Matematické metody v kartografii

Přednáška 3.

Důležité křivky na kouli a elipsoidu.

Loxodroma a ortodroma.

1. Přehled důležitých křivek

V matematické kartografii existují důležité křivky, které jdou po povrchu referenční plochy.

Mají využití při navigaci, námořní či letecké dopravě.

Ve vybraných kartografických zobrazeních se zobrazují jako přímky, tato zobrazení používána v minulosti pro námořní navigaci.

Ve vybraných kartografických zobrazeních se zobrazují jako úsečky, přímky, či polopřímky.

Křivky:

- Geodetická křivka (elipsoid)
- Ortodroma (koule->GČ)
- Loxodroma

2. Loxodroma

Vlastnosti:

- Křivka, která protíná poledníky pod konstantním azimutem A.
- Délka l=∞.
- Není nejkratší spojnicí dvou bodů na referenční ploše (s výjimkou rovníku).
- Spirálovitě se blíží k severnímu/jižnímu pólu, kterého však nikdy nedosáhne.
- V kartografických zobrazeních se zobrazuje jako obecná křivka.
- V Mercatorově zobrazení se zobrazí jako úsečka => použití pro námořní navigaci.

Využití: letecká, námořní doprava (dnes při navigaci používán GPS)

Pro: A=0 -> loxodroma splývá s poledníkem
A=90 -> loxodroma splývá s rovnoběžkou

3. Loxodroma, znázornění

Počáteční bod loxodromy … P_1
Koncový bod loxodromy … P_2
Azimut loxodromy … A
Délka loxodromy… dl

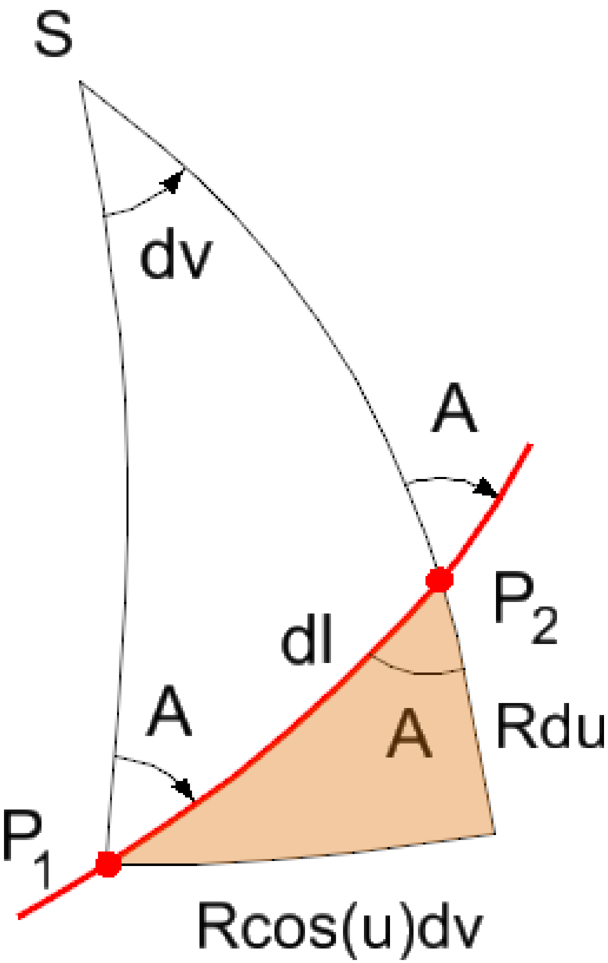
Výchozí podmínka: $tgA = \dfrac{R\cos(u)dv}{Rdu}$

Řešení separací proměnných:

$$dv = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos u} du$$

$$\boxed{v = \ln(\operatorname{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}))tgA + k}$$

k … integrační konstanta



4. Loxodroma, odvození

Určení integrační konstanty ***k***:

Podmínka: loxodroma prochází body $P_1=[u_1,v_1]$ a $P_2=[u_2,v_2]$.

$$k = v_2 - \ln(\mathrm{tg}(\frac{u_2}{2}+\frac{\pi}{4}))\,\mathrm{tg}\,A$$

Po dosazení:

$$\boxed{v_2 - v_1 = \rho(\ln(\mathrm{tg}(\frac{u_2}{2}+\frac{\pi}{4})) - \ln(\mathrm{tg}(\frac{u_1}{2}+\frac{\pi}{4})))\,\mathrm{tg}\,A}$$

Délka loxodromy: $dl = \dfrac{Rdu}{\cos A}$

$$l = R\frac{(u_2-u_1)}{\cos A}\rho$$

$$l = R\cos u\,\frac{(v_2-v_1)}{\rho}$$ …loxodroma totožná s rovnoběžkou

5. Výpočet bodů na loxodromě

2 varianty zadání:

- Zadáno $P_1[u_1, v_1]$, $P_2[u_2, ?]$, hledáme: v_2, l

$$\boxed{v_2 = v_1 + \rho(\ln(\mathrm{tg}(\frac{u_2}{2} + \frac{\pi}{4})) - \ln(\mathrm{tg}(\frac{u_1}{2} + \frac{\pi}{4})))\,\mathrm{tg}\,A}$$

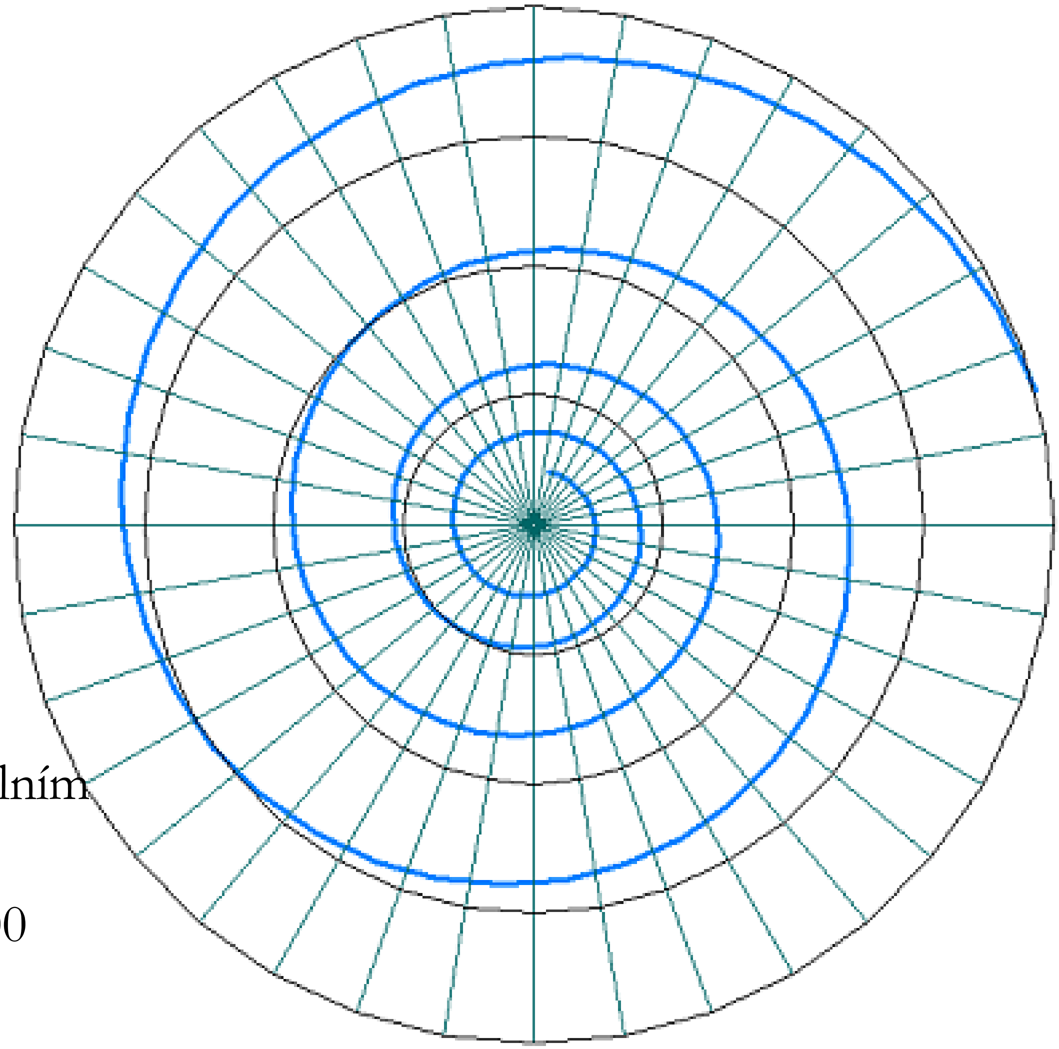
- Zadáno $P_1[u_1, v_1]$, $P_2[?, v_2]$, hledáme : u_2,l

