puntos de la forma $(\chi^{u_i} - a_i)$ para $a_i \neq 0$ y $i = 1, \ldots, r$ y son exactamente los puntos de $\mathscr{O}_\tau$.

Vamos a llamar $\mathrm{Star}(\tau)$ a los conos de Δ que contiene a τ; estos conos se pueden ver en $N(\tau)$ como

$$\mathrm{Star}(\tau) = \{\overline{\sigma} \in N(\tau) |\ \tau \prec \sigma\ \}$$

Este conjunto $\mathrm{Star}(\tau)$ es un fan, y notemos que $T_{N(\tau)} = \mathscr{O}_\tau$ esta contenido en $X(\mathrm{Star}(\tau))$ pues es el abierto correspondiente al cono 0 en $\mathrm{Star}(\tau)$.

Esta nueva variedad torica $X(\mathrm{Star}(\tau))$ tiene un cubrimiento afin dado por $\{U_\sigma(\tau)\}$ donde σ es un cono de Δ que tiene a τ como cara y los $U_\sigma(\tau)$ son las variedades toricas afines correspondientes al cono $\overline{\sigma} \in \mathrm{Star}(\tau)$. Tenemos que

$$U_\sigma(\tau) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\overline{\sigma} \cap M(\tau), \mathbb{C}]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M], \mathbb{C}]).$$

Observacion. Para $\tau = \sigma$ resulta $U_\tau(\tau) = \mathscr{O}_\tau$.

Como $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ es una cara de $\check{\sigma}$, al mirar los puntos de $X(\mathrm{Star}(\tau))$ como morfismos de semigrupos se puede construir una inmersion cerrada de $X(\mathrm{Star}(\tau))$ en $X(\Delta)$. Para esto, observemos que para cada σ que tiene a τ como cara, se tiene la inmersion de espacios topologicos y su correspondiente epimorfismo de anillos

$$U_\sigma(\tau) = \mathrm{Hom}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\check{\sigma} \cap M, \mathbb{C}) = U_\sigma$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S_\sigma] &\twoheadrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma(\tau)] = \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M] \\ \chi^u &\longmapsto \begin{cases} \chi^u & \text{si } u \in \tau^\perp \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

Estos morfismos forman una familia compatible; si τ es una cara de σ y σ una cara de σ' entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_\sigma(\tau) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U_{\sigma'}(\tau) \arrow[d, hook] \\ U_\sigma \arrow[r, hook] & U_{\sigma'} \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto se debe a que las inclusiones provienen de los morfismos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}(\check{\sigma'} \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{Hom}(\check{\sigma} \cap M, \mathbb{C}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(\check{\sigma'} \cap M, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

De esta manera, deducimos la siguiente prop:

4.3.7 Propiedad. Si $\tau \in \Delta$ entonces $X(\mathrm{Star}(\tau)) \hookrightarrow X(\Delta)$ es una inmersion cerrada, y $V(\tau) = \overline{\mathscr{O}_\tau} = \mathrm{Star}(\tau)$. Por otro lado, si la dimension de N es n y la codimension de τ es $n-k$ entonces $\dim(V(\tau)) = k$.

Observacion. En particular, si $\tau \prec \sigma \in \Delta$, entonces $V(\tau) \hookrightarrow V(\sigma) \hookrightarrow U_\sigma$ son inmersiones cerradas.

Se sigue de la explicacion anterior, que el ideal de la variedad afin $V(\tau) \cap U_\sigma = U_\sigma(\tau)$ esta definido en A_σ por $\oplus A_\sigma[\chi^u]$, donde $u \in S_\sigma$ es tal que $< u, v >\gneq 0$, para todo $v \in \tau$.

4.3.8 Propiedad. Si V es una subvariedad cerrada de U_σ tal que V es invariante por la accion del toro entonces $V = V(\tau)$, para algun $\tau \prec \sigma$.

Demostracion. Sea $x \in V$, x se identifica con algun ideal maximal $m = (\chi^u - a_u)$, para algunos $u \in S_\sigma$. Podemos tomar x en el interior de V, de forma tal que si $a_u = 0$ entonces no existe un x en V tal que $a_u \neq 0$; llamemos a este subconjunto de S_σ como S_V. Como V es invariante por la accion del toro, para todo $t \in T_N$, $t.x = (\chi^u - a_u.t_u)$; en particular, $y = (\chi^u - 1, \chi^w)$ para $u \in S_V$ y $w \in S_\sigma - S_V$. Sea $\tau = \sigma \cap (\sum_{u \in S_V} u)^\perp$, entonces $S_\sigma \cap \tau^\perp = S_\sigma - S_V$ y $V(\tau) = V$. ♣

4.3.9 Propiedad. Se tienen las siguientes relaciones entre las orbitas $\mathscr{O}_\tau$, las clausuras $V(\tau)$ y los abiertos afines U_σ:

1. $U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \mathscr{O}_\tau$
2. $V(\tau) = \coprod_{\tau \prec \gamma} \mathscr{O}_\gamma$
3. $\mathscr{O}_\tau = V(\tau) - \bigcup_{\tau \precneqq \gamma} V(\gamma)$

Ejemplo. En el ejemplo 4.2.1, donde $\sigma = (2e_1 - e_2, e_2)$ y $A_\sigma \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(V^2 - UW)$, calculamos explicitamente las orbitas y las clausuras de las orbitas en los puntos (a, b, c) para $b \neq 0$, $b, a = 0$, $b, c = 0$ y $a, b, c = 0$. Veamos ahora que esas son las unicas subvariedades invariantes de U_σ. Claramente $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 2e_1 - e_2$, $\tau_2 = e_2$ y σ son las unicas caras de σ. Inmediatamente observamos que $\mathrm{Star}(\sigma) = (0)$ y entonces $V(\sigma) = 0$ (el origen de coordenadas de $\mathbb{C}^3$). Puesto que $x_\sigma = (0, 0, 0)$, y $\mathrm{Star}(0) = (\sigma)$ entonces $V(0) = U_\sigma$, donde $x_0 = (1, 1, 1)$. Los casos mas intersantes son los otros dos, analogos uno con el otro, donde $\mathrm{Star}(\tau_1) = (\overline{e}_2)$, $\mathrm{Star}(\tau_2) = (\overline{e}_1)$. Se tiene que $V(\tau_1) = \mathbb{C}[XY^2] \simeq \mathbb{C}[W]$ y $V(\tau_2) = \mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[U]$, que era exactamente lo que se habia calculado antes. Los puntos x_{τ_1} y x_{τ_2} son $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0)$ respectivamente; pues para τ_1 el Kernel del morfismo $S_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ esta dado por X y XY, y entonces $U, V = 0$. En cambio para τ_2 el nucleo esta dado por XY y XY^2, y entonces $V, W = 0$.

4.4. Anillo de Chow de variedades toricas

Sea Δ un fan en un reticulado N de dimension n y sea $X = X(\Delta)$ la variedad torica asociada al fan. Sea $A(X) = \bigoplus A_k(X)$ el anillo de Chow de X, entonces

4.4.1 Teorema. Los grupos $A_k(X)$ estan generados por las clases de las clausuras de las orbitas $V(\sigma)$ donde $\sigma \in \Delta$ y $\mathrm{codim}(\sigma) = n - k$.

Demostracion. En base a las subvariedades

$$X_i = \bigcup_{\mathrm{codim}(\sigma)\geq n-i} V(\sigma) \subset X$$

se puede construir una filtracion $\emptyset = X_{-1} \subset \ldots \subset X_n = X$ de subesquemas cerrados de X. El complemento de X_{i-1} en X es la union disjunta de de las orbitas $\mathcal{O}_\sigma$ con σ de dimension $n-i$. Utilizando la sucesion exacta de 3.4.7 tenemos

$$A_k(X_{i-1}) \longrightarrow A_k(X_i) \longrightarrow \bigoplus_{\dim(\sigma)=n-i} A_k(\mathcal{O}_\sigma) \longrightarrow 0$$

Como $\mathcal{O}_\sigma$ es un abierto del espacio afin $\mathbb{A}^i$, en base al mismo principio se tiene que

$$A_i(\mathcal{O}_\sigma) = \mathbb{Z}.[V(\sigma)] \quad \text{y} \quad A_k(\mathcal{O}_\sigma) = 0$$

si $k \neq i$.

Por otro lado la restriccion de $A_k(X_i)$ en $A_k(\mathcal{O}_\sigma)$ manda $[V(\sigma)]$ en $[\mathcal{O}_\sigma]$. Utilizando un argumento inductivo resulta que las clases $[V(\sigma)]$, con $\dim(\sigma) = n-k$, generan $A_k(X_i)$. ♠

Continuando con la notacion anterior, sea $\tau \in \Delta$ y sea u un vector en $M(\tau)$ entonces la funcion racional χ^u define un divisor en X que se calcula como

4.4.2. $[\mathrm{div}(\chi^u)] = \sum < u, n_{\sigma,\tau} > .[V_\sigma]$,

donde la suma se realiza en todos los σ tales que $\dim(\sigma) = \dim(\tau) + 1$ y $n_{\sigma,\tau}$ es un generador de N_σ/N_τ.

