

# Politecnico di Torino



Politecnico  
di Torino

Department of Mechanical and Aerospace Engineering  
Master Degree in Space Engineering

## **Manovre di escape da orbite Lyapunov attorno al punto $L_2$ Terra-Sole con propulsione elettrica**

Relatori:

Prof. Lorenzo Casalino  
Ing. Luigi Mascolo

Candidato:

Chiara Mugoni

Anno accademico

2021/2022



## Sommario

1.	Introduzione .....	1
2.	Fondamenti di meccanica orbitale .....	2
2.1	Parametri orbitali .....	2
2.2	Problema dei 2 corpi.....	4
2.3	Problema dei 3 corpi circolare ristretto – CR3BP .....	5
2.3.1	Punti lagrangiani .....	8
2.4	Sistemi di riferimento .....	12
2.4.1	Sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittica .....	12
2.4.2	Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale.....	13
2.5	Missioni interplanetarie .....	14
2.5.1	Manovra di Escape .....	15
2.5.2	Manovra di Oberth .....	18
2.6	Orbite di Lissajous.....	19
2.6.1	Missioni orbite Lissajous.....	20
3.	Fondamenti Propulsione Spaziale .....	23
3.1	Overview.....	23
3.1.1	Classificazione.....	23
3.1.2	Generalità .....	23
3.1.3	Equazione di Tsiolkovsky .....	25
3.2	Propulsione Elettrica .....	27
3.2.1	Classificazione.....	27
3.2.2	Generalità .....	28
3.2.3	Propulsione elettrostatica – Propulsori a Ioni.....	28
4.	Metodi di ottimizzazione Indiretti per traiettorie spaziali .....	33
4.1	Teoria del controllo Ottimale .....	33
4.2	Boundary Value Problem.....	37
4.3	Modello Dinamico .....	42
4.3.1	Coordinate sferiche .....	43
4.4	State and Adjoint Variables .....	44
4.5	Perturbazioni .....	47
4.5.1	Pressione di radiazione solare .....	47
4.5.2	Perturbazione Luni-Solare .....	48
4.5.3	Modello del potenziale terrestre.....	49
5.	Casi di Studio .....	51
5.1	Costruzione di Orbite Lyapunov .....	51

5.2	Partenza tempo fisso $C_3$ libera.....	55
5.3	Partenza tempo libero $c_3$ fissata .....	60
	$C_3=0.05$ .....	60
	$C_3=0.1$ .....	64
	$C_3=0.15$ .....	67
	$C_3=0.2$ .....	70
	Considerazioni .....	74
	Conclusioni .....	76
	Bibliografia.....	78

## Lista delle Figure

Figura 2-1 Sezione conica .....	2
Figura 3-1 Schema conservazione del momento .....	24
Figura 4-1 EME2000 vs il sistema di riferimento topocentrico .....	44
Figura 4-2 Geometria schematica della perturbazione gravitazionale (Casalino L.).....	48
Figura 5-1 Costruzione orbita CR3BP .....	52
Figura 5-2 Implementazione orbita Lyapunov con correzione sulla velocità .....	53
Figura 5-3 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022) .....	54
Figura 5-4 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022) .....	54
Figura 5-5 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022) .....	55
Figura 5-6 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso $C_3$ libera .....	56
Figura 5-7 Switching Function. . Caso $C_3$ libera .....	57
Figura 5-8 Andamento $C_3$ nel tempo. Caso $C_3$ libera .....	57
Figura 5-9 Andamento $C_3$ partenza di riferimento 15/10/25. . Caso $C_3$ libera .....	58
Figura 5-10 Perturbazione solare . Caso $C_3$ libera .....	59
Figura 5-11 Perturbazione Lunisolare . Caso $C_3$ libera.....	59
Figura 5-12 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso $C_3=0.05$ .....	60
Figura 5-13 Switching Function caso limite . Caso $C_3=0.05$ .....	61
Figura 5-14 Switching Function. Caso $C_3=0.05$ .....	62
Figura 5-15 Andamento $C_3$ nel tempo. Caso $C_3=0.05$ .....	63
Figura 5-17 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso $C_3=0.10$ .....	64
Figura 5-18 Switching Function. . Caso $C_3=0.1$ .....	65
Figura 5-19 Andamento $C_3$ nel tempo. Caso $C_3=0.10$ .....	66
Figura 5-20 Andamento $C_3$ partenza di riferimento 15/10/25. Caso $C_3=0.10$ .....	66
Figura 5-21 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso $C_3=0.15$ .....	67
Figura 5-22 Switching Function. . Caso $C_3=0.15$ .....	68
Figura 5-23 Andamento $C_3$ nel tempo. Caso $C_3=0.15$ .....	68
Figura 5-24 Andamento $C_3$ partenza di riferimento 15/10/25. . Caso $C_3=0.15$ .....	69
Figura 5-25 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso $C_3=0.20$ .....	70
Figura 5-26 Switching Function. . Caso $C_3=0.2$ .....	71
Figura 5-27 Andamento $C_3$ nel tempo. Caso $C_3=0.20$ .....	71

Figura 5-28 Andamento $C_3$ partenza di riferimento 15/10/25. . Caso $C_3 = 0.20$ .....	72
Figura 5-29 Grafico $\theta_{Sole}$ vs $\theta_{Spacecraft}$ .....	73
Figura 5-30 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Tutti i casi. ....	74
Figura 5-31 Andamento $C_3$ nel tempo. Tutti i casi.....	75

## Lista delle Tabelle

Tabella 1 Caratteristiche di diversi tipi di orbite e traiettorie.....	3
Tabella 2 Caratteristiche di diversi tipi di orbite e traiettorie.....	28
Tabella 3 Condizioni iniziali in riferimento sinodico $x,y,z$ e $V_x, V_y, V_z$ .....	52
Tabella 4: Conversione date di partenza da forma dimensionale standard ad adimensionale.....	53
Tabella 5 Conversione data di partenza.....	55
Tabella 6 Dati $C_3$ Libera .....	56
Tabella 7 Dati $C_3 = 0.05$ .....	61
Tabella 8 Dati Caso $C_3 = 0.1$ .....	64
Tabella 9 Dati Caso $C_3 = 0.15$ .....	67
Tabella 10 Dati Caso $C_3 = 0.2$ .....	70

## 1. Introduzione

L'argomento trattato in questa tesi si focalizza sui punti di Lagrange, punti di grande interesse poiché rappresentano una posizione nello spazio in cui, nella dinamica del problema dei tre corpi, un veicolo spaziale rimane in una posizione di equilibrio. È ben chiaro che tali posizioni sono strategiche e vantaggiose per molte missioni spaziali, alcune già in atto, altre nel prossimo futuro. Come il progetto di una nuova stazione spaziale "Lunar Orbital Platform-Gateway - LOP-G" della NASA, la quale verrà costruita a partire dal 2023 e sarà collocata nel punto Lagrangiano  $L_2$  del sistema Luna-Terra. Anche nel sistema Sole-Terra l'interesse sui punti Lagrangiani è in costante crescita. La missione "no name", precedentemente nota come "Lagrange", prevede due veicoli spaziali nei punti di Lagrange  $L_1$  e  $L_5$  nel sistema Sole-Terra. La missione "Comet Interceptor" sempre nel punto Lagrangiano  $L_2$  in Sole-Terra, così come la missione "Plato" dell'ESA prevista per il 2026 e tante altre.

È fondamentale dunque riporre l'attenzione su tali punti e sulle orbite attorno ad essi, essendo siti che ospiteranno molte missioni tra cui appunto stazioni spaziali, missioni di studio dello spazio profondo, punti di partenza per missioni interplanetarie ecc. Queste ultime richiedono manovre di escape, sulle quali si concentra tale tesi. In particolare lo studio della manovra di escape dal punto Lagrangiano  $L_2$  è diventato fondamentale per le missioni future; tale punto  $L_2$  è ideale anche per l'astronomia perché un veicolo spaziale è abbastanza vicino per comunicare facilmente con la Terra; lo spacecraft può tenere il Sole, la Terra e la Luna per grandi periodi in condizioni di non eclisse, al fine di essere sempre esposto all'energia solare, e fornisce una visione chiara dello spazio profondo.

Questa tesi mira a descrivere gli aspetti numerici e fisici dell'ottimizzazione della manovra di fuga da un'orbita Lyapunov attorno al punto Lagrangiano collineare Sole-Terra  $L_2$ . Il metodo utilizzato per il processo di ottimizzazione è un metodo indiretto, basato sulla teoria del controllo ottimale, che mira alla massimizzazione della frazione di carico utile attraverso la minimizzazione del consumo di propellente.

Inizialmente viene effettuata una panoramica sui fondamenti della meccanica orbitale, al fine di fornire tutte le informazioni necessarie alla comprensione del lavoro svolto successivamente. Sono anche riportati dei fondamenti di propulsione spaziale per il medesimo motivo. Sono descritte varie missioni passate, presenti e future sul punto Lagrangiano  $L_2$ , per fornire un inquadramento storico.

In secondo luogo, sono descritte le caratteristiche generali dei metodi indiretti di ottimizzazione delle traiettorie spaziali, in particolare la teoria del controllo ottimale. È introdotto il modello dinamico al quale si applica la teoria del controllo ottimale e una descrizione delle perturbazioni di maggiore interesse e la specificazione delle condizioni al contorno del problema considerato.

Infine, si riportano i casi di studio e i risultati ottenuti.



## 2. Fondamenti di meccanica orbitale

Prima di affrontare l'argomento principale di questa tesi, è necessario riportare le conoscenze base della meccanica del volo spaziale. In questo capitolo, dunque, vengono presentate le conoscenze base e gli aspetti fisici della meccanica del volo spaziale. Verranno introdotti i parametri orbitali, il problema dei due corpi e tre corpi e lo studio sui punti lagrangiani. Successivamente una panoramica dei sistemi di riferimento utilizzati e delle missioni planetarie, in particolare sulle manovre di escape.

### 2.1 Parametri orbitali

È necessario introdurre i sei parametri orbitali classici poiché tramite questi si possono definire orbita e posizione di un corpo nel problema dei due corpi. Esistono altri tipi di parametri per tale rappresentazione, in tale studio si utilizzano i parametri orbitali classici che sono i seguenti:

- **Eccentricità  $e$**

È legata alla forma dell'orbita. Tale collegamento può essere dimostrato tramite l'analisi della geometria delle sezioni coniche. Il valore dell'eccentricità determina le famiglie di traiettorie come riportato nella Tabella 1.

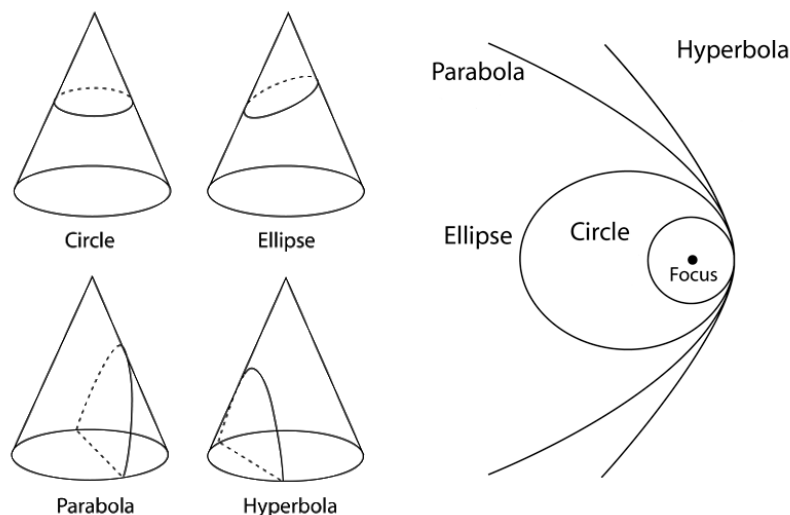


Figura 2-1 Sezione conica

- **Semiassse maggiore  $a$**

È legata alla dimensione dell'orbita ma anche alla sua energia. In particolare, si può dimostrare, unificando l'analisi energetica a quella geometrica, che:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.1)$$

- **Argomento del periastro  $\omega$**

Definisce la posizione del periastro, il punto più vicino della traiettoria al corpo principale. Ovvero l'angolo tra il periastro e la linea dei nodi, se il piano che contiene l'orbita ha una inclinazione rispetto al riferimento inerziale, oppure l'angolo fra il periastro e l'asse di riferimento per orbite planari.

- Ascensione retta del nodo ascendente  $\Omega$   
La RAAN fornisce la posizione del nodo ascendente della traiettoria, ovvero il punto in cui il corpo secondario entra nella regione dei valori positivi della coordinata z.
- Inclinazione  $i$   
È l'inclinazione del piano dell'orbita rispetto al piano di riferimento.
- Anomalia vera  $\nu$   
È la posizione angolare del corpo secondario lungo l'orbita del periastro. Con le ipotesi di orbite kepleriane non perturbate, questo è l'unico parametro variabile, dipendente dal tempo, mentre tutti gli altri sono costanti.

In Figura 2-2 sono mostrati i parametri orbitali per una più semplice comprensione. Nel caso in figura, i parametri orbitali sono definiti per un satellite in orbita intorno alla Terra. Tuttavia, la loro denominazione può essere estesa a qualsiasi corpo secondario in rivoluzione attorno ad un primario molto più grande. I parametri orbitali sono ovviamente legati tra loro a seconda della traiettoria, nella Tabella 1 è possibile leggere la relazione tra eccentricità, semiasse maggiore, energia e forma.

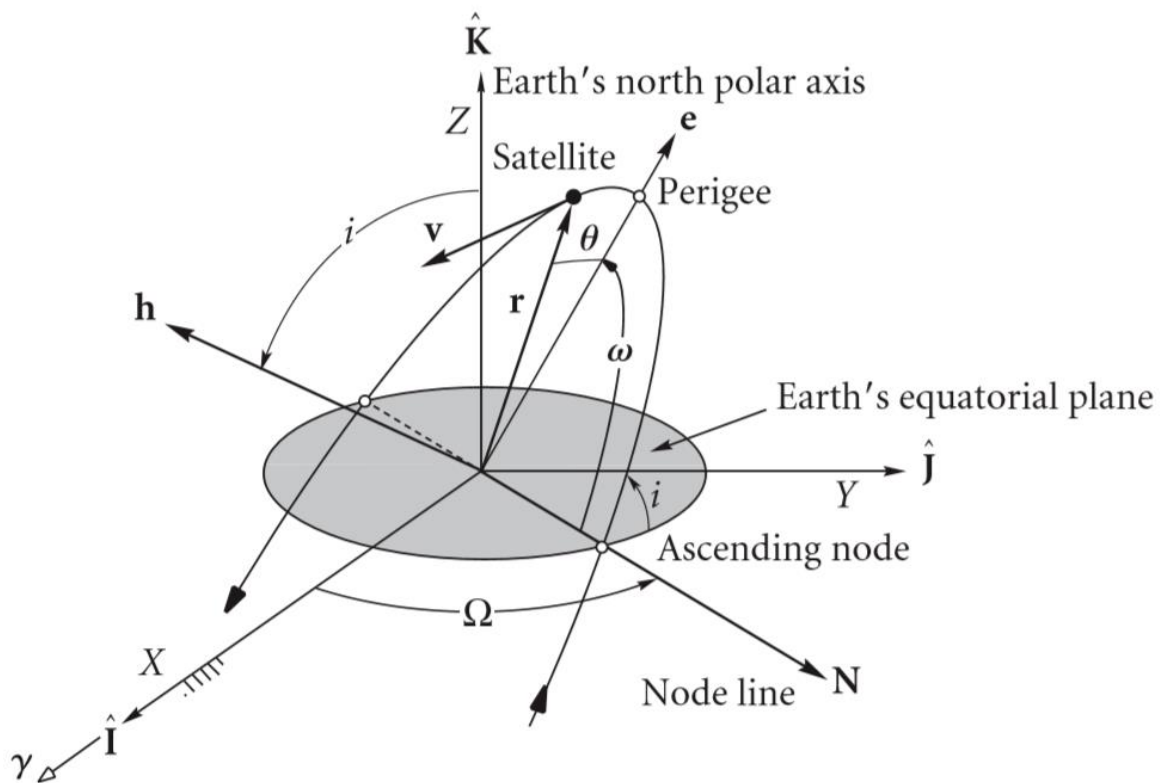


Figura 2-2 Parametri orbitali classici

Trajectory	Eccentricity	Semi Major Axis	Energy	$V_{\infty}$
Circular	$e = 0$	$a > 0$	$E < 0$	
Elliptical	$0 < e < 1$	$a > 0$	$E < 0$	
Parabolic	$e = 1$	$a \rightarrow \infty$	$E = 0$	$V_{\infty} = 0$
Hyperbolic	$e > 1$	$a < 0$	$E > 0$	$V_{\infty} > 0$

Tabella 1 Caratteristiche di diversi tipi di orbite e traiettorie

## 2.2 Problema dei 2 corpi

Il problema dei due corpi è alla base di ogni problema della meccanica orbitale (Roger R. Bate, 1971). Tale problema descrive il moto di due corpi che interagiscono tra loro unicamente tramite la reciproca forza gravitazionale. La forza gravitazionale è un'interazione centrale e attrattiva, proporzionale al prodotto delle due masse coinvolte e indirettamente proporzionale al quadrato delle distanze dei due corpi:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2)$$

Dove  $G = 6.67 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  è la costante gravitazionale,  $r$  è il vettore distanza tra la massa principale  $M$  e la massa secondaria  $m$ .

Il problema dei due corpi può essere ancora semplificato introducendo l'ipotesi che una delle due masse sia trascurabile rispetto all'altra, applicabile dunque a sistemi come Terra-Satellite o Sole-Terra. Con tale ipotesi il problema prende il nome di Problema dei due corpi ristretto (R2BP). L'ipotesi del R2BP può essere riassunta come segue:

- $M \gg m$
- Le masse sono puntiformi e concentrate nei centri di massa dei corpi
- Omogeneità della distribuzione di massa
- Simmetria sferica della distribuzione di massa
- Solo forze gravitazionali all'interno del sistema

Con queste ipotesi è possibile scrivere l'equazione del moto del corpo  $m$  rispetto al corpo  $M$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.3)$$

Dove  $\mu = GM$  è il parametro gravitazionale dato dal prodotto della costante gravitazionale e la massa del corpo maggiore. Integrando questa equazione è possibile ottenere l'equazione che esprime la distanza tra i due corpi:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \nu} \quad (2.4)$$

Dove  $e$  e  $\nu$  fanno parte dei parametri orbitali descritti nel paragrafo precedente,  $h$  è il momento angolare.

Tale equazione è fondamentale perché genera traiettorie che seguono la forma di sezioni coniche, rappresentate nella Figura 2-2

Definiamo ora le altre grandezze fisiche presenti nella formula, le quali sono costanti durante tutto il moto se non ci sono interazioni.

- Momento angolare  $\mathbf{h}$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

Poiché il momento angolare è costante sia nel modulo che nell'orientamento, il moto

seguito dal corpo più piccolo intorno a quello primario nel R2BP è una traiettoria planare.

- Energia meccanica  $E$

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.6)$$

Dove il primo termine è l'energia cinetica mentre il secondo termine l'energia potenziale.

### 2.3 Problema dei 3 corpi circolare ristretto – CR3BP

Un altro argomento che è necessario trattare in previsione dello studio per questa tesi è il problema dei tre corpi circolare ristretto (Roger R. Bate, 1971) . Il CR3BP è una semplificazione del problema dei tre corpi, ma comunque tramite queste semplificazioni non sono ottenibili equazioni risolvibili se non numericamente. Si descrivono in seguito le ipotesi:

- Tre corpi: due dei quali sono i corpi principali  $m_1$  e  $m_2$
- Ristretto:  $m \ll m_1$  e  $m_2$
- Circolare: i corpi principali hanno orbite circolari rispetto al centro di massa.

Vari sistemi possono essere modellati e studiati sotto tali ipotesi come, ad esempio, il sistema Terra-Luna-Spacecraft o il sistema Sole-Terra-Spacecraft.

Si definiscono due costanti fondamentali:

$$M = m_1 + m_2 \quad (2.7)$$

$$\mu = \frac{m_2}{M} \quad (2.8)$$

Dove  $\mu$  è il parametro massico di adimensionalizzazione fra la massa del corpo primario più piccolo e la massa complessiva del sistema binario.

Per il calcolo della posizione del centro di massa si procede all'equilibrio dei momenti statici:

$$(1 - \mu)M * x = \mu M(R - x) \rightarrow x = \mu R \quad (2.9)$$

Dove  $R$  rappresenta la distanza tra i due corpi. La posizione dei corpi principale, rispetto al centro di massa, può essere facilmente descritto come:

$$m_1 = \begin{bmatrix} -\mu R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu)R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Considerando come riferimento la Figura 2-3:

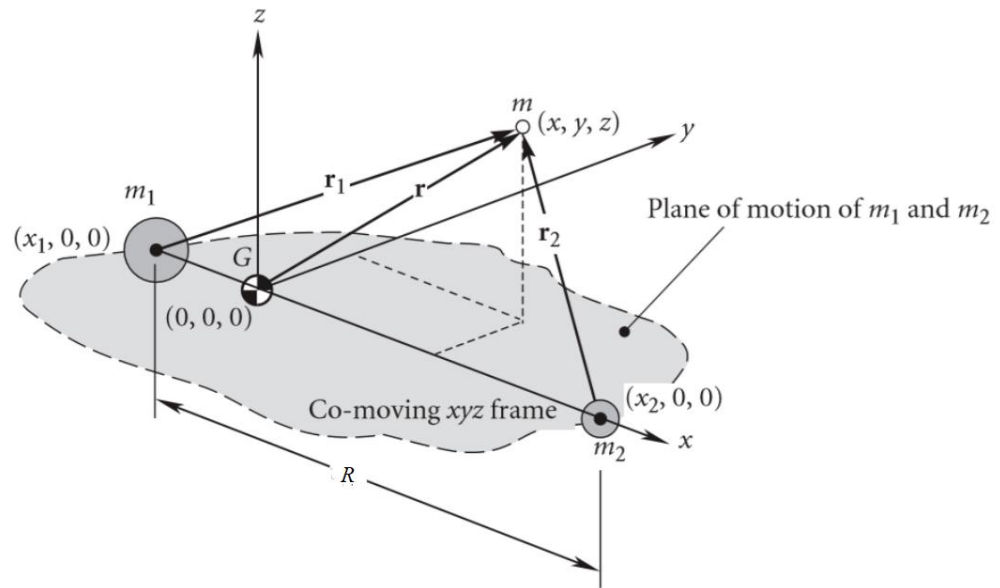


Figura 2-3 Problema dei tre corpi

È possibile, inoltre, rappresentare le distanze  $r_1$  e  $r_2$ , rispettivamente la distanza del corpo primario e la distanza del corpo secondario dalla massa  $m$  come segue:

$$r_1 = \begin{bmatrix} x + \mu R \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} x - (1 - \mu)R \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

La velocità angolare del sistema può essere definita come:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (2.14)$$

Per ricavare le equazioni di moto del corpo  $m$  è necessario tener conto che sono scritte rispetto al sistema rotante  $M=m_1+m_2$ , il quale non è inerziale. Si ovvia il problema scrivendo le forze apparenti, considerando dunque l'accelerazione di Coriolis e quella centripeta.

$$\ddot{r} + \omega \wedge (\omega \wedge r) + 2\omega \wedge \dot{r} = \frac{1}{m} (F_1 + F_2) \quad (2.15)$$

Dove

$$F_1 = -G \frac{(1 - \mu)Mm}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \quad (2.16)$$

$$F_2 = -G \frac{\mu M m}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \quad (2.17)$$

Le equazioni del moto possono essere scritte in forma scalare esplicitando le componenti lungo le tre coordinate:

$$\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y} = -GM \frac{1-\mu}{r_1^3} (x + \mu R) - GM \frac{\mu}{r_2^3} [x - (1-\mu)R] \quad (2.18)$$

$$\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega \dot{x} = -GM \frac{1-\mu}{r_1^3} y - GM \frac{\mu}{r_2^3} y \quad (2.19)$$

$$\ddot{z} = -GM \frac{1-\mu}{r_1^3} z - GM \frac{\mu}{r_2^3} z \quad (2.20)$$

Le equazioni del moto possono essere adimensionalizzate tramite le seguenti sostituzioni:

$$\rho = \frac{r}{R} \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{x}{R} \quad \eta = \frac{y}{R} \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad (2.21)$$

$$\tau = t\omega \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \quad (2.22)$$

Sostituendo questa ultime nelle equazioni del moto (2.18), (2.19) e (2.19) si ottengono le equazioni del moto adimensionalizzate:

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1-\mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1-\mu)}{\rho_2^3} \quad (2.23)$$

$$\eta'' - \eta + 2\xi' = -(1-\mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.24)$$

$$\zeta'' = -(1-\mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.25)$$

Queste equazioni sono differenziali del secondo ordine, non lineari e accoppiate tra loro, risolvibili solo per integrazione numerica. È importante introdurre la definizione della funzione gradiente del potenziale nel problema dei tre corpi circolare ristretto al fine di definire i punti lagrangiani.

$$U = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad (2.26)$$

Il quale può essere a sua volta espresso in forma adimensionale

$$u = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.27)$$

Derivando la funzione potenziale adimensionalizzata rispetto alle coordinate adimensionalizzate e sostituendo le derivate nel sistema delle equazioni del moto si ottiene un nuovo set di equazioni del moto rispetto al gradiente del potenziale

$$\xi'' - 2\eta' = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.28)$$

$$\eta'' + 2\xi' = -\frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.29)$$

$$\zeta'' = -\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (2.30)$$

### 2.3.1 Punti lagrangiani

Dalla formulazione del problema dei tre corpi circolare ristretto è possibile identificare cinque particolari posizioni nello spazio in cui le forze gravitazionali e inerziali sono in equilibrio. Tali punti sono noti come punti Lagrangiani e sono caratterizzati dalle seguenti uguaglianze:

$$\xi' = 0 \quad \xi'' = 0 \quad (2.31)$$

$$\eta' = 0 \quad \eta'' = 0 \quad (2.32)$$

$$\zeta' = 0 \quad \zeta'' = 0 \quad (2.33)$$

Dunque, matematicamente, se uno spacecraft si trova in un punto Lagrangiano ruota in modo solidale con il sistema. Data la definizione di punto Lagrangiano, l'equazione del moto in questi punti diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.36)$$

Questo significa che i punti Lagrangiani sono i punti stazionari della funzione potenziale del sistema dei tre corpi.

L'unica condizione che permette di soddisfare l'equazione (2.36) è:

$$\zeta = 0 \quad (2.37)$$

Il che significa che tutti i punti Lagrangiani giacciono nello stesso piano  $(\xi, \eta)$ . I punti Lagrangiani possono essere suddivisi in famiglie: i punti Collineari e i punti Equilaterali.