$$\frac{v_2 - v_1}{\rho\,\mathrm{tg}\,A} = \ln\frac{tg(\frac{u_2}{2} + \frac{\pi}{4})}{tg(\frac{u_1}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$tg(\frac{u_1}{2} + \frac{\pi}{4})e^{\frac{v_2 - v_1}{\rho\,\mathrm{tg}\,A}} = tg(\frac{u_2}{2} + \frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{u_2 = 2\,\mathrm{arctg}(tg(\frac{u_1}{2} + \frac{\pi}{4})e^{\frac{v_2 - v_1}{\rho\,\mathrm{tg}\,A}}) - \frac{\pi}{2}}$$

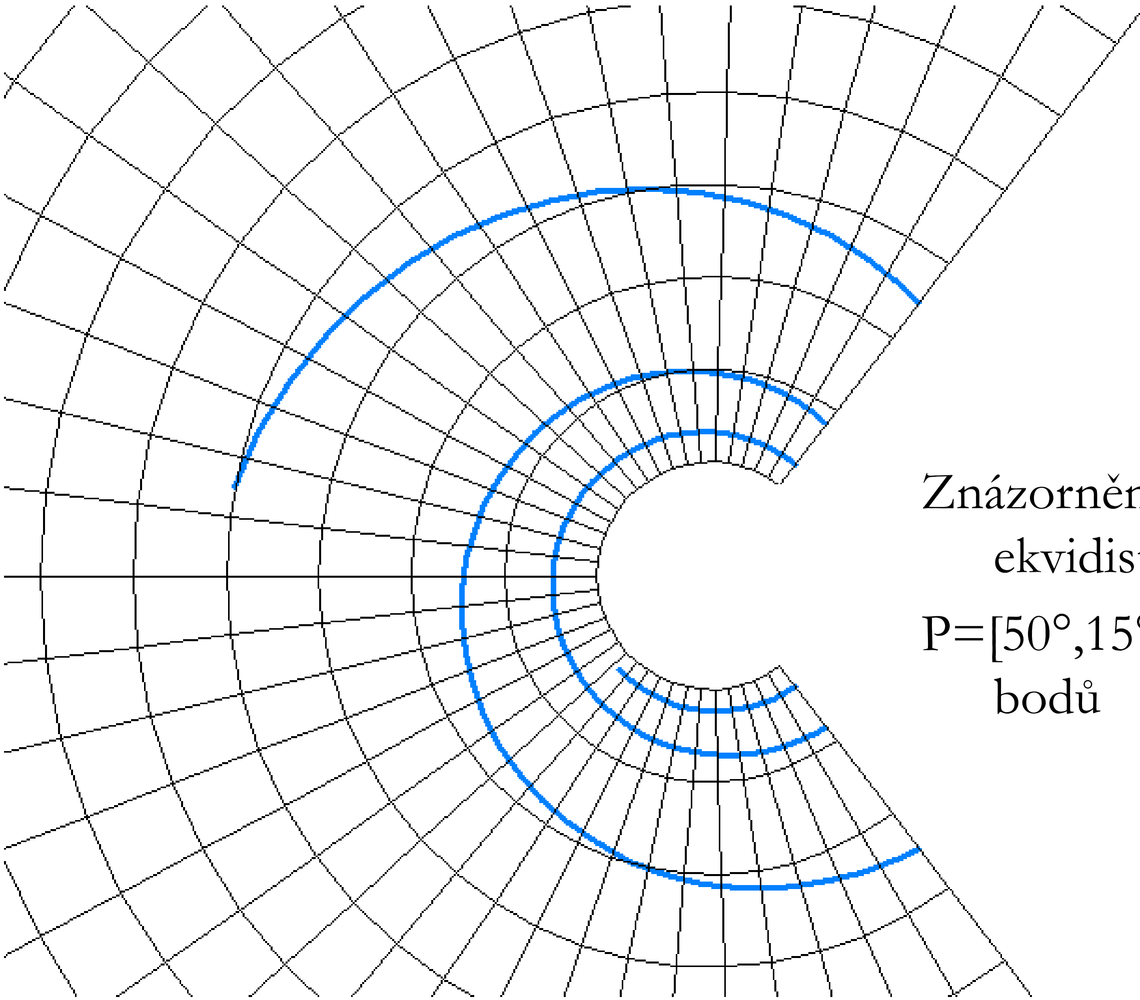
6. Loxodroma (azimutální zobrazení)



Znázornění loxodromy v azimutálním ekvidistantním zobrazení:

