Úvod do funkcionální analýzy

Miroslava Dubcová

Ústav matematiky

Přednášky ZS 2014-2015

Obsah

Obsah

Obsah

Metrický prostor.

Definice

Metrickým prostorem rozumíme každou množinu X *opatřenou metrikou* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, *splňující požadavky*

1. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
2. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$,
3. $\rho(x,y) \geq 0$, *přičemž* $\rho(x,y) = 0$, *právě když* $x = y$,

pro každé $x,y,z \in X$.

Definice

Nechť X *je metrický prostor a* $\{x_n\}$ *je posloupnost v* X. *Posloupnost* $\{x_n\}$ *nazveme cauchyovskou, jestliže* $\rho(x_n,x_m) \to 0$ *pro* $n,m \to \infty$ *(tj. ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *tak, že pro každé* $n \geq n_0, m \geq n_0$ *je* $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$*).*

Zřejmě každá poslopnost, která má limitu v X je cauchyovská. Plyne to z vlastnosti metriky

$$\rho(x_n,x_m) \leq \rho(x_n,x) + \rho(x_m,x).$$

Normované lineární prostory.

Definice

Metrický prostor X je úplný právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost má limitu v X.

Příklady úplných metrických prostorů jsou např. prostory $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou.

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme každý vektorový prostor V nad tělesem $\mathbf{F}$ vybavený normou $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, splňující požadavek

1. $\|x\| \geq 0$, *přičemž* $\|x\| = 0$, *právě když* $x = o$ *(o je nulový prvek prostoru V),*
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

pro každé $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbf{F}$.

Je-li $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ nazýváme prostor V reálným normovaným prostorem, v případě $\mathbf{F} = \mathbb{C}$ nazýváme prostor V komplexním nor. prost.

Příklad: Je-li X lineární normovaný prostor, potom

$$\rho(x,y) = \|x - y\|, \quad \text{pro } x, y \in X$$

je metrika.

Definice

Každý normovaný lineární prostor, který je v příslušné metrice úplný nazýváme **Banachův prostor***.*

Věta

Nechť X je normovaný lineární prostor, potom norma $\|.\| : x \mapsto \|x\|$ je na X stejnoměrně spojitá funkce.

Příklady prostorů a jejich norem:

1. $l_n^p = \{x = (x_1, \dots, x_n);\, x_i \in \mathbb{R}(\text{ resp.}\mathbb{C})\}$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.
2. $l_n^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n);\, x_i \in \mathbb{R}(\text{ resp.}\mathbb{C})\}$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{i \in \mathbb{N}}\{|x_i|\}$,
3. $C([a, b]) =$ $\{f,$ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu$[a, b]\}$, $\|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$,
4. $C([a, b]) =$ $\{f,$ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu$[a, b]\}$, $\|f\|_i = \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}x$,
5. $c = \{\text{posloupnost }, x = \{x_n\};\, \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}\}$, $\|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$,
6. $c_0 = \{\text{posloupnost } x = \{x_n\};\, \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0\}$, $\|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$,

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

Nechť $\mathcal{L}^p(X)$, $p \in [1,\infty)$ je množina všech μ-měřitelných funkcí na X, kde μ je (obvykle) Lebesgueova míra na $X \subset \mathbb{R}^n$, pro které $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$. Číslo

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

nazýváme L^p-normou. V příkladech, se kterými se setkáváme bude obvykle $X \subset \mathbb{R}$ interval (nebo $X \subset \mathbb{R}^2$ obdélník apod.) a f bude spojitá funkce na X, až na množinu míry 0. Lebesgueův integrál lze v těchto příkladech nahradit Riemannovým integrálem tak, jak je zavedeno ve skriptech MI a MII.

Nechť $\mathcal{L}^\infty(X)$ je množina všech μ-měřitelných funkcí na X, pro které existuje konstanta K tak, že $|f(x)| \leq K$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Nejmenší takové číslo K označme

$$K = \sup_X{}^* |f| = \|f\|_\infty$$

a nazýváme ho L^∞-normou.

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

Normy $\|.\|_p$ a$\|.\|_\infty$ mají všechny vlastnosti normy až na to, že nenulová funkce může mít normu 0. Pro $1 \leq p \leq \infty$ definujme proto třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X), g = f\mu - \text{skoro všude na } X\}.$$

Nyní můžeme definovat prostor

$$L^p(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^p(X)\}$$

a operace

$$[f+g] = [f] + [g], \quad [\alpha f] = \alpha[f].$$

Prostor $L^p(x)$ s danými operacemi je lineární prostor s normou $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.
Zvolíme-li $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ dostaneme prostory l^p a l^∞.
Vice o μ-měřitelných funkcích viz [Lukeš-Teorie míry]

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

1. $L^p(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^p(X)\}$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$,
2. $L^\infty(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^\infty(X)\}$, $\|f\|_\infty = \sup_X{}^* |f|$,
3. $l^p = \{$posloupností $x = \{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}($resp. $\mathbb{C})$; $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
4. $l^\infty = \{$omezených posloupností $x = \{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}($resp. $\mathbb{C}), \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\}$, $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$,

Definice

Řekneme, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na lineárním prostoru X jsou ekvivalentní, existují-li takové konstanty $\alpha, \beta > 0$, že

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 .$$

Normované lineární prostory.

Snadno se ukáže, že ekvivalentní normy dávají stejné topologie, tj. otevřené množiny jsou v příslušných metrikách stejné.
Platí dokonce věta:

Věta

Všechny normy na konečně rozměrném lineárním prostoru jsou navzájem ekvivalentní.

Důkaz: viz [Lukeš-Zápisky] 1.7 ■

Důsledek

Každý konečně rozměrný normovaný lineární prostor je Banachův.
Každý konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru je uzavřený.

Obsah

Prostor se skalárním součinem.

Definice

Prostorem se skalárním součinem rozumíme každý lineární prostor H (nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$), v němž je pro každé dva body x,y definován skalární součin (x,y) jako prvek z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ splňující požadavky:

(a) $(x,x) \geq 0$ *a* $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = o$ *(o je nulový prvek prostoru),*

(b) $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$, $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x,y)$,

(d) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

Definujeme-li zobrazení $\|.\| : x \mapsto \sqrt{(x,x)}$, má toto zobrazení vlastnosti normy. Obtížnější je pouze důkaz trojúhelníkové nerovností. Obvykle se dokazuje pomocí tzv. Schwartzovy nerovnosti.