### Punti Collineari

Le condizioni per cui si ottengono questi punti sono:

$$\zeta = 0 \quad (2.38)$$

$$\eta = 0 \quad (2.39)$$

I punti Collineari hanno la caratteristica di essere punti di equilibrio instabile. Come si intuisce dal nome, questi punti giacciono sulla stessa linea, che corrisponde all'asse x e sono tre:

- Punto Lagrangiano  $L_1$

Si trova imponendo:

$$-\mu < \xi < (1 - \mu) \quad (2.40)$$

E risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (2.41)$$

Questo è caratterizzato da

$$\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.42)$$

- Punto Lagrangiano  $L_2$

Si trova imponendo:

$$\xi > (1 - \mu) \quad (2.43)$$

E risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (2.44)$$



Questo è caratterizzato da

$$\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.45)$$

Ovviamente è nella direzione opposta al punto Lagrangiano  $L_1$ .

- Punto Lagrangiano  $L_3$

Si trova imponendo:

$$\xi > -\mu \quad (2.46)$$

E risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Questo è caratterizzato da

$$\rho_1 = 1 \quad (2.48)$$

$$\rho_2 = 2 \quad (2.49)$$

### Punti Equilaterali

Questi due punti hanno la peculiarità di essere stabili. Le condizioni per cui si ottengono questi punti sono:

$$\zeta = 0 \quad (2.50)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (2.51)$$

Come si evince dal nome questi due punti hanno la stessa distanza dalle due masse. Possono essere ricavati risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu)(\xi + \mu) - \mu[\xi - (1 - \mu)] = 0 \\ \eta - (1 - \mu)\eta - \eta\mu = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Si ottengono i seguenti punti:

- Punto Lagrangiano  $L_4$

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu \quad (2.53)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.54)$$

- Punto Lagrangiano L<sub>5</sub>

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu \quad (2.55)$$

$$\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.56)$$

I due punti Equilaterali si trovano ai vertici di due triangoli equilateri formati tra le due masse principali. I due punti ruotano grossomodo sulla stessa orbita della massa  $m_2$  intorno a  $m_1$ . Mentre  $L_4$  anticipa la massa  $m_2$  di  $60^\circ$ ,  $L_5$  segue  $m_2$  con la stessa distanza angolare. I punti Equilateri sono punti di equilibrio stabile. Se si verifica una perturbazione, la navicella torna alla sua posizione. Nella realtà dell'astrodinamica, se si analizza il sistema reale, senza le ipotesi adottate per semplificarlo, i punti Lagrangiani non sono matematicamente né dei punti né delle regioni di stabilità, ma delle zone in cui le perturbazioni tendono a preservare o a far divergere, in maniera più o meno ingente, il corpo secondario rispetto alla sua posizione iniziale.

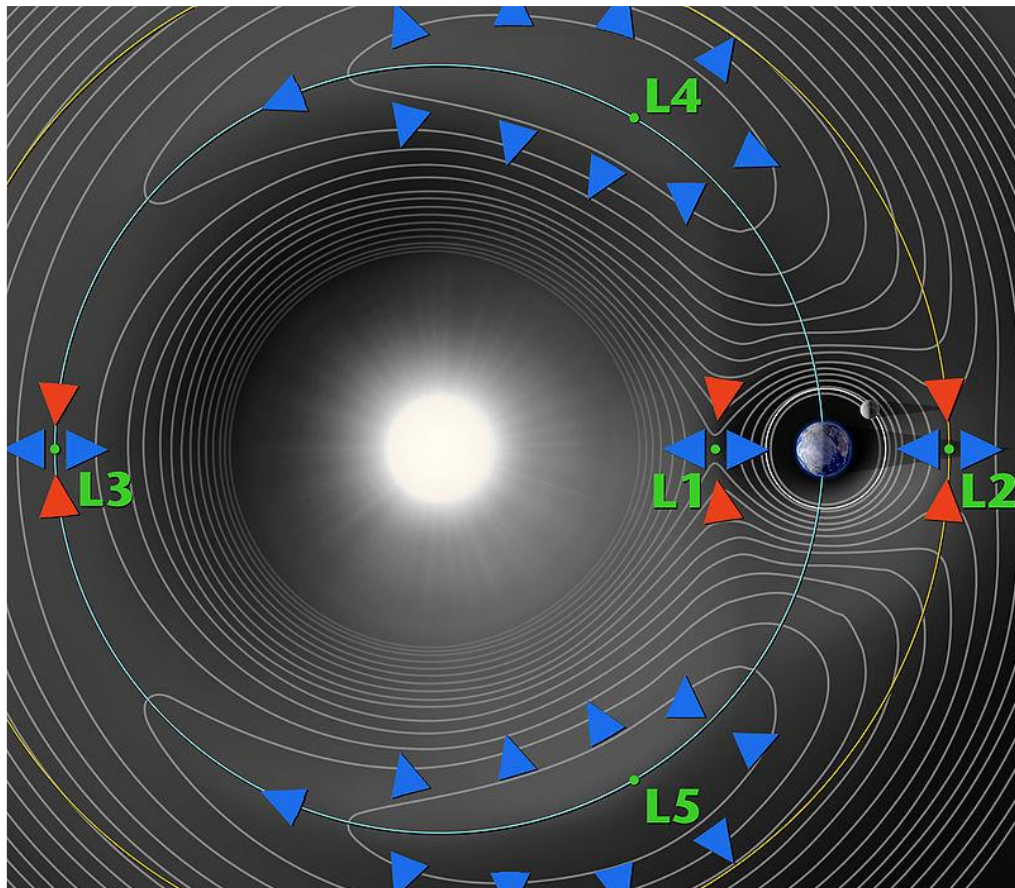


Figura 2-4 Punti Lagrangiani sistema Terra-Sole

Considerando il sistema a tre corpi Sole-Terra-Satellite:

- L<sub>1</sub>: Si trova tra il Sole e la Terra
- L<sub>2</sub>: Si trova su un'orbita esterna a quella della Terra ed è caratterizzata dalla stessa distanza di L<sub>1</sub>

- $L_3$ : È la posizione simmetrica della Terra rispetto al Sole
- $L_4$ : Precede la Terra di 60 sulla sua orbita
- $L_5$ : Insegue la Terra di 60 sulla sua orbita.

## 2.4 Sistemi di riferimento

Per avere una visione completa per lo studio affrontato in questa tesi è necessario definire i più comuni sistemi di riferimento (Giovanni Mengali, 2013). I sistemi di riferimento destrorsi sono definiti da tre punti fondamentali:

- Origine
- Piano fondamentale
- Verso positivo dell'asse z

Nello studio delle orbite interplanetarie si utilizza il sistema di riferimento eliocentrico, mentre per lo studio di orbite attorno alla Terra si utilizza un sistema di riferimento con origine nel baricentro del pianeta, il sistema Geocentrico-Equatoriale.

### 2.4.1 Sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittica

Il sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittica  $\tau_{\odot} (O_{\odot}; x_{\epsilon}, y_{\epsilon}, z_{\epsilon})$  ha come origine il baricentro del Sole ed il piano coincide con il piano dell'eclittica. La direzione  $> 0$  di z si trova verso l'emisfero che contiene la stella Polaris. La linea di intersezione del piano dell'eclittica e del piano equatoriale terrestre definisce la direzione dell'asse  $x_{\epsilon}$ .

All'equinozio di primavera la linea che unisce il centro della Terra con il centro del Sole punta verso la direzione positiva dell'asse  $x_{\epsilon}$ .

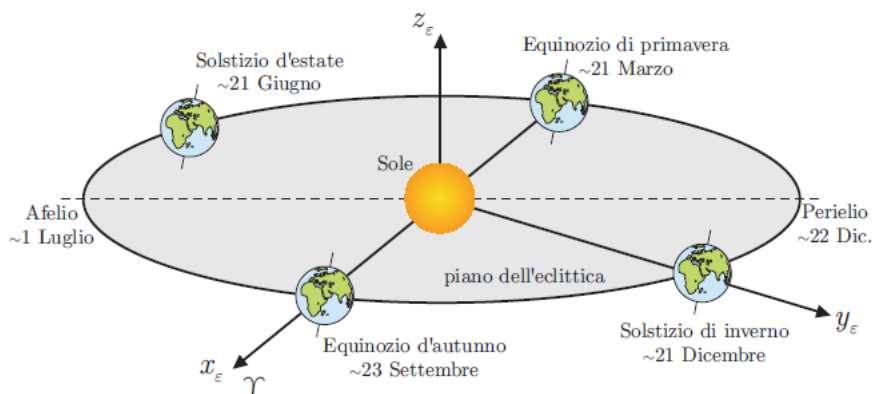


Figura 2-5 Sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittico, (Giovanni Mengali, 2013)

L'asse terrestre, però, non è fisso, a causa di fenomeni di nutazione e precessione dovute all'attrazione fondamentale di Sole e Luna. Per tale motivo, la linea di intersezione del piano equatoriale con il piano dell'eclittica varia nel tempo. Da questo deriva che il sistema Eliocentrico-Eclittico non è rigorosamente inerziale. Esistono tre principali perturbazioni che provocano tale moto del sistema di riferimento:

- Il moto di precessione dovuto all'attrazione dei vari pianeti. Questo disturbo prende il nome di Precessione Planetaria ed è quantificabile in una precessione degli equinozi di 12"/secolo e in una riduzione dell'inclinazione del piano dell'eclittica di 47"/secolo.
- La precessione dell'asse terrestre principalmente composta da due contributi: la precessione Luni-Solare e la precessione Planetaria. Esiste dunque una coppia che induce un moto di precessione dell'asse terrestre lungo un cono di apertura pari all'inclinazione dell'asse rispetto all'eclittica. Ha un periodo di circa 26000 anni, dunque nella metà di tale periodo l'asse nord non sarà più verso la stella Polare, ma verso la stella Vega.
- La nutazione che ha come effetto la precessione dell'asse degli equinozi. Tale perturbazione è dovuta dalla Luna che genera una coppia agente sull'asse terrestre il quale oscilla con un movimento nutazionale con un periodo di circa 18.6 anni.

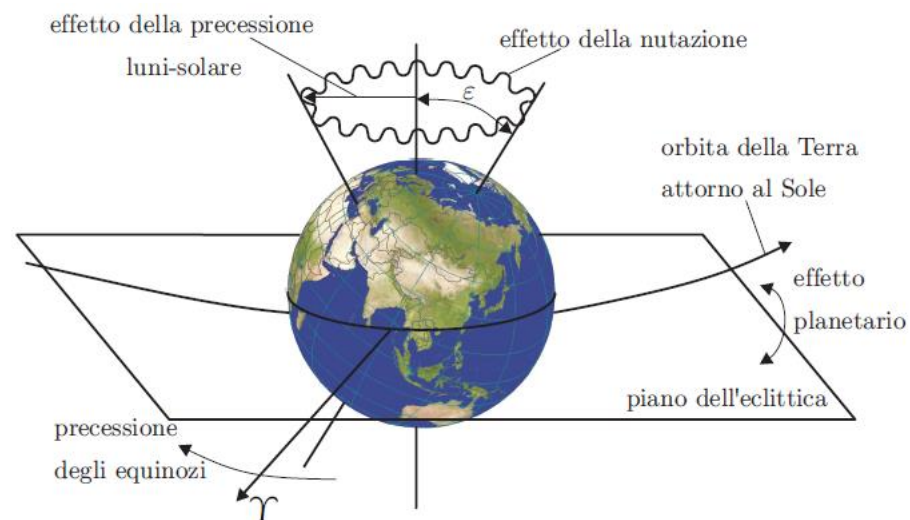


Figura 2-6 Principali effetti perturbativi sul sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittico (Giovanni Mengali, 2013)

#### 2.4.2 Sistema di riferimento Geocentrico Equatoriale

Il sistema Geocentrico-Equatoriale  $\tau_{\oplus} (O_{\oplus}; x, y, z)$ , mostrato in Figura 2-7, ha come origine il centro della Terra, come piano fondamentale il piano equatoriale  $(x, y)$  e il verso  $z > 0$  si ha verso l'emisfero che contiene Polaris.

Il sistema Geocentrico-equatoriale è un sistema inerziale e, pertanto, non varia il suo orientamento nello spazio anche se trasla in modo concorde col moto della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole.

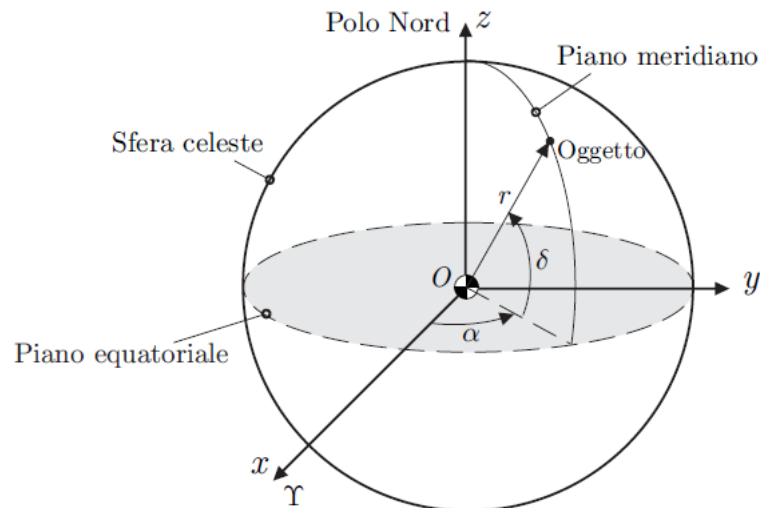


Figura 2-7 Sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale, (Giovanni Mengali, 2013)

È necessario per tale sistema di riferimento definire dei parametri che indicano la posizione di un corpo, lo spacecraft, rispetto ad esse. È possibile definire le coordinate di un oggetto in diversi modi:

- 1) Le tre coordinate cartesiane dell'oggetto  $(x, y, z)$ ;
- 2) L'ascensione retta, la declinazione e la distanza dell'oggetto dal centro della Terra  $(\alpha, \delta, r)$ ;
- 3) La longitudine, latitudine e l'altezza geodetica dell'oggetto  $(\lambda, \phi, h)$ .

Definiamo i parametri presenti nel secondo e terzo gruppo di coordinate.

- Ascensione retta  $\alpha \in [0, 360]$  deg misura la posizione del meridiano rispetto alla direzione x ed è  $>0$  verso Est.
- Declinazione  $\delta \in [-90, 90]$  deg misura la posizione del parallelo,  $>0$  verso Nord.
- Distanza  $r \geq 0$  è la distanza fra il centro della Terra e lo spacecraft.
- Latitudine  $\phi \in [-90, 90]$  deg è l'angolo compreso tra il piano equatoriale e la norma della superficie terrestre passante per lo spacecraft.
- Longitudine  $\lambda \in [0, 360]$  deg è l'angolo misurato verso Est tra il meridiano di Greenwich e il meridiano contenente lo spacecraft.
- Altezza geodetica  $h \geq 0$  è la quota dell'oggetto rispetto alla superficie della Terra

## 2.5 Missioni interplanetarie

Al fine di comprendere al meglio i casi di studio è necessario avere un'overview delle missioni interplanetarie. Queste sono studiate sotto le ipotesi del metodo delle Patched-Conics (PCM); il termine coniche deriva dal fatto che le orbite kepleriane sono sezioni di coniche con il fuoco nel corpo attrattore. Ciò significa che in ogni sfera di influenza ci sarà una traiettoria diversa derivata dalla sezione conica. La sfera di influenza di un corpo è la porzione di spazio intorno ad esso, in cui si può supporre che il veicolo spaziale interagisca solo con il corpo stesso.

Dunque, quando lo spacecraft entra nella sfera di influenza della Terra, può essere studiato sotto l'ipotesi del R2BP, con il pianeta come corpo principale. Allo stesso modo con il Sole, che è il corpo principale, e lo spacecraft è soggetto solo alla interazione gravitazionale.

L'idea è dunque dividere le missioni interplanetarie in tre parti:

- 1) Escape dalla sfera di influenza del corpo di partenza
- 2) Traiettoria eliocentrica
- 3) Arrivo alla sfera di influenza del corpo di destinazione.

Dunque, considerando il Sole come corpo principale e la Terra come secondo corpo, è possibile calcolare la sfera di influenza della Terra come segue:

$$r \approx \left( \frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}} \right)^{\frac{2}{5}} r_{\oplus-\odot} \approx 10^6 km \quad (2.57)$$

Dove  $r_{\oplus-\odot}$  è la distanza tra Terra e Sole,  $m_{\oplus}$  e  $m_{\odot}$  sono rispettivamente la massa della Terra e del Sole. Questa dimensione, se paragonata all'estensione del sistema solare, è trascurabile. Quindi, l'approssimazione delle Patched Conics è un modello relativamente accurato. Quando lo spacecraft è all'interno di tale sfera di influenza è possibile identificare una traiettoria planetocentrica. Una delle missioni interplanetarie più importanti è la manovra di Escape.

### 2.5.1 Manovra di Escape

Per sfuggire dalla sfera di influenza di un pianeta, e quindi alla sua attrazione gravitazionale, è necessario farlo lungo una traiettoria iperbolica. Questo perché tramite un'iperbole l'eccesso iperbolico di velocità  $v_{\infty}$  è maggiore di zero. L'eccesso iperbolico di velocità è per definizione la velocità che compete a un'iperbole quando la distanza dal corpo che ci sta attraendo tende ad infinito. Se l'eccesso iperbolico di velocità fosse zero, lo spacecraft non sarebbe in grado di sfuggire ma rimarrebbe nella stessa orbita del pianeta. È possibile calcolare l'eccesso iperbolico di velocità come:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{R_1} \left( \sqrt{\frac{2 R_2}{R_1 + R_2} - 1} \right)} \quad (2.58)$$

Solitamente il punto di partenza di una manovra di Escape è un'orbita circolare di parcheggio attorno al corpo di partenza. Il raggio dell'orbita di partenza è uguale al periastro  $r_p$  dell'iperbole di partenza. Scrivendo il momento angolare come:

$$h = \frac{\mu_1 \sqrt{e^2 - 1}}{v_{\infty}} \quad (2.59)$$

e sostituendo nella definizione di raggio del periastro:

$$r_p = \frac{h^2}{\mu_{\oplus} (1 + e)} \quad (2.60)$$

È possibile ottenere l'eccentricità in funzione di  $r_p$  e  $v_{\infty}$  rimaneggiando le equazioni.

$$e = 1 + \frac{r_p v_{\infty}^2}{\mu_{\oplus}} \quad (2.61)$$

Sostituendo nell'Equazione (2.59), è possibile esplicitare il momento angolare:

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_p}} \quad (2.62)$$

Dato l'eccesso di velocità iperbolico, che è specificato dai requisiti della missione, la scelta del corretto  $r_p$  è fondamentale per la definizione dell'eccentricità e del momento angolare della traiettoria di partenza. Per calcolare la  $v$  necessaria per eseguire la manovra di fuga, sono necessarie la velocità di periastro e la velocità dell'orbita di parcheggio circolare, e possono essere scritte come segue:

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_p}} \quad (2.63)$$

$$v_c = \frac{\mu_\oplus}{r_p} \quad (2.64)$$

È ora semplice ricavare il  $\Delta v$  necessario per la manovra di escape:

$$\Delta v = v_p - v_c = v_c \left( \sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_c}\right)^2} - 1 \right) \quad (2.65)$$

Non è sufficiente il modulo di tale grandezza ma è necessario un parametro che ne identifichi la posizione nel periastro. Tale parametro,  $\beta$ , ci fornisce l'orientamento della linea di abside dell'iperbole al vettore velocità eliocentrico del pianeta, e si calcola come:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_\oplus}}\right) \quad (2.66)$$

La manovra di escape varia a seconda della posizione del pianeta. Se la missione è quella di inviare un veicolo spaziale da un pianeta esterno a un pianeta interno, la traiettoria di evasione deve emergere dal lato posteriore della sfera di influenza del pianeta con la velocità  $v_\infty$  che punta in senso opposto al  $v_c$ . Questo è necessario perché la velocità eliocentrica del veicolo spaziale  $v_D$  deve essere inferiore alla velocità circolare del pianeta di partenza  $v_\oplus$  come mostrato nella Figura 2-8.

Se invece la missione ha come obiettivo un pianeta esterno la navicella deve emergere dal lato anteriore della sfera d'influenza perché  $v_\infty$  deve puntare nella stessa direzione di  $v_\oplus$  per raggiungere la maggiore velocità eliocentrica  $v_D$  necessaria per raggiungere un pianeta esterno, come mostrato in Figura 2-9.

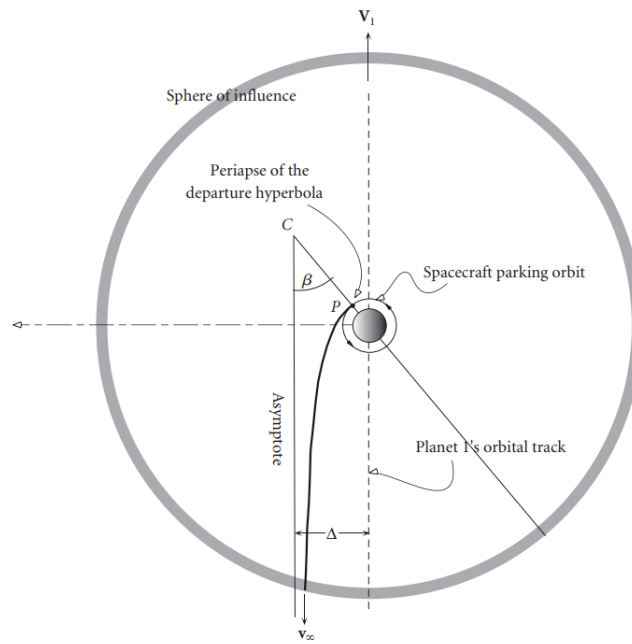


Figura 2-8 Partenza di un veicolo spaziale su una traiettoria da un pianeta esterno a un pianeta interno.

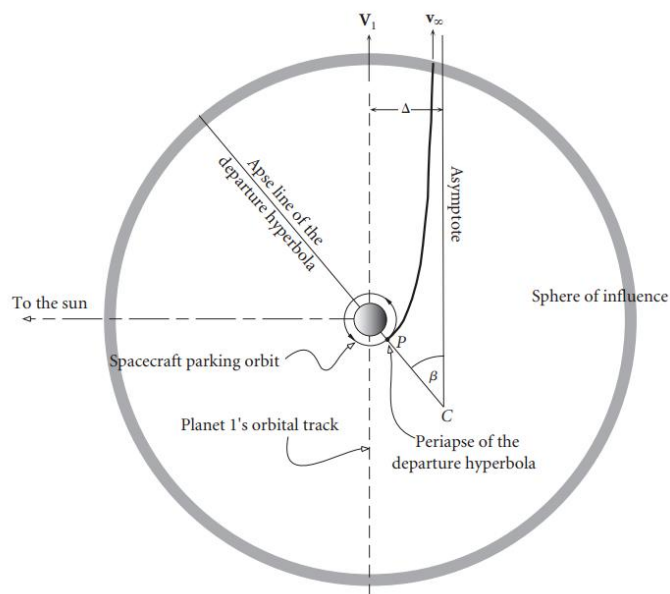


Figura 2-9 Partenza di un veicolo spaziale su una traiettoria da un pianeta interno a un pianeta esterno.



### 2.5.2 Manovra di Oberth

Oltre alla manovra di escape a un impulso che è stata appena trattata, è necessario presentare un'altra alternativa. La manovra di Oberth è una manovra di escape a due impulsi che può essere più vantaggiosa in alcune situazioni. Il primo impulso viene dato per portare lo spacecraft in un'orbita con un'energia più bassa, è un impulso frenante, e si sposta il periastro della traiettoria più vicino al corpo di partenza. In questo viene dato il secondo impulso con il quale si accelera e si completa la manovra di escape. La minore distanza di partenza dal corpo di partenza porta dei benefici poiché le perdite di gravità a raggi inferiori diminuiscono sensibilmente perché si spinge a una velocità più alta e quindi ci si allontana dal corpo principale più velocemente.

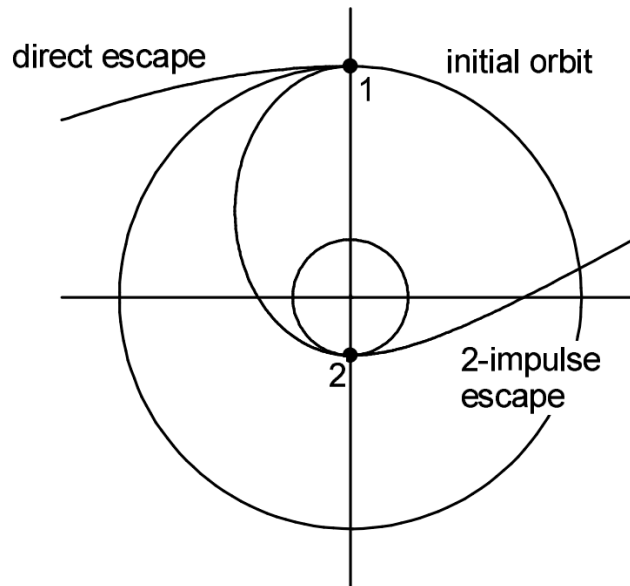


Figura 2-10 Rappresentazione schematica della Manovra di Oberth.

Con uno studio più approfondito si scopre che la manovra di Oberth è più vantaggiosa rispetto alla manovra di escape a un impulso solo in determinati casi.

Come mostrato dalla Figura 2-11 scopriamo che se la  $v_{\infty}^2$  è sufficientemente alta la manovra diretta è più costosa: in particolare per  $v_{\infty} > \sqrt{2} V_{c1}$ .

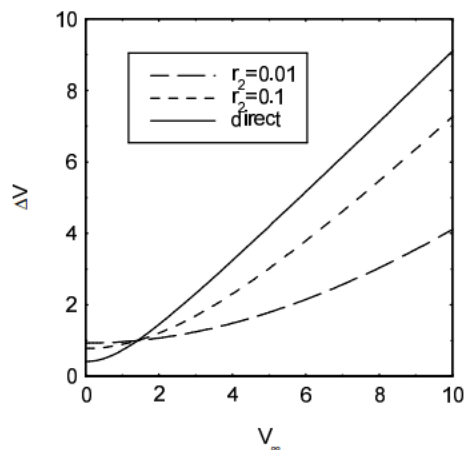


Figura 2-11  $\Delta V$  necessario per la manovra di Oberth in funzione di  $v_{\infty}$  e  $r_2$

## 2.6 Orbite di Lissajous

Il problema dei tre corpi ristretto ammette traiettorie generalmente quasi periodiche associate a ciascun punto di librazione Collineare come soluzione. Farquhar e Kamel (Robert W. Farquhar, 1972) usarono il metodo di Linstedt-Poincaré (Henri Poincaré) per produrre una soluzione analitica del terzo ordine per tali orbite vicino al punto di librazione transLunare ( $L_2$ ) nel sistema Terra-Luna. Richardson e Cary (Richardson, 1975) hanno anche sviluppato una soluzione in serie troncata al quarto ordine. Il metodo di Lindstedt è stato utilizzato con successo anche per studiare orbite tridimensionali in altri sistemi dinamici.