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°, 1000 bodů

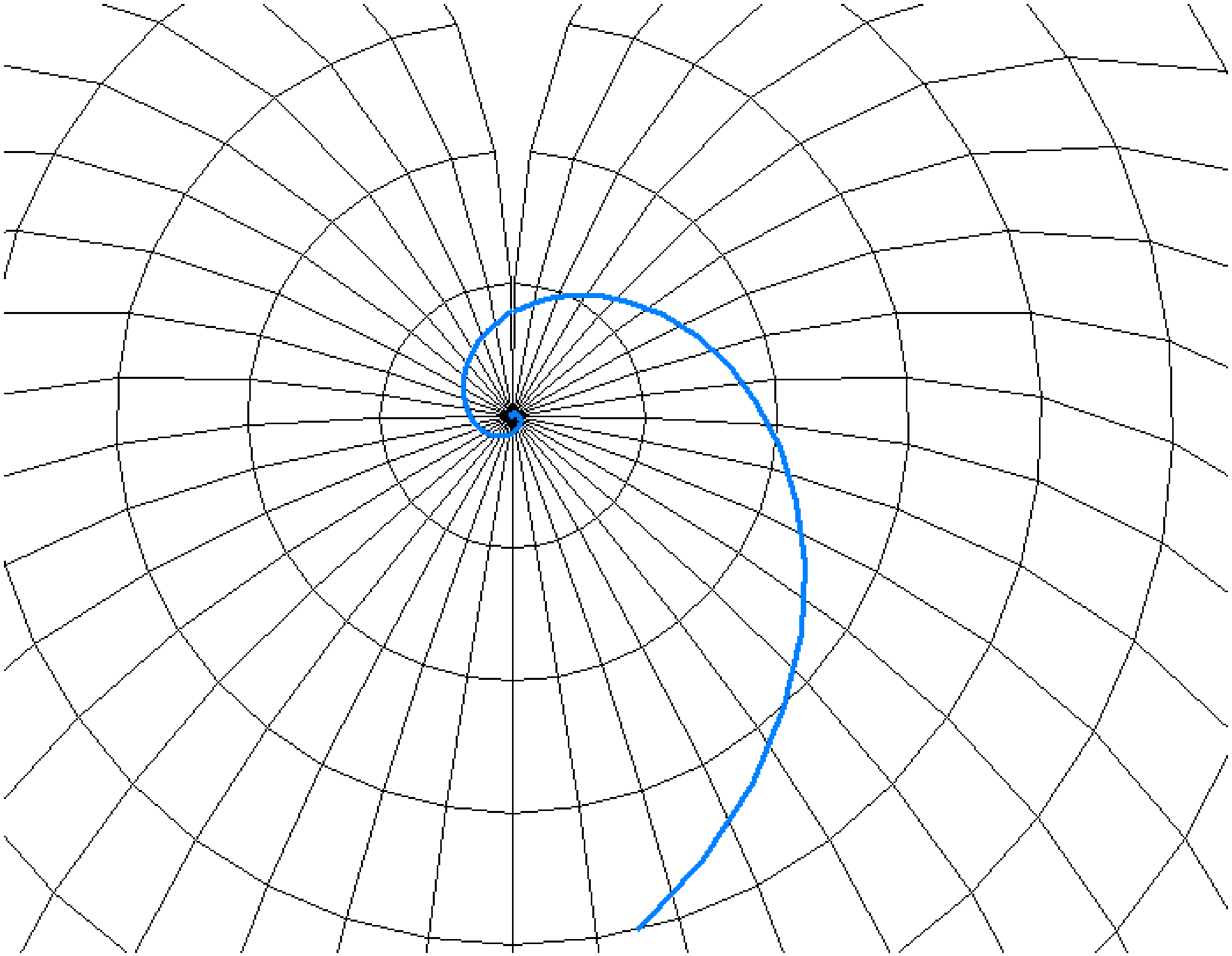
7. Loxodroma (kuželové zobrazení)



Znázornění loxodromy v kuželovém ekvidistantním zobrazení:

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°, 1000 bodů

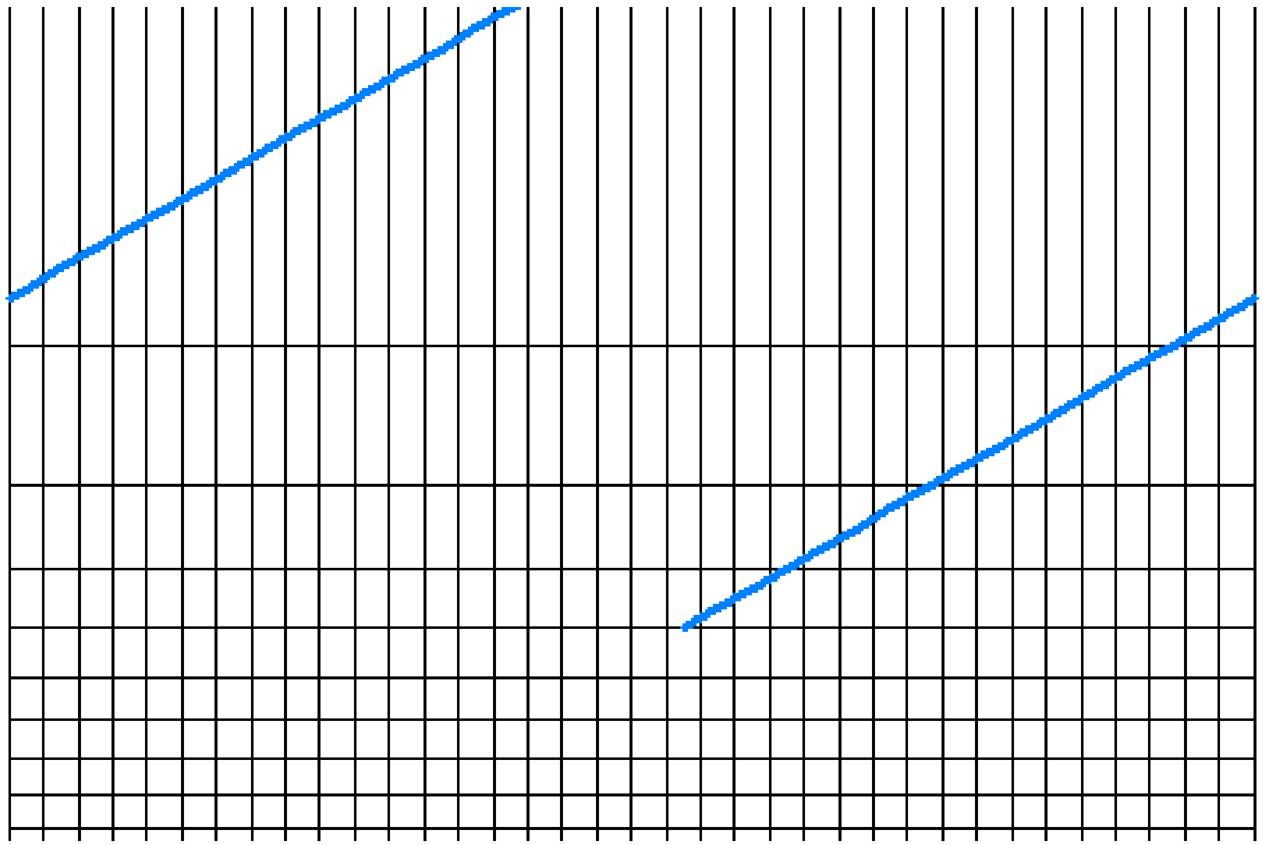
8. Loxodroma (Werner-Staabovo zobrazení)



Znázornění loxodromy v nepravém zobrazení: Werner-Staabovo

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°, 1000 bodů

9. Loxodroma (Mercatorovo zobrazení)



Znázornění loxodromy v Mercatorově zobrazení: P=[50°,15°], A=70°, krok 1°, 1000 bodů.