Věta (Schwartzova nerovnost)

Nechť H je prostor se skalárním součinem, potom pro všechna $x, y \in H$ platí nerovnost

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Hilbertův prostor

Hilbertův prostor je každý prostor se skalárním součinem, který je v zavedené normě $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ úplný.
Každý Banachův prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) tvoří Hilbertův prostor, jestliže příslušná norma splňuje pro všechna x, y tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2).$$

Položíme-li v reálném případě

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

resp. v komplexním případě

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2,$$

je norma již odvozena ze skalárního součinu (tj. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$).

Obsah

Ortogonální prvky a množiny

Dva prvky Hilbertova prostoru H nazýváme **ortogonální (kolmé)**, jestliže

$$\forall\, p, q \in H \;\text{ platí } (p, q) = 0\,.$$

Dvě podmnožiny $P, Q \subset H$ jsou ortogonální ($P \perp Q$), jestliže

$$\forall\, p \in P,\; q \in Q \;\text{ platí } (p, q) = 0\,.$$

Nechť $M \subset H$, $M^\perp$ označuje ortogonální doplněk M, jestliže

$$M^\perp = \{x \in H; (x, m) = 0\; \forall\, m \in M\}.$$

Věta

$M^\perp$ je uzavřený podprostor H.

Existence nejbližšího prvku

Definice

Nechť S je neprázdná množina v metrickém prostoru X a $x_0 \in X$. Pak definujeme vzdálenost mezi S a x_0 rovností

$$\mathrm{dist}(S, x_0) = \inf_{x \in S} \rho(x, x_0).$$

Věta

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom ke každému $x \in H$ existuje právě jedno $m_0 \in M$ tak, že $\|x - m_0\| = dist(x, M)$.

Geometrická interpretace této věty je:
Je-li Z podprostorem Hilbertova prostoru H, $x \in H$ a $z_0 \in Z$, potom

$$\|x - z_0\| = \mathrm{dist}(x, Z) \Leftrightarrow x - z_0 \perp Z\,.$$

Projekce

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pro každé $x \in H$ označme m takový prvek z M, pro který $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$.

Definice

Zobrazení $P : x \mapsto m$ $(m = Px)$ nazýváme projekcí H na M.

Věta

Nechť $M \subset H$ je uzavřený podprostor. P je projekce H na M a $\mathcal{N}(P) = \{x \in H : Px = o\}$. Potom

- *P je lineární zobrazení,*
- $P(Px) = Px$,
- $\forall x \in H : \|Px\| \leq \|x\|$,
- $P(H) = M$,
- $\mathcal{N}(P) = M^{\perp}$.

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \ \ a \ \ w = A + B\,,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek z W lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W, existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W.

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \;\; a \;\; w = A + B\,,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek z W lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W, existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W.

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \;\; a \;\; w = A + B\,,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek z W lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W, existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W.

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S\,,\ \begin{array}{l}(x,y) = 0 \text{ pro } \quad x \neq y\\ (x,x) = 1\end{array}$.

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S, \quad \begin{array}{l}(x,y) = 0 \text{ pro } \quad x \neq y \\ (x,x) = 1\end{array}$.

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S$, $\begin{array}{l}(x,y) = 0 \text{ pro } \quad x \neq y \\ (x,x) = 1\end{array}$.

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

Připomeňme pojem Hamelovy (algebraické) báze. Nechť X je lineární prostor. Množina $H \subset X$ se nazývá **Hamelova báze** prostoru X, jestliže každá konečná podmnožina prvků z H je lineárně nezávislá a každý prvek z X lze zapsat jako konečná lineární kombinace prvků z H.
Pro konečně dimenzionální prostory je ortonormální báze rovna Hamelově bázi.
Pro nekonečně dimenzionální prostor to neplatí.

Věta

Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

Připomeňme pojem Hamelovy (algebraické) báze. Nechť X je lineární prostor. Množina $H \subset X$ se nazývá **Hamelova báze** prostoru X, jestliže každá konečná podmnožina prvků z H je lineárně nezávislá a každý prvek z X lze zapsat jako konečná lineární kombinace prvků z H.
Pro konečně dimenzionální prostory je ortonormální báze rovna Hamelově bázi.
Pro nekonečně dimenzionální prostor to neplatí.

Věta

Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze (2)

Věta (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H *a* $x \in H$*, platí*

$$\sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Věta

Nechť X *je úplný prostor se skalárním součinem, nechť* $\{e_n\}$ *je nekonečná spočetná ortogonální množina v* X*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^2 < \infty$ *a pro součet řady* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n$ *platí vztahy* $\zeta_n = (x, e_n)$.

Příklady ortonormálních soustav a bází

a) System $\mathcal{E} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0,2\pi])$. Z předchozí věty plyne věta z teorie Fourierových řad: Jsou-li a_i, $i = 0,1,\ldots$ a b_i, $i = 1,2,\ldots$ posloupnosti reálných čísel takových, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

pak existuje funkce f, $[f] \in L^2([0,2\pi])$ jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Pro funkci f platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Příklady ortonormálních soustav a bází

a) System $\mathcal{E} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0,2\pi])$. Z předchozí věty plyne věta z teorie Fourierových řad: Jsou-li a_i, $i = 0,1,\dots$ a b_i, $i = 1,2,\dots$ posloupnosti reálných čísel takových, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

pak existuje funkce f, $[f] \in L^2([0,2\pi])$ jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Pro funkci f platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Příklady ortonormálních soustav a bází

b) Soustava funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0,2\pi])$.

c) Nechť $e_n = (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$ jsou "jednotkové" vektory l^2. Potom $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální bází l^2.

Příklady ortonormálních soustav a bází

b) Soustava funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$.

c) Nechť $e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ jsou "jednotkové" vektory l^2. Potom $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální bází l^2.

Obsah

Obsah

Lineární zobrazení, operátor,funkcionál

Zopakujme si definici lineárního zobrazení. Předpokládejme, že M, N jsou normované lineární prostory s normamy $\|.\|_M$, $\|.\|_N$.