È possibile fare una breve classificazione delle orbite:

In meccanica orbitale, un'orbita di Lissajous, dal nome di Jules Antoine Lissajous, è una traiettoria orbitale quasi-periodica che un oggetto può seguire intorno a un punto Lagrangiano di un sistema a tre corpi senza richiedere alcuna propulsione. Le orbite di Lyapunov intorno a un punto Lagrangiano sono percorsi curvi che giacciono interamente nel piano dei due corpi primari, sono infatti delle orbite planari. Al contrario, le orbite di Lissajous includono componenti in questo piano e perpendicolari ad esso, e seguono una curva di Lissajous. Le orbite ad Halo includono anche componenti perpendicolari al piano, ma sono periodiche, mentre le orbite di Lissajous, di solito, non lo sono.

In pratica, qualsiasi orbita intorno ai punti Lagrangiani  $L_1, L_2$  o  $L_3$  è dinamicamente instabile, cioè piccole deviazioni dall'equilibrio crescono nel tempo. Di conseguenza, i veicoli spaziali in queste orbite di punti Lagrangiani devono usare i loro sistemi di propulsione per eseguire il mantenimento della stazione orbitale. Anche se non sono perfettamente stabili, un modesto sforzo di mantenimento della stazione mantiene un veicolo spaziale in un'orbita Lissajous desiderata per molto tempo.

In assenza di altre influenze, le orbite intorno ai punti lagrangiani  $L_4$  e  $L_5$  sono dinamicamente stabili finché il rapporto tra le masse dei due oggetti principali è maggiore di circa 25. La dinamica naturale mantiene il veicolo spaziale (o corpo celeste naturale) in prossimità del punto Lagrangiano senza l'uso di un sistema di propulsione, anche quando leggermente perturbato dall'equilibrio. Queste orbite possono tuttavia essere destabilizzate da altri oggetti massicci vicini.

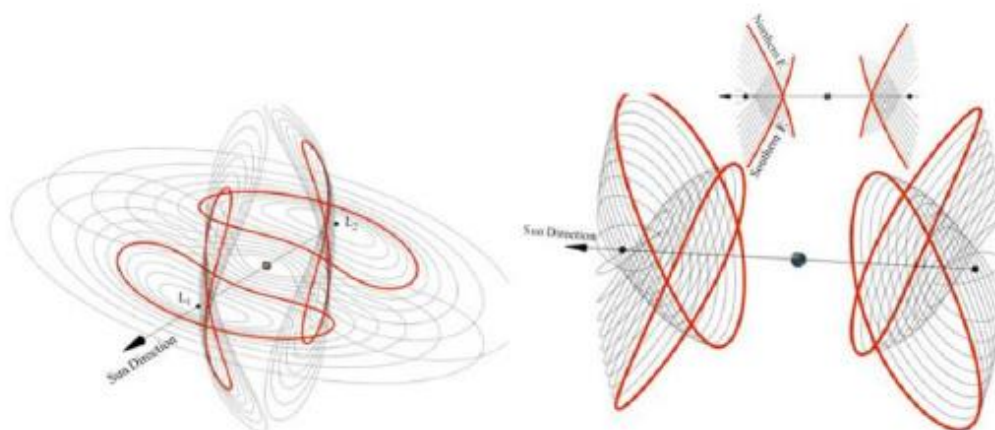


Figura 2-12 Famiglie di orbite di Lyapunov (a sinistra) e di Halo (a destra)

### 2.6.1 Missioni orbite Lissajous

Diverse missioni hanno utilizzato orbite Lissajous: ACE a Sole-Terra L1, SOHO a Sole-Terra L1, DSCOVR a Sole-Terra L1, WMAP a Sole-Terra L2, e anche la missione Genesis che raccoglie particelle solari a L1. Il 14 maggio 2009, l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) ha lanciato nello spazio gli osservatori Herschel e Planck, che utilizzano entrambi orbite Lissajous a Sole-Terra L2. Anche l'attuale missione Gaia dell'ESA utilizza un'orbita Lissajous a Sole-Terra L2. Nel 2011, la NASA ha trasferito due dei suoi veicoli spaziali THEMIS dall'orbita terrestre all'orbita Lunare attraverso orbite Lissajous Terra-Luna L1 e L2. Nel giugno 2018, Queqiao, il satellite relay per la missione cinese Chang'e 4 lander Lunare, è entrato in orbita intorno a Terra-Luna L2. Sono descritte in seguito nel dettaglio alcune di queste missioni:

#### **Herschel Space Observatory.**

L'Herschel Space Observatory è una missione dell'agenzia spaziale Europea (ESA). È stata lanciata il 14 maggio 2009 a bordo del vettore Ariane V. Dopo un viaggio di 50 giorni circa dalla Terra Herschel è entrato nella sua orbita intorno al punto Lagrangiano L<sub>2</sub> nel sistema Sole-Terra in un'orbita di Lissajous. La missione si è conclusa nel 2013. Con uno specchio principale di 3,5 m di diametro, Herschel ha studiato l'Universo freddo a lunghezze d'onda infrarosse e submillimetriche. Ha sondato la formazione di stelle e galassie nella storia dell'Universo e ha studiato la loro interazione con il mezzo interstellare, la materia diluita tra le stelle da cui stanno formando nuove stelle.



*Figura 2-14 Herschel Space Observatory*

#### **Solar Heliospheric Observatory (SOHO)**

Il SOHO è stato una cooperazione tra NASA ed ESA, è stato lanciato il 22 dicembre 1995, la sua vita operativa è stata estesa dal 1998 fino al 2018. L'ampliamento della missione fu dovuto al corretto inserimento in un'orbita con un basso consumo di carburante. Infatti SOHO

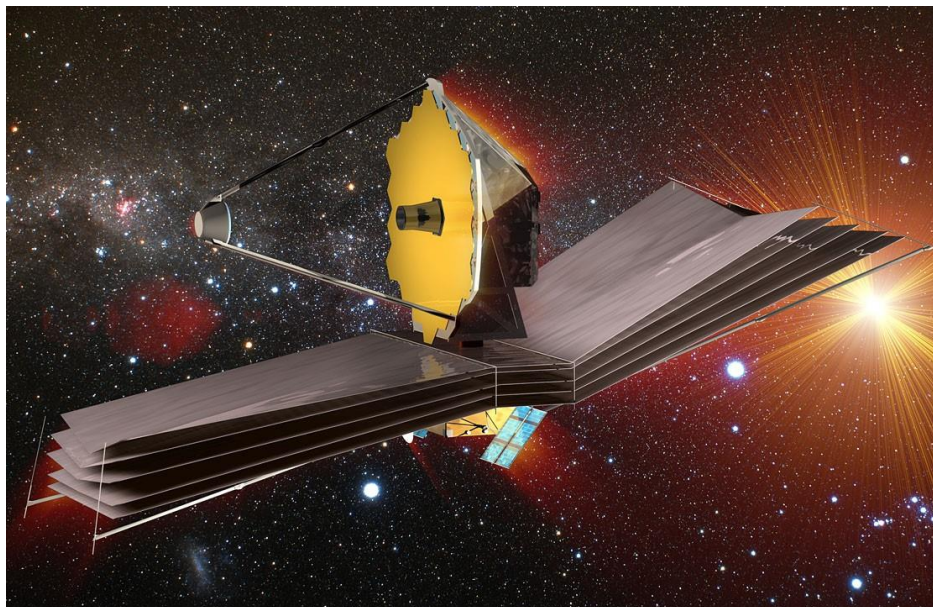
stazionava in un'orbita Halo attorno al punto  $L_1$  nel sistema Sole-Terra. L'obiettivo era dunque l'osservazione del Sole, sia l'interno attraverso la sua superficie e la sua atmosfera.

### **LISA Pathfinder**

LISA è una missione dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA), è stata lanciata da Kourou nella Guayana francese il 3 dicembre 2015, e ha concluso la sua missione con successo il 30 Giugno 2017, dimostrando la tecnologia per costruire il futuro osservatorio spaziale di onde gravitazionali dell'ESA. La sua orbita operativa era una Lissanjous attorno al punto Lagrangiano  $L_1$  nel sistema Sole-Terra.

### **James Webb Space Telescope (JWST)**

Il James Webb Telescope è un telescopio spaziale ottenuto dalla collaborazione di NASA-ESA-CSA, una collaborazione durata 25 anni e quasi 12 miliardi di dollari. Il James Webb rappresenta il più avanzato, grande e anche costoso telescopio mai costruito dall'uomo. Il lancio è avvenuto con successo il 25 Dicembre 2021 dalla base di Kourou, nella Guyana Francese. Il telescopio Webb sarà posizionato vicino al punto Lagrangiano  $L_2$  del sistema Sole-Terra, girerà attorno a un'orbita Halo, inclinata rispetto all'eclittica. Il JWST sarà quindi, a differenza del telescopio Hubble, posizione molto lontano dalla Terra. Dunque non saranno possibili interventi di manutenzione. Con le sue capacità, il JWST indaga l'Universo con l'obiettivo di osservare molti eventi e oggetti distanti nel tempo e nello spazio, osserva la luce infrarossa da giovani galassie e possibilmente prime stelle. L'obiettivo è avere nuove conoscenze su come si formano le stelle e i sistemi planetari.



*Figura 2-15 James Webb Space Telescope*

### **Gaia**

Gaia è una missione dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) che è stata lanciata nel 2013. È posizionata in un'orbita di Lissanjous attorno a  $L_2$  nel sistema Sole-Terra.

Gaia è una missione per tracciare una mappa tridimensionale della nostra Galassia, la Via Lattea, rivelandone la composizione, la formazione e l'evoluzione. Gaia fornirà misure di



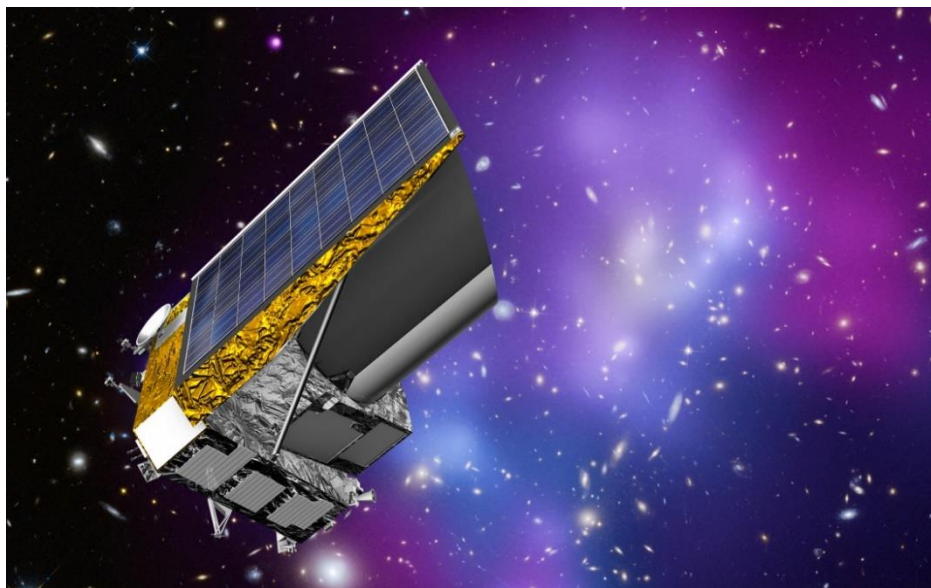
posizione e velocità radiale senza precedenti, con la precisione necessaria per produrre un censimento stereoscopico e cinematico di circa un miliardo di stelle nella nostra Galassia.



*Figura 2-16 Gaia*

## **Euclid**

Euclid è una missione dell'Agencia Spaziale Europea (ESA) attualmente in sviluppo. Il lancio è previsto per il 2023 e i suoi obiettivi sono lo studio dell'evoluzione dell'universo, la conoscenza della materia e dell'energia oscura misurando l'accelerazione dell'universo. Questo osservatore sarà posizionato in un'orbita di Lissanjous attorno al punto lagrangiano  $L_2$  nel sistema Sole-Terra.



*Figura 2-17 Euclid*

## 3. Fondamenti Propulsione Spaziale

In questo capitolo vengono descritti i principi base della propulsione spaziale, necessari per la comprensione delle missioni affrontate in questa tesi. Viene fornita una panoramica globale dei principi condivisi da tutti i sistemi propulsivi, poi viene effettuata una panoramica sui propulsori elettrici, i quali sono quelli considerati per le missioni analizzate. La propulsione è definita come la capacità di generare una *Forza*  $\equiv$  *Spinta* su un certo veicolo/sistema al fine di cambiare in senso generale il suo moto rispetto al moto che avrebbe se non si generasse la forza.

### 3.1 Overview

Il principio di azione e reazione di Newton è alla base della propulsione, il quale afferma che quando un corpo esercita una forza su un secondo corpo, il secondo corpo esercita una forza uguale in modulo e opposta in verso sul primo corpo. Ma se si considera un sistema isolato, il principio di conservazione della quantità di moto afferma che se si vuole cambiare questa quantità si deve scambiare qualcosa con il sistema, il che non lo rende più isolato. Nasce dunque il problema della propulsione spaziale per cui, dato che lo spazio è vuoto, è necessario portare a bordo il propellente con il quale scambiare quantità di moto e generare la spinta. Chiaramente, questo fortemente ostacola la capacità di movimento nello spazio, dal momento che il veicolo spaziale può trasportare solo una limitata quantità di propellente. Una volta che si è esaurito, non c'è alcuna possibilità per la navicella di acquisire orbite diverse.

#### 3.1.1 Classificazione

La classificazione dei propulsori spaziali può essere fatta seguendo diversi criteri. Una prima classificazione può essere fatta in base allo scopo del propulsore stesso:

- Propulsione Primaria: utilizzata per i cambi di traiettoria dello spacecraft.
- Propulsione Ausiliaria: utilizzata per contrastare le forze di disturbo esterne che non permetterebbero di mantenere l'orbita.

Un altro tipo di classificazione si basa sulla sorgente di energia utilizzata per accelerare il propellente:

- Propulsione Chimica: per creare la spinta sfrutta un propellente chimico o la reazione tra due propellenti, combustibile e ossidante. La propulsione chimica inoltre può essere ulteriormente suddivisa in propellenti solidi, liquidi e ibridi.
- Propulsione Elettrica: l'accelerazione del propellente è ottenuta grazie a dei fenomeni elettromagnetici. Ulteriore suddivisione in propulsione elettrotermica, elettrostatica e elettromagnetica.
- Propulsione Nucleare: sfrutta l'energia del nucleare per generale spinta.

#### 3.1.2 Generalità

È possibile descrivere in modo generale il comportamento dei propulsori senza specificare la classe del propulsore stesso, al fine di avere una trattazione più generale possibile. Si consideri un sistema isolato, ovvero senza nessuna forza agente sullo spacecraft al di fuori della forza

tra propellente e spacecraft stesso. Sotto questa ipotesi, la quantità globale di quantità di moto deve essere costante. Il sistema ha una certa massa  $m$ , velocità  $v$  in un certo istante iniziale  $t$ . Al tempo  $t + dt$  lo spacecraft ha espulso una massa infinitesimale che corrisponde al propellente  $dm_p$ . Da questo ne consegue un aumento di velocità del sistema legato alla velocità con cui la massa infinitesimale di propellente viene espulsa, ovvero  $c$ , la velocità effettiva di scarico. Tale grandezza è definita rispetto allo spacecraft, dunque la velocità globale del propellente è  $c - v$ .

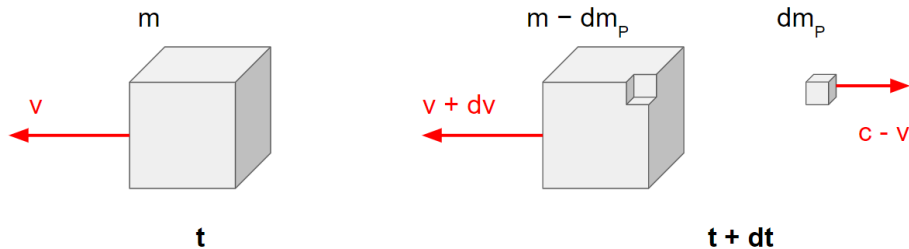


Figura 3-1 Schema conservazione del momento

Imponendo la conservazione della quantità di moto totale del sistema:

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v) \quad (3.1)$$

Trascurando gli infinitesimi di secondo ordine ed eseguendo le operazioni matematiche, si ottiene:

$$m dv = dm_p c \quad (3.2)$$

È necessario effettuare il passaggio da tale formulazione discreta a una formulazione continua perché il flusso di propellente è espulso in modo continuo. Si definisce dunque la portata:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (3.3)$$

E dalle precedenti considerazioni si può scrivere l'equazione della spinta come:

$$T = \dot{m}_p c = m \frac{dV}{dt} \quad (3.4)$$

Dove il termine  $m \frac{dV}{dt}$  rappresenta la forza data dal prodotto della massa per la sua accelerazione, dunque anche  $\dot{m}_p c$  deve essere una forza.

Si introduce il concetto di *Potenza della Spinta* che rappresenta l'energia cinetica che si deve fornire al propellente per accelerarlo alla velocità  $c$ .

$$P_T = \frac{1}{2} T c = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 \quad (3.5)$$

Per i propulsori spaziali, in generale, la velocità di uscita è quasi la stessa della velocità effettiva di scarico  $c$  a meno di alcune semplificazioni relative all'allineamento delle forze e al fatto che

il sistema non è propriamente isolato. Secondo tali approssimazioni la velocità efficace di scarico può essere scritta:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} \quad (3.6)$$

A questo punto si introducono alcune quantità fondamentali che descrivono le caratteristiche dei propulsori. Il primo è l'Impulso Totale:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (3.7)$$

che indica la potenza propulsiva totale del sistema. Maggiore è l'impulso totale, maggiore è il costo propulsivo della missione che il veicolo spaziale può compiere. Con l'impulso totale è possibile definire l'impulso specifico:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (3.8)$$

dove  $m_p$  è la massa totale del propellente a bordo e  $g_0$  è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Per esplicitare la relazione tra  $I_{sp}$  e  $c$  è necessario introdurre due ipotesi, infatti se la spinta è costante:

$$I_t = T \Delta t \quad (3.9)$$

Dove  $\Delta t$  è il tempo di lavoro del propulsore. Se anche  $c$  è costante anche la portata è costante ed è uguale a:

$$m_p = \dot{m}_p \Delta t \quad (3.10)$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione 3.8 dell'impulso specifico si ottiene:

$$I_{sp} = \frac{c}{g_0} \quad (3.11)$$

Da questa equazione (3.11) si dimostra che, trascurando il termine costante, l'Impulso specifico e la velocità effettiva di scarico rappresentano la stessa quantità. Infatti, entrambe sono una misura dell'efficienza con cui il propellente viene utilizzato per generare spinta. Più è alto il valore, più il propulsore è performante. Infatti, l'impulso specifico rappresenta il tempo per il quale una certa quantità di propellente può dare una spinta pari al suo peso sulla Terra. Se aumenta l'impulso specifico, a parità di massa, è possibile aumentare o la spinta o il tempo per la quale forniamo la spinta.

### 3.1.3 Equazione di Tsiolkovsky

L'equazione di Tsiolkovsky è una delle relazioni più importanti per la propulsione spaziale, è chiamata anche equazione del razzo. Essa mette in relazione il costo propulsivo ideale di una manovra con la massa associata di propellente necessaria per raggiungere l'orbita di target. Non tiene però conto di perdite o disturbi esterni. Si introduce il concetto di costo



propulsivo, ovvero la velocità caratteristica, che è la variazione di velocità del corpo durante la manovra:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (3.12)$$

Sostituendo la definizione della Spinta si ottiene:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} c \frac{\dot{m}_p}{m} dt \quad (3.13)$$

Cambiando variabile di integrazione derivando la massa dello spacecraft cambiata di segno, poiché la si considera come sottratta dalla massa totale:

$$\dot{m} = -\dot{m}_p = \frac{dm}{dt} \quad (3.14)$$

Si ottiene:

$$\Delta V = \int_{m_0}^{m_f} -c \frac{dm}{m} \quad (3.15)$$

In generale  $c$  può cambiare durante la manovra, ma in questo caso possiamo utilizzare un opportuno valor medio, anche se spesso si assume che il motore lavori a Impulso specifico costante.

Si ottiene così l'equazione di Tsiolkovsky:

$$\Delta V = c \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3.16)$$

Oppure in un'altra espressione:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (3.17)$$

Da tali equazioni è possibile formulare importanti considerazioni. Poiché il consumo di propellente e il costo propulsivo sono legati da una relazione esponenziale, è fondamentale avere una velocità efficace di scarico che sia almeno comparabile alla velocità caratteristica, questo perché il propulsore non accelera solo il carico utile ma anche il propellente stesso. Se l'impulso specifico è troppo basso, la massa finale è trascurabile rispetto a quella iniziale, quindi non c'è possibilità di trasportare alcun carico utile. La relazione esponenziale evidenzia un concetto cruciale. Quando si accelera un carico utile, il propulsore non sta solo accelerando il carico utile stesso, ma sta anche accelerando il propellente che è necessario per accelerare quel carico utile. Quindi, se il carico utile viene aumentato, la massa di propellente necessaria non aumenta linearmente ma esponenzialmente, poiché il propulsore non deve solo accelerare il carico utile in più, ma accelerare il propellente extra.

## 3.2 Propulsione Elettrica

La propulsione elettrica appare un'alternativa concentra e conveniente alla propulsione chimica. Per quanto riguarda le missioni spaziali senza equipaggio rappresenta lo stato dell'arte. La propulsione chimica consiste essenzialmente nella combustione di uno o più propellenti e una successiva espulsione degli stessi, generando così spinta. Per garantire questo processo è ovviamente necessario lo stivaggio di propellente che rappresenta il problema principale di tale tipo di propulsione. Uno dei principali vantaggi della propulsione elettrica è invece la riduzione della necessità di accumulo del carburante, poiché per generare la spinta viene impiegata energia solare o nucleare. Tale energia viene poi convertita e utilizzata per ionizzare il propellente. L'applicazione di un campo elettrostatico o elettromagnetico nella direzione dell'accelerazione consente di espellere gli ioni dal propulsore generando la spinta e raggiungendo velocità elevatissime, garantendo una maggiore efficienza. La spinta è abbastanza bassa ma può continuare ad accelerare per mesi o addirittura anni e può anche rallentare e cambiare direzione e questo è uno dei più importanti vantaggi della propulsione elettrica.

### 3.2.1 Classificazione

Esistono diverse categorie di propulsori elettrici, sulla base di come questa energia viene utilizzata per creare la spinta: vale a dire sulla base del principio fisico su cui si basano. In particolare:

- Propulsione Elettrotermica: Il propellente è scaldato elettricamente e fatto espandere in un ugello dove l'energia termica viene convertita in energia cinetica, generando così la spinta.
- Propulsione Elettrostatica: il propellente è ionizzato e accelerato da forze elettrostatiche. Per mantenere la neutralità dello spacecraft, viene utilizzato un flusso di elettroni per neutralizzare il flusso all'uscita del propulsore.
- Propulsione Elettromagnetica: il propellente è ionizzato e accelerato da forze elettromagnetiche dovute all'interazione di un campo magnetico esterno/interno con la corrente elettrica generata dal flusso di propellente.

Oltre alla classificazione relativa al principio fisico di funzionamento, ne esiste un'altra basata sulla potenza caratteristica del propulsore e dunque sul suo tipo di utilizzo:

- Micropropulsori: utilizzati per il controllo di precisione.
- 1 kW: utilizzati principalmente per il mantenimento della stazione (SK) o l'iniezione in orbita/deorbitale di cubesat o smallsat ma anche per piccole missioni robotiche interplanetarie.
- 5-10 kW: utilizzati principalmente per le operazioni di deorbita di grandi satelliti o per l'inserimento in GEO

- 100+ kW: sono in fase di sviluppo concettuale, potrebbero essere implementati nelle missioni di esplorazione umana.

System	Specific Impulse [s]	Thrust [N]
Resistojet	200 - 350	0.2 - 0.3
Arcjets	400 - 1500	0.2 - 1
Ion thruster	2000 - 5000	< 0.2
Hall thrusters	1500 - 2000	< 2
Pulsed Plasma thruster	600 - 2000	< 0.01
MPD thruster	2000 - 5000	< 2

Tabella 2 Caratteristiche di diversi tipi di orbite e traiettorie

### 3.2.2 Generalità

Al di fuori del principio fisico che caratterizza i propulsori, questi hanno comunque dei comportamenti comuni tra loro. Infatti tutti convertono la potenza elettrica nell'effetto utile finale, ovvero la spinta. Introduciamo alcuni parametri con il quale è possibile descrivere alcuni comportamenti. L'efficienza globale ci offre un'idea quantitativa e qualitativa della conversione da potenza elettrica a spinta è un valore che non può essere trascurato e può variare in modo significativo da propulsore a propulsore.

$$\eta P_E = \frac{1}{2} T c \quad (3.18)$$

Dove  $\eta$  è l'efficienza globale,  $P_E$  è il consumo di energia elettrica, mentre il termine a destra è la potenza di spinta. Invertendo questa equazione è possibile ricavare la velocità effettiva di scarico come:

$$c = \frac{2\eta P_E}{T} \quad (3.19)$$

Questa relazione ci permette di fare importanti considerazioni sulla propulsione elettrica: è possibile aumentare la velocità efficace di scarico  $c$ , e di conseguenza avere un alto impulso specifico, accettando o una piccola spinta o un alto consumo di energia elettrica. Infatti, rispetto ai razzi chimici, i propulsori elettrici sono caratterizzati da un maggiore impulso specifico e da una minore spinta. Gli alti valori di impulso specifico sono al prezzo di basse spinte - 10  $\mu$ N - 1 N - o di pesanti sistemi di generazione di energia. Con la tecnologia attuale, i propulsori elettrici non possono fornire accelerazioni superiori a  $g$  100 . Quindi, non c'è la possibilità di applicare la propulsione elettrica ai lanciatori. D'altra parte, le caratteristiche dei propulsori elettrici si adattano perfettamente ai esigenze di missioni lunghe ed efficienti, esattamente come quelle analizzate in questa tesi.

### 3.2.3 Propulsione elettrostatica – Propulsori a Ioni

La propulsione elettrostatica si basa sulla ionizzazione e accelerazione del propellente attraverso forze elettrostatiche, sfruttando dunque i campi elettrici. Il propellente ionizzato viene dunque utilizzato per fornire una spinta grazie all'accelerazione degli ioni stesso. I propulsori a ioni sono sicuramente i propulsori elettrostatici più diffusi. Si illustreranno i principi di funzionamento della propulsione elettrostatica e in particolare dei propulsori a ioni, i quali sono di maggior interesse. È possibile identificare tre passi principali che costituiscono la propulsione di questo tipo:

- Ionizzazione del propellente

La ionizzazione è il processo attraverso il quale si separano gli elettroni dagli atomi iniziali per creare gli ioni. Questo perché per accelerare qualcosa e produrre della spinta è necessario che questo sia carico. Per creare uno ione è necessario fornire una quantità di energia superiore all'energia di prima ionizzazione  $\epsilon_i$ , caratteristica di ogni elemento. La reazione di ionizzazione avviene come segue:



Dove  $A$  e  $A^+$  sono l'atomo e lo ione del propellente,  $e^-$  è l'elettrone libero. Nella realtà il rapporto di ionizzazione non è uguale a 1 dunque è necessario fornire un'energia più elevata dell'energia di ionizzazione, altrimenti la probabilità di ionizzazione è troppo bassa. La spesa per la ionizzazione può essere rinominata *costo di produzione*  $\epsilon_B > \epsilon_i$  che rappresenta una perdita. È possibile dunque definire un'efficienza ideale:

$$\eta_{id} = \frac{\frac{1}{2} m_+ u_+^2}{\frac{1}{2} m_+ u_+^2 + \epsilon_B} \quad (3.21)$$

La ionizzazione può essere effettuata in due modi diversi:

- **Bombardamento con elettroni**

Un cannone elettronico inietta elettroni ad alta energia dove è contenuto il propellente. Attraverso un campo elettrico gli elettroni vengono accelerati e attraverso un campo magnetico sono confinati per un tempo di permanenza maggiore all'interno della camera per aumentare le probabilità di ionizzazione. Queste collisioni abbassano la velocità degli elettroni e permettono la ionizzazione del propellente.