Para ver esto podemos considerar el abierto $U_\tau \simeq \mathbb{C}\times(\mathbb{C}^*)^{n-1}$, donde $V(\tau)$ se corresponde a $0 \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$. Esto permite reducirse al caso en que $N = \mathbb{Z}$ y τ esta generado por el 1. Entonces el orden de χ^u es claramente el valor de $u =< u, 1 >$.

En [F-McP-S-S] se demuestra el siguiente teorema:

4.4.3 Teorema. Las relaciones entre los generadores $V(\sigma)$ de $A_k(X)$ estan dadas por los divisores $[\mathrm{div}(\chi^u)]$ en base a la formula (4.4.2) de mas arriba, donde los vectores u son los generadores de $M(\tau)$ y los conos τ son caras de codimension $k+1$,

Ejemplo. Consideremos el cono σ en $\mathbb{Z}^2$ generado por $v_1 = 2e_1 - e_2$ y $v_2 = -e_1 + 2e_2$. Tenemos que $\check{\sigma}$ esta generado por $(e_1^* + e_2^*\ ,\ e_1^* + 2e_2^*\ ,\ 2e_1^* + e_2)$ y entonces

$$A_\sigma = \mathbb{C}[XY, XY^2, X^2Y] \simeq \mathbb{C}[U, V, W]/(UV - W^3)$$

Ahora bien, sea $X = U_\sigma$, entonces $A_1(X)$ esta generado por $[V(v_1)], [V(v_2)]$. Sea $b = b_1.[V(v_1)] + b_2.[V(v_2)] \in A_1(X)$, supongamos que b es un divisor de una funcion χ^u. Si $u = u_1e_1^* + u_2e_2^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} b_1 =< u, n_{\sigma,v_1} > &\quad = 2u_1 - u_2 \\ b_2 =< u, n_{\sigma,v_2} > &\quad = -u_1 + 2u_2 \end{aligned}$$

entonces $b_1 - b_2 = 3(u_1 - u_2)$; es decir que un elemento $b_1.[V(v_1)] + b_2.[V(v_2)] \in \mathscr{L}_1(X)$ es racionalmente equivalente a 0 si y solo si $b_1 \equiv b_2$ (3).

Ejemplo. Calculemos el anillo de Chow de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que tiene un calculo analogo al de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Para eso tomamos el fan Δ generado por los conos $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ donde

$$\begin{array}{ll} \sigma_0 = (e_1, e_2) & \\ \sigma_1 = (-e_1 - e_2, e_2) & \text{y los } e_i \text{ son una base de } \mathbb{Z}^2 \\ \sigma_2 = (-e_1 - e_2, e_1) & \end{array}$$

Si llamamos $\tau_0 = -e_1 - e_2$, $\tau_1 = e_1$ y $\tau_2 = e_2$ entonces

$$A_0(\mathbb{P}^2) = ([V_{\sigma_i}]) \quad A_1(\mathbb{P}^2) = ([V(\tau_j)]) \quad A_2(\mathbb{P}^2) = ([V(0)])$$

Como $\mathbb{P}^2$ es irreducible (y reducido) resulta $A_2(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$. Para los A_k es necesario conocer las relaciones que existen entre ellos; dichas relaciones estan dadas por los divisores de los generadores de $M(\tau)$ donde τ tiene dimension $n - k - 1$.

Para calcular A_0 tenemos que $\tau_0 \prec \sigma_1, \sigma_2$, los generadores de los reticulados cocientes son $n_{\sigma_1,\tau_0} = e_2$, $n_{\sigma_2,\tau_0} = e_1$ y el reticulado dual $M(\tau_0) = (u_0 = -e_1^* + e_2^*)$; por lo tanto

$$[\mathrm{div}(\chi^{u_0})] = [V(\sigma_1)] - [V(\sigma_2)]$$

Para τ_1 se tiene que $n_{\sigma_0,\tau_1} = e_2$, $n_{\sigma_2,\tau_1} = -e_2$ y $M(\tau_1) = (u_1 = e_2^*)$, entonces

$$[\mathrm{div}(\chi^{u_1})] = [V(\sigma_0)] - [V(\sigma_2)]$$

Y, analogamente, para τ_2 resulta $[\mathrm{div}(\chi^{u_2})] = [V(\sigma_0)] - [V(\sigma_1)]$. Por lo tanto,

$$A_0(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$$

con generador cualquiera de los $[V(\sigma_i)]$.

Para calcular A_1, tenemos que $M(0) = M$ generado por $u_1 = e_1^*$ y $u_2 = e_2^*$; por otro lado, los vectores $n_{\tau_i,0}$ son los generadores de los τ_i. En definitiva

$$[\mathrm{div}(\chi^{u_1})] = -[V(\tau_0)] + [V(\tau_1)]$$
$$[\mathrm{div}(\chi^{u_2})] = -[V(\tau_0)] + [V(\tau_2)]$$

y, nuevamente, $A_1(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$ con cualquiera de los $[V(\tau_i)]$ como generador. Hasta aqui

$$A(X) = \mathbb{Z}^3$$

En lo relativo al producto en $A(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, llamemos $t = [V(\tau_i)]$. Tenemos que $t^2 = [V(\sigma_i)]$ puesto que las subvariedades $V(\tau_i)$ y $V(\sigma_i)$ son reducidas y $t.[V(0)] = t$, entonces podemos escribir

$$A_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[t^2] \quad A_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[t] \quad A_2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$$

y resulta entonces que

$$A(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}[t]/t^3$$

como anillos.

El mismo calculo realizado en $\mathbb{P}^n$ da como resultado que

$$A(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}[t]/t^{n+1}$$

4.5. Espacios proyectivos con pesos

4.5.1. Definicion

Dados elementos $d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, se puede considerar una accion de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ en base a la formula

$$\lambda.(y_0, \ldots, y_n) = (\lambda^{d_0} y_0, \ldots, \lambda^{d_n} y_n)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y para todo $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

4.5.1 Definicion. Se define el espacio proyectivo con pesos $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$ como el cociente $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ en base a la accion definida arriba. Eventualmente se notara $\mathbb{P}(\overline{d})$, tomando $\overline{d} = (d_0 \ldots, d_n)$; a la clase de un punto $(y_0, \ldots, y_n)$ se la notara como $(y_0 : \ldots : y_n)$.

La accion de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ define una accion sobre el anillo de polinomios $\mathbb{C}[y_0, \ldots, y_n]$ dada por

$$\lambda.f(y_0, \ldots, y_n) = f(\lambda^{d_0} y_0, \ldots, \lambda^{d_n} y_n).$$

En base a esta accion vamos a definir el anillo $\overline{d}$-graduado $\mathbb{C}[y_0, \ldots, y_n]$ donde un elemento f se dice $\overline{d}$-homogeneo de grado δ si

$$\lambda.f(y_0, \ldots, y_n) = \lambda^{\delta} f(y_0, \ldots, y_n)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donde la multiplicacion en el termino izquierdo es la accion de $\mathbb{C}^*$ y la multiplicacion en el termino derecho es la habitual del anillo de polinomios. Para explicitar esta graduacion vamos a notar $\mathbb{C}^{\overline{d}}[y_0, \ldots, y_n]$.

De esta forma se tiene definido el espacio proyectivo con pesos $\overline{d} = (d_0, \ldots, d_n)$ y su anillo graduado de funciones regulares

$$\mathbb{P}(\overline{d}) \leftrightsquigarrow \mathbb{C}^{\overline{d}}[y_0, \ldots, y_n]$$

Otra forma de ver el espacio proyectivo con pesos y su anillo de funciones se obtiene al considerar la aplicacion natural

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P}(\overline{d}) \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (x_0^{d_0} : \ldots : x_n^{d_n}) \end{array}$$

la cual es claramente suryectiva. Sea μ_k el grupo dado por las k-esimas raices de la unidad, es facil ver que

$$\alpha(x_0 : \ldots : x_n) = \alpha(z_0 : \ldots : z_n)$$

si y solo si existen $\xi_i \in \mu_{d_i}$ para $i = 0, \ldots, n$ de forma tal que $x_i = \xi_i z_i$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}^n / G \simeq \mathbb{P}(\overline{d}),$$

donde $G = \mu_{d_0} \times \ldots \times \mu_{d_n}$ y la accion sobre $\mathbb{P}^n$ esta dada por $(\xi_0, \ldots, \xi_n).(x_0 : \ldots : x_n) = (\xi_0 x_0 : \ldots : \xi_n x_n)$.