Definice

Nechť $L : M \to N$ a

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),$$

$$\textit{pro všechna } x, y \in M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\textit{resp. } \mathbb{C})$$

pak L nazýváme **lineární zobrazení**.
Jestliže $M = N$ mluvíme o **lineárním operátoru**, *je-li $N = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) mluvíme o* **lineárním funkcionálu** *(lineární formě).*

Definice

Říkáme, že lineární zobrazení $L : M \to N$ je **omezené** *zobrazuje-li omezené množiny v M na omezené množiny v N.*

Lineární zobrazení, operátor,funkcionál

Zopakujme si definici lineárního zobrazení. Předpokládejme, že M, N jsou normované lineární prostory s normamy $\|.\|_M$, $\|.\|_N$.

Definice

Nechť $L : M \to N$ a

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),$$

$$\textit{pro všechna } x, y \in M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\textit{resp. } \mathbb{C})$$

pak L nazýváme **lineární zobrazení**.
Jestliže $M = N$ mluvíme o **lineárním operátoru**, *je-li $N = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) mluvíme o* **lineárním funkcionálu** *(lineární formě).*

Definice

Říkáme, že lineární zobrazení $L : M \to N$ je **omezené** *zobrazuje-li omezené množiny v M na omezené množiny v N.*

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists\, K > 0, \text{ takové, že } \|Lx\|_N \leq K \text{ pro } \forall\, x \in M,\ \|x\|_M \leq 1.$$

Lineární zobrazení $L : M \to N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí

Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$, tj.

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ takové, že pro $\forall\, x$; $\|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \to N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

(i) *L je spojité*

(ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*

(iii) *L je omezené*

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists\, K > 0, \text{ takové, že } \|Lx\|_N \leq K \text{ pro } \forall\, x \in M,\ \|x\|_M \leq 1.$$

Lineární zobrazení $L : M \to N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí

Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$, tj.

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ takové, že pro $\forall\, x$; $\|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \to N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

(i) *L je spojité*

(ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*

(iii) *L je omezené*

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists\, K > 0,\ \text{takové, že}\ \|Lx\|_N \leq K\ \text{pro}\ \forall\, x \in M,\ \|x\|_M \leq 1.$$

Lineární zobrazení $L : M \to N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí

Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$, tj.

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ takové, že pro $\forall\, x$; $\|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \to N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

(i) *L je spojité*

(ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*

(iii) *L je omezené*

Obsah

Norma lineárního zobrazen

Definice

Nechť $L : M \to N$ je omezený lineární zobrazení. Číslo

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \le 1} \|Lx\|_N,$$

nazýváme **normou lineárního zobrazení** *L.*

Symbolem $\mathcal{L}(M, N)$ označme prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení z M do N.
Jestliže $M = N$ je $\mathcal{L}(M)$ prostor všech omezených lineárních operátorů na M.
Jestliže $N = \mathbb{R}(resp. \mathbb{C})$ je $\mathcal{L}(M, \mathbb{R}) = M^*$ prostor všech omezených lineárních funkcionálů (duál prostoru M).

Norma lineárního zobrazen

Definice

Nechť $L : M \to N$ *je omezený lineární zobrazení. Číslo*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

nazýváme **normou lineárního zobrazení** L.

Symbolem $\mathcal{L}(M, N)$ označme prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení z M do N.
Jestliže $M = N$ je $\mathcal{L}(M)$ prostor všech omezených lineárních operátorů na M.
Jestliže $N = \mathbb{R}(\textit{resp.}\ \mathbb{C})$ je $\mathcal{L}(M, \mathbb{R}) = M^*$ prostor všech omezených lineárních funkcionálů (duál prostoru M).

Věta

Nechť M, N jsou normované lineární prostory, potom $\mathcal{L}(M, N)$ s normou

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

je také normovaný lineární prostor. Je-li N Banachův je i prostor $\mathcal{L}(M, N)$ Banachův, spaciálně M^* je Banachův. Navíc pro $L \in \mathcal{L}(M, N)$ a $x \in M$ platí

$$\|Lx\|_N \leq \|L\| \, \|x\|_M.$$

Věta

Nechť M, N *jsou normované lineární prostory, potom* $\mathcal{L}(M, N)$ *s normou*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

je také normovaný lineární prostor. Je-li N *Banachův je i prostor* $\mathcal{L}(M, N)$ *Banachův, spaciálně* M^* *je Banachův. Navíc pro* $L \in \mathcal{L}(M, N)$ *a* $x \in M$ *platí*

$$\|Lx\|_N \leq \|L\| \, \|x\|_M.$$

Obsah

Příklady

Příklad: Nechť $T : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ a pro $f \in C([-1,1])$ je

$$\|f\| = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|.$$

Funkcionál T je definován vztahem $Tf = 7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})$. Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu T.

Příklad: Nechť $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ a pro $f \in L^2([0,1])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Operátor T je definován vztahem $Tf(t) = t \int_0^1 f \, \mathrm{d}\mu$. Zjistěte, zda je operátor spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu operátoru T.

Příklady

Příklad: Nechť $T : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ a pro $f \in C([-1,1])$ je

$$\|f\| = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

Funkcionál T je definován vztahem $Tf = 7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})$. Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu T.

Příklad: Nechť $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ a pro $f \in L^2([0,1])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \,\mathrm{d}\mu}.$$

Operátor T je definován vztahem $Tf(t) = t \int_0^1 f \,\mathrm{d}\mu$. Zjistěte, zda je operátor spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu operátoru T.

Obsah

Frechet-Rieszova věta

Věta

Nechť F je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H, potom

$$\exists!\,\alpha \in H \ \ \textit{takové, že}\ \ \forall x \in H;\ F(x) = (x, \alpha).$$

Navíc $\|F\| = \|\alpha\|$.

Příklad: Nechť $F : L^2([0,\pi]) \to \mathbb{R}$ a pro $f \in L^2([0,\pi])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{\pi} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$Ff = \int_0^{\pi} f(x) sin(x) \mathrm{d}x.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu F.

Frechet-Rieszova věta

Věta

Nechť F je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H, potom

$$\exists!\, \alpha \in H \ \text{ takové, že } \ \forall x \in H;\ F(x) = (x, \alpha).$$

Navíc $\|F\| = \|\alpha\|$.

Příklad: Nechť $F : L^2([0,\pi]) \to \mathbb{R}$ a pro $f \in L^2([0,\pi])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^\pi |f|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$Ff = \int_0^\pi f(x) sin(x) \mathrm{d}x.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu F.