- **Radiofrequenza**

Attraverso un'antenna viene creato un campo elettromagnetico con frequenza relativamente basse che permettono un'accelerazione degli elettroni che vanno a sbattere contro gli atomi permettendo la ionizzazione.

Una volta creati gli ioni, è necessario separarli poiché applicando un campo elettrico sia agli elettroni e ioni si genererebbe una spinta nulla, poiché elettroni e ioni hanno la stessa carica in modulo ma segni opposti. Applicando una forza a una carica sotto l'effetto del campo elettrico è possibile scrivere:

$$F = qE \quad (3.22)$$

Gli elettroni e gli ioni sono sottoposti a una forza uguale e contraria, dunque si neutralizzano a vicenda.  $F$  è la forza sulla particella,  $q$  la carica elementare,  $E$  il campo elettrico.

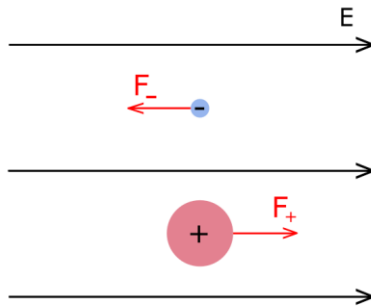


Figura 3-2 Rappresentazione schematica delle forze elettriche che agiscono su diverse specie

La separazione delle due specie può essere effettuata sfruttando diversi mezzi, a seconda del tipo di propulsore. Uno di questi metodi è lo sfruttamento di un campo magnetico che, senza entrare nella descrizione particolare delle interazioni elettromagnetiche, confina gli elettroni nel propulsore e permette di accelerare solo gli ioni.

- **Accelerazione degli ioni**

Una volta che gli ioni sono stati creati e separati dagli elettroni inizia il processo di accelerazione effettuato tramite l'applicazione di un campo elettrico. Il campo elettrico è un campo conservativo ed è collegato ad un potenziale elettrico, è possibile identificare il *Potenziale Netto Accelerante*  $V_N$ . L'accelerazione avviene attraverso una griglia acceleratrice, gli ioni entrano nella zona di accelerazione, all'interno della griglia, e convertono la loro energia potenziale in energia cinetica aumentando in tal modo la loro velocità. Imponendo la conservazione dell'energia totale e trascurando l'efficienza di conversione tra energia cinetica e potenziale si ottiene, matematicamente:

$$qV_N = \frac{1}{2} m_+ u_+^2 \quad (3.23)$$

Da tale equazione, considerando che la velocità di uscita può essere considerata circa uguale alla velocità effettiva di scarico, è possibile ricavare:

$$u_+ = \sqrt{\frac{2qV_N}{m_+}} \quad (3.24)$$

Da cui si deduce che gli unici parametri modificabili sono il potenziale netto e la massa atomica del propellente. L'accelerazione, in particolare nei propulsori a ioni, avviene tra due griglie. La prima ha un potenziale più alto e prende il nome di *Screen Grid*, mentre la seconda ha un valore di potenziale inferiore e prende il nome di *Acceleration Grid*. Queste griglie non sono altro che piastre curve di molibdeno con fori millimetrici. È utilizzata tale soluzione al posto di una sola sezione di uscita più grande per avere una focalizzazione maggiore. Infatti, essendo gli ioni tutti carichi positivamente tenderebbero a respingersi a vicenda. Fondamentale è anche la distanza tra le griglie che deve essere millimetrica, ma è importante non porle troppo vicine l'una all'altra e non con un'alta differenza di potenziale. Questo perché potrebbe portare alla formazione di scintille, per evitare ciò si rispetta la seguente relazione:

$$\frac{V_G}{d} < 2 \frac{kV}{mm} \quad (3.25)$$

Dove  $V_G$  è la differenza di potenziale e  $d$  la distanza tra le due griglie. Le griglie sono dei componenti molto critici ed è fondamentale una buona progettazione. In particolare, l'erosione della griglia acceleratrice è uno dei fattori dimensionanti dei propulsori ionici. Inoltre, le griglie devono essere curve, in modo tale che la direzione di deformazione sia nota sotto carico termico. Anche la loro dimensione è limitata dalla seguente relazione:

$$\frac{D}{d} < 600 \quad (3.26)$$

Dove  $D$  è il diametro della griglia.

- Neutralizzazione del fascio di ioni accelerato.

L'ultimo step fondamentale dei propulsori a ioni è la neutralizzazione. Dopo che gli ioni sono stati ionizzati e accelerati, vengono espulsi nel vuoto per creare una spinta. È fondamentale mantenere la neutralità del propulsore, se questo non accadesse e gli ioni fossero solo accelerati, il propulsore svilupperebbe una carica interna negativa a causa dell'espulsione di un flusso di cariche negative che automaticamente le attrarrebbe nuovamente all'interno, ottenendo una spinta nulla oltre a problemi di corrosione. Per evitare l'insorgere di questo fenomeno è necessario neutralizzare il fascio di ioni con lo stesso numero di elettroni. Si utilizza un catodo cavo, il quale estrae elettroni da una frazione di propellente e si viene a creare una nuvola di elettroni a una certa distanza dall'uscita del propulsore. Dunque gli ioni espulsi incontrano la nube di elettroni all'uscita e il flusso viene neutralizzato. Questa corrente neutralizzante non è accelerata, poiché non è utilizzata per produrre spinta, perciò tale processo porta con sé una perdita. Se si considerano tutti gli atomi persi in fuga dalla camera è possibile introdurre un rendimento di efficacia di utilizzazione del propellente:

$$\eta_u = \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}_p} \quad \dot{m}_p = \dot{m}_+ + \dot{m}_A + \dot{m}_C \quad (3.27)$$

Dove  $\dot{m}_p$  rappresenta il flusso di propellente e  $\dot{m}_+$  il flusso ionizzato.  $\dot{m}_p$  è la somma del flusso degli ioni più due perdite, la prima è la frazione non ionizzato mentre la seconda è la frazione che va al catodo cavo.

Se non si considerano altre perdite di potenza elettrica, è possibile scrivere l'efficienza globale che ci permette di avere una stima sulla frazione di potenza elettrica che viene convertita in potenza di spinta:

$$\eta_g = \eta_u \eta_{id} \quad (3.28)$$

Tale parametro ci permette dunque di ricavare la potenza di spinta che è possibile ottenere grazie alla potenza elettrica fornita:

$$P_T = \frac{1}{2} T c = \eta_g P_E \quad (3.29)$$

In figura 3-3 è possibile osservare lo schema rappresentativo di un propulsore a ioni.

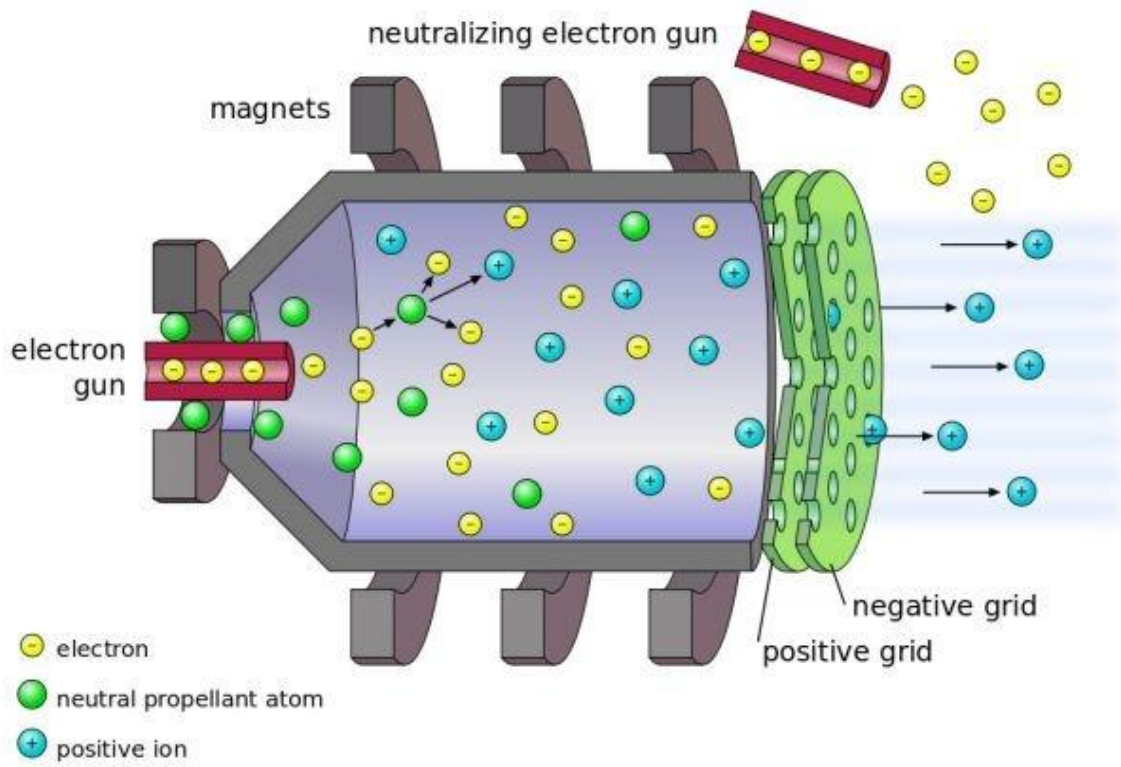


Figura 3-3 Schema rappresentativo di un propulsore a Ioni

## 4. Metodi di ottimizzazione Indiretti per traiettorie spaziali

In questo capitolo sono presentate le caratteristiche globali e gli aspetti matematici del metodo utilizzato nella presente tesi per l'ottimizzazione delle traiettorie. Si descrivono in seguito dunque i concetti del controllo ottimale e gli aspetti del problema dei valori limite. Un problema di ottimizzazione ha come fine di ricerca una legge di controllo che rende massimo o minimo un particolare indice di prestazione. Uno degli aspetti più critici e importanti delle missioni spaziali è sicuramente il consumo di propellente che diventa un indice di prestazione da minimizzare per una manovra necessaria, oppure, in modo equivalente, la massimizzazione della massa del veicolo fissata quella iniziale.

I metodi diretti non possono essere utilizzati per un problema di trasferta orbitale, o meglio possono essere utilizzati solo per pochi semplici casi di scarso interesse pratico a causa delle semplificazioni necessarie. Mentre l'utilizzo di metodi indiretti per il problema di ottimo permette un'elevata precisione numerica, un importante contenuto teorico. Inoltre, si basano su una quantità di parametri, di conseguenza i tempi di calcolo sono limitati, anche se hanno difficoltà di convergenza. Per tale motivo per questo studio si prende in considerazione la teoria del controllo ottimale basata sull'ottimizzazione indiretta.

### 4.1 Teoria del controllo Ottimale

In questo paragrafo è descritta la forma della teoria del controllo ottimale più adatta per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali. La OTC si basa sui principi del calcolo variazionale. Il generico sistema, al quale può essere applicata la teoria del controllo ottimale, è descritto da un vettore di variabili di stato  $x$ . Le equazioni differenziali, le quali descrivono l'evoluzione dello stato del sistema tra tempo iniziale e finale, che rappresentano le condizioni esterne, sono funzioni di:

- $x$  : vettore delle variabili di stato
- $u$  : vettore dei controlli
- $t$  : tempo

Presentano la generica forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.1)$$

Nel caso analizzato è conveniente suddividere la traiettoria in un numero  $n$  di intervalli, i quali vengono definiti archi, all'interno dei quali le variabili sono continue. Le discontinuità possono essere presenti solo alle interfacce degli archi. In questo modo è possibile tener conto delle discontinuità delle variabili come della masse e della velocità nelle manovre impulsive, o del tempo nel caso di flyby di un pianeta. I punti di connessione degli archi rappresentano le condizioni interne al confine. Si considera dunque il  $j$ -esimo intervallo che inizia al tempo  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$ , i vettori di stato ai bordi assumono la forma di  $x_{(j-1)+}$  e  $x_{j-}$ . Ovviamente i segni  $+$  e  $-$  indicano i valori assunti prima e dopo il punto considerato. Con questa formulazione, la funzione che rappresenta le equazioni differenziali del sistema può assumere espressioni diverse in ogni arco. Sono imposte delle condizioni al contorno che, sono in genere di tipo misto e non lineari. Nella forma generica possono essere espresse come:



$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Il problema di ottimo consiste nella ricerca dei valori massimi o minimi relativi di un funzionale che è descritto come segue nella sua forma generale:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)-}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Il funzionale J è la somma di due componenti:

- La funzione  $\varphi$  che dipende dai valori del vettore delle variabili e della variabile tempo ai contorni.
- L'integrale della funzione  $\Phi$  che dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli.
- È possibile, introducendo opportune variabili ausiliarie, ricondursi alla formulazione di Lagrange, per cui  $\varphi = 0$ , o alla formulazione di Mayer, con  $\Phi = 0$ , quest'ultima è quella utilizzata in questa tesi. Si riscrive il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange, costanti  $\mu$  associate alle condizioni al contorno, e variabili  $\lambda$ , le quali sono variabili aggiuntive. Si ottiene dunque:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T x_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \lambda^T x) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Differenziando si ottiene il differenziale del funzionale stesso:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \\ & + \left( H_{j-} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{j-}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left( \lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta x_{(j-1)+}} \right) \delta x_{(j-1)+} + \\ & + \left( -\lambda_{j-}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{j-}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta x_{j-}} \right) \delta x_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\delta H}{\delta x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dove si definisce H come l'Hamiltoniano del sistema:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (4.4)$$

Per la ricerca dell'ottimo è necessaria la condizione di stazionarietà del funzionale e dunque l'annullarsi della sua variazione prima per qualunque variazione  $\delta x, \delta u, \delta x_{(j-1)+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)+}, \delta t_{j-}$ , nella misura in cui è compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. L'introduzione di 'variabili' e 'costanti' permette, scegliendole in modo conveniente, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'equazione (4.5), garantendo così la stazionarietà del funzionale, quindi  $\delta J^* = 0$ . Se si annullano i coefficienti di  $x$  e  $u$  nel termine integrale possono essere derivate due importanti relazioni:

- Equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\delta H}{\delta x} \right)^T \quad (4.5)$$

- Equazioni algebriche per i controlli:

$$\left( \frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 \quad (4.6)$$

Le leggi di controllo presentano una proprietà interessante, ovvero la loro indipendenza formale dal punto stazionario ricercato, quindi la ricerca dei massimi o minimi di  $J$  sono formalmente indipendenti. È necessario mostrare attenzione ai controlli vincolati, poiché questi potrebbero essere limitati da un particolare dominio ammissibile. Ad esempio, la spinta fornita da un propulsore deve essere compresa tra il valore minimo 0 e quello massimo di  $T_{max}$ , e dunque essere sempre positiva. In questa trattazione non sono considerati i vincoli dei controlli variabili nel tempo o dipendenti da variabili del vettore di stato. Ogni condizione limite sui controlli è dunque costante ed esplicita. Se è presente tale vincolo, il valore ottimale del controllo vincolato in ogni punto della traiettoria è quello che appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo, se si cercano i massimi di  $J$ , o minimo, se si ricercano i minimi di  $H$ , in quel punto. Questo comportamento è espresso dal Principio di Massima di Pontryagin, che porta a due possibilità:

- Il valore ottimale del controllo è quello fornito nell'equazione (4.8) se rientra nel dominio di ammissibilità. Il controllo risulta localmente non vincolato poiché in quel punto il vincolo non influenza il sistema.
- Il valore ottimale del controllo si trova agli estremi del dominio. Il controllo assume il valore massimo o minimo, se fornito dall'equazione (4.8) non rientra nel dominio di ammissibilità. In questo caso il controllo risulta vincolato.

Se l'Hamiltoniano è lineare rispetto ad uno dei controlli vincolati, il sistema presenta una particolarità. Nell'equazione (4.8) è possibile notare che il controllo non compare in modo esplicito e dunque non può essere determinato. Si hanno anche in questo caso due possibilità:

- Se nell'equazione (4.6) il coefficiente di controllo non è nullo, allora  $H$  è massimizzato assumendo il valore massimo per il controllo se è positivo o minimo se è negativo. Questo risultato è in accordo con il Principio di Massima di Pontryagin e prende il nome di controllo 'bang-bang'.

- Se nell'equazione (4.6) il coefficiente di controllo è nullo all'interno di un arco singolare, è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, finché una di esse non contiene esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale è dunque ottenuto ponendo uguale a zero l'ultima derivata. Si stabilisce che il grado della derivata necessaria è sempre pari. Chiamando il grado  $n$  della derivata, l'ordine dell'arco singolare è  $n/2$ .

Per le condizioni al contorno mancanti è conveniente fare riferimento al  $j$ -esimo contorno scrivendo le condizioni che derivano dal considerare come estremo finale del  $(j-1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del  $j$ -esimo sottointervallo. Annullando nell'ordine i coefficienti di  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta x_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$ , nell'espressione (4.5) si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\delta\chi}{\delta x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta x_{j+}} + \mu^T \left[ \frac{\delta\chi}{\delta x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (4.8)$$

$$H_{j-}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{j-}} + \mu^T \frac{\delta\chi}{\delta t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

$$-H_{j+}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{j+}} + \mu^T \frac{\delta\chi}{\delta t_{j+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (4.10)$$

Dove  $j_-$  e  $j_+$  sono i valori assunti subito prima e subito dopo il punto  $j$ . È fondamentale distinguere i due istanti, perché, come già introdotto, si può verificare una discontinuità nei punti di giunzione degli archi. Le equazioni (4.9) e (4.11) non hanno un significato all'inizio della traiettoria ( $j=0$ ), mentre le equazioni (4.10) e (4.12) non lo hanno al suo termine ( $j=n$ ). Se si eliminano le costanti aggiunte  $\mu$  dalle equazioni (4.9) (4.12) si ottengono le condizioni al contorno di ottimo che possono essere definite come:

$$\sigma \left( x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Il sistema differenziale completo è dato dunque dalle equazioni (4.1) (4.2) (4.7) (4.13).

Se si considera una generica variabile di stato  $x$ , e sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni (4.9) e (4.10) danno valori ottimali particolari per la relativa variabile aggiunta corrispondente  $\lambda_x$ :

- Se il valore della variabile di stato  $x$  è assegnato all'istante iniziale, ovvero il vettore delle condizioni imposte  $\chi$  contiene l'equazione  $x_0 - a = 0$  con  $a$  valore esplicito, sulla corrispondente variabile aggiusta non sono presenti condizioni. Pertanto, il valore iniziale della variabile aggiunta  $\lambda_{x_0}$  è libero. Si ha una analoga situazione nell'istante finale, se una variabile di stato è esplicitamente definita in quel punto.

- Se il valore della variabile di stato  $x_0$  non appare né nella funzione  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, la relativa variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale  $\lambda_{x_0} = 0$ . Anche in questo caso si ha analoga soluzione nell'istante finale.
- Se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno  $i$ , e dunque  $\chi$  contiene l'equazione  $x_{j+} = x_{j-}$ , la relativa variabile aggiunta è anch'essa continua, dunque  $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$ .
- Se una variabile di stato è continua e assegnata a un contorno interno, ovvero  $\chi$  ha al suo interno le equazioni  $x_{j+} = x_{j-} = a$ , la relativa variabile aggiunta possiede una discontinuità che viene detta libera, ovvero i valori di  $\lambda_{x_{j+}}$  e di  $\lambda_{x_{j-}}$  sono tra loro indipendenti e devono essere determinati dalla procedura di ottimizzazione.

In egual modo, se  $H$  non dipende in modo esplicito dal tempo, le equazioni (4.11) e (4.12) possono fornire delle condizioni al contorno particolari:

- Se il tempo iniziale  $t_0$  non compare in modo esplicito nelle condizioni al contorno e nella funzione  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è nullo nell'istante iniziale. Si ha lo stesso risultato al tempo finale se non compare in maniera esplicita in  $\chi$  e  $\varphi$ .
- Se il tempo intermedio  $t_j$  non compare in modo esplicito nella funzione  $\varphi$ , e dunque è presente il tempo solo nella condizione di continuità  $t_{j+} = t_{j-}$ , allora l'Hamiltoniano è continuo in  $j$ ,  $H_{j+} = H_{j-}$ .
- Se il tempo intermedio  $t_j$  è assegnato, dunque  $\chi$  ha al suo interno le equazioni  $t_{j+} = t_{j-} = a$ , l'Hamiltoniano in quel punto ha una discontinuità libera.

## 4.2 Boundary Value Problem

Il metodo indiretto per l'ottimizzazione dei trasferimenti orbitali e le missioni spaziali in generale si basa sull'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni differenziali vista in precedenza:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.12)$$

Le quali condizioni al contorno dipendono dal tipo di orbite tra cui la trasferta si svolge. La teoria del controllo ottimale traduce questo problema in un Boundary Value Problem (BVP) dove alcuni valori iniziali delle variabili sono incogniti. La soluzione del BVP consiste nel trovare i valori iniziali che soddisfano contemporaneamente tutte le condizioni al contorno, sia imposte che ottimali. Tale metodo si basa sull'integrazione numerica del sistema differenziale. La teoria del controllo ottimale vede il problema di ottimo come un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici.

- L'intervallo di integrazione è diviso in sottointervalli, chiamati archi, nei quali all'interno degli stessi la formulazione delle equazioni è costante, ma può variare da un arco all'altro;
- La durata di ciascuno sottointervallo è incognita;
- Le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;

- Le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

L'ottimizzazione indiretta è un processo molto complesso, un grande ostacolo è proprio la soluzione del problema ai limiti che deriva dalla loro applicazione a sistemi fisici. Il metodo per la soluzione de BVP è uno degli strumenti indispensabili. La soluzione si ottiene riducendo il BVP a una sequenza di sottoproblemi ai valori iniziali che viene portata a convergenza con il metodo di Newton. Per risolvere l'indeterminatezza della durata di ogni intervallo, la variabile  $t$  viene sostituita, solo per l'integrazione, con una nuova variabile  $\varepsilon$  definita nel  $j$ -esimo sottointervallo attraverso tale relazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (4.13)$$

Dove  $\tau_j$  è la durata del sottointervallo, la quale solitamente è incognita. In tal modo i convinti interni e esterni sono fissi. Grazie all'introduzione dei parametri incogniti  $\tau_j$ , i punti di interfaccia sono rappresentati da valori interni consecutivi della nuova variabile indipendente  $\varepsilon$ .

Per la descrizione di tale metodo, le equazioni differenziali sono riformulate introducendo il nuovo vettore di variabili che tiene conto sia delle variabili di stato che delle variabili aggiunte:  $y = (x, \lambda)$ :

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (4.14)$$

È importante tener conto che, nel problema considerato, alcuni parametri sono costanti, come la durata degli archi  $\tau$ . Ci si riferisce dunque ad un nuovo vettore  $z = (y, c)$ , il quale contiene le variabili di stato e aggiunge il nuovo vettore  $c$  dei parametri costanti. Considerando tale cambiamento della variabile indipendente, il sistema di equazioni differenziali può essere riscritto come:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (4.15)$$

Se si esplicita il secondo membro delle equazioni (4.17), per le variabili di stato aggiunte si ha:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_i \frac{dy}{dt} \quad (4.16)$$

Mentre per i parametri costanti si ha:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (4.17)$$

Le condizioni al contorno sono inserite in un unico vettore che contiene sia quelle imposte che quelle ottimali, e sono espresse nella seguente forma:

$$\Psi(s) = 0 \quad (4.18)$$

Dove  $s$  è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono in ogni contorno interno o esterno  $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ , e i parametri incogniti.

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (4.19)$$

I valori iniziali di alcune delle variabili sono solitamente incogniti, quindi la ricerca della soluzione coincide, tramite un processo iterativo, nel determinare quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni al contorno dell'equazione (4.18). Il metodo si basa sulla considerazione che tutti i valori iniziali sono incogniti. La r-esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (4.16) con i valori iniziali  $p^r$  trovati al termine della iterazione precedente. Dunque è imposta la seguente uguaglianza:

$$z(0) = p^r \quad (4.20)$$

E successivamente si procede con l'integrazione delle equazioni su tutta la traiettoria, tenendo conto delle discontinuità ai confini interni. Ovviamente per innescare il processo è necessario scegliere i valori del primo vettore di tentativo  $p^1$ . In ogni contorno si determina il valore delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\Psi^r$  alla r-esima iterazione. La variazione  $\Delta p$  porta cambiamenti all'errore sulle condizioni al contorno. Questo errore, considerando solo i termini del primo ordine può essere espresso come:

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (4.21)$$

Per soddisfare le condizioni al contorno, tale errore deve essere nullo, ottenendo  $\Delta \Psi = -\Psi^r$ . A ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una certa quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (4.22)$$

Tale correzione viene applicata fino a quando le condizioni al contorno sono rispettate con la precisione voluta. La matrice che compare nel secondo termine dell'equazione che compare nell'equazione (4.23) è calcolata attraverso il prodotto di due matrici:

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right] \left[ \frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (4.23)$$

La prima matrice può essere ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alla grandezze presenti. La seconda matrice tiene conto della derivata delle variabili ai contorni rispetto ai loro valori iniziali. Questo significa che la seconda matrice rappresenta i valori assunto al contorno dalla matrice:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial z} \right] = [g(\varepsilon)] \quad (4.24)$$

La quale è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale (4.16) rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{g}] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{dz}{d\varepsilon} \right) \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial p} \right] \quad (4.25)$$

Dove il punto indica la derivata rispetto alla nuova variabile indipendente  $\varepsilon$ . Lo Jacobiano del sistema principale (4.16) può essere espresso, trovando la seguente forma per l'equazione (4.26):

$$[\dot{g}] = \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right] \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right] [g] \quad (4.26)$$

Il metodo a problemi di ottimizzazione indiretta ha delle proprietà di simmetria di alcuni termini dello Jacobiano che vengono di seguite omesse poiché esulano dallo scopo della tesi. I valori iniziali del sistema omogeneo (4.27) possono essere recuperati derivando la relazione (4.21); si ottiene così la matrice identica:

$$[g(0)] = \left[ \frac{\partial z(0)}{\partial p} \right] = [I] \quad (4.27)$$

È importante sottolineare che questo metodo permette di tracciare le discontinuità nelle variabili. Infatti, per tener conto di una discontinuità nei punti  $i$ , è sufficiente aggiornare sia il vettore delle variabili  $z$  che la matrice  $g$  attraverso la relazione  $h$  che lega i valori della variabile prima e dopo la discontinuità:

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (4.28)$$

$$[g_{i+}] = \left[ \frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}] \quad (4.29)$$

Tale risultato spiega perché il vettore  $s$  è stato definito senza una chiara distinzione tra  $y_{i+}$  e  $y_{i-}$ , in quanto l'uno è una funzione nota dell'altro e del vettore  $c$ , attraverso la relazione  $h$ . La matrice che compare nell'equazione (4.23) può essere calcolata numericamente anziché analiticamente. La sua  $i$ -esima riga si ottiene variando la  $i$ -esima componenti di  $p$  di una piccola quantità  $\Delta p$  e integrando le equazioni. In tal modo è possibile calcolare il relativo cambiamento nelle condizioni al contorno  $\Delta \Psi^T(\Delta p)$  e, attraverso la linearizzazione si ottiene la riga corrispondente come  $\Delta \Psi^T / \Delta p$ . Questo metodo permette di ridurre i tempi di calcolo in alcuni casi ma d'altra parte la convergenza non è garantita. Questo poiché la determinazione della matrice nell'equazione (4.23) è meno accurata rispetto al suo calcolo attraverso la soluzione del sistema (4.27). Considerando la sensibilità del problema, anche adottando il valore più adatto di  $p$ , si torva di solito intorno a  $10^{-7}$  e  $10^{-6}$ , l'approssimazione numerica introdotta può compromettere la convergenza della soluzione. Una simile procedura numerica, nonostante la maggiore precisione della analitica, viene adottata per il calcolo dello Jacobiano e della matrice  $[\partial \Psi / \partial s]$  per ridurre i tempi di calcolo. La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione  $\Delta p$  data dall'equazione (4.23) dei valori iniziali del primo tentativo, porta errori che possono compromettere la convergenza facendo aumentare anziché diminuire l'errore sulle condizioni al contorno. Per risolvere questo problema sono stati presi alcuni accorgimenti sulla procedura effettuata:

- Per non avere errori troppo significativi che porterebbero a un discostamento dalla soluzione, la correzione applicata è solo una frazione di quella determinata, ovvero:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (4.30)$$

valori di  $K_1 = 0.1 \div 1$  generalmente consentono la convergenza in un numero consono di step di integrazione. Questi valori sono determinati empiricamente durante le prime prove dei codici e dipendono dalla distanza tra la prima soluzione e quella cercata.