Si notamos $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ al anillo graduado de funciones sobre $\mathbb{P}^n$ resulta que el anillo de funciones sobre $\mathbb{P}^n/G$ es el anillo de invariantes por la accion de G, $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]^G$, donde la accion esta dada por

$$(\xi_0, \ldots, \xi_n).g(x_0, \ldots, x_n) = g(\xi x_0, \ldots, \xi_n x_n).$$

Claramente se tiene que $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]^G = \mathbb{C}[x_0^{d_0}, \ldots, x_n^{d_n}]$. Mas aun, los morfismos sobre variedades

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^n(\overline{d}) \\ \mathbb{P}^n/G \arrow[ur, "\overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

definen morfismos
en los anillos
de funciones

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] & \mathbb{C}^{\overline{d}}[y_0, \ldots, y_n] \arrow[l, "\alpha^*"'] \arrow[dl, "\overline{\alpha}^*"] \\ \mathbb{C}[x_0^{d_0}, \ldots, x_n^{d_n}] \arrow[u, "\pi^*"] & \end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo $\overline{\alpha^*}$ y la inclusion α^* de anillos graduados estan ambos definidos en base a la asignacion

$$y_i \longmapsto x_i^{d_i}.$$

4.5.2 Propiedad. Supongamos que en el espacio $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$ los pesos tienen un divisor comun r. Entonces $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n) \simeq \mathbb{P}(\frac{d_0}{r}, \ldots, \frac{d_n}{r})$.

Demostracion. Se tiene un claro isomorfismo entre

$$\mathbb{C}[x_0^{d_0}, \ldots, x_n^{d_n}] \simeq \mathbb{C}[x_0^{\frac{d_0}{r}}, \ldots, x_n^{\frac{d_n}{r}}],$$

y otro entre los Proj de cada uno de esos anillos, ver [EGA II, 2.4]. ♡

Considerando conjuntos $U_i = \{(y_0 : \ldots : y_n) / \ y_i \neq 0 \ \}$ se tiene un cubrimiento

$$\mathbb{P}(\overline{d}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

que permite ver a $\mathbb{P}(\overline{d})$ localmente. Para ver esto fijemos por comodidad $i = 0$ y sea $(y_0 : \ldots : y_n) \in U_0$. En base a la accion de $\mathbb{C}^*$ se tiene que $(y_0 : \ldots : y_n) = (1 : \frac{y_1}{y_0^{d_1/d_0}} : \ldots : \frac{y_n}{y_0^{d_n/d_0}})$. De manera similar a lo que se hace en $\mathbb{P}^n$ uno querria definir la asignacion

$$(y_0 : \ldots : y_n) \longmapsto (\frac{y_1}{y_0^{d_1/d_0}}, \ldots, \frac{y_n}{y_0^{d_n/d_0}}) \in \mathbb{C}^n$$

El tema es que poner un 1 en la primer coordenada no identifica de manera unica un elemento de U_0 puesto que $\forall \xi \in \mu_{d_0}$, $\xi.(1 : w_1 : \ldots : w_n) = (1 : \xi^{d_1} w_1 : \ldots : \xi^{d_n} w_n)$. Para resolver esto, definimos una accion de μ_{d_0} en $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera

$$\xi.(a_1, \ldots, a_n) = (\xi^{d_1} a_1, \ldots, \xi^{d_n} a_n)$$

y entonces el conjunto U_0 se identifica de manera naturla con el cociente $\mathbb{C}^n/\mu_{d_0}$ via el morfismo

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{C}^n/\mu_{d_0} \\ (y_0 : \ldots : y_n) = & & \\ (1 : \frac{y_1}{y_0^{d_1/d_0}} : \ldots : \frac{y_n}{y_0^{d_n/d_0}}) & \longmapsto & (\frac{y_1}{y_0^{d_1/d_0}}, \ldots, \frac{y_n}{y_0^{d_n/d_0}}) \end{array}$$

En $\mathbb{P}^n/G$ definimos de manera similar a lo que se hizo antes conjuntos $\widetilde{U}_i$ que forman un cubrimiento de $\mathbb{P}^n/G$. Como $\mathbb{P}^n/G$ hereda de $\mathbb{P}^n$ la accion usual de $\mathbb{C}^*$ resulta que $\widetilde{U}_i$ se identifica con el cociente $\mathbb{C}^n$ por una accion de μ_{d_i} dada por $\xi.(x_0 : \ldots : x_n) = (\xi x_0 : \ldots : \xi x_n)$; vamos a identificar a este cociente como $\mathbb{C}^n/\widetilde{\mu}_{d_i}$. Se tiene entonces el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_i & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_i} & \mathbb{C}^n/\widetilde{\mu}_{d_i} \\ (x_0 : \ldots : x_n) = & & \\ (x_0/x_i : \ldots : x_n/x_i) & \longmapsto & (x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i) \end{array}$$

Como $\overline{\alpha}(\widetilde{U}_i) = U_i$, en base a esto ultimo podemos averiguar mas facilmente quien es el anillo de fracciones de U_i, puesto que es una simple cuenta ver que

$$\widetilde{U}_i \leftrightsquigarrow \mathbb{C}[x_0^{d_0}, \ldots, x_n^{d_n}]_{(x_i^{d_i})} \qquad \text{y entonces} \qquad U_i \leftrightsquigarrow \mathbb{C}[y_0, \ldots, y_n]_{(y_i)},$$

donde el parentesis en la localizacion indica que se toma el subanillo de elementos de grado 0. Notar que para deshomogeneizar un elemento de $\mathbb{C}[x_0^{d_0}, \ldots, x_n^{d_n}]$ para verlo en $\mathbb{C}^n/\widetilde{\mu}_{d_i}$ necesariamente tiene que tener grado multiplo de d_i.

Observacion. En el caso del espacio proyectivo usual un abierto U_i se represanta con el subanillo de grado 0 de la localizacion en x_i y se puede expresar en terminos de sus monomios como

$$\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]_{(x_i)} \simeq \mathbb{C}[x_0/x_i,\ldots,x_n/x_i].$$

En el caso de $\mathbb{P}(\overline{d})$ puede verse facilmente que

$$\mathbb{C}[(\frac{x_0}{x_i})^{d_0.d_i},\ldots,(\frac{x_n}{x_i})^{d_n.d_i}] \subset \mathbb{C}[x_0^{d_0},\ldots,x_n^{d_n}]_{(x_i^{d_i})},$$

pero, claramente, una descripcion completa del anillo localizado requiere de un analisis de la aritmetica de los pesos $d_0,\ldots,d_n$.

La descripcion de los monomios que generan $\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]^G_{(x_i)}$ puede ser vista en terminos de los conos duales del fan del espacio proyectivo con pesos, ver 4.5.2. Por otro lado, gracias a 4.4.3, conocer estos monomios permite conocer las relaciones entre los generadores del grupo de Chow de la variedad en cuestion.

De cualquier manera, lo ultimo que resta por ver es como se pegan estas variedades $\mathbb{C}^n/\mu_{d_i}$ entre ellas. Esto se puede ver en $\mathbb{P}^n/G$ en base a la misma formula en que se hace en el espacio proyectivo usual, lo que cambia son las identificaciones subyacentes entre los distintos puntos. Sea $(x_0 : \ldots : x_n) \in \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$, el cambio de coordenadas de de $\mathbb{C}^n/\mu_{d_i}$ en $\mathbb{C}^n/\mu_{d_j}$ esta dado por

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \arrow[dl, "\widetilde{\varphi}_i|_{\widetilde{U}_i\cap\widetilde{U}_j}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}_j|_{\widetilde{U}_i\cap\widetilde{U}_j}"] & \\
\mathbb{C}^n/\mu_{d_i} \supset \widetilde{\varphi}_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \arrow[rr] & & \widetilde{\varphi}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \subset \mathbb{C}^n/\mu_{d_j} \\
(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}) \arrow[rr, mapsto] & & (\frac{x_0}{x_j},\ldots,\frac{x_n}{x_j})
\end{tikzcd}$$

4.5.2. Construccion en base a un fan

Sea el reticulado $N = \mathbb{Z}^n$ y $N' \subset N$ un subreticulado de forma tal que existe $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base de N y $m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}^n$ tales que $\{m_1e_1,\ldots,m_ne_n\}$ es un sistema de generadores de N'. Si M y M' son los reticulados duales de N y N' respectivamente, se tiene que $M \subset M'$ y $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ es una base de M y $\{\frac{1}{m_1}e_1^*,\ldots,\frac{1}{m_n}e_n^*\}$ es un sistema de generadores de M'.

Tiene sentido calcular los cocientes N/N' y M'/M los cuales dan

$$N/N' \simeq \bigoplus \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \simeq \bigoplus \mu_{m_i} \qquad M'/M \simeq \bigoplus (1/m_i)\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \bigoplus \mu_{m_i}$$

Tomando elementos $\overline{u} \in M'/M$ y $\overline{v} \in N/N'$ pueden tomarse representantes de clase de la forma

$$u = \sum \frac{k_i}{m_i} e_i^* \qquad v = \sum l_i e_i$$

y calcular la evaluacion $< u, v >= \sum \frac{k_i.l_i}{m_i}$. El valor $< u, v >$ modulo $\mathbb{Z}$ no depende de los representantes de clase elegidos y entonces se tiene definida una funcion de paridad, $< \overline{u}, \overline{v} >$, de $M'/M \times N/N'$ en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y componiendo con la funcion exponencial un elemento en $\mathbb{C}^*$, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} M'/M \times N/N' & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (\overline{u}, \overline{v}) & \longmapsto & < \overline{u}, \overline{v} > & & \\ & & a & \longmapsto & e^{2\pi i a} \end{array}$$

Todo esto permite definir una accion de $G = N/N'$ sobre $\mathbb{C}[M']$ como

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{C}[M'] & \longrightarrow & \mathbb{C}[M'] \\ (\overline{v}, \chi^{\overline{u}}) & \longmapsto & e^{2\pi i < \overline{u}, \overline{v} >} \chi^{\overline{u}} \end{array}$$

4.5.3 Teorema. De acuerdo a la notacion anterior, $\mathbb{C}[M]$ se puede ver como el anillo de invariantes de $\mathbb{C}[M']$ por la accion de G, i.e., $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[M']^G$.