Příklady

Příklad: Nechť $F : l^2 \to \mathbb{R}$ a pro $x \in l^2$ je

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$Fx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2)^{\frac{n}{2}}} x_n.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu F.

Obsah

Obsah

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\, x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\ x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\ x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\, x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\ x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta \|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\ x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T.
$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X.
Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.
Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$.*

Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*

(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ *se nazývá* **vlastní hodnota** *operátoru* $T \in \mathcal{L}(X)$ *existuje-li* $x \neq o$*, pro něž* $Tx = \lambda x$*.*
Každé $x \neq o$*, které splňuje rovnici* $Tx = \lambda x$ *se nazývá* **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě* λ*.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ *a nazýváme* **bodové spektrum** *operátoru* T*.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) λ *není vlastní hodnota operátoru* T

(ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$*, tj. operátor* $T - \lambda I$ *je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$.*
Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*
(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$.*
Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*
(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ *se nazývá* **vlastní hodnota** *operátoru* $T \in \mathcal{L}(X)$ *existuje-li* $x \neq o$*, pro něž* $Tx = \lambda x$.
Každé $x \neq o$*, které splňuje rovnici* $Tx = \lambda x$ *se nazývá* **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě* λ.
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ *a nazýváme* **bodové spektrum** *operátoru* T.

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) λ *není vlastní hodnota operátoru* T

(ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$*, tj. operátor* $T - \lambda I$ *je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$.*
Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*

(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$.*
Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ.*
Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*

(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Obsah

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Příklad: Operátor $T : l^2 \to l^2$ je definovaný vztahem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 + x_1, x_2 + \frac{x_1}{2}, x_3 + \frac{x_1}{3}, x_4 + \frac{x_1}{4}, \dots)$$

je invertibilní operátor, protože existuje operátor $L : l^2 \to l^2$ definovaný vztahem

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 - \frac{x_1}{2}, x_2 - \frac{x_1}{4}, x_3 - \frac{x_1}{6}, x_4 - \frac{x_1}{8}, \dots)$$

pro který platí $L\,T = T\,L = I$. Dá se ukázat, že operátory T i L jsou spojité. Platí

$$\|T\| \leq \sqrt{(1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{6})} \text{ a } \|L\| \leq \sqrt{(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{24})}$$

□

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $\sigma(T)$ je uzavřená množina a

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Obsah

Příklad: $X = l^2$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Definujme operátor $R : l^2 \to l^2$

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Určete spektrum operátoru R.
Příklad: $X = L^2([0,1])$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}.$$

Definujme operátor $L : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$

$$Lf(t) = t\,f(t).$$

Určete spektrum operátoru L.

Obsah

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení T.

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** *jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkame, že T je normální.*

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq o$ vlastní vektor platí totiž

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x,x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení T.

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** *jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkame, že T je normální.*

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq o$ vlastní vektor platí totiž

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x,x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení T.

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** *jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkame, že T je normální.*

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq o$ vlastní vektor platí totiž

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x,x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení T.

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** *jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkame, že T je normální.*

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq o$ vlastní vektor platí totiž

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x,x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx,x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx,x)\} \qquad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx,x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \ \ \textit{přičemž} \ \ m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Relné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ *nazýváme* **spaktrální poloměr**.

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \qquad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \ \ \textit{přičemž} \ \ m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Relné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ *nazýváme* **spaktrální poloměr**.

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \qquad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \text{ *přičemž* } m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Relné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ *nazýváme* **spaktrální poloměr**.

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \qquad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \;\; \textit{přičemž} \;\; m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Relné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ *nazýváme* **spaktrální poloměr**.

Věta

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitovský je $r(T) = \|T\|$.

Příklad:
$H = \{f \in L^2([0,1]);\ f(0) = f(1) = 0$ a f má ∞ derivací na $[0,1]\}$.
Definujme operátor $D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$. Dokažte, že D je hermitovský operátor. Vlastní hodnoty operátoru D jsou $-n^2\pi^2$ a vlastní funkce $\sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že tento operátor není spojitý, jinak by nutně bylo jeho spektrum omezené.

Věta

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitovský je $r(T) = \|T\|$.

Příklad:

$H = \{f \in L^2([0,1]);\ f(0) = f(1) = 0$ a f má ∞ derivací na $[0,1]\}$.
Definujme operátor $D = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$. Dokažte, že D je hermitovský operátor. Vlastní hodnoty operátoru D jsou $-n^2\pi^2$ a vlastní funkce $\sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že tento operátor není spojitý, jinak by nutně bylo jeho spektrum omezené.

Obsah

Obsah

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojité parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t. Tato funkce se nazývá vlnová funkce.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$$

znamená hustotu pravděpodobnosti polohy částice.

Dílčí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu $\boldsymbol{r}$ o objemu $\mathrm{d}V$ označme $\mathrm{d}P$. Platí

$$\mathrm{d}P = \rho(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}V = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2\mathrm{d}V$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojité parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t. Tato funkce se nazývá vlnová funkce.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$$

znamená hustotu pravděpodobnosti polohy částice.

Dílčí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu $\boldsymbol{r}$ o objemu $\mathrm{d}V$ označme $\mathrm{d}P$. Platí

$$\mathrm{d}P = \rho(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}V = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2\mathrm{d}V$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojité parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t. Tato funkce se nazývá vlnová funkce.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$$

znamená hustotu pravděpodobnosti polohy částice.

Dílčí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu $\boldsymbol{r}$ o objemu $\mathrm{d}V$ označme $\mathrm{d}P$. Platí

$$\mathrm{d}P = \rho(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}V = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2\mathrm{d}V$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojité parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t. Tato funkce se nazývá vlnová funkce.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$$

znamená hustotu pravděpodobnosti polohy částice.