- Ogni iterazione segue il seguente procedimento: dopo che il nuovo vettore dei valori iniziali di tentativo  $p^{r+1}$  è stato determinato attraverso l'equazione (4.31) si integrano le equazioni del moto e si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno  $E_{max}^{r+1}$  con quello ottenuto all'iterazione precedente  $E_{max}^r$ . Se  $E_{max}^{r+1} > E_{max}^r$  si può procedere con la nuova iterazione. Poiché per convergere alla soluzione l'errore sulle condizioni al contorno può crescere nelle prime iterazioni. Pertanto, il valore di  $K_2$  deve essere superiore a 1, solitamente assumere i valori  $K_2 = 2 \div 3$  garantisce risultati soddisfacenti.
- Se l'errore legato alla nuova iterazione è troppo alto rispetto alla precedente, si utilizza la bisezione della correzione. La metà della variazione determinata viene portata al vettore  $p$  per l'integrazione delle equazioni del moto, ovvero:

$$p^{r+1} = p^r + \frac{K_1 \Delta p}{2} \quad (4.31)$$

Il nuovo errore viene confrontato con quello del passo precedente. Tale metodo può essere applicato fino a 5 volte. Se anche dopo il numero massimo di bisezioni la nuova iterazione determina un errore maggiore del precedente il calcolo viene interrotto. Ciò significa che la soluzione di tentativo scelta non è compatibile con la convergenza del metodo e deve essere modificata.



### 4.3 Modello Dinamico

In questo capitolo sono presentate le equazioni che descrivono il problema analizzato, al quale si sta applicando la teoria del controllo ottimale. In seguito, verrà data una descrizione del modello e delle perturbazioni. Il modello dinamico considera un veicolo spaziale puntiforme con massa variabile. Le variabili di stato del problema sono la posizione  $r$ , la velocità  $V$  e la massa  $m$  che introdurremo con le equazioni differenziali vettoriali:

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (4.32)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\mu r}{r^3} + \frac{T}{m} + a_p \quad (4.33)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.34)$$

La traiettoria è controllata dal vettore spinta  $T$  e la velocità di scarico  $c$  è assunta costante. Il termine  $a_p$  rappresenta l'accelerazione perturbante ed è composta da tre termini:

$$a_p = a_J + a_{lsg} + a_{srp} \quad (4.35)$$

Dove  $a_J$  è la perturbazione alla non sfericità della Terra,  $a_{lsg}$  è l'accelerazione perturbante dovuta alla gravità Lunare e Solare e infine  $a_{srp}$  è la perturbazione dovuta alla pressione della radiazione solare. Le varie accelerazioni perturbanti sono meglio spiegate nel paragrafo ad esse dedicato.

Dunque la teoria del controllo ottimale è applicata al sistema differenziale per ottenere la soluzione ottimale per la fuga. L'Hamiltoniano è definita come:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (4.36)$$

Combinandolo con l'espressione vettoriale dell'equazione di stato si ottiene:

$$H = \lambda_r^T V + \lambda_V^T \left( -\frac{\mu r}{r^2} + \frac{T}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} + a_p \quad (4.37)$$

Le variabili aggiunte  $\lambda$  sono dunque accoppiate alle equazioni di stato. Si introduce la definizione di Switching Function:

$$S_F = \frac{\lambda_V^T T}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.38)$$

Sostituendo nell'equazione (4.38) si ottiene una nuova definizione dell'Hamiltoniano:

$$H = \lambda_r^T V + \lambda_V^T \left( -\frac{\mu}{r^2} \frac{r}{r} \right) - T S_F + a_p \quad (4.39)$$

L'Hamiltoniano deve essere massimizzato dai controlli ottimali, cioè modulo e direzione della spinta, in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin (PMP). La spinta deve essere parallela al vettore  $\lambda_V$ , chiamato vettore Primer, di conseguenza è possibile definire la funzione di commutazione come:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.40)$$

La definizione della funzione di commutazione e dunque il suo segno, definiscono la strategia che permette di massimizzare l'Hamiltoniano.

$$S_F < 0 \rightarrow T = 0 \quad (4.41)$$

$$S_F > 0 \rightarrow T = T_{max} \quad (4.42)$$

#### 4.3.1 Coordinate sferiche

La traiettoria del veicolo spaziale che compie la missione è descritta un insieme di equazioni vettoriali, le quali sono proiettate su un comodo sistema di riferimento di coordinate. Il frame ottimale è un frame inerziale in cui non vengono presi Coriolis e le accelerazioni inerziali account. In particolare il sistema di riferimento adottato è The Earth Mean Equator and Equinox of Epoch J2000 reference frame, cioè il geocentrico-equatoriale, dove I, J, K sono i vettori di unità lungo gli assi di EME2000. La precessione e la nutazione sono trascurate. L'ascensione retta  $\theta$  e la declinazione  $\phi$  sono introdotte insieme alla grandezza del raggio  $r$  per scrivere il vettore posizione come :

$$r = r \cos \theta r \cos \phi \hat{I} + r \sin \theta \cos \phi \hat{J} + r \sin \phi \hat{K} \quad (4.43)$$

Viene introdotto il sistema di riferimento topocentrico identificato dai vettori unitari  $I$  (radiale),  $J$  (verso est) e  $K$  (verso nord).

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

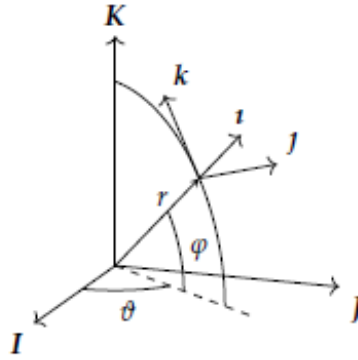


Figura 4-1 EME2000 vs il sistema di riferimento topocentrico

È possibile dunque scrivere il vettore posizione rispetto al frame topocentrico grazie alla matrice rotazionale. Partendo dunque dall'equazione (quella del  $r$ ) ne consegue che  $r = r\mathbf{i}$  e il vettore velocità può essere scritto come:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (4.45)$$

Dove  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sono le componenti di velocità radiale, verso est e verso nord rispettivamente.

#### 4.4 State and Adjoint Variables

Proiettando le Equazioni di Stato nel sistema di riferimento scelto sono facilmente ricavabili le seguenti relazioni:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.46)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \varphi} \quad (4.47)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.48)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} + a_{p_u} \quad (4.49)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-uv - vw \tan \varphi}{r} + \frac{T_v}{m} + a_{p_v} \quad (4.50)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-uv - v^2 \tan \varphi}{r} + \frac{T_w}{m} + a_{p_w} \quad (4.51)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.52)$$

Dove il vettore di stato iniziale è  $x = [r \ \theta \ \varphi \ u \ v \ w \ m]$ , e sono definite le componenti del vettore spinta come:

$$T_u = T \sin \gamma_T \quad T_v = T \cos \gamma_T \quad T_w = T \cos \gamma_T \sin \varphi_T \quad (4.53)$$

Dove  $\varphi_T$  è l'angolo di elevazione della spinta. Dopo queste considerazioni è possibile formulare una nuova espressione dell'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \varphi} + \lambda_\varphi \frac{w}{r} + \\ & + \lambda_u \left( -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) + \\ & + \lambda_v \left( \frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \varphi_T \right) + \\ & + \lambda_w \left( -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \varphi_T \right) + \\ & - \frac{\lambda_m T}{c} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Imponendo a zero le derivate parziali dell'Hamiltoniana, argomento affrontato nel Capitolo 3, è possibile ottenere i valori ottimi di T e  $\gamma_T$  che sono il controllo che definisce la direzione della spinta. Matematicamente è possibile scrivere:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (4.55)$$

Dove  $u = [\gamma_T \ \varphi_T]$  è il vettore di controllo. È possibile ricavare le Equazioni Algebriche di Controllo:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (4.56)$$

$$\cos \varphi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_w} \quad (4.57)$$

$$\sin \varphi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \quad (4.58)$$

Il vettore di controllo  $\lambda_v$  già incontrato in precedenza può essere scritto come:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.59)$$

È importante sottolineare che il vettore primo è parallelo alla direzione ottimale della spinta. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono usate per definire l'unico insieme di equazioni rimasto che sono le equazioni differenziali per le variabili aggiunte  $\lambda = [\lambda_r \lambda_\theta \lambda_\varphi \lambda_u \lambda_v \lambda_w \lambda_m]$ .

Le Equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \quad (4.60)$$

Diventano:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos\varphi} + \lambda_\varphi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) \right. \\ \left. + \lambda_v(-uv + vwtan\varphi) \right. \\ \left. + \lambda_w(-uw - v^2tan\varphi) \right] + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dr} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (4.62)$$

$$\dot{\lambda}_\varphi = \frac{1}{r\cos^2\varphi} (\lambda_\theta v\sin\varphi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{d\varphi} \quad (4.63)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{du} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left( -\lambda_\varphi \frac{1}{\cos\theta} - 2\lambda_u v - \lambda_v(u - wtan\varphi) \right. \\ \left. + 2\lambda_w vtan\varphi \right) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dv} \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\varphi - 2\lambda_u w - \lambda_v(vtan\varphi + \lambda_w u) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dw} \quad (4.66)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dm} \quad (4.67)$$

## 4.5 Perturbazioni

### 4.5.1 Pressione di radiazione solare

La perturbazione dovuta alla pressione di radiazione solare può essere spiegata dal comportamento di un fotone che collide un corpo generico. Interagendo con una superficie solida, un fotone di luce scambia la sua quantità di moto la cui quantità corrisponde al valore dell'energia del fotone diviso la velocità della luce. La superficie raggiunta dal suddetto fotone percepisce una pressione di radiazione, pari alla differenza vettoriale tra il flusso di quantità di moto incidente e quello riflesso. È possibile riferirsi alla radiazione solare come un flusso continuo di particelle provenienti dal Sole. Si utilizza un semplice modello sferico per implementare la forza perturbativa dovuta alla radiazione solare. Questo modello prevede che il veicolo spaziale sia una sfera invariante con proprietà termo ottiche costanti. Si definisce una sezione trasversale esposta in modo continuo al Sole e un coefficiente di riflettività  $C_R$ , il quale indica in che misura il veicolo spaziale riflette la radiazione solare. I valore di tale coefficiente vanno da 0 a 2, dove 0 significa che il corpo è traslucido alla radiazione in arrivo e quindi nessuna forza viene trasferita al corpo; 1 che il veicolo spaziale si comporta come un corpo nero, dunque la radiazione viene assorbita e re-irradiata; 2 il veicolo spaziale si comporta come uno specchio e tutta la radiazione in arrivo viene riflessa. Considerando tale modello sferico la forza dovuta alla pressione della radiazione solare può essere scritta come:

$$F = -\frac{\phi A}{mc} C_R \frac{R}{R^3} \quad (4.68)$$

Dove  $\phi$  è il flusso solare,  $A$  è l'area della sezione trasversale del veicolo spaziale,  $c$  è la velocità della luce,  $m$  è la massa del veicolo spaziale e  $R$  è la distanza tra la navicella e il Sole.

È utile ai fini della trattazione di tale tesi descrivere in altri termini anche l'accelerazione dovuta alla pressione della radiazione solare e riferirla al sistema di riferimento topocentrico utilizzato.

$$a_{sp} = (1 + C_R) p^* \left(\frac{R^*}{R}\right)^2 \left(\frac{A}{m}\right) \frac{R}{R} = \frac{\Gamma R}{m R^3} \quad (4.69)$$

Dove  $p^* = 4.55682$  è la pressione dei fotoni a  $R=1$  AU.

Proiettando l'accelerazione nel sistema di riferimento topocentrico si ottiene:

$$(a_{srp})_u = \left[ \frac{\Gamma}{m R^3} \right] [(r_s)_u - r] \quad (4.70)$$

$$(a_{srp})_v = \left[ \frac{\Gamma}{m R^3} \right] [(r_s)_v] \quad (4.71)$$

$$(a_{srp})_w = \left[ \frac{\Gamma}{m R^3} \right] [(r_s)_w] \quad (4.72)$$

La radiazione solare è quindi inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei due corpi e ha causato un'accelerazione sulla direzione del veicolo spaziale Sole, lo stesso accade con le accelerazioni solari ma con direzioni opposte.

#### 4.5.2 Perturbazione Luni-Solare

La perturbazione Luni-Solare considera l'attrazione gravitazionale del Sole e della Luna su un veicolo spaziale. La posizione del Sole e della Luna sono valutate tramite le effemeridi DE430 del JPL (William, James, Dale, Ryan, & Petr, 2014), che forniscono la posizione del corpo in coordinate rettangolari  $x_s, y_s, z_s$  per il Sole, e  $x_l, y_l, z_l$  per la Luna, rispetto alla Terra nel sistema di riferimento Celeste, che, a meno di piccole differenze molto piccole che possono essere trascurate in tale trattazione, coincide con s.r.f EME2000.

Per cui la posizione dei due corpi può essere descritta genericamente con il vettore "b", inteso come s per Sole, e l per Luna, come:

$$r_b = x_b I + y_b J + z_b K \quad (4.73)$$

Come vettore posizione rispetto alla Terra.

L'accelerazione perturbativa del corpo celeste sul veicolo spaziale è dalla differenza tra l'accelerazione gravitazionale che il terzo corpo causa sul veicolo spaziale e quella causata dalla Terra. Ne segue che l'accelerazione perturbante è :

$$a_{bg} = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right) - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right) r_b \quad (4.74)$$

Dove  $R = r - r_b$  rappresenta il vettore posizione relativa rispetto al corpo perturbante.

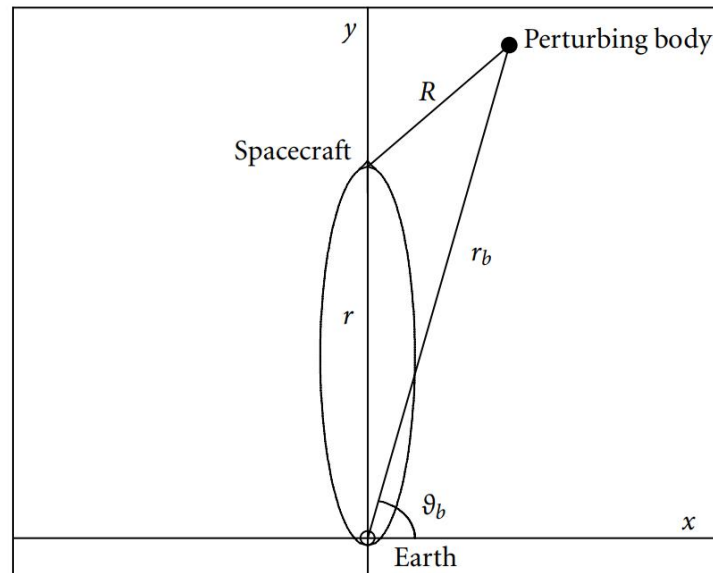


Figura 4-2 Geometria schematica della perturbazione gravitazionale (Casalino L.)

Proiettando l'accelerazione nel sistema di riferimento topocentrico si ottengono le tre componenti:

$$(a_{bg})_u = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right) [(r_b)_u - r] - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right) (r_b)_u \quad (4.75)$$

$$(a_{bg})_v = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right) [(r_b)_v] - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right) (r_b)_v \quad (4.76)$$

$$(a_{bg})_w = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right) [(r_b)_w] - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right) (r_b)_w \quad (4.77)$$

Dove  $R = \sqrt{[r - (r_b)_u]^2 + (r_b)_v^2 + (r_b)_w^2}$ .

Esplicitando le componenti della posizione del corpo perturbante nel sistema di riferimento topocentrico è possibile notare come l'accelerazione perturbante sia solo in funzione di tempo e delle variabili di stato, infatti è possibile scrivere:

$$(r_b)_u = x_b \cos\theta \cos\varphi + y_b \sin\theta \cos\varphi + z_b \sin\varphi \quad (4.78)$$

$$(r_b)_v = -x_b \sin\theta + y_b \cos\theta \quad (4.79)$$

$$(r_b)_w = -x_b \cos\theta \sin\varphi - y_b \sin\theta \sin\varphi + z_b \cos\varphi \quad (4.80)$$

#### 4.5.3 Modello del potenziale terrestre

Il potenziale gravitazione della Terra subisce della variazioni dal modello semplificato a causa della non sfericità e non simmetria. Infatti la Terra è rigonfia all'equatore, schiacciata ai poli e asimmetrica. La descrizione del potenziale è basata sul modello gravitazionale terrestre EGM2008 che fornisce i coefficienti armonici normalizzati per il potenziale gravitazionale terrestre. La rotazione della Terra è assunta costante e come già accennato si trascura precessione e nutazione degli assi. Quindi il potenziale corrispondente alla non sfericità della Terra si può esprimere come:

$$\Phi = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{r_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{mn}(\sin \varphi) \quad (4.81)$$

Dove :

- $\mu$  è il parametri gravitazionale terrestre semplificato
- $r_E$  è il semiasse maggiore dell'ellissoide terrestre
- $P_{mn} \sin\varphi$  sono le funzioni di Legendre
- $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  sono i coefficienti sferici armonici

Poiché la nutazione è trascurata, la latitudine terrestre coincide con l'angolo di declinazione. Mentre la longitudine può essere ottenuta dalla seguente formula:

$$\lambda = \theta - \theta_{Gref} - \omega_E(t - t_{ref}) \quad (4.82)$$



Dove  $\theta_{Gref}$  è l'ascensione retta del meridiano di Greenwich al tempo di riferimento  $t_{ref}$  che coincide con 51544.5 MJD, mentre  $\omega_E$  è la velocità di rotazione della Terra valutata nel giorno siderale.

Per calcolare l'accelerazione perturbativa dovuta alla non sfericità della Terra è necessario fare il gradiente di  $-\Phi$ . Valutando le componenti di tale perturbazione nel sistema topocentrico si ottengono:

$$(a_j)_u = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (4.83)$$

$$(a_j)_v = -\frac{\partial\Phi/\partial\theta}{\partial r \cos\varphi} \quad (4.84)$$

$$(a_j)_w = -\frac{\partial\Phi/\partial\phi}{r} \quad (4.85)$$

## 5. Casi di Studio

In questo capitolo sono presentati i vari casi studio che sono stati svolti durante questa tesi. Si descrivono inizialmente le orbite utilizzate e come sono state ricavate. In seguito le varie simulazioni di manovre di escape dalle suddette orbite Lyapunov nel sistema Terra-Sole al fine di studiare i consumi. Si studiano cinque date per avere una panoramica generale, inizialmente con una  $C_3$  libera di variare ma ad un tempo fissato e successivamente con una  $C_3$  fissata a dei valori di interesse per escape a durata libera.

La scelta delle 5 date equispaziate di partenza deriva dalla necessità di studiare la perturbazione Lunare durante le fasi di escape: la prima data, il 15 Ottobre 2025, è scelta nella epoch in cui la Luna, secondo le effemeridi DE430, si trova ad una distanza dalla Terra pari alla distanza media standard di 384400 km. Le date successive si ritrovano a distanza di una settimana, fino all'ultima occorrenza del 12 Novembre 2025; in tale data la Luna ha compiuto un mese sinodico e, pertanto, si ritrova nella stessa posizione relativa rispetto alla Terra, e quindi questa ulteriore data permette di apprezzare anche l'influenza solare al netto di quella Lunare.

### 5.1 Costruzione di Orbite Lyapunov

Per costruire le orbite Lyapunov, e di conseguenza il punto di partenza delle traiettorie da utilizzare, si utilizzano dei metodi numerici semplificati poiché il modello effemeridi a n-corpi non è di semplice trattazione. Sin dai primi studi circa le orbite periodiche nel problema dei tre corpi circolare ristretto, (Howell & Pernicka, 1986), è stata implementata un'approssimazione lineare in grado di correggere un guess approssimato delle orbite periodiche (Lyapunov, Lissajous, Halo, calcolate con metodi linearizzati, come ad esempio il metodo di Richardson del 3° ordine) nel modello dei tre corpi. In tale circostanza è stata utilizzata la matrice di transizione, e la stessa è stata implementata su un codice Matlab calcolando le variazioni dello pseudopotenziale e utilizzando come guess iniziale il modello linearizzato.

È riportata in seguito la matrice di transizione per il modello tre corpi:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial U^*}{\partial x \partial x} & \frac{\partial U^*}{\partial x \partial y} & \frac{\partial U^*}{\partial x \partial z} & 0 & 2n & 0 \\ \frac{\partial U^*}{\partial y \partial x} & \frac{\partial U^*}{\partial y \partial y} & \frac{\partial U^*}{\partial y \partial z} & -2n & 0 & 0 \\ \frac{\partial U^*}{\partial z \partial x} & \frac{\partial U^*}{\partial z \partial y} & \frac{\partial U^*}{\partial z \partial z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Grazie a tale codice è stato possibile ricavare nel modello three-body l'orbita di partenza con un periodo di circa 180 giorni ed è possibile apprezzare due punti importanti. Il punto centrale nero rappresenta il punto Lagrangiano  $L_2$  mentre il punto rosso rappresenta il punto di partenze delle traiettorie che verranno studiate.

### CR3BP Orbit Computation

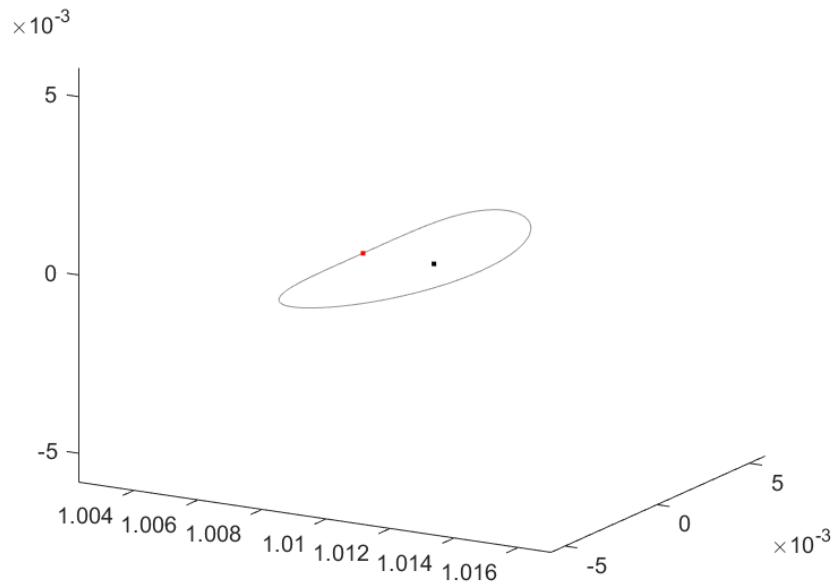


Figura 5-1 Costruzione orbita CR3BP

Il punto di partenza individuato ha le seguenti caratteristiche:

Condizione iniziale in riferimento  
sinodico

X	183.409597156475
Y	0
Z	0
$V_x$	0
$V_y$	0.077645133033
$V_z$	0

Tabella 3 Condizioni iniziali in riferimento sinodico  $x, y, z$  e  $V_x, V_y, V_z$

Si precisa che le distanze sono adimensionalizzate rispetto al raggio medio della Terra,  $r = 6378.1363$  km, così come le velocità sono adimensionalizzate rispetto alla velocità orbitale circolare ad una distanza pari al raggio della Terra,  $V = \sqrt{\mu_{\oplus}/r_{\oplus}} = 7.9054$  km/s.

Come ci si aspetta essendo un'orbita Lyapunov le componenti y e z sono nulle, le componenti  $V_x$  e  $V_z$  sono nulle poiché l'orbita è planare. Per quanto riguarda la componente  $V_y$  una volta importata tale orbita nel codice fortran, al fine di iniziare le simulazioni, è stata necessaria una correzione poiché tale risultato risulta corretto se Terra-Sole avessero una distanza costante. Nello specifico, queste Lyapunov, calcolate nel modello CR3BP, dovrebbero essere transizionate nel modello effemeridi per potersi mantenere chiuse anche in presenza di perturbazioni: in particolare, l'integratore numerico implementato segue un modello

perturbativo a 4 corpi (Sole, Terra, Luna e spacecraft) e include le perturbazioni di ogni corpo, le armoniche zonali della Terra e la SRP. Questa transizione in effemeridi è particolarmente complessa ed esula dallo scopo della presente trattazione: al fine di garantire un'orbita più stabile in Fortran sono state svolte delle simulazioni senza spinta per le cinque date al fine di ottenere orbite che rimanessero stabili per 180 giorni, in modo da non falsare gli escape, e cioè in modo da assicurarsi che l'escape avvenisse realmente per la spinta del propulsore e non come evasione spontanea per instabilità.