Demostracion. Tenemos que $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathbb{C}[M'] = \mathbb{C}[U_1, \ldots, U_n]$ donde $X_i = e_i^*$ y $U_i = \frac{1}{m_i} e_i^*$. Esta claro que $U_i^{m_i} = X_i$ entonces $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{C}[U_1^{m_1}, \ldots, U_n^{m_n}]$.

En base a todo lo visto en la seccion 4.5.1 solo es necesario ver que la accion de $G = \oplus \mu_{m_i}$ en $\mathbb{C}[M']$ es de la forma

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n).f(U_1, \ldots, U_n) = f(\xi_1 U_1, \ldots, \xi_n U_n).$$

Para ver eso basta tomar un generador de G, $(1, \ldots, 1, \xi_i, 1, \ldots, 1) \leftrightsquigarrow \overline{e}_i$, un elemento $\overline{u} \in M'/M$ y calcular $< \overline{e}_i, \overline{u} >$. Tomando representantes de clase e_i y $u = \sum \frac{k_j}{m_j} e_j^*$ resulta $< e_i, u >= \frac{k_i}{m_i}$. Es decir que

$$(1, \ldots, 1, \xi_i, 1, \ldots, 1).f(U_1, \ldots, U_n) = f(U_1, \ldots, U_{i-1}, \xi_i U_i, U_{i+1}, \ldots, U_n),$$

lo que concluye la demostracion. ♠

Observacion. Al tomar un n-simplex $\sigma \subset N$ (es decir, un cono generado por n vectores linealmente independientes) se puede considerar el reticulado $N' = \sigma \cap N$. Llamando σ' al cono σ visto en N', como esta generado por vectores l.i. resulta $U_{\sigma'} = \mathbb{C}^n$. Por el teorema 4.5.3 los polinomios en $\mathbb{C}[M]$ son invariantes por la accion de $G = N/N'$, por lo tanto

$$U_\sigma = U_{\sigma'}/G = \mathbb{C}^n/G.$$

Al considerar el espacio proyectivo con pesos $\mathbb{P}(d_0,\ldots,d_n)$ se vio que localmente se identifica con $\mathbb{C}^n/\mu_{d_i}$. Fijando por comodidad $i=0$, la accion de μ_{d_0} esta definida por $\xi.(a_1,\ldots,a_n)=(\xi^{d_1}a_1,\ldots,\xi^{d_n}a_n)$. Para construir esta variedad $(\mathbb{C}^n/\mu_{d_0})$ como variedad torica en terminos de un fan consideramos la base usual de $\mathbb{Z}^n$ $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y los siguientes reticulados

$$N'=\sum_{i\geq 1}\mathbb{Z}.\frac{1}{d_i}e_i\subset N=N'+\frac{1}{d_0}(e_1+\ldots+e_n).$$

Como N' esta generado por vectores l.i., $\mathbb{C}[M']$ es el anillo de polinomios usual en n-variables y la variedad asociada, llamemosla U', es $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}[M]=\mathbb{C}[M']^G$, donde $G=N/N'\simeq\mu_{d_0}$ y M' esta generado por $\{d_1e_1^*,\ldots,d_ne_n^*\}$. Entonces la accion de G sobre M'/M esta definida por

$$<1/d_0(e_1+\ldots+e_n),d_ie_i^*>=d_i/d_0,$$

lo que quiere decir que un elemento $\xi\in\mu_{d_0}$ actua en una variable U_i como $\xi.U_i=\xi^{d_i}U_i$. Por lo tanto la variedad asociada a $\mathbb{C}[M]$ es $U\simeq\mathbb{C}^n/\mu_{d_0}$ bajo la accion mencionada arriba.

Para construir todo $\mathbb{P}(d_0,\ldots,d_n)$ con un fan se procede de manera similar a como se hizo para el espacio proyectivo usual: en $\mathbb{Z}^n$ se toma una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y se definen los vectores $v_0,\ldots,v_n$ donde $v_0=-e_1-\ldots-e_n$ y $v_i=e_i$ para $i\geq 1$. Luego tomando todos los subconjuntos de n vectores de $\{v_0,\ldots,v_n\}$ se forman los vectores $\sigma_0,\ldots,\sigma_n$ (donde el indice indica el vector que falta). Finalmente Δ es el fan generado por los conos σ_i pero visto dentro del reticulado $N=\sum_{i=0}^n\frac{1}{d_i}v_i$.

Cada cono σ_i genera un reticulado $N'=\sigma\cap N$, donde el cono σ visto ahi dentro lo notamos como σ'. En base a un cambio de variables, el reticulado N se puede ver como $N=N'-\mathbb{Z}\frac{1}{d_i}(-e_1'-\ldots-e_n')$. Por lo tanto el grupo $G=N/N'$ es isomorfo μ_{d_i} y actua en $\mathbb{C}^n$ de la manera usual para un espacio proyectivo con pesos. Por lo visto en 4.5.3 tenemos que

$$U_\sigma=U_{\sigma'}/G=\mathbb{C}^n/G.$$

que es lo que se estaba buscando.

El cambio de variables realizado en la base del reticulado es el que establece los datos de pegado entre los distintos abiertos U_{σ_i}, esto puede verse de la misma manera que con el fan de un espacio proyectivo usual, y por lo tanto la variedad resultante $X(\Delta)=\mathbb{P}(d_0,\ldots,d_n)$.

4.5.4 Propiedad. $\mathbb{P}(d_0,d_1)\simeq\mathbb{P}^1$ para cualquier par de pesos d_0,d_1.

Demostracion. Por 4.5.2, sin perdida de generalidad podemos suponer que los pesos son coprimos. Para construir $\mathbb{P}(d_0,d_1)$ tomamos una base de $\mathbb{Z}$ dada por $\{e_1\}$, los conos $\sigma_0=(-e_1)$ y $\sigma_1=e_1$ que generan el fan Δ visto en el reticulado $N=(1/d_0)(-e_1)\mathbb{Z}+(1/d_1)e_1\mathbb{Z}$. El reticulado dual a N esta dado por $M=(d_0d_1e_1^*)$, de modo que

$$\sigma_0\check{} = (-d_0 d_1 e_1^*) \qquad \sigma_1\check{} = (d_0 d_1 e_1^*)$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(d_0, d_1)$ esta cubierto por dos abiertos U_{σ_0} y U_{σ_1} isomorfos a $\mathbb{C}$ que se pegan en $\mathbb{C}^*$ de la misma manera que en la construccion de $\mathbb{P}^1$; graficamente

$$\mathbb{C} \simeq U_{\sigma_1} \longleftarrow\!\!\!\supset \mathbb{C}^* \subset\!\!\!\longrightarrow U_{\sigma_0} \simeq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}[y] \simeq \mathbb{C}[x^{d_0 d_1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[x^{d_0 d_1}, \tfrac{1}{x^{d_0 d_1}}] \hookleftarrow \mathbb{C}[\tfrac{1}{x^{d_0 d_1}}] \simeq \mathbb{C}[\tfrac{1}{y}]$$

$\diamondsuit$

4.5.3. Ejemplos

En [Dolg] se describe a $\mathbb{P}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{veces}}, d)$ como el cono sobre la variedad de Veronese $v_d(\mathbb{P}^n)$. El fan que describe a esta variedad proyectiva con pesos esta definido en el reticulado $N = \mathbb{Z}v_0 + \ldots + \mathbb{Z}v_{n-1} + \mathbb{Z}(1/d)v_n$, donde $v_i = e_i$, $v_0 = -e_1 - \ldots - e_n$ y el conjunto $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathbb{Z}^n$; donde el fan Δ esta generado por los conos $\sigma_i = (v_j, j \neq i, j = 0, \ldots, n)$. El reticulado dual M esta generado por los vectores $\{e_1^* \ldots, e_{n-1}^*, de_n^*\}$. Y los duales de los conos estan dados por

$$\begin{aligned}
\sigma_0\check{} &= (e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, de_n^*) \\
\sigma_i\check{} &= (-e_i^*, e_1^* - e_i^*, \ldots, e_{n-1}^* - e_i^*, de_n^* - de_i^*) \;\; i = 1, \ldots, n-1 \\
\sigma_n\check{} &= (-de_n^*, de_1^* - de_n^*, \ldots, de_{n-1}^* - de_n^*)
\end{aligned}$$

Observacion. Recordando lo dicho en 4.5.2, en esta caso podemos expresar los monomios que generan los anillos localizados de $\mathbb{C}[y_0, \ldots, y_n]$ como

$$\mathbb{C}^{\overline{d}}[y_0, \ldots, y_n]_{(y_i)} = \mathbb{C}[\frac{y_0}{y_i}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_i}, (\frac{y_n}{y_i})^d].$$

La dificultad es la misma en ambos casos, de cualquier manera el isomorfismo

$$\mathbb{C}[\frac{y_0}{y_i}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_i}, (\frac{y_n}{y_i})^d] \simeq \mathbb{C}[S_{\sigma_i}] = \mathbb{C}[\frac{1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_i}, (\frac{z_n}{z_i})^d]$$

es no trivial y similar al de 2.