Dílčí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu $\boldsymbol{r}$ o objemu $\mathrm{d}V$ označme $\mathrm{d}P$. Platí

$$\mathrm{d}P = \rho(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}V = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2\mathrm{d}V$$

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \in M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_{\Omega} |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_{M} |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \in M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_\Omega |\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \mathrm{d}V.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_M |\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \mathrm{d}V = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \in M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_\Omega |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_M |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2, potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ, pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme stavovým prostorem a značíme $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(\boldsymbol{r}, t)\overline{\psi_2(\boldsymbol{r}, t)}\mathrm{d}V$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V}$$

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2, potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ, pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme stavovým prostorem a značíme $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(\boldsymbol{r}, t)\overline{\psi_2(\boldsymbol{r}, t)}\mathrm{d}V$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V}$$

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2, potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ, pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme stavovým prostorem a značíme $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(\boldsymbol{r}, t)\overline{\psi_2(\boldsymbol{r}, t)}\mathrm{d}V$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \mathrm{d}V}$$

Princip superpozice stavů - (2)

Jaký význam mají konstanty c_1, c_2 ve vztahu

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2?$$

Předpokládejme, že ψ_1, ψ_2 jsou normované a ortogonální. Potom

$$1 = (\psi, \psi) = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = |c_1|^2 + |c_2|^2.$$

To lze interpretovat tak, že systém v kvantovém stavu ψ se s pravděpodobností $|c_1|^2$ nachází ve stavu ψ_1 s pravděpodobností $|c_2|^2$ se nachází ve stavu ψ_2.

Například, jestliže vlnová funkce ψ_1 popisuje stav částice, který je charakterizován tím, že při měření veličiny F se získá její přesná hodnota F_1 a že ve stavu ψ_2 má veličina F přesnou hodnotu F_2, potom uvedeme-li částici do stavu $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dostaneme při opakovaném měření pouze hodnoty F_1 a F_2 a to s pravděpodobností $|c_1|^2$ a $|c_2|^2$.

Princip superpozice stavů - (2)

Jaký význam mají konstanty c_1, c_2 ve vztahu

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2?$$

Předpokládejme, že ψ_1, ψ_2 jsou normované a ortogonální. Potom

$$1 = (\psi, \psi) = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = |c_1|^2 + |c_2|^2.$$

To lze interpretovat tak, že systém v kvantovém stavu ψ se s pravděpodobností $|c_1|^2$ nachází ve stavu ψ_1 s pravděpodobností $|c_2|^2$ se nachází ve stavu ψ_2.

Například, jestliže vlnová funkce ψ_1 popisuje stav částice, který je charakterizován tím, že při měření veličiny F se získá její přesná hodnota F_1 a že ve stavu ψ_2 má veličina F přesnou hodnotu F_2, potom uvedeme-li částici do stavu $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dostaneme při opakovaném měření pouze hodnoty F_1 a F_2 a to s pravděpodobností $|c_1|^2$ a $|c_2|^2$.

Obsah

Operátory fyzikálních veličin

Při budování teoretického aparátu kvantové mechaniky se ukázalo, že fyzikální veličiny v něm hrají roli operátorů definovaných na stavovém prostoru $\mathcal{V}$.

Je-li operátor $\hat{F}$ hermitovský, jsou jeho vlastní čísla reálná a vlnové vlastní funkce příslušející různým vlastním vektorům jsou ortogonální.
Jestliže k jednomu vlastnímu číslu existuje více lineárně nezávislých vlastních funkcí (vlastní číslo je degenerované), potom množina všech vlastních funkcí příslušejících danému vlastnímu číslu tvoří lineární prostor $\mathcal{V}_\lambda$ ($\mathcal{V}_\lambda \subset \mathcal{V}$), jehož dimenze je $d_\lambda > 1$.
Zkonstruujeme ortonormální bázi (Gramm-Schmidtova ortonormalizace).

Operátory fyzikálních veličin

Při budování teoretického aparátu kvantové mechaniky se ukázalo, že fyzikální veličiny v něm hrají roli operátorů definovaných na stavovém prostoru $\mathcal{V}$.

Je-li operátor $\hat{F}$ hermitovský, jsou jeho vlastní čísla reálná a vlnové vlastní funkce příslušející různým vlastním vektorům jsou ortogonální.
Jestliže k jednomu vlastnímu číslu existuje více lineárně nezávislých vlastních funkcí (vlastní číslo je degenerované), potom množina všech vlastních funkcí příslušejících danému vlastnímu číslu tvoří lineární prostor $\mathcal{V}_\lambda$ ($\mathcal{V}_\lambda \subset \mathcal{V}$), jehož dimenze je $d_\lambda > 1$.
Zkonstruujeme ortonormální bázi (Gramm-Schmidtova ortonormalizace).

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin

1. Každé fyzikální veličině F je v kvantové mechanice přiřazen lineární a hermitovský operátor $\hat{F}$.
2. Základním fyzikálním veličinám mechaniky - souřadnicím částice x, y, z a složkám hybnosti částice p_x, p_y, p_z - jsou přiřazeny operátory $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ podle schématu

$$x \to \hat{x} = x\hat{1},\ y \to \hat{y} = y\hat{1},\ z \to \hat{z} = z\hat{1}$$

$$p_x \to \hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ p_y \to \hat{p}_y = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ p_z \to \hat{p}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

nebo-li zapsáno vektorově

$$\boldsymbol{r} \to \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\hat{1},\quad \boldsymbol{p} \to \hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$$

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin

1. Každé fyzikální veličině F je v kvantové mechanice přiřazen lineární a hermitovský operátor $\hat{F}$.
2. Základním fyzikálním veličinám mechaniky - souřadnicím částice x, y, z a složkám hybnosti částice p_x, p_y, p_z - jsou přiřazeny operátory $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ podle schématu

$$x \to \hat{x} = x\hat{1},\ y \to \hat{y} = y\hat{1},\ z \to \hat{z} = z\hat{1}$$

$$p_x \to \hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ p_y \to \hat{p}_y = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ p_z \to \hat{p}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

nebo-li zapsáno vektorově

$$\boldsymbol{r} \to \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\hat{1},\quad \boldsymbol{p} \to \hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$$

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

3. Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \to \hat{F} = F(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}).$$

4. Množina vlastních čísel operátorů $\hat{F}$ koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
5. Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

3. Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \to \hat{F} = F(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}).$$

4. Množina vlastních čísel operátorů $\hat{F}$ koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
5. Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

3. Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \to \hat{F} = F(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}).$$

4. Množina vlastních čísel operátorů $\hat{F}$ koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
5. Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty plynoucí z matematiky

6. Množina všech vlastních funkcí ψ_n operátoru $\hat{F}$ tvoří ve stavovém prostoru $\mathcal{V}$ úplnou bázi. To znamená, že každou funkci $\psi \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n.$$

7. Každá vlastní funkce ψ_n operátoru $\hat{F}$ fyzikální veličiny F popisuje specifický stav částice, v němž má veličina F tzv. ostrou hodnotu shodnou s hodnotou vlastního čísla λ_n, to znamená, že při opakovaném měření F v tomtéž stavu ψ_n se vždy naměří $F = \lambda_n$.