10. Ortodroma

Vlastnosti:

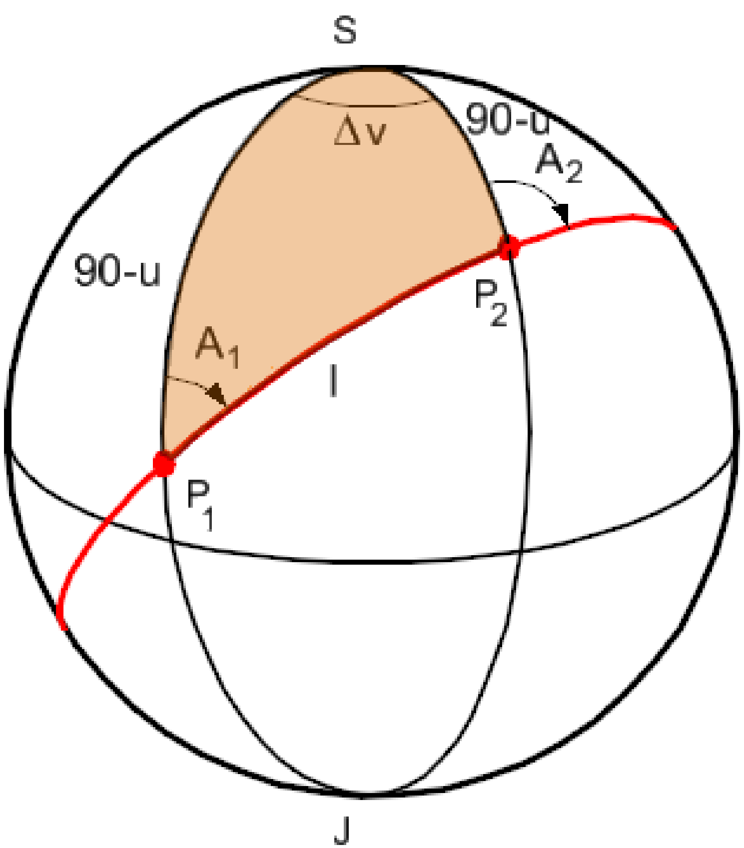
- Nejkratší spojnice dvou bodů na kouli (je to geodetická křivka na kouli)
- Ortodroma na rozdíl od loxodromy protíná poledníky pod různými azimuty.
- Vrací se do bodu, ze kterého vychází.
- Představuje hlavní kružnici, tj. průsečnici roviny procházející středem koule a koule.
- Poledník je ortodroma, rovnoběžka s výjimkou rovníku není ortodromou.
- Její délka je vždy kratší než délka loxodromy (s výjimkou rovníku a poledníku).
- V kartografických zobrazeních se zobrazuje jako obecná křivka.
- V gnomonické projekci se zobrazí jako úsečka.
- Zobrazení, u kterých se zobrazí téměř jako úsečka (malé vzdutí) nazýváme **ortodromickými**.

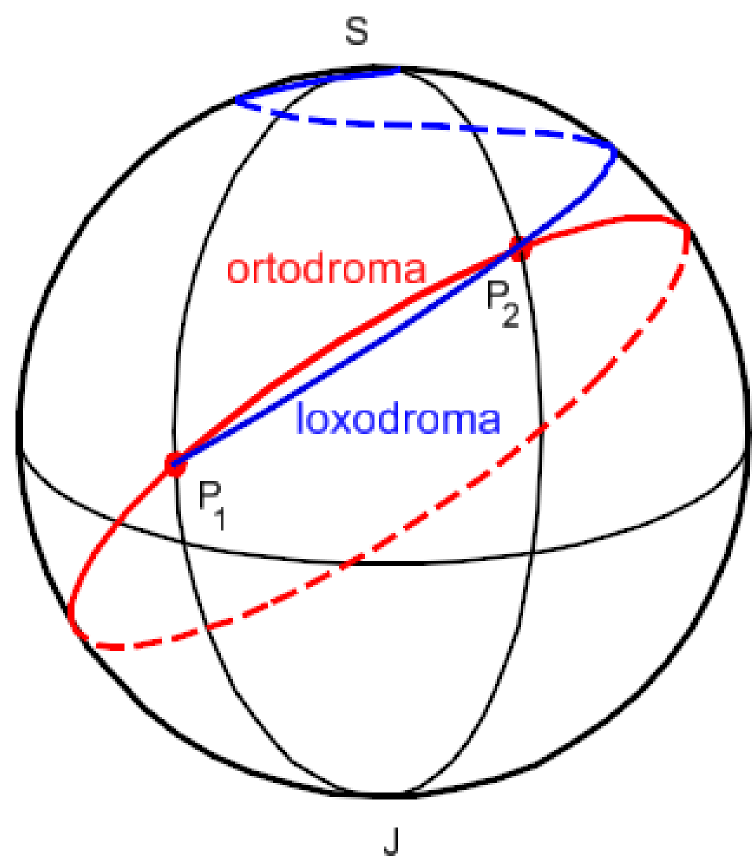
Použití: geodézie, letecká či námořní doprava.

11. Znázornění ortodromy a loxodromy

Vlevo ortodroma, vpravo srovnání ortodromy a loxodromy.

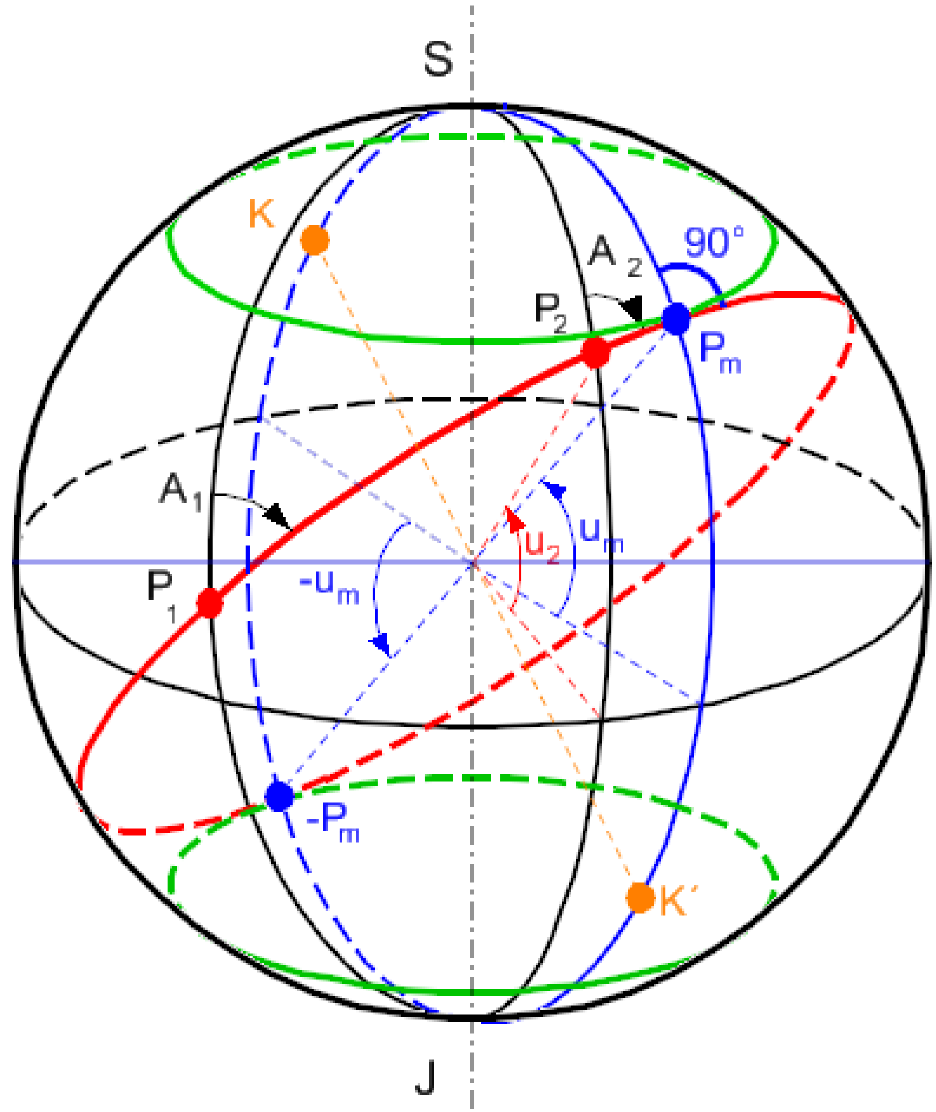
Výpočty parametrů ortodromy řešením sférického trojúhelníku.