Notemos $X = \mathbb{P}(1, \ldots, 1, d)$ y A al conjunto de todos los subconjuntos de $k+1$ elementos de $\{0, \ldots, n\}$. En base a 4.4.1, el grupo $A_k(X)$ esta generado por

$$A_k(X) = ([V(\sigma_\alpha)])_{\alpha \in A}$$

donde $\sigma_\alpha = \bigcap_{i \in \alpha} \sigma_i$.

En base a 4.4.3 y a la formula 4.4.2, las relaciones entre estos generadores estan dadas por los generadores de los conos de codimension $k+1$ en Δ. Notemos como B al conjunto de subconjuntos de k elementos de $\{0,\dots,n\}$ y $\tau_\beta = \bigcap_{j\in\beta}\sigma_i$. Para calcular $[\mathrm{div}(\chi^u)]$, con u un generador de τ_β vamos a considerar distintos casos:

- Si $0, n \notin \beta$, entonces $\tau_\beta = \tau = (v_0, v_k, v_n)$ con $k \in \beta^c = \{0,\dots,n\} \setminus \beta$. El reticulado $M(\tau)$ esta generado por los elementos $(e_{i_1}^* - e_{i_2}^*)$, con $i_1, i_2 \in \beta$, $i_1 < i_2$. Por otro lado τ es una cara de los conos $\sigma_{\beta\setminus\{i\}} := \eta_i$, y el generador de N_{η_i}/N_τ es claramente $n_{\eta_i} = e_i$. Por lo tanto, el divisor de χ^u se puede expresar como

$$\begin{aligned} [\mathrm{div}(\chi^u)] &= \sum < u, n_{\eta_i} > .[V(\eta_i)] \\ &= [V(\eta_{i_1})] - [V(\eta_{i_2})] \end{aligned} \tag{2}$$

- Si $0 \in \beta$ y $n \notin \beta$, entonces $\tau = (v_k, v_n)$ con $k \in \beta^c$. $M(\tau$ esta generado por (e_i^*), con $i \in \beta$. Las caras de τ estan dadas por conos η_i para $i \neq 0$ (con la notacion del item anterior) y $\sigma_{\beta\setminus\{0\}} := \eta_0$. Los divisores de $[\mathrm{div}(\chi^u)]$ estan dados por

$$[\mathrm{div}(\chi^u)] = [V(\eta_i)] - [V(\eta_0)] \tag{3}$$

- Si $0, n \in \beta$, entonces $\tau = (v_k)$ con $k \neq 0, n$. $M(\tau)$ esta generado por (e_i^*, de_n^*) para $i \in \beta, i \neq n$. Los conos para los cuales τ es una cara se deben a la inclusion de los vectores v_0, v_n o un v_i generico. Llamando $u_i = e_i^*$ y $u_n = de_n^*$ se tiene

$$\begin{aligned} [\mathrm{div}(\chi^{u_i})] &= [V(\eta_i)] - [V(\eta_0)] \\ [\mathrm{div}(\chi^{u_n})] &= d[V(\eta_n)] - d[V(\eta_0)] \end{aligned} \tag{4}$$

- Si $0 \notin \beta$ y $n \in \beta$, entonces $\tau = (v_0, v_i)$. $M(\tau)$ esta generado por $(e_{i_1}^* - e_{i_2}^*, de_n^* - de_i^*) = (u_{i_1,i_2}, u_{n,i})$. Los divisores son

$$\begin{aligned} [\mathrm{div}(\chi^{u_{i_1,i_2}})] &= [V(\eta_{i_1})] - [V(\eta_{i_2})] \\ [\mathrm{div}(\chi^{u_{n,i}})] &= d[V(\eta_n)] - d[V(\eta_i)] \end{aligned} \tag{5}$$

De la ecuacion 2 se obtiene que las clases de conos $[V(\sigma)]$ donde $v_0, v_n \in \sigma$ son todas iguales entre si. De 3 se ve que son todas iguales la clase de $[V(\sigma_0)]$ con $v_0 \notin \sigma$ y $v_n \in \sigma$. En base a 4 y 5, se tiene que la clase $d[V(\sigma_0)] = d[V(\sigma_n)]$ donde $v_n \notin \sigma_n$ sin importar si v_0 esta o no en σ.

Por lo tanto hay solo dos generadores en $A_k(X)$ que se igualan al multiplicarlos por d. Esto pasa para todas las dimensiones $k < n$. Para $k = n$ se tiene que $A_n(X) = \mathbb{Z}$ por ser irreducible.

Por lo tanto, el grupo de Chow de $\mathbb{P}(1,\dots,1,d)$ se puede expresar como

$$A(\mathbb{P}(1,\ldots,1,d)) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_d \bigoplus \mathbb{Z}.$$

El otro caso a considerar es el del espacio $X = \mathbb{P}(1, d_1, d_2)$ donde d_1 y d_2 son coprimos entre si. La construccion del fan y del reticulado es siempre la misma, de cualquier manera, en $\mathbb{Z}^2$, el fan Δ esta generado por los conos $\sigma_0 = (e_1, e_2)$, $\sigma_1 = (-e_1 - e_2, e_2)$ y $\sigma_2 = (-e_1 - e_2, e_1)$. El reticulado N esta definido por $\mathbb{Z}(-e_1 - e_2) + \mathbb{Z}(1/d_1)e_1 + \mathbb{Z}(1/d_2)e_2$ y su dual, M, generado por $(d_1e_1^*, d_2e_2^*)$.

Observacion. El cono dual $\check{\sigma_0}$ esta generado por $(d_1e_1^*, d_2e_2^*)$. Por lo tanto el anillo $\mathbb{C}[S_{\sigma_0}]$ esta dado por $\mathbb{C}[S_{\sigma_0}] =^[z_1^{d_1}, z_2^{d_2}]$. El anillo de funciones sobre $\mathbb{P}(1, d_1, d_2)$ es $\mathbb{C}[x_0, x_1^{d_1}, x_2^{d_2}]$ y su localizacion en x_0 esta dada por $\mathbb{C}[(\frac{x_1}{x_0})^{d_1}, (\frac{x_2}{x_0})^{d_2}]$. Por lo tanto el isomorfismo es evidente

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[S_{\sigma_0}] & \longrightarrow & \mathbb{C}[(\frac{x_1}{x_0})^{d_1}, (\frac{x_2}{x_0})^{d_2}] \\
z_1 & \longmapsto & \frac{x_1}{x_0} \\
z_2 & \longmapsto & \frac{x_2}{x_0}
\end{array}$$

Para los duales de los otros conos se tienen isomorfismos bajo la misma asignacion de z_1 y z_2, puesto que estos son los que generan M.

Tenemos que $A_0(X)$ esta generado por $[V(\sigma_i)]$ para $i = 0, 1, 2$. Las relaciones estan dadas por los conos de dimension 1 que son $\tau_0 = -e_1 - e_2$, $\tau_1 = e_1$ y $\tau_2 = e_2$, y los espacios duales a los espacios que generan son $M(\tau_0) = (u_0) = (-d_1e_1^* - d_2e_2^*)$, $M(\tau_1) = (u_1) = (d_2e_2^*)$ y $M(\tau_2) = (u_2) = (d_1e_1^*)$. Por lo tanto las relaciones entre los $[V(\sigma_i)]$ son

$$\begin{aligned}
[\mathrm{div}(\chi^{u_0})] &= d_1d_2[V(\sigma_1)] - d_1d_2[V(\sigma_2)] \\
[\mathrm{div}(\chi^{u_1})] &= d_2[V(\sigma_0)] - d_2[V(\sigma_2)] \\
[\mathrm{div}(\chi^{u_2})] &= d_1[V(\sigma_0)] - d_1[V(\sigma_1)]
\end{aligned} \tag{6}$$

Para $A_1(X)$ los generadores son $[V(\tau_j)]$ para $j = 0, 1, 2$ y el espacio M sabemos que esta generado por $w_1 = d_1e_1^*$ y $w_2 = d_2e_2^*$. Por lo tanto las relaciones estan dadas por

$$\begin{aligned}
[\mathrm{div}(\chi^{w_1})] &= d_1[V(\tau_1)] - d_1[V(\tau_0)] \\
[\mathrm{div}(\chi^{w_2})] &= d_2[V(\tau_2)] - d_2[V(\tau_0)]
\end{aligned} \tag{7}$$

En ambos casos $A_0(X)$ y $A_1(X)$ tienen 3 generadores sujetos a las mismas relaciones. Eligiendo uno de esos grupos llamemos a los generadores V_0, V_1 y V_2, de forma tal que esten relacionados por $d_1V_1 - d_1V_0$ y $d_2V_2 - d_2V_0$. Tomando los elementos $V_0, V_1 - V_0, V_2 - V_0$ resulta evidente que la torsion en esos dos grupos esta generada por los elementos $V_1 - V_0$ y $V_2 - V_0$ y es $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2}$ y los grupos tienen rango 1.