Postuláty plynoucí z matematiky

6. Množina všech vlastních funkcí ψ_n operátoru $\hat{F}$ tvoří ve stavovém prostoru $\mathcal{V}$ úplnou bázi. To znamená, že každou funkci $\psi \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n.$$

7. Každá vlastní funkce ψ_n operátoru $\hat{F}$ fyzikální veličiny F popisuje specifický stav částice, v němž má veličina F tzv. ostrou hodnotu shodnou s hodnotou vlastního čísla λ_n, to znamená, že při opakovaném měření F v tomtéž stavu ψ_n se vždy naměří $F = \lambda_n$.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B, jejichž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \rightarrow \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií e experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_\psi = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B, jejichž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \;\rightarrow\; \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií e experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_\psi = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B, jejichž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \;\rightarrow\; \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií e experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_\psi = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům - 2

Z 6. bodu plyne důsledek: vyjádříme li vlnovou funkci ψ studovaného stavu v podobě $\psi = \sum_n c_n \psi_n$, budeme si jisti, že při měření veličiny F pro ni neměříme pouze hodnoty λ_n, a to každou s četností $|c_n|^2$.

Několik konkrétních příkladů operátorů.

Operátor kinetické energie

Pro kinetickou energii T částice platí v klasické mechanice

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}.$$

Podle 2. a 3. postulátu o operátorech dostaneme operátor

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Operátor potenciální energie

Pohybuje-li se částice v konzervativním poli popsaném potenciální energií $V(\boldsymbol{r})$ dostaneme operátor

$$\hat{V} = V(\boldsymbol{r})\hat{1}.$$

Několik konkrétních příkladů operátorů.

Operátor kinetické energie

Pro kinetickou energii T částice platí v klasické mechanice

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}.$$

Podle 2. a 3. postulátu o operátorech dostaneme operátor

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Operátor potenciální energie

Pohybuje-li se částice v konzervativním poli popsaném potenciální energií $V(\boldsymbol{r})$ dostaneme operátor

$$\hat{V} = V(\boldsymbol{r})\hat{1}.$$

Hamiltonův operátor - Hamiltonián.

Hamiltonův operátor

Pro operátor H celkové energie částice v konzervativním poli dostaneme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\hat{1}.$$

Hamiltonián pro elektricky nabitou částici s nábojem Q a hmotností m podrobenou vlivu elektrického pole popsaného vektorovým potenciálem $\boldsymbol{A}$ a skalárním potenciálem φ a současně konzervativního pole s potenciální energií V má tvar

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - Q\boldsymbol{A}\hat{1})^2}{2m} + Q\varphi\hat{1} + V\hat{1}.$$

Vypnutí elektromagnetického pole $\boldsymbol{A} = 0$, $\varphi = 0$.

Hamiltonův operátor

Pro operátor H celkové energie částice v konzervativním poli dostaneme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\hat{1}.$$

Hamiltonián pro elektricky nabitou částici s nábojem Q a hmotností m podrobenou vlivu elektrického pole popsaného vektorovým potenciálem $\boldsymbol{A}$ a skalárním potenciálem φ a současně konzervativního pole s potenciální energií V má tvar

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - Q\boldsymbol{A}\,\hat{1})^2}{2\,m} + Q\varphi\,\hat{1} + V\,\hat{1}.$$

Vypnutí elektromagnetického pole $\boldsymbol{A} = 0$, $\varphi = 0$.

Momentu hybnosti.

Operátor momentu hybnosti
Momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ přiřadíme operátor

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}},$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= \mathrm{i}\,\hbar\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
\hat{L}_2 &= \mathrm{i}\,\hbar\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\\
\hat{L}_1 &= \mathrm{i}\,\hbar\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

Momentu hybnosti.

Operátor momentu hybnosti
Momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ přiřadíme operátor

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}},$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= \mathrm{i}\,\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\
\hat{L}_2 &= \mathrm{i}\,\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{L}_1 &= \mathrm{i}\,\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)
\end{aligned}$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$. Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme komutátor operátorů $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$.
Jestliže operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$ spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{ij}\,\hat{1}$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$. Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme komutátor operátorů $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$.
Jestliže operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$ spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{ij}\,\hat{1}$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$. Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme komutátor operátorů $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$.
Jestliže operátory $\hat{O}_1$ a $\hat{O}_2$ spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{ij}\,\hat{1}$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

1. $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$,
2. $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$,
3. $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$.

Použijeme pravidla pro operátor k-té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k, \hat{T}] = \frac{1}{2\,m}\sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k, \hat{p}_j^2] = \frac{1}{2\,m}\left(\sum_{j=1}^{3}\hat{p}_j[\hat{x}_k, \hat{p}_j] + \sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k, \hat{p}_j]\hat{p}_j\right) = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{p}_j.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{T}] = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{\boldsymbol{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\boldsymbol{p}, V] = \mathrm{i}\hbar\, grad\, V\,\hat{1}.$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

1. $[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$,
2. $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$,
3. $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$.

Použijeme pravidla pro operátor k-té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k,\hat{T}] = \frac{1}{2\,m}\sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k,\hat{p}_j^2] = \frac{1}{2\,m}\left(\sum_{j=1}^{3}\hat{p}_j[\hat{x}_k,\hat{p}_j]+\sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k,\hat{p}_j]\hat{p}_j\right) = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{p}_j.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\boldsymbol{r}},\hat{T}] = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{\boldsymbol{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\boldsymbol{p},V] = \mathrm{i}\,\hbar\, grad\, V\,\hat{1}.$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

1. $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$,
2. $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$,
3. $[\hat{A}, \hat{B}\,\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$.