12. Průběh ortodromy

- Ortodroma vychází z výchozího bodu a na rozdíl od loxodromy se do něj vrací.
- Její délka je vždy konečná.
- Maximální a minimální zeměpisná šířka v bodě P_m=> nejjižnější a nejsevernější bod.
- V bodě Pm má ortodroma azimut ±90°.
- Rovník protíná ve dvou bodech se symetrickými hodnotami v.



13. Clairautova věta

Popisuje chování ortodromy na sféře.

Vyjádřena Clairautovou rovnicí.

Clairautova rovnice:

Součin sinu azimutu a kosinu zeměpisné šířky je konstantní a je roven kosinu maximální zeměpisné šířky ortodromy.

$$\cos u \sin A = konst = \cos u_{\max}$$

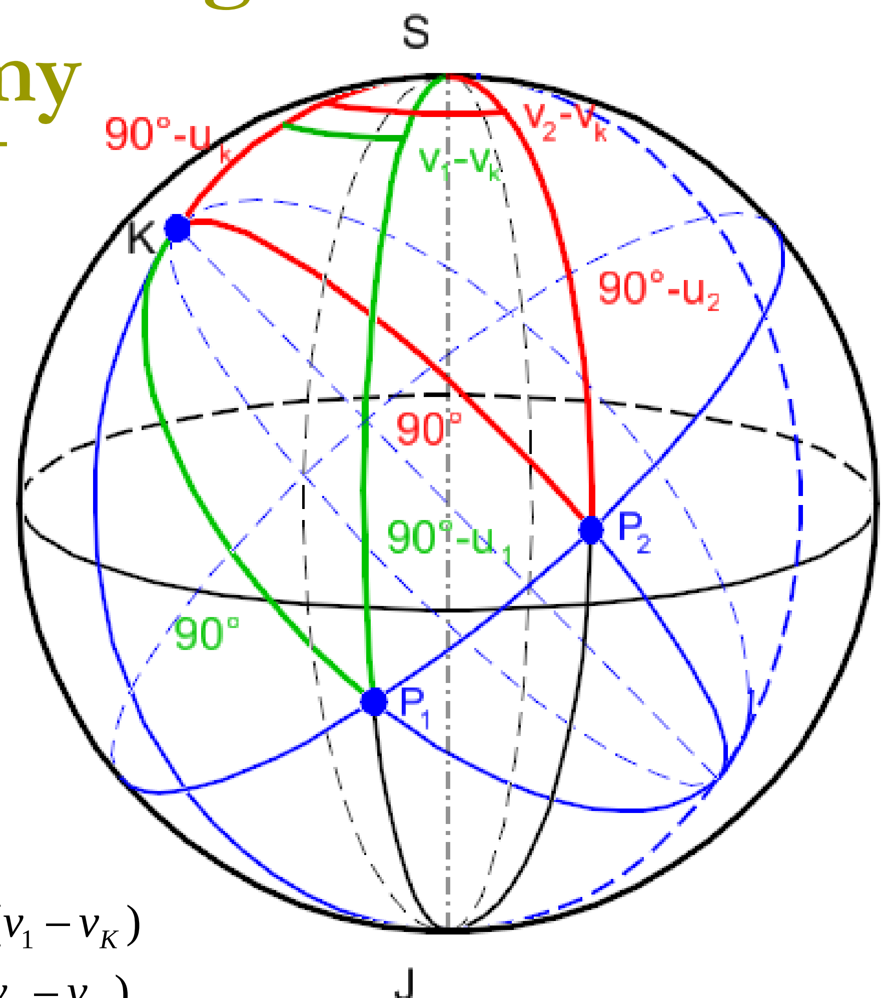
Praktický důsledek Clairautovy rovnice:

Vztah mezi hodnotami kartografického pólu a maximální zeměpisné šířky/délky ortodromy: kartografický pól leží na poledníku procházející bodem P_m.

$$u_k = 90^\circ - u_m$$

$$v_k = v_m + 180^\circ$$

14. Výpočet souřadnic kartografického pólu z 2 bodů ortodromy



Známe –li zeměpisné souřadnice dvou bodů ležících na ortodromě, můžeme určit souřadnice kartografického pólu.

Postup se používá při výpočtu kartografického pólu při znalosti polohy 2 bodů na nezkreslené (dotykové) rovnoběžce (ortodroma).

Vyjdeme ze dvou sférických trojúhelníků:

- T1: P1,S,K
- T2: P2,S,K

Sestavíme dvojici rovnic

$$\cos(90) = \sin(u_1)\sin(u_k) + s\cos(u_1)\cos(u_k)\cos(v_1 - v_K)$$

$$\cos(90) = \sin(u_2)\sin(u_k) + \cos(u_2)\cos(u_k)\cos(v_2 - v_K)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{tg}(v_k) &= \frac{\mathrm{tg}(u_1)\cos(v_2) - \mathrm{tg}(u_2)\cos(v_1)}{\mathrm{tg}(u_2)\sin(v_1) - \mathrm{tg}(u_1)\sin(v_2)} \\ \mathrm{tg}(u_k) &= -\mathrm{cotg}(u_1)\cos(v_k - v_1) = -\mathrm{cotg}(u_2)\cos(v_k - v_2) \end{aligned}}$$

14. 1. základní geodetická úloha

Výpočet parametrů ortodromy dané počátečním bodem, délkou a azimutem počátečního bodu.

Zadáno $\mathbf{P_1=[u_1, v_1], l, A_1}$

Hledáme: $\mathbf{P_2=[u_2, v_2] , A_2}$

Řešení:

$$\sin u_2 = \sin u_1 \cos \frac{l}{R}\rho + \cos u_1 \sin \frac{l}{R}\rho \cos A_1$$

$$\sin \Delta v = \sin \frac{l}{R}\rho \frac{\sin A_1}{\cos u_2}$$

$$\sin(180 - A_2) = \cos u_1 \frac{\sin \Delta v}{\sin \frac{l}{R}\rho}$$

15. 2. základní geodetická úloha

Výpočet parametrů ortodromy dané počátečním a koncovým bodem.