Por ultimo, $A_2(X)$ como siempre es $\mathbb{Z}$. Por lo tanto el grupo de Chow de X se puede escribir como

$$A(\mathbb{P}(1, d_1, d_2)) = \bigoplus_{i=1,2} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \bigoplus \mathbb{Z}.$$

5. Apendice

A lo largo del apendice vamos a considerar, a menos que se explicite otra cosa, anillos conmutativos y noetherianos y modulos finitamente generados.

5.1. Longitud, altura, dimension

5.1.1 Definicion. Sea $M \in A$-mod. definimos la longitud de M en A, $\ell_A(M)$ como el supremo de las cadenas de submodulos de M estrictamente crecientes. Esto es equivalente a calcular la longitud de una cadena creciente de submodulos de M donde los cocientes sucesivos sean A modulos simples

5.1.2 Propiedad. Si k es un cuerpo, A es un anillo local conmutativo que es una k-algebra finitamente generada, entonces vale que $\ell_A(M) = \dim_k(M)$, donde la dimension de M se calcula como k-espacio vectorial.

5.1.3 Propiedad. Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ una sucesion exacta de A-mod. Entonces $\ell_A(M) = \ell_A(M') + \ell_A(M'')$, i.e., la longitud es una funcion aditiva en A-mod.

Demostracion. Tomando $0 = M'_0 \subset \ldots \subset M'_r = M'$ y $0 = M''_0 \subset \ldots \subset M''_s = M''$ cadenas maximales en M' y M'' se tiene que

$$0 = f(M'_0) \subset \ldots \subset f(M'_r) = g^{-1}(0) \subset \ldots \subset g^{-1}(M''_s) = M$$

es una cadena maximal en M. ♡

5.1.4 Definicion. Si I es un ideal de A, vamos a decir la que la altura de I, $\mathrm{ht}(I)$ es el supremo de las longitudes de cadenas de primos contenidas en I.

5.1.5 Definicion. Vamos a decir que la dimension de Krull de A, $\dim(A) = n$ si A como ideal tiene altura n.

5.1.6 Definicion. Si $M \in A$-mod vamos a decir que M tiene dimension r si $\dim(\mathrm{ann}(M)) = r$.

5.1.7 Teorema. Sea A una anillo integro que es una k-algebra finitamente generada con k algebraicamente cerrado. Para todo ideal primo p se tiene, ver [A-M]:

$$\mathrm{ht}(p) + \dim(A_p) = \dim(A)$$

5.1.8 Definicion. Si X es un espacio topologico, vamos a decir que un cerrado F es irreducible si cada vez que $F = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_2 cerrados, entonces $F_1 = F$ o $F_2 = F$

5.1.9 Definicion. Si X es un espacio topologico, la dimension de X es el supremo de las longitudes de cadenas de cerrados irreducibles.

5.1.10 Propiedad. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, con A un anillo, entonces $\dim(A/p) = \dim(W(p))$, donde la primera dimension es la dimension de Krull y la segunda la dimension topologica.

5.1.11 Definicion. Si $F \subset X$ es un cerrado, vamos a llamar componentes irreducibles de F a los cerrados irreducibles maximales contenidos en F.

5.2. Descomposicion primaria

5.2.1 Definicion. Sea A un anillo, $p \subset A$ un ideal primo y $M \in A$-mod. Vamos a decir que M es p-coprimario si $\sqrt{\operatorname{ann}(M)} = p$.

Si $N \subset M$ es un submodulo, vamos a decir que N es p-primario si M/N es p-coprimario.

5.2.2 Teorema. Si $N \subset M$ es un submodulo no primario, entonces $\exists\ N', N'' \supsetneq N$ tales que $N = N' \cap N''$.

5.2.3 Corolario. Si N es un submodulo no primario, entonces existen $N_1, \ldots, N_r$ submodulos $p_1, \ldots, p_r$-primarios, respectivamente, tales que $N = \bigcap_i N_i$.

5.2.4 Definicion. Sea N un submodulo de M, vamos a llamar descomposicion reducida de N a un conjunto de submodulos de M, $N_1, \ldots, N_r$ tales que:

1. $N = \bigcap N_i$
2. $N \neq \bigcap_{i \neq j} N_i$, para cualquier $j \in \{1, \ldots, r\}$
3. N_i es p_i-primario
4. $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$

5.2.5 Definicion. El conjunto de primos $\{p_1, \ldots, p_r\}$ de una descomposicion reducida no dependen de la descomposicion y se llaman primos esenciales de N en M. Si $N = 0$ los primos se llaman primos asociados y se nota $\operatorname{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Al conjunto de primos minimales de los primos asociados lo notamos $\operatorname{Ass}^m(M)$, y si $\operatorname{Ass}^m(M) = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}\}$, entonces los submodulos de la descomposicion reducida N_{i_j} asociados a esos primos verifican $N_{i_j} = M_{p_{i_j}}$.

5.2.6 Propiedad. Los primos asociados minimales de M coinciden con los primos esenciales del ideal $\sqrt{\operatorname{ann}(M)}$ de A y son los primos asociados a las componentes irreducibles de $V(M) \subset \operatorname{Spec}(A)$. 5.1.11

5.2.7 Propiedad. $\forall p \in \operatorname{Ass}(M)$ existe un $x \in M$ tal que $p = \operatorname{ann}(x)$.

5.2.8 Corolario. $\bigcup_{p \in \operatorname{Ass}(M)} p = \{a \in A / \ a.m = 0, \text{ para algun } m \in M\}$

5.2.9 Teorema. Sea M es un A-mod, entonces existe una cadena creciente de submodulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M \qquad \text{donde} \qquad M_{i+1}/M_i \simeq A/q_i$$

con q_i ideal primo de A.

Se tiene que $\operatorname{Ass}^m(M)$ son los primos minimales del conjunto $\{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$. Y que si $p \in \operatorname{Ass}^m(M)$, entonces $\ell_{A_p}(M_p)$ es igual a la cantidad de veces que aparece p en el conjunto $\{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$.

5.2.10 Propiedad. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. p es un primo esencial de $N \subset M$
2. $M_p \neq 0$
3. $\text{ann}(M) \subset p$
4. $\exists q \in \text{Ass}(M)$ tal que $q \subset p$

5.2.11 Propiedad. M admite una unica descomposicion, finita, como $M = \bigoplus M_i$, donde $\bigcup V(M_i) = V(M)$, $V(M_i)$ son las componentes conexas de $V(M)$ y $\text{ann}(M_i) + \text{ann}(M_j) = A$ si $i \neq j$.

5.2.12 Definicion. Definimos la variedad asociada a un modulo M como

$$V(M) = \{p \in \text{Spec}(A) | \text{ann}(M) \subset p\} = \{p | M_p \neq 0\}$$

5.2.13 Propiedad. Los primos minimales de $V(M)$ coinciden con $\text{Ass}(M)^m$.

5.2.14 Propiedad. Se tiene que si $T_i = V(M)^c = \text{Spec}(A) \backslash V(M_i)$, entonces $M_i \simeq T_i^{-1}.M$ como A-mod.

5.2.15 Propiedad. M es un A modulo de longitud finita si y solo si $V(M)$ esta formada solo de ideales maximales de A.

5.3. Polinomios de Hilbert

Sea $X = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} /\ f \text{ funcion}\}$ y sea $P = \{f \in X /\ \exists p \in \mathbb{Q}[x]$ que verifica $p(n) = f(n), \forall n >> 0\}$. Dada una $f \in X$ se define $\Delta f \in X$ como la funcion $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Son equivalentes:

1. $f \in P$
2. $\Delta f \in P$
3. $\exists r \in \mathbb{Z} /\ \Delta^r f = 0$

Utilizando la formula del binomio de Newton tenemos que $\max_s\{\Delta^s f \neq 0\} =$ grado de f, y si $\Delta^s f = \text{e}$ entonces $f = \frac{\text{e}}{s!} n^s +$ terminos de menor grado. Dados $f, g \in X$, vamos a decir que $f \sim g$ si $f(n) = g(n) \forall n >> 0$.

5.3.1 Definicion. Vamos a decir que $f \in X$ es una funcion polinomial si existe $p \in P$ tal que $f \sim p$

Sea H un anillo graduado, $H = \bigoplus H_n$ tal que H_0 tiene longitud finita y H esta generado por H_0 y un numero finito de elementos de H_1. Sea $M = \bigoplus M_n$ un modulo graduado sobre H de tipo finito.