Použijeme pravidla pro operátor k-té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k, \hat{T}] = \frac{1}{2\,m}\sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k, \hat{p}_j^2] = \frac{1}{2\,m}\left(\sum_{j=1}^{3}\hat{p}_j[\hat{x}_k, \hat{p}_j] + \sum_{j=1}^{3}[\hat{x}_k, \hat{p}_j]\hat{p}_j\right) = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{p}_j.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{T}] = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m}\hat{\boldsymbol{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\boldsymbol{p}, V] = \mathrm{i}\,\hbar\, grad\, V\,\hat{1}.$$

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:
Jestliže operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ negenerovaná platí veta i naopak:
Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$ je i systém vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Má-li operátor $\hat{F}$ generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$, že je také systémem vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:
Jestliže operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ negenerovaná platí veta i naopak:
Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$ je i systém vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Má-li operátor $\hat{F}$ generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$, že je také systémem vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:
Jestliže operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ negenerovaná platí veta i naopak:
Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$ je i systém vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Má-li operátor $\hat{F}$ generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$, že je také systémem vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:
Jestliže operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru $\hat{F}$ negenerovaná platí veta i naopak:
Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$ je i systém vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Má-li operátor $\hat{F}$ generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru $\hat{F}$, že je také systémem vlastních vektorů operátoru $\hat{G}$.

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B, pro jejíž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ platí komutační relace

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\triangle A} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\triangle B} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1}.$$

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B, pro jejiž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ platí komutační relace

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\triangle A} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\triangle B} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1}.$$

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory $\hat{F}$ a $\hat{G}$ společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F},\hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B, pro jejiž operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ platí komutační relace

$$[\hat{A},\hat{B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\triangle A} = \hat{A} - \langle A\rangle\hat{1}, \quad \widehat{\triangle B} = \hat{B} - \langle B\rangle\hat{1}.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\triangle A}, \widehat{\triangle B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ takto

$$\begin{aligned} \delta A &= |\langle(\widehat{\triangle A})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle A})^2\psi)^{1/2}|, \\ \delta B &= |\langle(\widehat{\triangle B})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle B})^2\psi)^{1/2}|, \end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká neurčitosti fyzikálních veličin A a B.

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi, (\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\triangle A}, \widehat{\triangle B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ takto

$$\begin{aligned} \delta A &= |\langle(\widehat{\triangle A})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle A})^2\psi)^{1/2}|, \\ \delta B &= |\langle(\widehat{\triangle B})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle B})^2\psi)^{1/2}|, \end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká neurčitosti fyzikálních veličin A a B.

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi, (\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\triangle A}, \widehat{\triangle B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ takto

$$\begin{aligned} \delta A &= |\langle(\widehat{\triangle A})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle A})^2\psi)^{1/2}|, \\ \delta B &= |\langle(\widehat{\triangle B})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle B})^2\psi)^{1/2}|, \end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká neurčitosti fyzikálních veličin A a B.

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi, (\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\triangle A}, \widehat{\triangle B}] = \mathrm{i}\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\triangle A}$ a $\widehat{\triangle B}$ takto

$$\begin{aligned} \delta A &= |\langle(\widehat{\triangle A})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle A})^2\psi)^{1/2}|, \\ \delta B &= |\langle(\widehat{\triangle B})\rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\triangle B})^2\psi)^{1/2}|, \end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká neurčitosti fyzikálních veličin A a B.

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi, (\xi\widehat{\triangle A} - \mathrm{i}\widehat{\triangle B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 3.

Funkce $I(\xi)$ je kvadratickou funkcí proměnné ξ

$$I(\xi) = \xi^2(\delta A)^2 + \xi\langle K\rangle + (\delta B)^2 \geq 0.$$

Pro diskriminant tedy musí platit

$$(\langle K\rangle)^2 - 4(\delta A)^2(\delta B)^2 \leq 0,$$

po malé úpravě dostaneme tzv. relaci neurčitosti

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2}|\langle K\rangle|.$$

Je-li střední hodnota komutátoru $\hat{K}$ nenulová, nemůže nikdy nastat případ $\delta A = \delta B = 0$ a obě veličiny nelze současně určit.
V případě nulového komutátoru $\hat{K}$ mohou pro neurčitosti δA a δB nastat obecně všechny případy a tedy i případ $\delta A = \delta B = 0$. Proto mluvíme o principiální současné měřitelnosti.

Relace neurčitosti - 3.

Funkce $I(\xi)$ je kvadratickou funkcí proměnné ξ

$$I(\xi) = \xi^2(\delta A)^2 + \xi\langle K\rangle + (\delta B)^2 \geq 0.$$

Pro diskriminant tedy musí platit

$$(\langle K\rangle)^2 - 4(\delta A)^2(\delta B)^2 \leq 0,$$

po malé úpravě dostaneme tzv. relaci neurčitosti

$$\delta A\delta B \geq \frac{1}{2}|\langle K\rangle|.$$

Je-li střední hodnota komutátoru $\hat{K}$ nenulová, nemůže nikdy nastat případ $\delta A = \delta B = 0$ a obě veličiny nelze současně určit.
V případě nulového komutátoru $\hat{K}$ mohou pro neurčitosti δA a δB nastat obecně všechny případy a tedy i případ $\delta A = \delta B = 0$. Proto mluvíme o principiální současné měřitelnosti.

Relace neurčitosti - 4.

Připomeneme-li si komutační relaci

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = \mathrm{i}\hbar\hat{1}$$

dostaneme závažnou relaci neurčitosti

$$\delta x_k \, \delta p_k \geq \frac{\hbar}{2},$$

které se říká Heisenbergova relace neurčitosti. Tato relace nás nutí vzdát se pojmu trajektorie částice.

Operátory kinetické energie $\hat{T}$ a potenciální energie $\hat{V}$ spolu nekomutují. Navíc nekomutují ani s hamiltoniánem, který je jejich součtem. Znamená to, že ve stavech s ostrou hodnotou energie E mají její složky T a V neostré hodnoty.

Relace neurčitosti - 4.

Připomeneme-li si komutační relaci

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{1}$$

dostaneme závažnou relaci neurčitosti

$$\delta x_k\,\delta p_k \geq \frac{\hbar}{2},$$

které se říká Heisenbergova relace neurčitosti. Tato relace nás nutí vzdát se pojmu trajektorie částice.

Operátory kinetické energie $\hat{T}$ a potenciální energie $\hat{V}$ spolu nekomutují. Navíc nekomutují ani s hamiltoniánem, který je jejich součtem. Znamená to, že ve stavech s ostrou hodnotou energie E mají její složky T a V neostré hodnoty.

Obsah

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové machaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrátních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 nalezl Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián $\hat{H}$ má tato rovnice tvar

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{1}$$

a nazývá se Schrödingerova rovnice.