Zadáno $P_1=[u_1, v_1]$, $P_2=[u_2, v_2]$, l, A_1

Hledáme: l, A_1, A_2

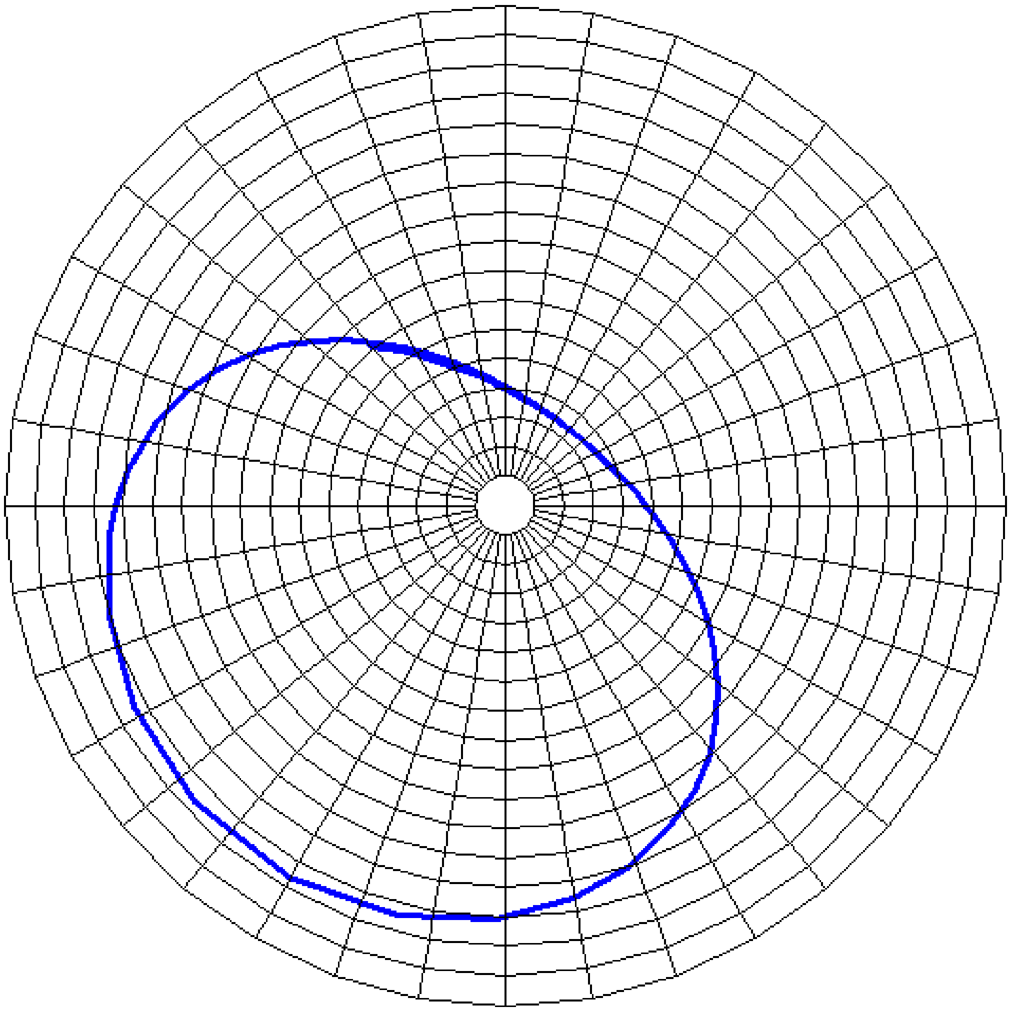
Řešení:

$$\cos\frac{l}{R}\rho = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos(\Delta v)$$

$$\sin A_1 = \cos u_2 \frac{\sin \Delta v}{\sin \frac{l}{R}\rho}$$

$$\sin(180 - A_2) = \cos u_1 \frac{\sin \Delta v}{\sin \frac{l}{R}\rho}$$

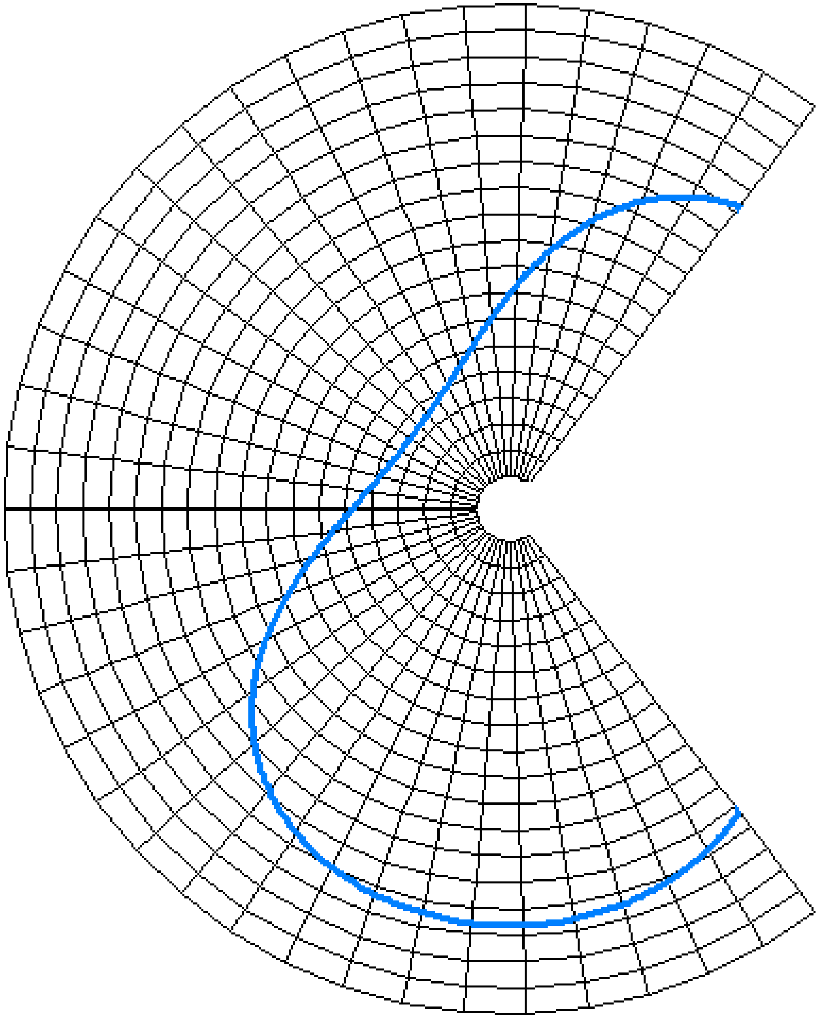
16. Ortodroma (azimutální zobrazení)



Znázornění ortodromy v azimutálním zobrazení.