Date	$V_0$
15 ottobre 2025	0.0758
22 ottobre 2025	0.0788
29 ottobre 2025	0.0789
5 novembre 2025	0.0795
12 novembre 2025	0.0759

Tabella 4: Conversione date di partenza da forma dimensionale standard ad adimensionale

È riportata a titolo di esempio l'orbita del 29 ottobre 2025.

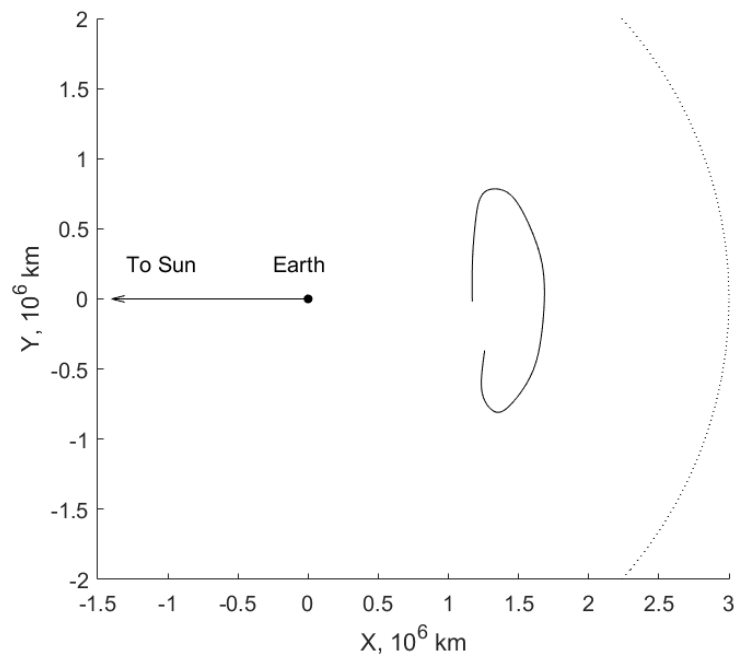


Figura 5-2 Implementazione orbita Lyapunov con correzione sulla velocità

È di significativa importanza confrontare l'orbita costruita con il modello CR3BP e corretta con la velocità di cui sopra con il modello in effemeridi dei recenti lavori di Mascolo (Mascolo, 2022), al fine di sottolinearne le differenze e apprezzarne le somiglianze. Nella tesi di Dottorato, Mascolo ha implementato la transizione nel modello effemeridi delle orbite Lyapunov e Halo. Confrontando lo stato iniziale dello spacecraft (posizione e velocità) della presente trattazione con lo stato iniziale in effemeridi si notano discrepanze minime e in linea con le considerazioni che si possono fare a livello dinamico: in particolare, la correzione per le date 1 e 5 è la minore fra tutte, e questo conferma il fatto che è necessaria una correzione inferiore quando la Luna si trova ad una distanza molto simile a quella media, rappresentativa

del modello CR3BP. Nelle figure che seguono, la linea tratteggiata rappresenta l'approssimazione lineare di Richardson del 3° ordine, la linea piena rappresenta la Lyapunov andata a convergenza nel modello CR3BP tramite matrice di transizione e infine la linea rossa il modello effemeridi.

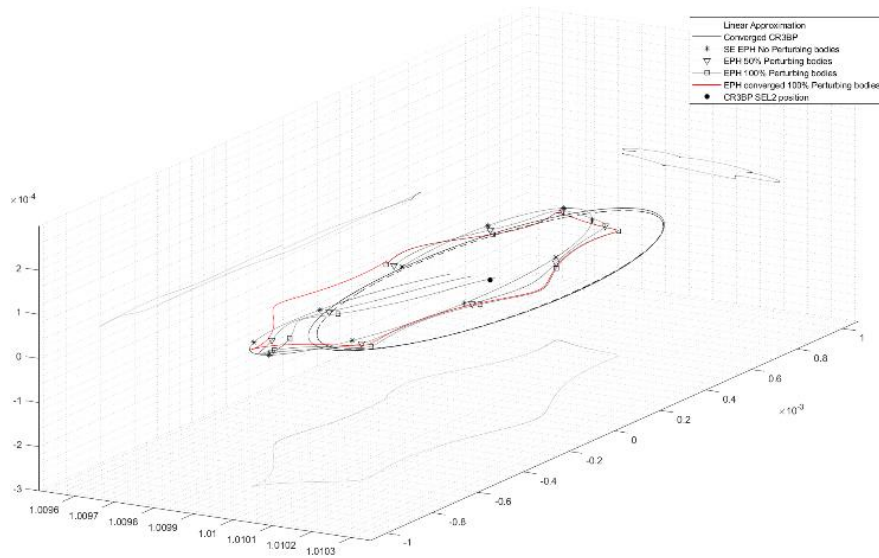


Figura 5-3 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022)

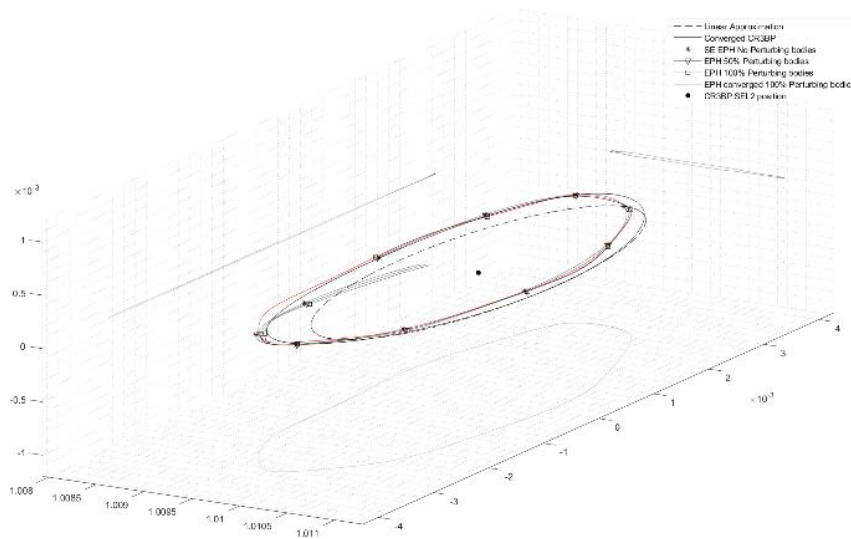


Figura 5-4 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022)

I primi due casi rappresentano rispettivamente delle orbite con dimensione in  $y = 1 * 10^6 km$  e  $y = 4 * 10^6 km$ . Nel primo caso l'approssimazione non è ottimale, il modello CR3BP si discosta in modo considerevole dal modello più accurato effemeridi. Man mano che la dimensione  $y$  aumenta il modello three-body diventa sempre più accurato. Come si può apprezzare nella Figura 5-5 che rappresenta l'orbita a  $y = 8 * 10^3 km$  l'approssimazione è invece ottima, le curve sono quasi sovrapponibili.

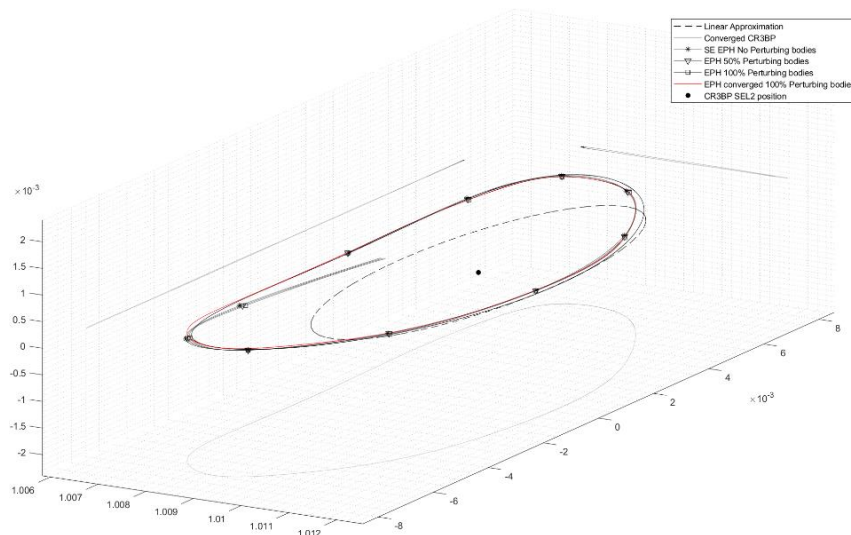


Figura 5-5 – Orbita Lyapunov SEL2 – modello EPH (Mascolo, 2022)

Possiamo dunque affermare che il CR3BP fornisce una stima molto accurata delle effemeridi per orbite grandi, le quali sono prese come casi studio in questa tesi.

## 5.2 Partenza tempo fisso $C_3$ libera

Prima di entrare nel dettaglio delle soluzioni, è necessario descrivere alcuni aspetti. In questo primo caso si è deciso di variare la data di partenza dal 15/10/25, a cadenza settimanale fino al 12/11/25. All'interno del programma è utilizzato un tempo adimensionale ( $t_0$ ) e il periodo della missione fissato a 90 giorni. Tale tempo adimensionale si riferisce al tempo trascorso a partire dalla epoch del J2000, cioè il 1° Gennaio 2000 alle ore 12:00; ogni anno corrisponde ad un  $\Delta T = 2\pi$  adimensionato. Si è scelto di variare il  $t_0$  in questo intervallo a causa del periodo sinodico della Luna, il quale è lungo quasi appunto 29 giorni, e in riferimento al periodo siderale, di circa 27.5 giorni. Da questo deriva che dalla prima all'ultima data ci sia una periodicità.

In tabella sono mostrate le date nel formato standard (gg/mm/aaaa) e la data adimensionale.

Data di partenza (gg/mm/aaaa)	Data di partenza (Adimensionalizzata)
15/10/2025	162.033
22/10/2015	162.153
29/10/2015	162.274
5/11/2015	162.394
12/11/2015	162.614

Tabella 5 Conversione data di partenza

È possibile visualizzare nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra che le cinque date di partenza hanno una tendenza comune durante l'escape, il che indica uno sfruttamento simile delle perturbazioni.

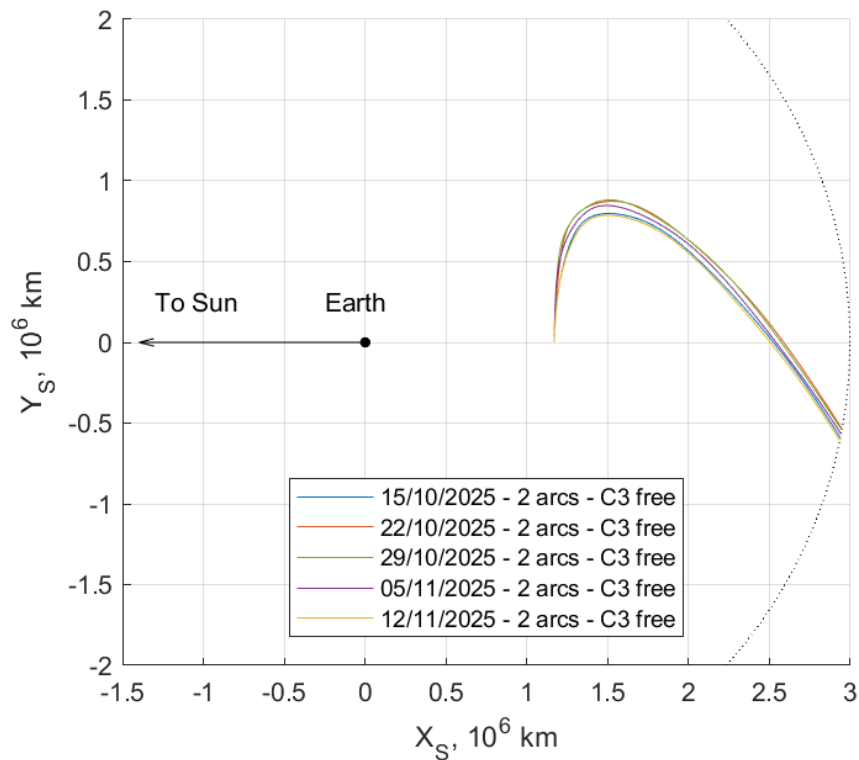


Figura 5-6 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso  $C_3$  libera

Data di partenza	Durata (giorni)	$\Delta V$ (m/s)	Numero di fasi	$C_3$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Massa finale (%)
15/10/2025	90	33.7293	2	0.0421	0.9990
22/10/2025	90	32.5689	2	0.0349	0.9990
29/10/2025	90	33.7332	2	0.0550	0.9990
5/11/2025	90	33.4757	2	0.0372	0.9990
12/11/2025	90	32.5689	2	0.0349	0.9990

Tabella 6 Dati  $C_3$  Libera

Come si vede dalla Tabella 6, la stessa missione può essere effettuata in periodo diversi ma ottenendo alcune variazioni. Per la condizione di durata fissata tutte le missioni sono svolte con un numero di fasi pari a due: in tale scenario gli escape avvengono con una strategia T-0. Per ogni data, inoltre, varia il  $\Delta V$  necessario e la  $C_3$  associata.

La di Switching Function, equazione (4.39) e mostrata in Figura 5-7, è una funzione delle variabili aggiunte ed è uno degli insight teorici che il metodo indiretto riesce a fornire, certificando la sua potenza e versatilità. Il suo valore indica se e quando il thruster debba fornire spinta (generando una fase di Thrusting, T) e quando debba essere spento (con una fase di Coasting, 0). Nella presente trattazione si utilizza un controllo a gradino, tralasciando

diversi livelli di spinta disponibile. Pertanto quando la SW è positiva la spinta è massima e corrisponde a una fase di thrusting, quando è negativa il thruster è spento.

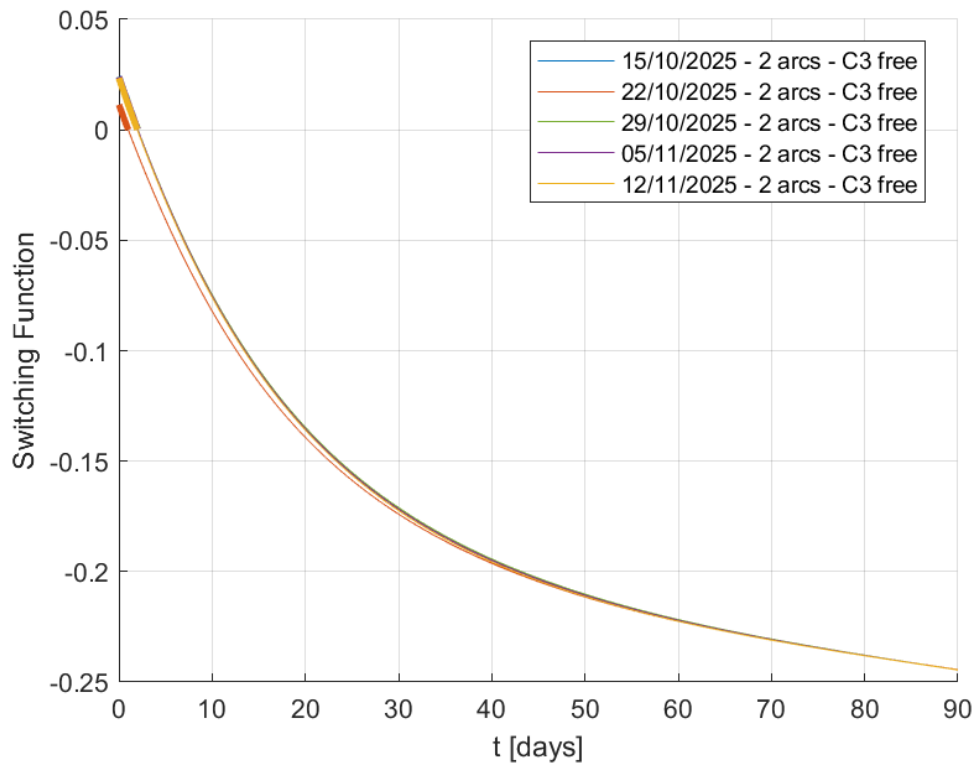


Figura 5-7 Switching Function. . Caso  $C_3$  libera

Per la data del 29/10 si nota un picco della  $C_3$  rispetto agli altri casi che si ritrova nel grafico dell'energia riportato in seguito.

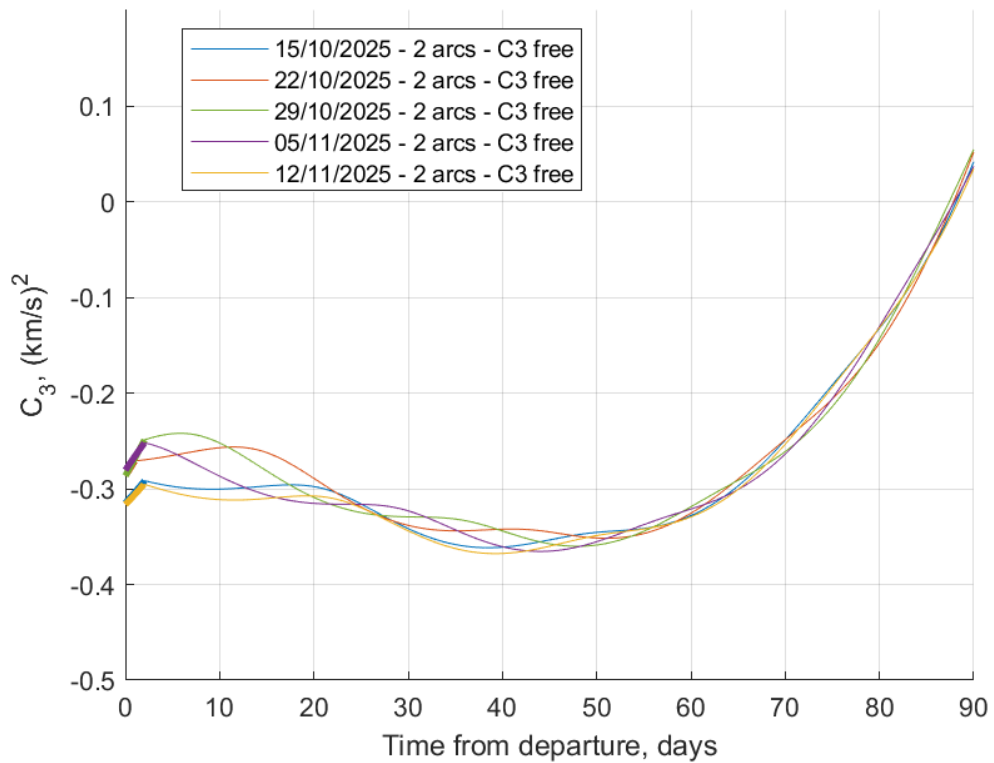


Figura 5-8 Andamento  $C_3$  nel tempo. Caso  $C_3$  libera



Si precisa, d'ora in avanti, che ogni qualvolta una curva presenta una porzione contrassegnata da uno spessore maggiore, si intende che quel tratto di traiettoria è associato ad una fase di spinta. Come anticipato, è possibile notare un valore di picco il 29/10/2025, mentre 15/10 e 12/11 si hanno le curve quelle più basse. L'evoluzione finale, ovvero la parte dovuta al contributo del Sole una volta che ci si trova ad una distanza dal sistema Terra-Luna tale per cui la perturbazione sia minima, è praticamente identica. Pertanto è proprio la configurazione di partenza a dare una evoluzione differente a causa della perturbazione della Luna. Infatti, studiando la posizione della Luna nelle varie date durante il suo ciclo Lunare si vedrà una corrispondenza con il picco rilevato il 29/10/2025. In tale data la Luna si trova in opposizione, mentre il 15/10 e ovviamente una volta completato il ciclo il 12/11 la Luna si trova in congiunzione. È possibile apprezzare meglio tali risultato nel grafico in Figura 5-9, il quale rappresenta la  $C_3$  a diversa  $t_0$ .

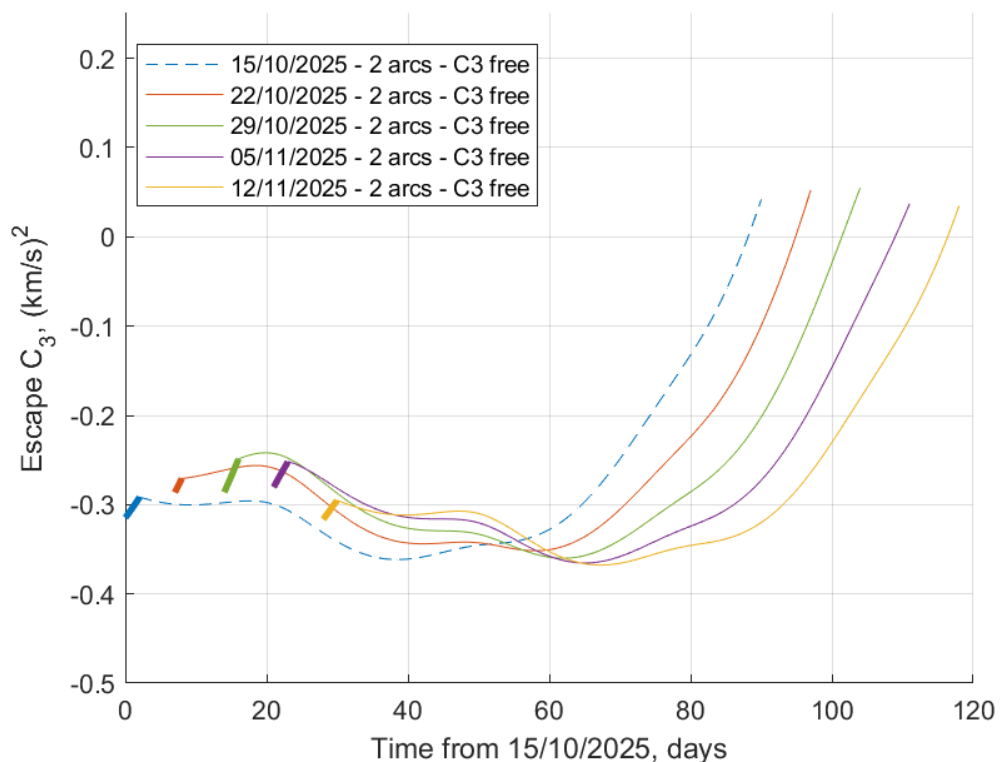


Figura 5-9 Andamento  $C_3$  partenza di riferimento 15/10/25. . Caso  $C_3$  libera

In questo caso la partenza è spostata in asse x con la data di partenza di riferimenti ovvero il 15/10/2025. Tale partenza ricade nella regione in cui  $C_3$  e  $\Delta V$  sono più bassi. Questo è dovuto al fatto che il veicolo spaziale è relativamente lontano dalla Luna e la gravità della Luna agisce principalmente sulla Terra. La geometria iniziale alla data di partenza di riferimento mostra che la Luna riduce l'energia geocentrica della navicella tirando la Terra; questa perturbazione modifica la geometria Sole-Terra-Spazio in modo che l'attrazione del Sole sulla navicella è aumentata, ed è necessario un minore sforzo propulsivo. Il contrario accade dopo mezzo periodo Lunare. Il valore finale di  $C_3$  dipende dal guadagno di energia fornito dalla spinta e dall'effetto complessivo dei corpi perturbatori, causando oscillazioni nell'andamento della traiettoria.

Sono riportate in seguito gli effetti delle perturbazioni Solare e Lunisolare per le cinque date.

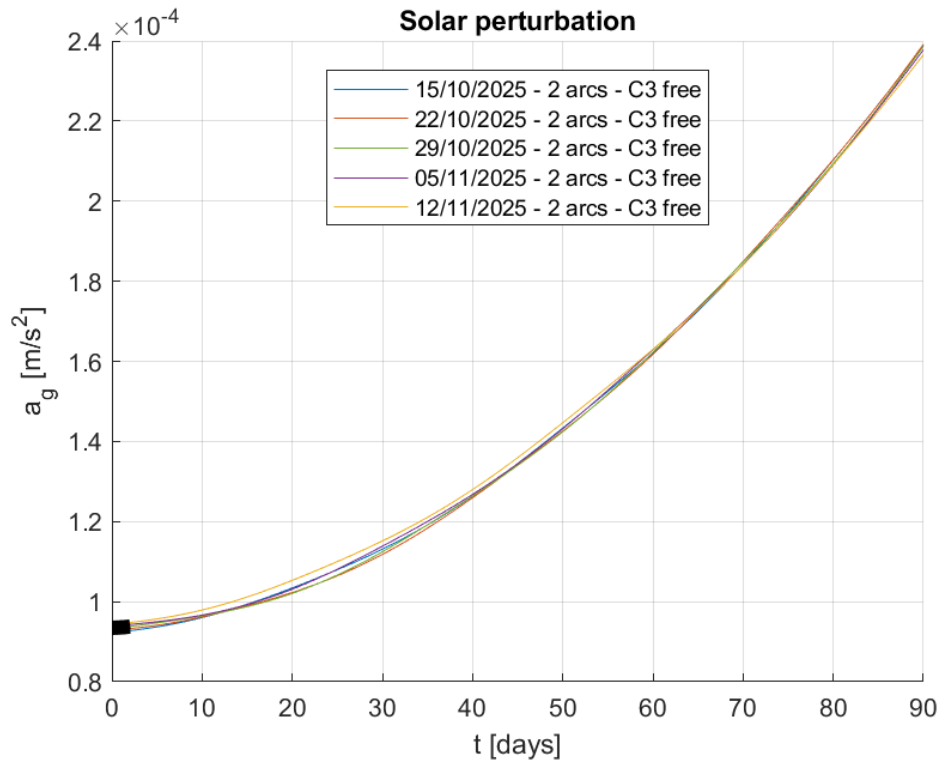


Figura 5-10 Perturbazione solare . Caso  $C_3$  libera

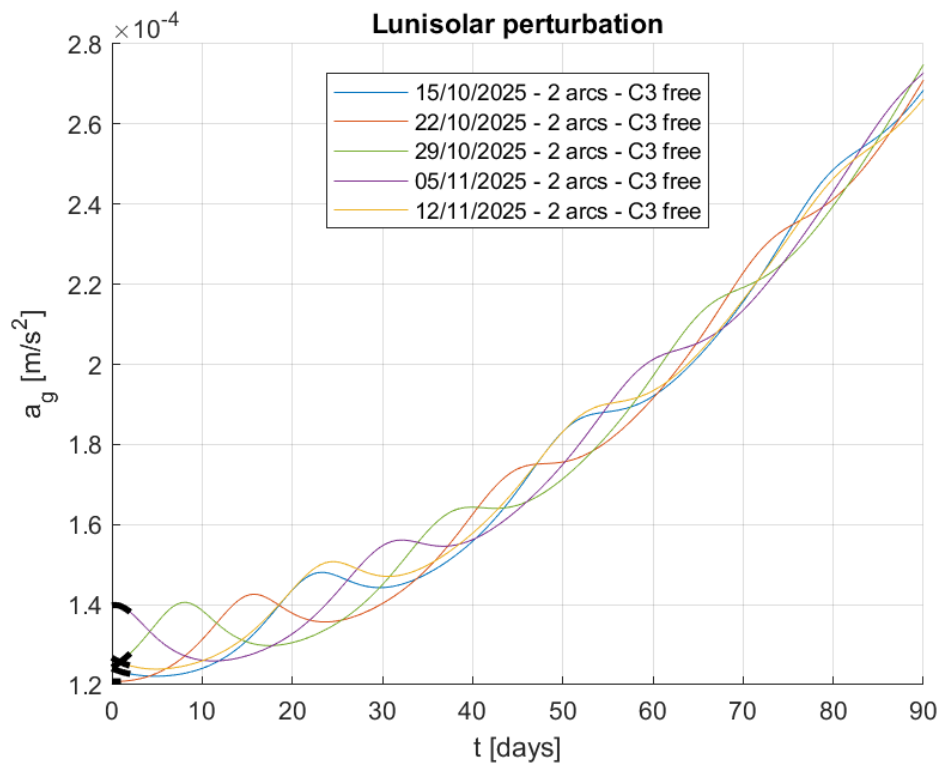


Figura 5-11 Perturbazione Lunisolare . Caso  $C_3$  libera

Come si può apprezzare dalla Figura 5-10 la perturbazione solare è pressoché identica mentre si hanno delle oscillazioni importanti per la perturbazione Lunisolare. Le cinque date utilizzate garantiscono il completamento di un ciclo Lunare completo e di poterne apprezzare i suoi effetti.