Jejím základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové machaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrátních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 nalezl Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián $\hat{H}$ má tato rovnice tvar

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{1}$$

a nazývá se Schrödingerova rovnice.

Jejím základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové machaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrátních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 nalezl Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián $\hat{H}$ má tato rovnice tvar

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{1}$$

a nazývá se Schrödingerova rovnice.

Jejím základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové machaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrátních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 nalezl Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián $\hat{H}$ má tato rovnice tvar

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{1}$$

a nazývá se Schrödingerova rovnice.

Jejím základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ daného systému.

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián $\hat{H}$ nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{r})\, T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = T(t)\,\hat{H}\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\boldsymbol{r})\,T(t)$, dostaneme

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\hat{H}\varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na $\boldsymbol{r}$. Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E.

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián $\hat{H}$ nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \,=\, \varphi(\boldsymbol{r})\, T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\,T(t)}{\mathrm{d}t} \,=\, T(t)\,\hat{H}\,\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\boldsymbol{r})\,T(t)$, dostaneme

$$\mathrm{i}\,\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}\,T(t)}{\mathrm{d}t} \,=\, \frac{\hat{H}\,\varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na $\boldsymbol{r}$. Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E.

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián $\hat{H}$ nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{r})\, T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = T(t)\,\hat{H}\,\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\boldsymbol{r})\,T(t)$, dostaneme

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\hat{H}\,\varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na $\boldsymbol{r}$. Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E.

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián $\hat{H}$ nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{r})\, T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$\mathrm{i}\hbar \varphi(\boldsymbol{r}) \frac{\mathrm{d} T(t)}{\mathrm{d} t} = T(t)\, \hat{H} \varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\boldsymbol{r})\, T(t)$, dostaneme

$$\mathrm{i}\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\mathrm{d} T(t)}{\mathrm{d} t} = \frac{\hat{H} \varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na $\boldsymbol{r}$. Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = E\,T(t) \qquad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\boldsymbol{r}) = E\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se stacionární Schrödingerova rovnice.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru $\hat{H}$, t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = E\,T(t) \quad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\boldsymbol{r}) = E\varphi(\boldsymbol{r}). \quad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se stacionární Schrödingerova rovnice.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru $\hat{H}$, t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} &= E\,T(t) \qquad (2)\\
\hat{H}\varphi(\boldsymbol{r}) &= E\,\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

První má řešení

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se stacionární Schrödingerova rovnice.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru $\hat{H}$, t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} &= E\,T(t) \qquad (2) \\ \hat{H}\varphi(\boldsymbol{r}) &= E\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad (3) \end{aligned}$$

První má řešení

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se stacionární Schrödingerova rovnice.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru $\hat{H}$, t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývájí hladinami energie systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n.

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi_n(\boldsymbol{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{4}$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají stacionární stavy. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývájí hladinami energie systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n.

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi_n(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}. \tag{4}$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají stacionární stavy. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazýváјí hladinami energie systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n.

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi_n(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}. \tag{4}$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají stacionární stavy. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývájí hladinami energie systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n.

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi_n(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}. \tag{4}$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají stacionární stavy. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}$.

Nestacionární Schrödingerova rovnice

Vraťme se k nestacionární Schrödingerově rovnici (1). Všechna její řešení mají tvar (princip superpozice)

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_n c_n \varphi_n(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}.$$

Stavy, popsané touto vlnovou funkcí se nazývají nestacionární stavy.

Má-li studovaný systém časově závislý hamiltonián $\hat{H}(t)$, platí pouze nestacionární Schrödingerova rovnice a všechny stavy systému jsou nestacionárními.

Schrödingerova rovnice - volná částice

Pro jednoduchost budeme nejdříve diskutovat volnou částici v jedné dimenzi. Odpovídající Schrödingerova rovnice s potenciálem $V = 0$ má tvar

$$\mathrm{i}\,\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\,m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Stacionární Schrödingerova rovnice

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2\,m\,E}{\hbar^2} \right) \varphi(x) \;=\; 0.$$

Označme

$$\frac{2\,m\,E}{\hbar^2} \;=\; k^2,$$

Řešení stacionární Schrödingerovy rovnice je

$$\varphi(x) \;=\; \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\,k\,x}.$$

Schrödingerova rovnice - volná částice- 2

Zaveďme impuls částice $p = \hbar k$, potom časově závislá vlnová funkce je

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(E\,t - k\,p\,x)},$$

kde impulz p může nabývat kladných i záporných hodnot.

Celková energie částice je rovna její kinetické energii

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\,m} = \frac{p^2}{2\,m}.$$

Vlnová funkce je vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x) = \frac{p^2}{2\,m}\varphi(x)$$

s vlastní hodnotou $\frac{p^2}{2\,m}$ a operátoru impulsu

$$\hat{p}\psi = -\mathrm{i}\,\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi = p\,\psi$$

s vlastní hodnotou p. Oba operátory spolu komutují, mají tedy stejné vlastní funkce.

Schrödingerova rovnice - volná částice- 2

Zaveďme impuls částice $p = \hbar k$, potom časově závislá vlnová funkce je

$$\psi(x,t) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(E\,t - k\,p\,x)},$$

kde impulz p může nabývat kladných i záporných hodnot.

Celková energie částice je rovna její kinetické energii

$$E \;=\; \frac{\hbar^2 k^2}{2\,m} \;=\; \frac{p^2}{2\,m}.$$

Vlnová funkce je vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{H}\,\psi \;=\; -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x) \;=\; \frac{p^2}{2\,m}\varphi(x)$$

s vlastní hodnotou $\frac{p^2}{2\,m}$ a operátoru impulsu

$$\hat{p}\,\psi \;=\; -\mathrm{i}\,\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi \;=\; p\,\psi$$

s vlastní hodnotou p. Oba operátory spolu komutují, mají tedy stejné vlastní funkce.

Obsah

- Lukeš J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolínum, 2002.

- Lukeš J.: *Teorie míry a integrálu 1.*, Univerzita Karlova v Praze, 1980
http://matematika.cuni.cz/dl/lukes/tmi1.pdf

- Taylor A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia Praha,1973.

- O. Bílek, V. Kapsa: *Kvantová mechanika pro učitele*, MFF UK Praha