Bajo estas hipotesis tenemos que $H \simeq H_0[x_1, \ldots, x_r]/I$, donde I es un ideal homogeneo, y los M_n tienen longitud finita sobre H_0.

Ejemplo. El ejemplo canonico de esta situacion es $H = k[x_0, \ldots, x_r]$ y $M = H/I$ con I homogeneo; es decir, una subvariedad de una variedad proyectiva.

5.3.2 Teorema. (Teorema de Hilbert) La funcion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \ell_{H_0}(M_n) \end{array}$$

es polinomial y su polinomio asociado tiene grado $\leq r$.

5.3.3 Definicion. Vamos a decir que el polinomio asociado a la funcion anterior es el polinomio de Hilbert de M y lo vamos a notar $P_M(n)$.

5.3.4 Definicion. Sea $M \in A$-mod y sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una filtracion decreciente de M. Dado un ideal $q \subset A$, tal que $q.M_n \subset M_{n+1}$, vamos a decir que la filtracion es q-buena si verifica alguna de las 3 propiedades equivalentes:

1. $M_{n+1} = q.M_n$, para $n >> 0$
2. $\exists m /\ M_{m+k} = q^k.M_m$, para $k \geq 0$
3. $Gr(M) \in Gr(A)$-mod de tipo finito

donde $Gr(M)$ es el graduado asociado a la filtracion $\{M_n\}$, que se define como $Gr(M) = \bigoplus M_n/M_{n+1}$; y $Gr(A)$ es el graduado asociado a la filtracion $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sea $M \in A$-mod y q un ideal de A de forma tal que $\ell_A(M/q.M) < \infty$, es decir, que $V(M) \cap W(q) \subset \operatorname{Spec}^m(A)$. Como $W(q^n) = W(q)$ tenemos que $\ell_A(M/q^n.M) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, si se tiene $\{M_n\}$ una filtracion q-buena, entonces $q^n.M \subset M_n$ y $M/M_n \hookrightarrow M/(q^n.M)$. Por lo tanto $V(M/M_n) \subset V(M/(q^n.M))$ y $V(M/(q^n.M)) = V(M) \cap W(q^n) = V(M) \cap W(q)$, entonces

$$\ell_A(M/M_n) < \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

5.3.5 Teorema. (Teorema de Samuel) Con las hipotesis anteriores, se tiene que las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \ell_A(M/M_n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \ell_{\mathrm{Gr}(A)}(M_n/M_{n+1}) \end{array}$$

son funciones polinomiales y F es la integral de f (el anillo $\mathrm{Gr}(A)$ se obtiene en base a la friltracion dada por le anulador de M).

Demostracion. Que f es una funcion polinomial esta claro por el teorema de Hilbert. Solo resta probar que una funcion es la integral de la otra y se tiene, entones, que F tambien es polinomial.

Llamemos $P_F(n), P_f(n) \in \mathbb{Q}[n]$ los polinomios que se relacionan con f y F. Tenemos que, para $n >> 0$,

$$\Delta P_F(M, n) = \ell_A(M/M_n) - \ell_A(M/M_{n+1}) = \ell_A(M_n/M_{n+1}) = P_f(n)$$

por lo tanto, $P_F(M, n) = \int_0^n P_f(M, k)dk$. ♣

Observacion. En nuestro caso tenemos que la filtracion $\{M_n\}$es q-buena. Tomemos la filtracion $\{q^n.M\}$ y sea $P_q(M,n)$ el polinomio de Hilbert asociado a esa filtracion. A partir de un n_0 tenemos que

$$q^{n_0+m}.M \subset M_{n_0+m} = q^m.M_{n_0} \subset q^m.M \subset M_m$$

y entonces podemos decir que

$$P_q(M,m+n_0) \geq P_f(M,m+n_0) \geq P_q(M,m) \geq P_f(M,m)$$

lo que implica que $P_q(M,n) = P_f(M,n) + R(n)$, donde $R(n)$ tiene coeficiente principal positivo y grado estrictamente menor que $P_q(M)$ (puesto que el n_0 esta fijo).

En base a la descomposicion en componentes irreducibles de una subvariedad tenemos que

5.3.6 Propiedad. Sea $V(M) \cap W(q) = \{m_1, \ldots, m_l\}$ con todos ideales maximales, es decir que $\ell_A(M/q.M) < \infty$. Entonces $P_q(M,n) = \sum P_{q_{m_i}}(M_{m_i}, n)$.

5.4. Algebra exterior y complejo de Koszul

Sea $M \in A$-mod. Definimos el algebra tensorial de M como

$$T(M) = \bigoplus M^{\otimes n} \quad \text{donde} \quad M^{\otimes 0} = A \text{ y } M^{\otimes n} = M \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{n \text{ veces}} M$$

Sea $N \subset T(M)$ el submodulo graduado generado por los elementos $(x \otimes x)_{\{x \in M\}}$. El modulo cociente se llama el algebra exterior de M y se nota $\bigwedge(M) = \bigoplus M^{\wedge n}$; la clase de un tensor elemental $x \otimes y$ se nota $x \wedge y$. Notar que los elementos de la forma $x \otimes y + y \otimes x \in N$.

Si $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in M^{\wedge n}$ y si σ es una permutacion del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ entonces $x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma).x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$, donde $\mathrm{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutacion; en particular, $x \wedge y = -y \wedge x$. Y si se tiene que $x_i = x_j$ con $i \neq j$ entonces $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$.

Sea M sea un modulo libro de rango n y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base. Para $1 \leq n$ tenemos que los elementos de la forma $e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_l}$, con $i_1 < \ldots i_l$, forman una base de $M^{\wedge l}$. Por lo tanto:

1. $M^{\wedge 0} = M^{\wedge n} = A$
2. $M^{\wedge k} = 0$, para todo $k \geq 0$.
3. $\dim(M^{\wedge l}) = \binom{n}{l}$

Observacion. Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz de $n \times n$ con coeficientes en un anillo A. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica de $A^n \in A$-mod. Resulta que

$$\big(a_{1,1}e_1 + \ldots + a_{1,n}e_n\big) \wedge \ldots \wedge \big(a_{n,1}e_1 + \ldots + a_{n,n}e_n\big) = det(A).e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in (A^n)^{\wedge n}$$

Esta ultima observacion se debe a la propiedad universal que verifica el algebra exterior para factorizar aplicaciones multilineales y alternadas; similar a la que verifica el tensor para aplicaciones multilineales. Queda a cargo del lector escribir los triangulitos conmutativos correspondientes.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in A$. Tiene sentido considerar el elemento $\overline{f} = f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in (A^n)^{\wedge 1}$ y definir la aplicacion de multiplicacion por $\overline{f}$

$$(A^n)^{\wedge l-1} \xrightarrow{.\overline{f}} (A^n)^{\wedge l}$$

Teniendo en cuenta que el dual del algebra exterior $(A^n)^{\wedge l}$, es

$$\mathrm{Hom}((A^n)^{\wedge l}, A) \simeq (A^n)^{\wedge (n-l)}$$

tenemos que la aplicacion dual a $\wedge \overline{f}$ esta definida como

$$\begin{array}{rcl} (A^n)^{\wedge l} & \xrightarrow{\overline{f}^*} & (A^n)^{\wedge l-1} \\ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} & \longmapsto & \sum (-1)^k f_{i_k} . e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \end{array}$$

5.4.1 Definicion. Con las hipotesis anteriores definimos el complejo de Koszul de A en el conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ como el complejo $(K_\bullet(\overline{f}), d)$, donde $K_l(\overline{f}) = (A^n)^{\wedge (l)}$ y el diferencial es la multiplicacion por $\overline{f}^*$.

De la misma manera, para $M \in A$-mod definimos el complejo de Koszul de M en $\{f_1, \ldots, f_n\}$ como $K_l(\overline{f}, M) = (M^n)^{\wedge l}$ y el diferencial la multiplicacion por $\overline{f}^*$.

$$(M^n)^{\wedge l} \xrightarrow{\overline{f}^*} (M^n)^{\wedge (l-1)}$$

Es facil calcular el primer y ultimo grupo de homologia para los que se tiene:

$$H_n(K_\bullet(\overline{f})) = \mathrm{ann}((f_1, \ldots, f_n))$$
$$H_0(K_\bullet(\overline{f})) = A/(f_1, \ldots, f_n)$$

5.4.2 Teorema. Sea $M \in A$-mod de tipo finito y sea $\overline{f} = (f_1, \ldots, f_n) \subset r(A)$. Son equivalentes:

1. $H_k(K_\bullet(\overline{f}, M)) = 0, \forall k \geq 1$
2. $H_1(K_\bullet(\overline{f}, M)) = 0$
3. $\overline{f}$ es una sucesion M-regular.