### 5.3 Partenza tempo libero $C_3$ fissata

Per poter studiare come variano i consumi e la strategia di missione per un valore fisso di energia finale, si è deciso di fissare la  $C_3$  e variare il tempo della missione e la data di partenza. Fissare il valore finale di  $C_3$  è importante perché, se si vuole raggiungere l'obiettivo finale, un pianeta esterno o interno o un qualsiasi corpo al di fuori della sfera di influenza, è necessario effettuare l'escape con un valore ben determinato di energia. Nella presente trattazione è di interesse il solo modulo di energia finale, e pertanto si tralasciano le considerazioni circa la direzione di uscita eliocentrica. Come punto di partenza si è scelto un valore di  $C_3=0.05$  poiché il valore ottenuto dagli studi a tempo fissato portavano a una  $C_3$  pari a 0.04 circa. Sono stati effettuati passi di 0.05 fino a una  $C_3$  pari a 0.2.

$C_3=0.05$

Nel primo caso con una  $C_3=0.05$  si osservano traiettorie di escape simili alle precedenti come si può osservare dalla Figura 5-12 e nella Tabella 7. In questo caso, essendo fissata l'energia finale a un certo valore, è necessario variare il tempo dell'arco propulso per permettere di raggiungere l'energia scelta: nello specifico, la soluzione ottimale è ricavata praticamente sempre per durate maggiori, in quanto lo spacecraft preferisce sfruttare la perturbazione solare per più tempo per guadagnare energia anziché aumentare la spinta iniziale - considerazione in accordo con la funzione minimizzante, che è proprio la quantità di carburante per completare la missione-. A causa della lunghezza della missione e del fatto che il veicolo spaziale deve raggiungere una velocità iperbolica in eccesso, più breve è la missione e maggiore sarà la durata dell'arco di propulsione. La durata però in questi casi rimane sempre nell'intorno dei 90 giorni, questo poco discostamento dal caso a  $C_3$  libera è dovuto al fatto che, come detto precedentemente, il valore di  $C_3$  imposto è molto vicino al caso a  $C_3$  libera.

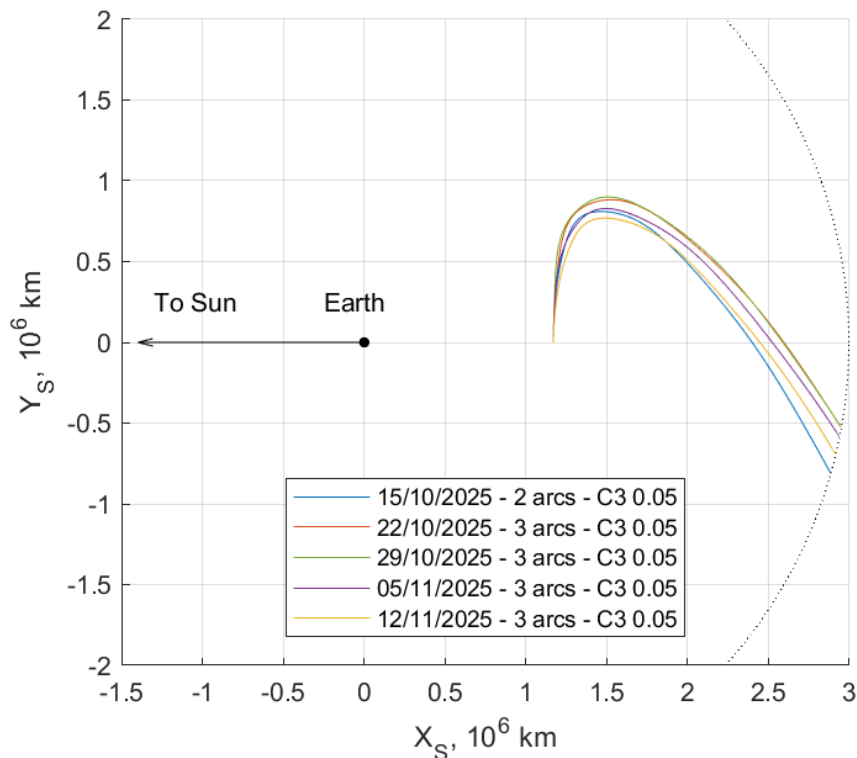


Figura 5-12 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso  $C_3=0.05$

Sono però presenti alcune variazioni, infatti alcuni casi includono un secondo arco di spinta (T) dopo un arco di coasting (O), per un totale di tre fasi in una strategia T-O-T, come si può leggere da Tabella 7. In questo caso, la spinta successiva è necessaria per ottenere la maggiore energia finale imposta. Si utilizza questa strategia anziché aumentare il primo arco di spinta per una migliore ottimizzazione e al fine di mantenere inalterato l'effetto positivo della perturbazione solare.

Data di partenza	Durata (giorni)	$\Delta V$ (m/s)	Numero di fasi	$C_3$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Massa finale (%)
15/10/2025	96.7456	26.0285	2	0.05	0.9992
22/10/2025	90.0221	18.2460	3	0.05	0.9994
29/10/2025	90.0998	37.3073	3	0.05	0.9988
5/11/2025	91.0994	44.0697	3	0.05	0.9986
12/11/2025	92.1404	42.2272	3	0.05	0.9987

Tabella 7 Dati  $C_3 = 0.05$

È importante notare come la prima data rispetti ancora tutte le caratteristiche di una traiettoria a due fasi, la seconda invece rappresenta un caso di soluzione limite, poiché si trova a cavallo tra una soluzione a due e a tre fasi. Se si osserva la Switching Function per il caso del 22/10/25 si osserva come ci sia una necessità di una ulteriore spinta finale molto breve. Si è raggiunta comunque la convergenza con una traiettoria 3 fasi, ma questo rappresenta un caso limite di ottimizzazione. Il  $\Delta V$  necessario per le varie fasi segue una crescita dovuta alla posizione della Luna e all'attrazione Solare. È interessante notare come il  $\Delta V$  necessario dalla prima alla seconda data, e dunque passando da una strategia 2 fasi a 3 fasi, diminuisca. Per poi invece nelle date successive aumentare nuovamente.

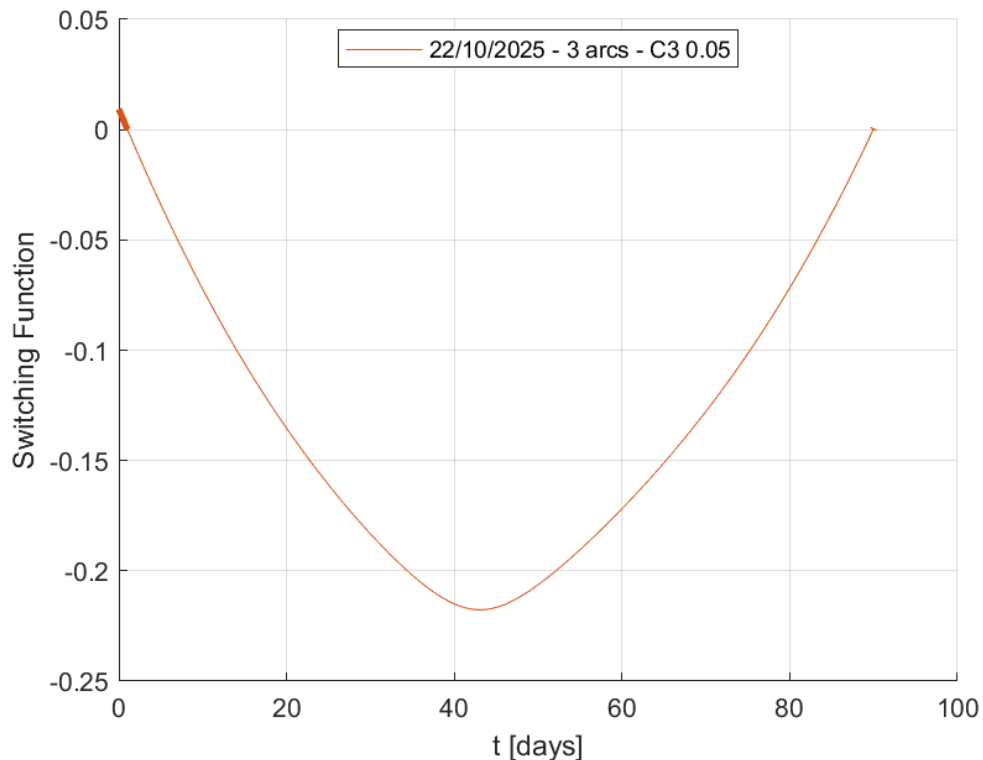


Figura 5-13 Switching Function caso limite . Caso  $C_3=0.05$

Dal grafico invece della SF per tutte le date si evidenzia la richiesta di spinta nel tratto finale al fine di uscire dalla sfera di influenza con la  $C_3$  imposta. Gli scenari a energia più alta vede come un'unica opzione fattibile un ulteriore utilizzo di propellente, mentre nei casi a energia minore si cerca di sfruttare in modo più consistente la perturbazione solare. Si precisa che si potrebbe anche forzare ad avere una soluzione a 2 fasi imponendo un guess della durata di missione più elevato: in tal caso, plausibilmente per energie finali non troppo elevate, lo spacecraft potrebbe guadagnare una porzione di energia in più spontaneamente.

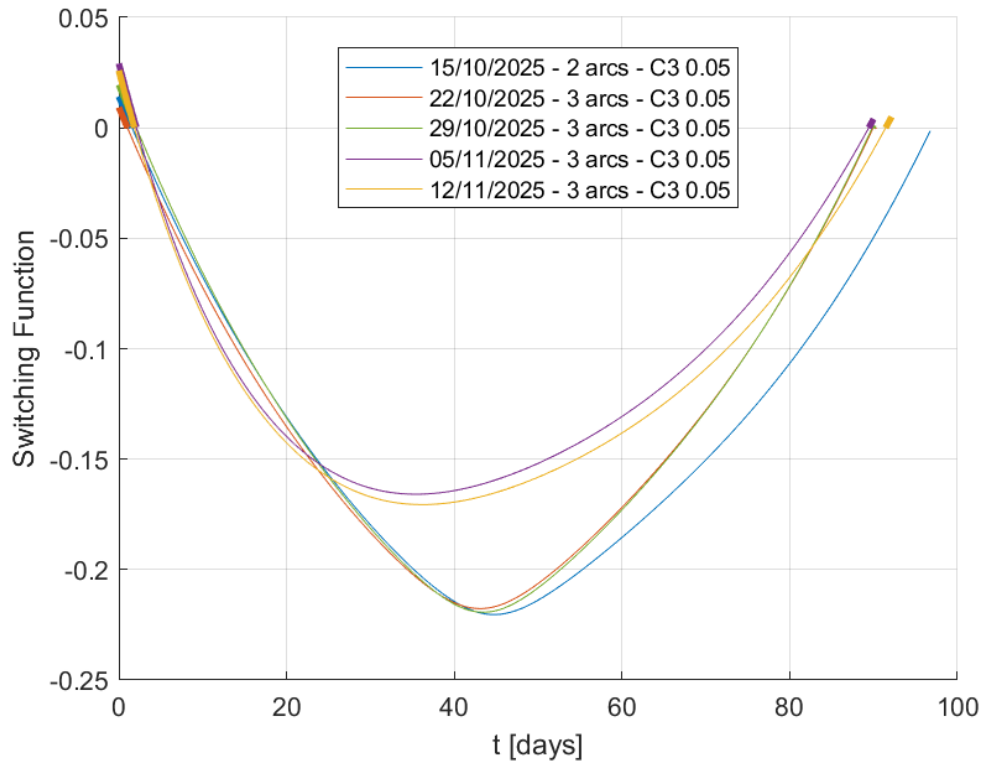


Figura 5-14 Switching Function. Caso  $C_3=0.05$

Analizzando invece i grafici relativi all'andamento dell'energia ovviamente il valore finale della  $C_3$  è di 0.05, ma presentano nell'andamento alcune differenze. Il macro andamento, e dunque l'effetto della perturbazione solare, è simile per tutte le date, questo è dovuto al fatto che, rispetto al suo ciclo la posizione non è variata di tanto nell'arco delle 5 date, il Sole si sposta di circa 30 gradi. Invece la perturbazione Lunisolare è molto evidente nelle oscillazioni iniziali. Come nel caso precedente nella data del 29/10/25 la posizione della Luna è in opposizione e per tale motivo raggiunge il picco più alto.

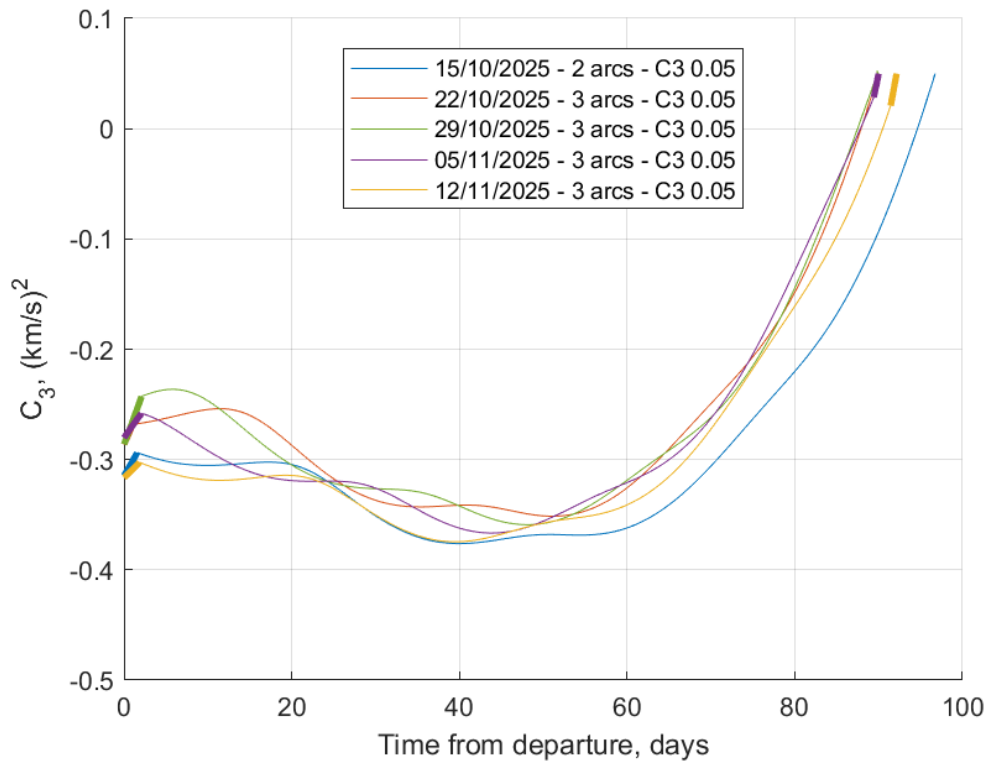


Figura 5-15 Andamento  $C_3$  nel tempo. Caso  $C_3=0.05$

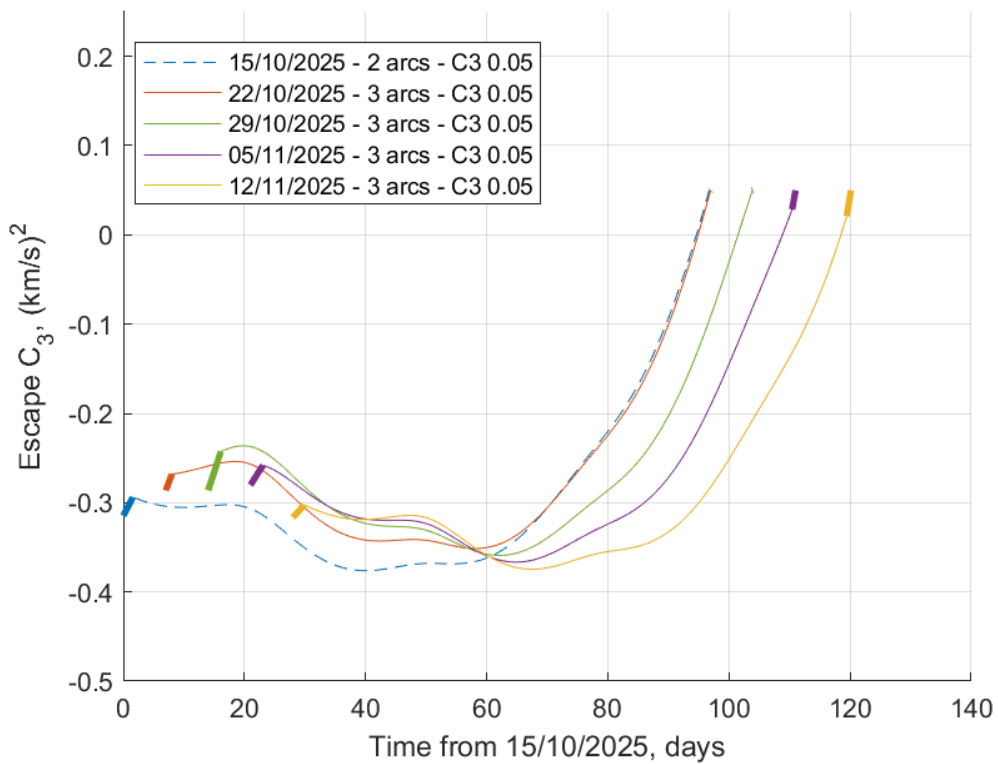


Figura 5-16 Andamento  $C_3$  partenza di riferimento 15/10/25. Caso  $C_3=0.05$

$C_3=0.1$

All'aumentare della  $C_3$  imposta la necessità di avere due archi di spinta diventa imprescindibile. La geometria delle manovre di escape rimane pressoché simile ma si raggiungono valori di  $\Delta V$  molto maggiori al fine di garantire l'energia voluta all'uscita dalla sfera di influenza.

Data di partenza	Durata (giorni)	$\Delta V$ (m/s)	Numero di fasi	$C_3$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Massa finale (%)
15/10/2025	99.2436	62.6755	3	0.1	0.9981
22/10/2025	93.4078	51.9846	3	0.1	0.9984
29/10/2025	92.7908	78.2064	3	0.1	0.9976
5/11/2025	90.0998	89.3331	3	0.1	0.9972
12/11/2025	99.7392	71.0042	3	0.1	0.9978

Tabella 8 Dati Caso  $C_3 = 0.1$

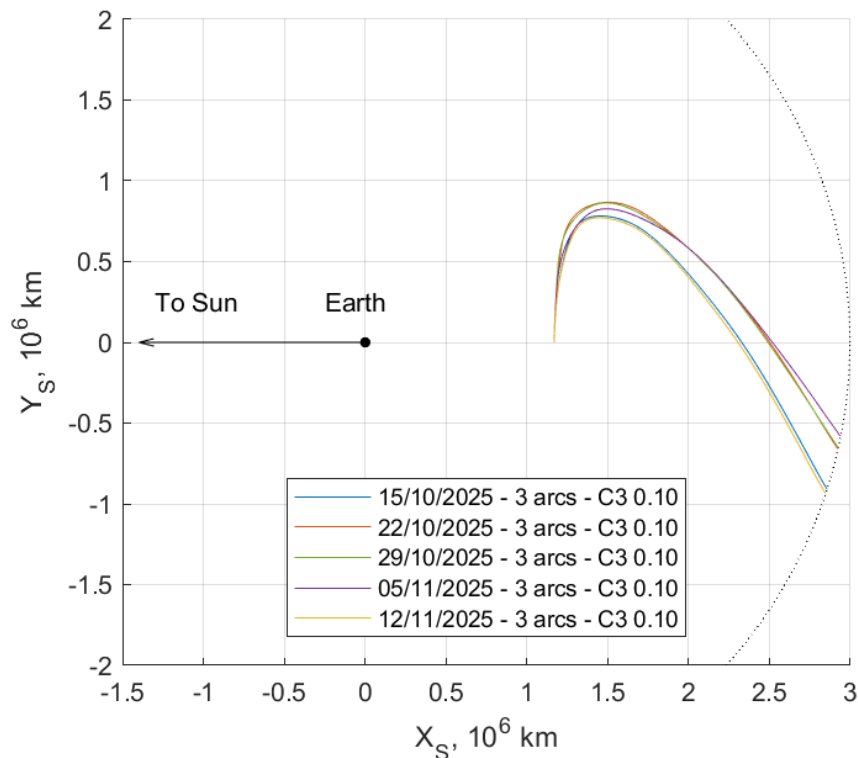


Figura 5-16 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso  $C_3=0.10$

Il grande cambiamento per le manovre di escape con una  $C_3=0.1$  è il cambio di strategia per quanto riguarda i valori di tentativo dei  $\lambda$ , utilizzati nel metodo indiretto per trovare la convergenza. Il primo dei  $\lambda$ , ovvero il  $\lambda_r$ , è sempre decrescente poiché fornisce l'andamento della SF medio, il quale è decrescente perché la strategia utilizzata inizia sempre con una fase di acceso-spento. Gli ultimi tre  $\lambda$  sono rispettivamente  $\lambda_u$ ,  $\lambda_v$ ,  $\lambda_w$ , i quali rappresentano fisicamente la priorità di accelerazione se in modo radiale, tangenziale o fuori dal piano. Il fatto che le soluzioni a  $C_3=0.1$  hanno valori maggiori di  $\lambda_u$  rispetto a  $\lambda_v$ , significa che l'attrazione in

quella configurazione da parte di Terra, Sole, Luna ecc è molto forte e dunque si preferisce spingere in maniera più radiale anziché tangenziale, con la quale si seguirebbe la Lyapunov di partenza. Nel caso a  $C_3$  libera i  $\lambda$  sono tutti in direzione della Lyapunov, e dunque un maggiore  $\lambda_v$  e spinta tangenziale, perché lo S/C non ha vincoli dovuti all'energia. Nel caso a  $C_3=0.05$ , l'energia è talmente simile che l'ottimizzazione della traiettoria cerca di seguire l'andamento precedente. Ma una volta raggiunti valori importanti di  $C_3$ , la richiesta di energia è troppo elevata e si ha la necessità di spingere direttamente in modo radiale verso l'uscita per rispettare le condizioni imposte. Si troverà la medesima configurazione anche per i casi a  $C_3=0.15$  e  $C_3=0.2$ .

Nella Figura 5-18 è mostrato l'andamento della Switching Function caratterizzata da una seconda spinta finale, che, come detto in precedenza, è fondamentale per soddisfare la richiesta di energia aumentata.

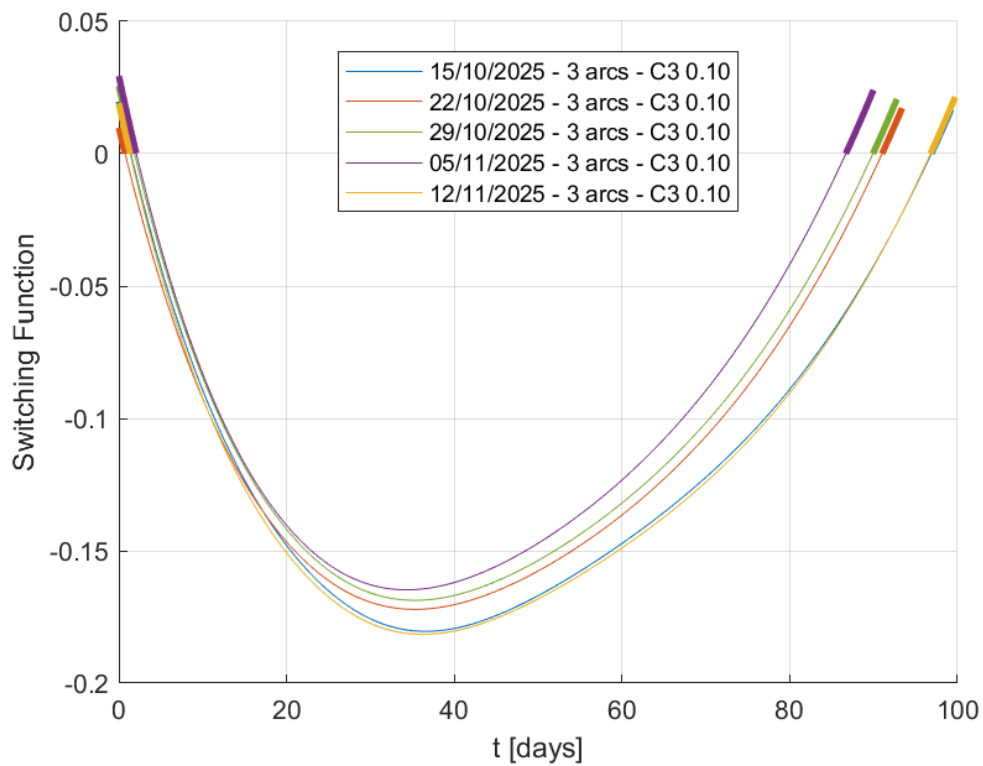


Figura 5-17 Switching Function. . Caso  $C_3=0.1$

Le figure 5-19 e 5-20 mostrano l'andamento dell'energia per le cinque date, la  $C_3$ , come imposto, arriva al valore di 0.1 e il suo andamento è simile ai casi precedenti con gli andamenti legati alle varie perturbazioni sopra citate.