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°

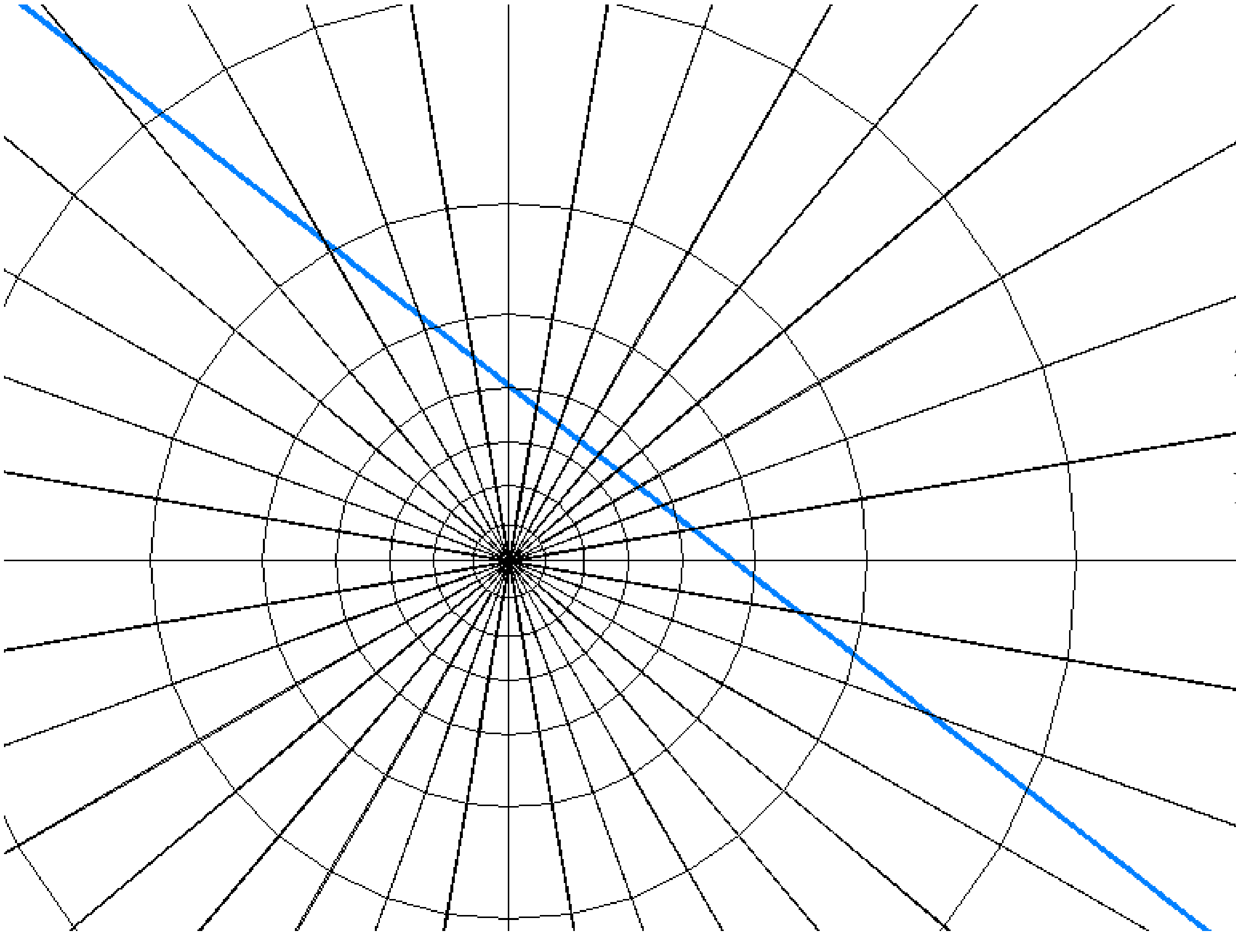
17. Ortodroma (kuželové zobrazení)



Znázornění ortodromy v kuželovém zobrazení.

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°

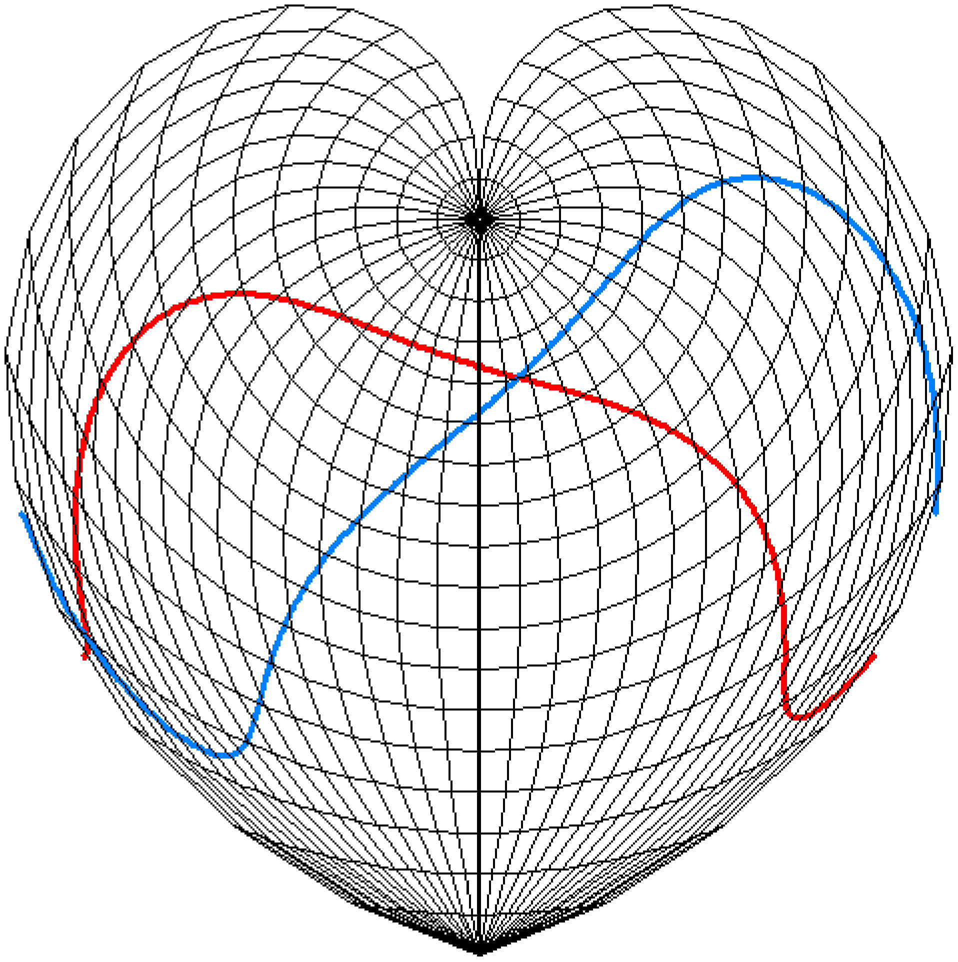
18. Ortodroma (gnomonická projekce)



Znázornění ortodromy v gnómonické projekci.

P=[50°,15°], A=70°, krok 1°

19. Dvě ortodromy (Werner-Staabovo zobrazení)



Znázornění ortodromy ve Werner-Staabově zobrazení.

O_1: P=[50°,15°], A=70°, krok 1°

O_2: P=[50°,15°], A=20°, krok 1°

20. Přímý a zpětný normálový řez na elipsoidu.

Na elipsoidu máme dvojici bodů P_1 a P_2.

Bod P_1 označme jako počáteční, bod P_2 jako koncový.

Oba řezy označujeme jako **vzájemné**.

Přímý a zpětný normálový řez **nejsou** totožné !!!

- **Přímý normálový řez:**

Z bodu P_1 do P_2 .