Demostracion. [Serre].♠

5.5. Funciones aditivias

Sea $\mathcal{Ab}$ una categoria abeliana, vamos a notar de manera indistinta a la categoria abeliana $\mathcal{Ab}$ y al conjunto (si es que es un conjunto) que se obtiene al identificar los objetos isomorfos. Sea $(G, +)$ un grupo, a una funcion $\mathcal{Ab} \xrightarrow{\lambda} G$ la vamos a llamar una funcino aditiva si para todo sucesion exacta corta

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{Ab}$ se tiene que

$$\lambda(C') - \lambda(C) + \lambda(C'') = 0$$

Ejemplo. La dimension en la categoria de k-espacios vectoriales es claramente una funcion aditiva en base al teorema de la dimension.

Ejemplo. La longitud en la categoria de A-modulos es una funcion aditiva como se vio en 5.1.3

Ejemplo. El coeficiente principal de un polinomio de Hilbert multiplicado por el factorial del grado, ver [Serre], es una funcion aditiva; y, por lo tanto, la multiplicidad de interseccion es una funcion aditiva

Sea $M \in A$-mod y sea $\{M_n\}$ una filtracion finita decreciente de M tal que

$$M = M_0 \subset \ldots \subset M_N = 0$$

Sea $\mathrm{Gr}(M) = \bigoplus M_n/M_{n+1}$ el graduado asociado a M y sea λ es una funcion aditiva. En base a la filtracion se tienen sucesiones exactas cortas del tipo

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow M_n \longrightarrow M_n/M_{n+1} \longrightarrow 0$$

de las que se obtiene que $\lambda(M_n/M_{n+1}) = \lambda(M_n) - \lambda(M_{n+1})$. Por lo tanto la funcion aditiva en el graduado asociado es

$$\lambda(\mathrm{Gr}(M)) = \sum_n \lambda(M_n) - \lambda(M_{n+1}) = \lambda(M_0) - \lambda(M_N) = \lambda(M)$$

Sea $C = (C^\bullet, d)$ un complejo en $\mathcal{Ab}$ y sea $H^\bullet(C)$ su homologia. En base a las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n) \longrightarrow C^n \longrightarrow \mathrm{Im}(d^n) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$\lambda(C^n) = \lambda(\mathrm{Im}(d^n)) + \lambda(\mathrm{Ker}(d^n)) \quad \text{y} \quad \lambda(H^n(C)) = \lambda(\mathrm{Ker}(d^n)) - \lambda(\mathrm{Im}(d^{n-1}))$$

Si se calcula la diferencia $\lambda(C^{n+1}) - \lambda(C^n)$ resulta

$$\begin{aligned}\lambda(C^{n+1}) - \lambda(C^n) &= \lambda(\mathrm{Im}(d^{n+1})) + \lambda(\mathrm{Ker}(d^{n+1})) - \lambda(\mathrm{Im}(d^n)) - \lambda(\mathrm{Ker}(d^n)) = \\ &= \mathrm{Im}(d^{n+1}) + \lambda(H^n(C)) - \mathrm{Ker}(d^n)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la funcion λ se extiende de manera natural los complejos de $\mathcal{Ab}$ en base a la formula

$$\overline{\lambda}(C^\bullet) = \sum(-1)^i\lambda(C^i)$$

y vale

$$\overline{\lambda}(C^\bullet) = \overline{\lambda}(H^\bullet(C)).$$

5.6. f_* y f^*

Sea $f : X \to Y$ una funcion continua de espacios topologicos y sean $\mathscr{F} \in \mathcal{Sh}(X)$ y $\mathscr{G} \in \mathcal{Sh}(Y)$, haces sobre X e Y. Vamos a definir dos aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Sh}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{Sh}(Y) \\ \mathscr{F} & \longmapsto & f_*(\mathscr{F}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Sh}(Y) & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathcal{Sh}(X) \\ \mathscr{G} & \longmapsto & f^{-1}(\mathscr{G}) \end{array}$$

de la siguiente manera

- en un abierto $V \subset Y$ definimos $f_*(\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$
- en un abierto $U \subset X$ definimos $f^{-1}(\mathscr{G})(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$

Si $Z \subset X$ y $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es la inclusion, entonces para todo haz $\mathscr{F}$ sobre X se tiene que $i^{-1}(\mathscr{F})$ es la restriccion de $\mathscr{F}$ a Z. Usualmente se notara como $\mathscr{F}|_Z$.

Si, ademas, Z es un cerrado de X y $\mathscr{H} \in \mathcal{Sh}(Z)$ entonces tenemos que $i_*(\mathscr{H}) \in \mathcal{Sh}(X)$ y $\forall p \in X$ se tiene que

$$\begin{array}{ll} i_*(\mathscr{H})_p = \mathscr{H}_p & \text{si } p \in Z \\ i_*(\mathscr{H})_p = 0 & \text{si } p \notin Z \end{array}$$

por lo tanto, vamos a llamar a $i_*(\mathscr{H})$ la extension por zero de $\mathscr{H}$ a X y, en general, se notara simplemente por $\mathscr{H}$.

Se tiene que f^{-1} es una adjunta a izquierda de f_*, es decir que hay una biyeccion entre los conjuntos

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

Sea $(f, f^\sharp) : X \to Y$ un morfismo de esquemas y sean $\widetilde{M} \in X$-mod y $\widetilde{N} \in Y$-mod. Entonces $f_*\widetilde{M} \in f_*\mathscr{O}_X$-mod. Como tenemos un morfismo $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$, entonces $f_*\widetilde{M} \in \mathscr{O}_Y$-mod, por lo tanto, tenemos definida una aplicacion

$$X\text{-mod} \xrightarrow{f_*} Y\text{-mod}$$

Por otro lado, $f^{-1}\widetilde{N} \in f^{-1}\mathscr{O}_Y$-mod y, nuevamente, por la aplicacion $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ y por la adjuncion indicada mas arriba se tiene alguna aplicacion $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$. Por lo tanto, si consideramos $f^{-1}\widetilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X \in X$-mod tenemos definida otra aplicacion

$$Y\text{-mod} \xrightarrow{f^*} X\text{-mod}$$

que, al igual que en el caso anterior, se verifica que f^* es adjunta a izquierda de f_*.

5.6.1 Definicion. Sea $\mathscr{F}$ un prehaz sobre X, y sea $p \in X$. Vamos a llamar stalk de $\mathscr{F}$ en p, $\mathscr{F}_p$ al colimite de los objetos $\mathscr{F}(U)$ para todo abierto U entorno de p via los morfismos de restriccion $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ si $V \subset U$,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathscr{F}(U) \arrow[dr] & \\
\vdots & \varinjlim \mathscr{F}(U) := \mathscr{F}_p \\
\mathscr{F}(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Referencias

[M-L] Mac-Laurin - Geometria Organica - 1720 9

[Eul] Euler - Academia de Berlin - 1748 9

[Bez] Bezout - Theorie generale des equations algebriques - Paris 1779 9

[Enriq] F. Enriques - Lezioni sulla teoria geometrica delle equazione e sulle funzioni algebriche. Volume I, pag. 244 - 1915 9, 12

[Sam] Samuel P. - Methodes d'algebre abstraite en geometrie algebrique, p. 83 30A951), 159-274 9, 17

[Pon] Poncelet J. V. - Traite des proprieles projeclives desfigures, 1822, Gauthier-Villars, Paris, 1865 9

[Mac] Macaulay F. S. - Algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts Math., Cambridge Univ. Press, 1916 9

[Chevall1] Chevalley C. - Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. Math Soc. 57 A9451 1-85 9

[Serre] J.-P. Serre, Algebre locale. Multiplicites, Springer Lecture Notes in Mathematics, 11 (1965) 9, 21, 30, 33, 66, 67

[Ful1] W. Fulton, Algebraic Curves. pag. 74. 14

[Ful2] W. Fulton, Intersection Theory. A2.6 14, 35

[A-M] Atiyah, Macdonald. Introduction to commutative algebra. 1. ch. 11 30, 61

[Mat] H. Matsumura. Commutative ring theory. 19

[Car-Eil] Cartan, Eilenberg. Homological Algebra IX 2.8 22

[Hart] Algebraic Geometry - Robin Hartshorne 25, 26, 29

[EGA IV, 20.1.8] EGA - A. Grothendieck 32

[EGA IV, 13.1.1] EGA - A. Grothendieck 30

[EGA III, 4.4.2] EGA - A. Grothendieck 28

[EGA II, 2.4] EGA - A. Grothendieck 52

[Cheval2] Chevalley, Anneaux de Chow et applications. 33, 35

[Aus-Buch] On the purity of the branch locus. Amer. J. Math 1962

[Dan] V.I. Danilov. The Geometry of Toric Varieties. Uspekhi Mat. Nauk 33:2, 1978. 45

[K-K-M-B] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat. Toroidal embeddings. I, Lectures notes in mathematics. 339 (1973) 38

[F-McP-S-S] W. Fulton, R. MacPherson, F. Sottile and B. Sturmfels: Intersection theory on spherical varieties, Journal of Algebraic Geometry, 7, 49

[Dolg] I. Dolgachev - Weighted Projective Varieties. 57