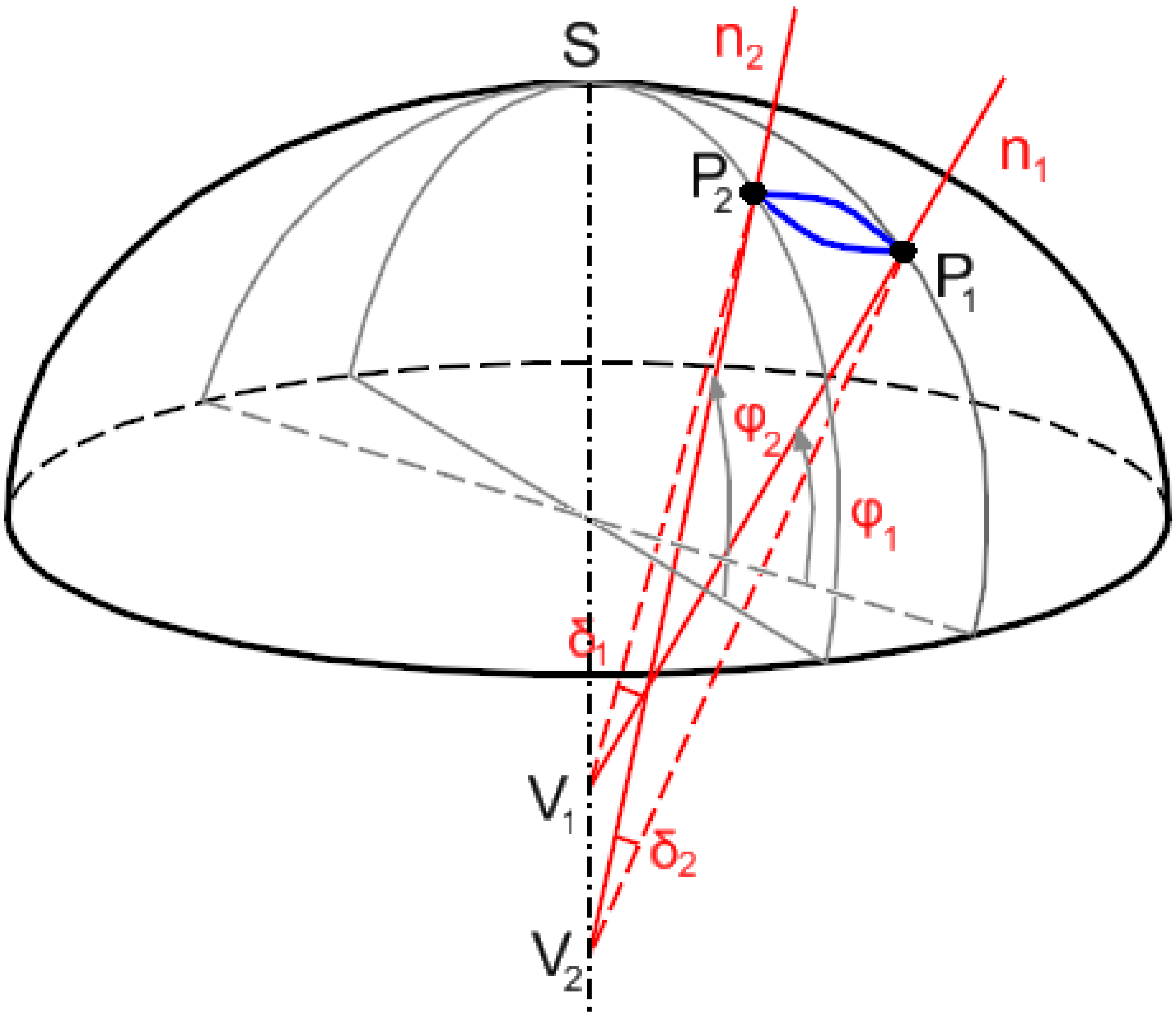
Rovina tvořena trojúhelníkem P_1, V_1, P_2.

- **Zpětný normálový řez:**

Z bodu P_2 do P_1 .

Rovina tvořena trojúhelníkem P_2, V_2, P_1.

21. Přímý a zpětný normálový řez na elipsoidu.



21. Geodetická křivka

Vlastnosti geodetické křivky:

- Nejkratší spojnice dvou bodů na elispoidu
- Její normála je v každém okamžiku totožná s normálou plochy.
- Poledníky protíná pod různými azimuty.
- Stejně jako ortodroma probíhá v intervalu mezi extrémní severní a jižní rovnoběžkou.
- Na rozdíl od ortodromy se nevrací do původního bodu, vlní se mezi oběma rovnoběžkami.
- Její délka je nekonečná.
- Mezi dvěma body existuje právě jedna geodetická křivka.
- Výjimkou jsou poledníky, mezi dvěma póly existuje nekonečně mnoho geodetických křivek s azimutem A=90°.

22. Znázornění geodetické čáry

Parametry geodetické křivky:

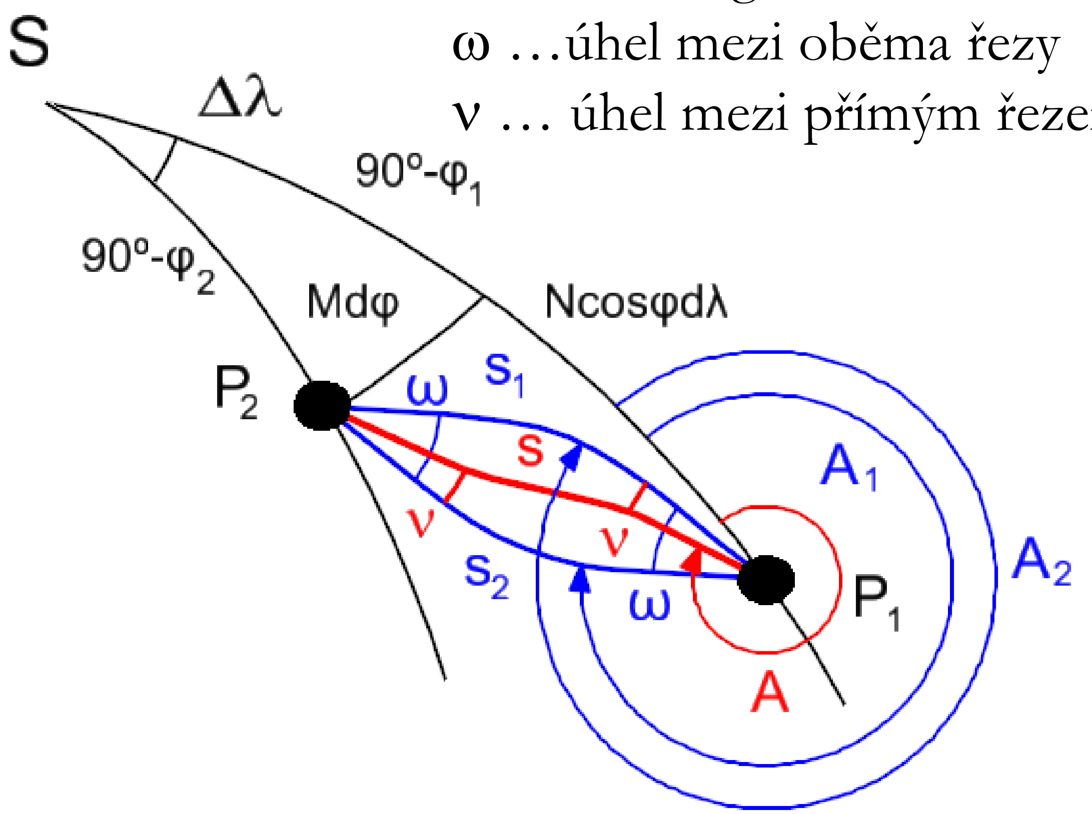
A1…azimut přímého řezu

A2…azimut zpětného řezu

A… azimut geodetické křivky

ω …úhel mezi oběma řezy

ν … úhel mezi přímým řezem a geodetickou křivkou



$$\nu \doteq \frac{\omega}{3}$$

23. Rovnice geodetické křivky

$$\cos A = \frac{Md\varphi}{ds}$$

$$\sin A = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{ds}$$

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Tyto rovnice představují diferenciální rovnice geodetické křivky