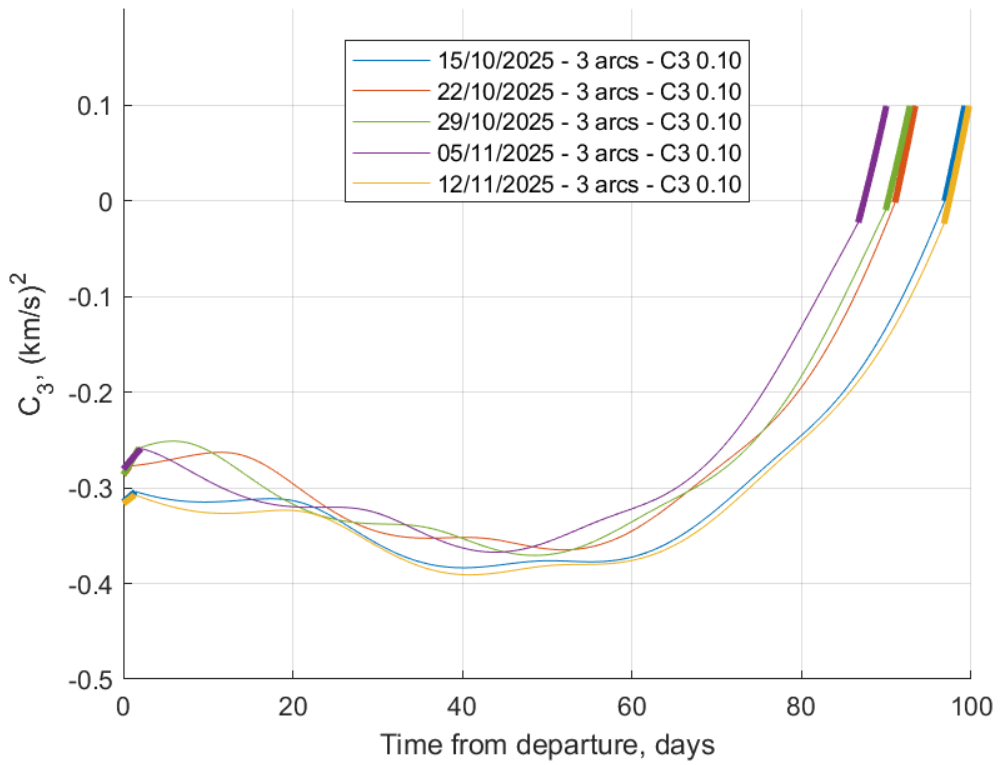


Figura 5-18 Andamento  $C_3$  nel tempo. Caso  $C_3=0.10$

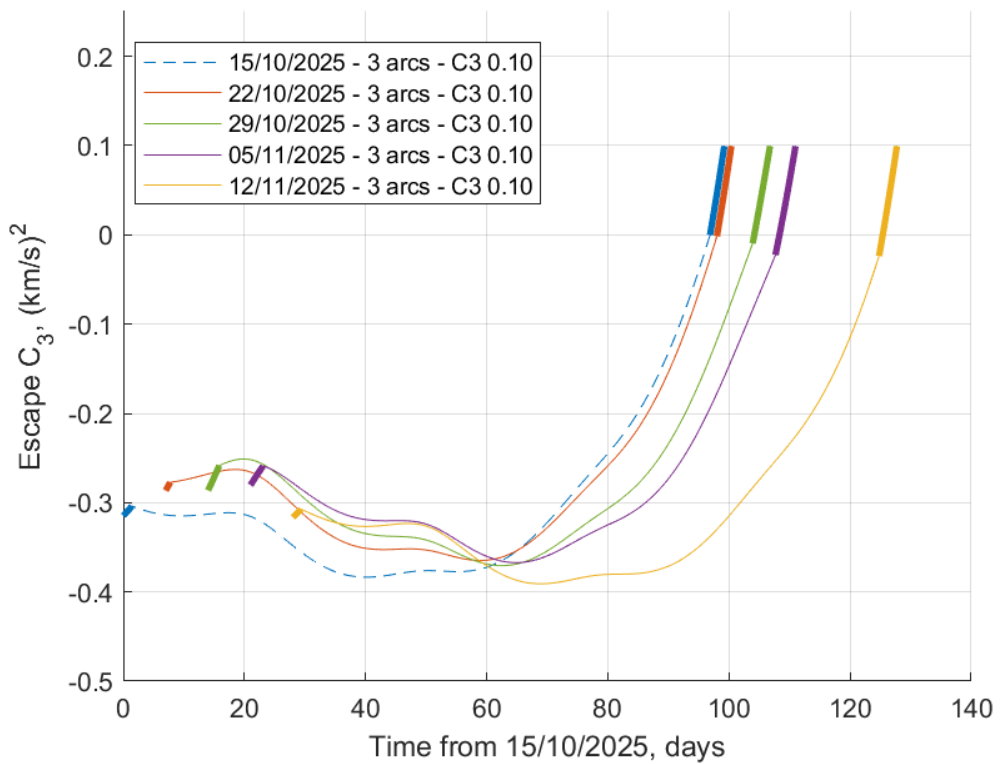


Figura 5-19 Andamento  $C_3$  partenza di riferimento 15/10/25. Caso  $C_3=0.10$

$C_3=0.15$

Sono riportati i risultati ottenuti imponendo  $C_3=0.15$ . Anche in questo due archi di spinta sono assolutamente necessari al fine di soddisfare l'energia richiesta. Aumenta in modo considerevole anche il  $\Delta V$ . La massa finale decresce a causa di tale aumento di  $\Delta V$ , poiché il combustibile a bordo utilizzato è maggiore.

Data di partenza	Durata (giorni)	$\Delta V$ (m/s)	Numero di fasi	$C_3$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Massa finale (%)
15/10/2025	95.96742	113.4921	3	0.15	0.9965
22/10/2025	90.4904	101.6891	3	0.15	0.9969
29/10/2025	85.3008	119.2860	3	0.15	0.9963
5/11/2025	90.0473	135.0456	3	0.15	0.9958
12/11/2025	95.9674	124.7167	3	0.15	0.9962

Tabella 9 Dati Caso  $C_3 = 0.15$

Sono riportati in seguito i vari grafici che riportano le traiettorie di escape nel sistema geocentrico sinodico, l'andamento della Switching Function e gli andamenti della  $C_3$ .

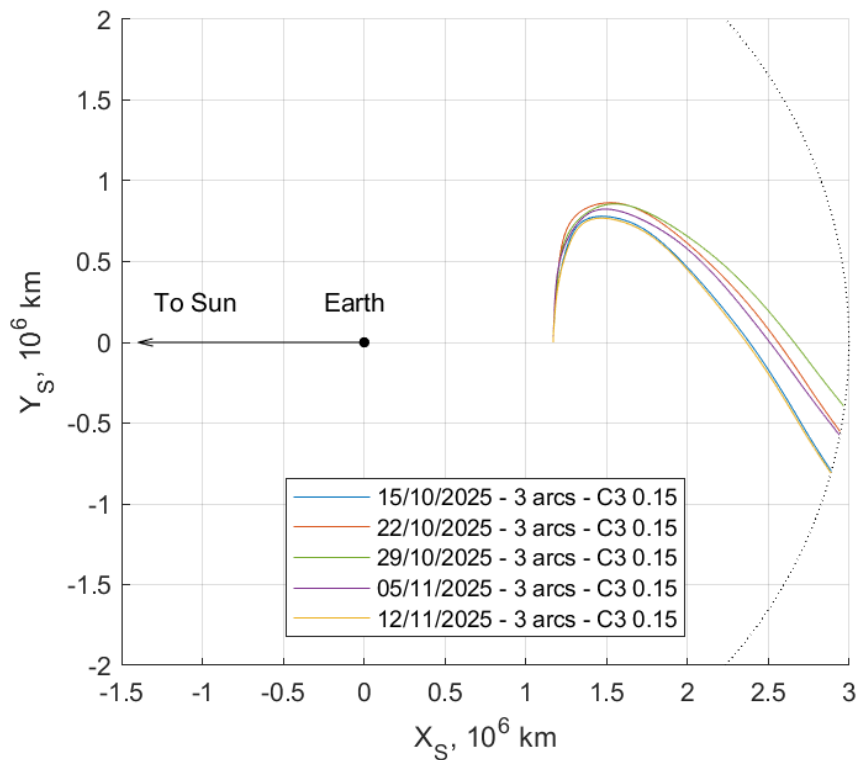


Figura 5-20 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso  $C_3=0.15$

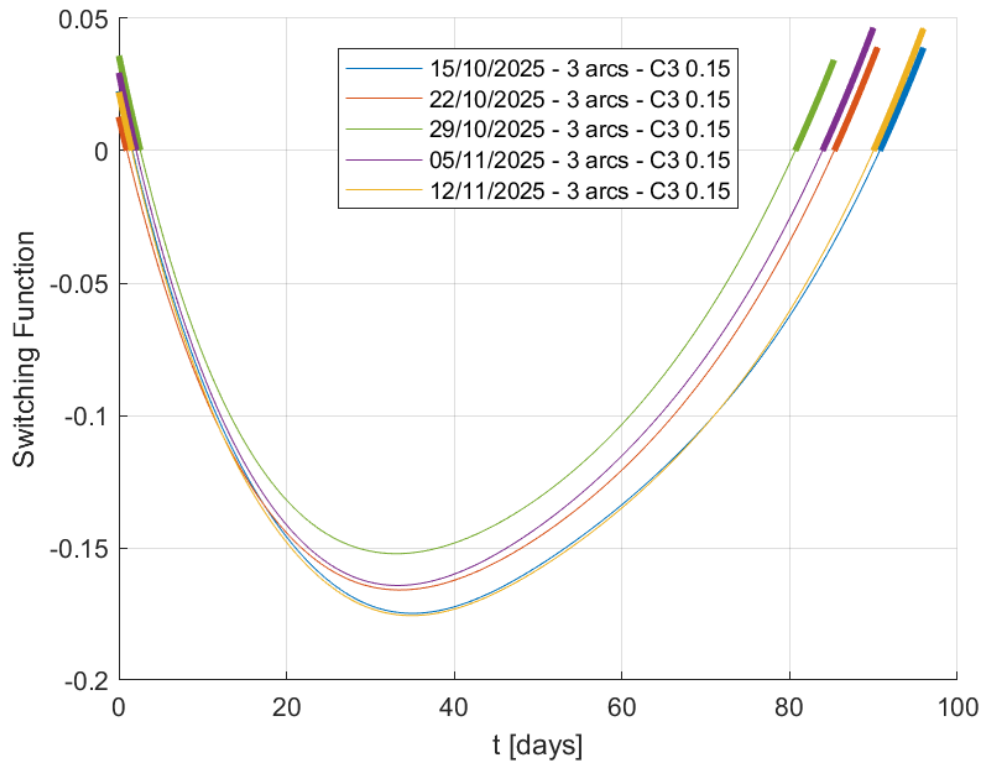


Figura 5-21 Switching Function. . Caso  $C_3=0.15$

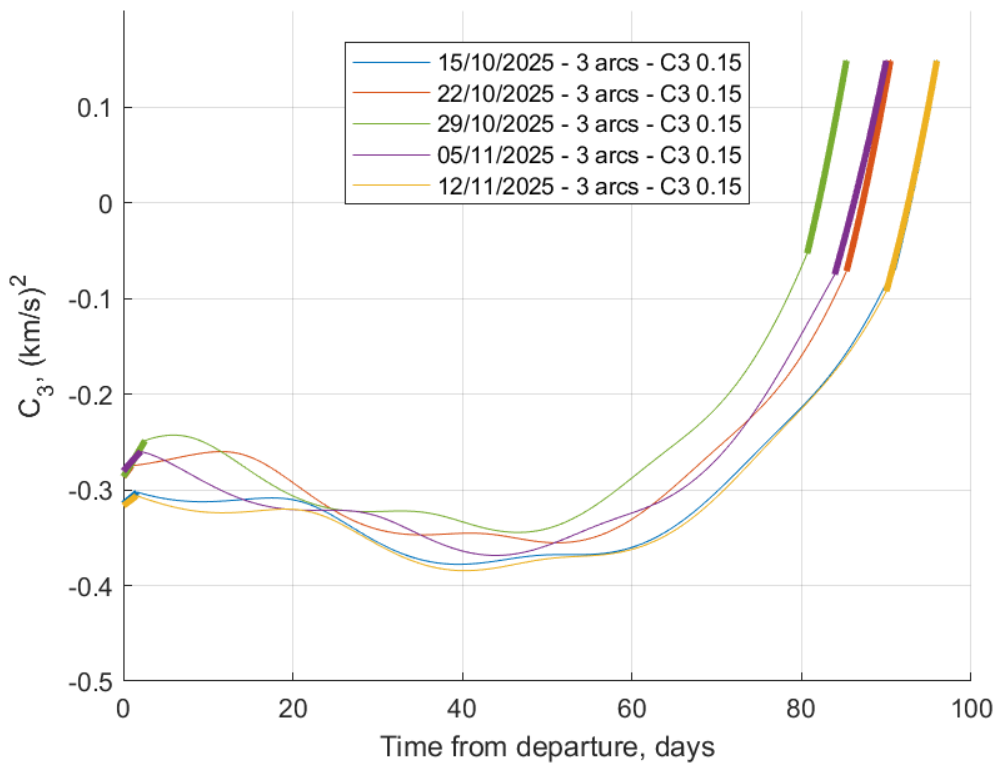


Figura 5-22 Andamento  $C_3$  nel tempo. Caso  $C_3=0.15$

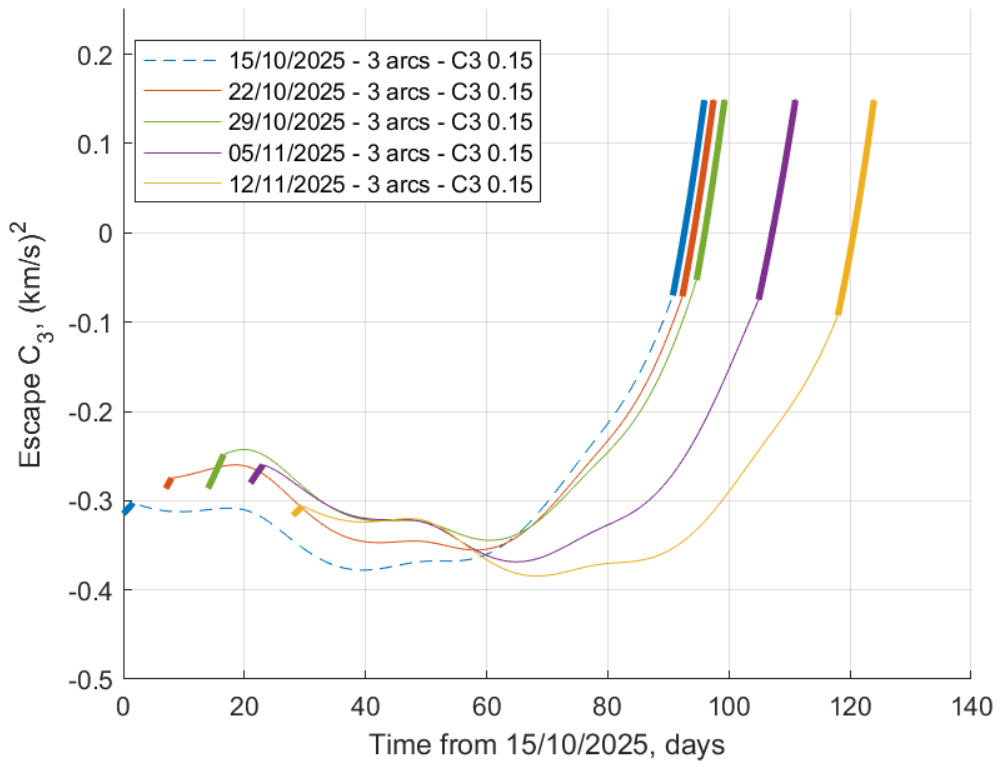


Figura 5-23 Andamento  $C_3$  partenza di riferimento 15/10/25. . Caso  $C_3=0.15$

$C_3=0.2$

Per il caso a  $C_3=0.2$  sono riportati i risultati e i dati in Tabella 10:

Data di partenza	Durata (giorni)	$\Delta V$ (m/s)	Numero di fasi	$C_3$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Massa finale (%)
15/10/2025	93.0001	167.6961	3	0.20	0.9948
22/10/2025	89.8579	149.0088	3	0.20	0.9954
29/10/2025	81.5569	176.4970	3	0.20	0.9946
5/11/2025	90.0023	181.7935	3	0.20	0.9944
12/11/2025	94.5318	175.2987	3	0.20	0.9946

Tabella 10 Dati Caso  $C_3 = 0.2$

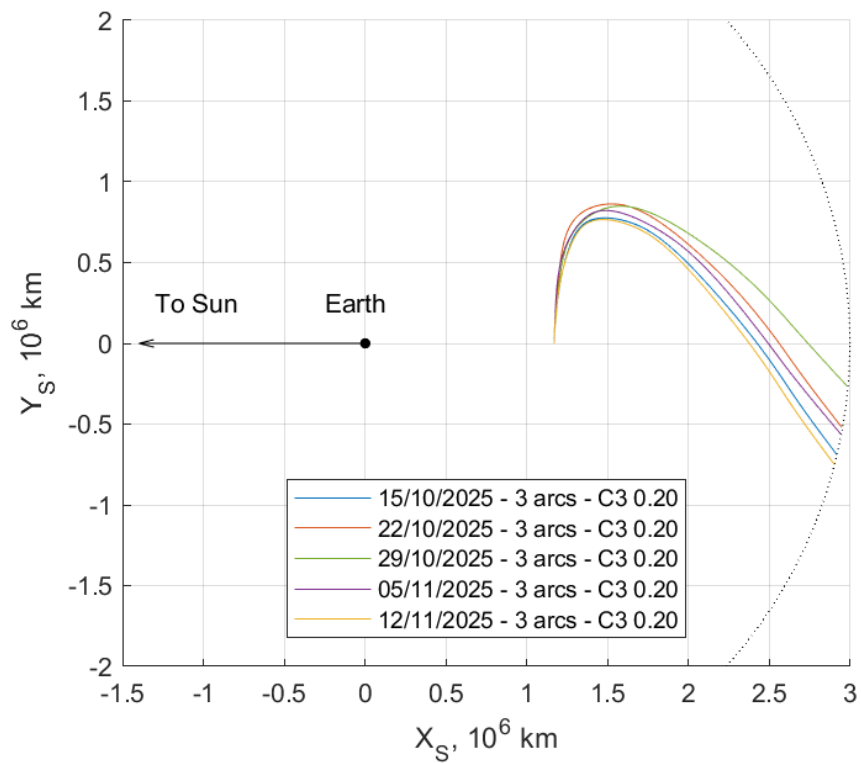


Figura 5-24 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Caso  $C_3=0.20$

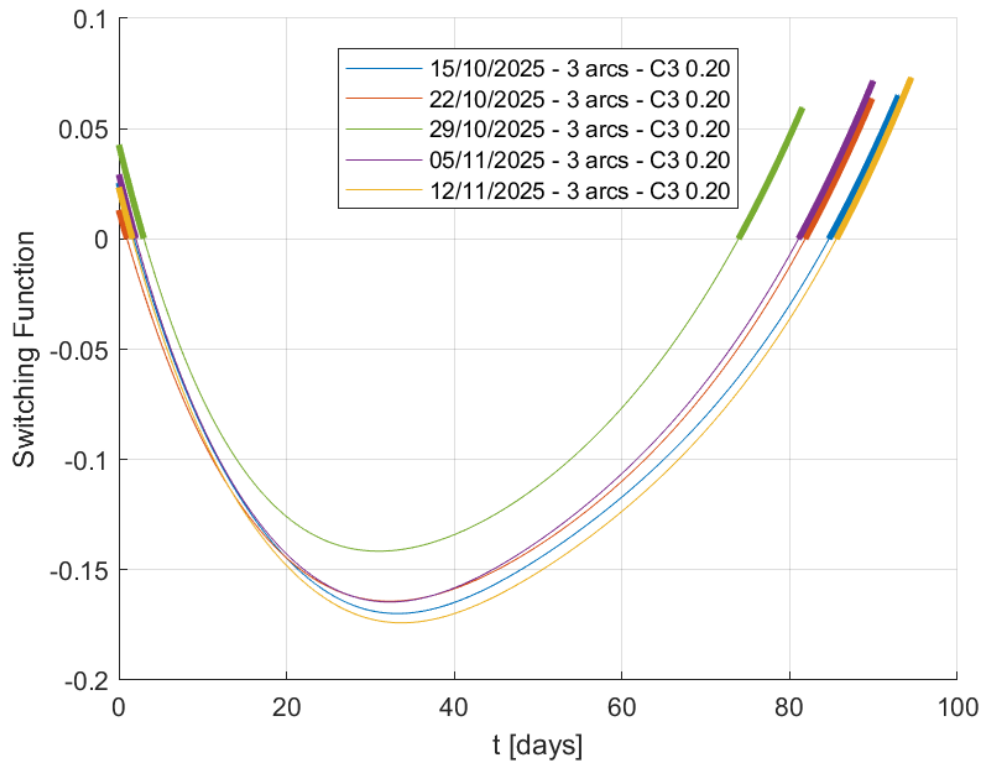


Figura 5-25 Switching Function. . Caso  $C_3=0.20$

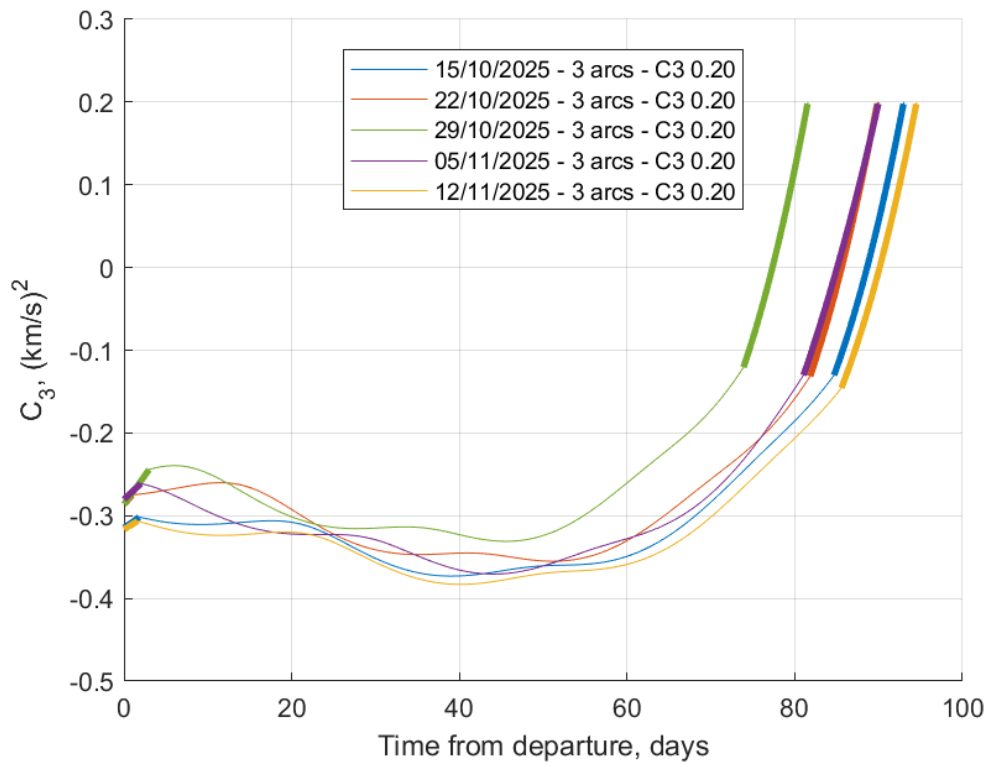


Figura 5-26 Andamento  $C_3$  nel tempo. Caso  $C_3=0.20$

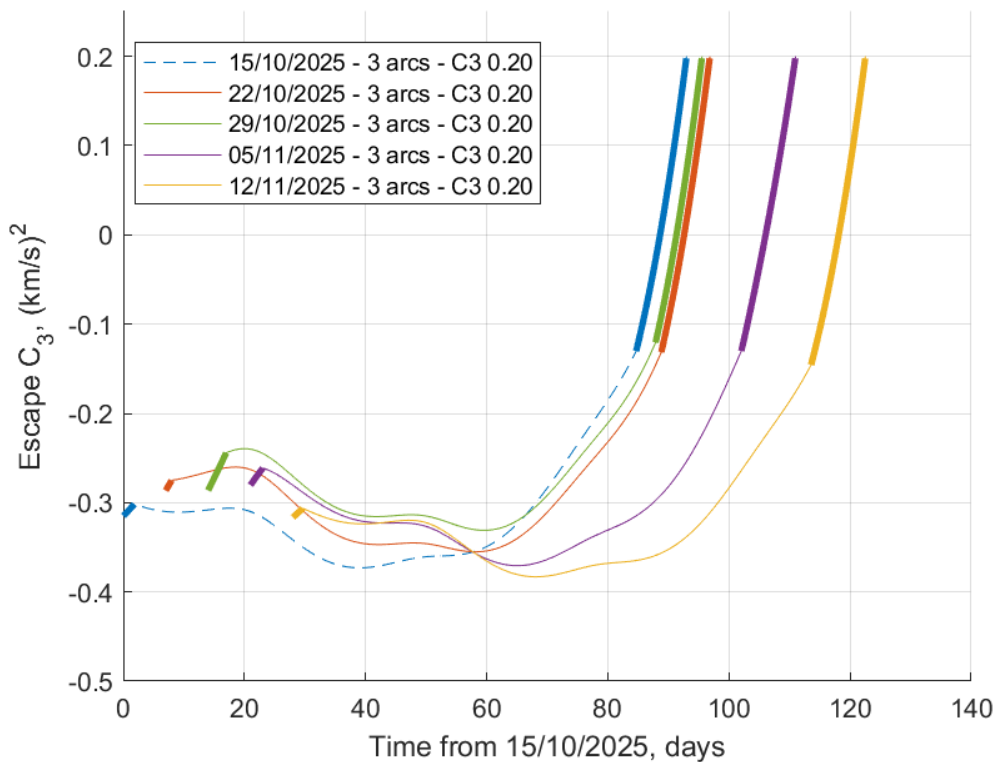


Figura 5-27 Andamento  $C_3$  partenza di riferimento 15/10/25. . Caso  $C_3=0.20$

Si nota che la fase di spinta iniziale diviene sempre più piccola ed è, in tutte le soluzioni, sovrastata dalla spinta finale. Questo porta ad una considerazione importante, e cioè che la prima spinta serve principalmente a perturbare il moto lungo la Lyapunov di partenza e ad abbandonarla, mentre la seconda garantisce il guadagno necessario a coprire la differenza fra l'energia guadagnata naturalmente tramite perturbazione lunisolare e quella richiesta.

Infine, è riportato in seguito il grafico, Figura 5-29, dell'angolo  $\theta$  del veicolo spaziale in confronto con l'angolo  $\theta$  del Sole. In tale grafico è presentata, per la stessa data di partenza, la traiettoria di due casi ad energia finale fissata, una bassa ed una alta. Riprendendo i valori ottenuti e mostrati in tabella 7 e 10 circa i consumi, si può confrontare che la soluzione a bassa energia e quella ad alta energia implicano dei consumi maggiori -in termini di richiesta di burn finale, ad esempio- per ottenere tale escape. Ciononostante, entrambe le traiettorie fanno permanere lo spacecraft per lungo tempo in prossimità di angoli relativi fra  $135^\circ$  e  $180^\circ$ : come mostrato in precedenza nella Figura 4-2 (Casalino L.), tale combinazione angolare permette di sfruttare considerevolmente la perturbazione radiale del Sole, la quale permette di facilitare la fuga verso l'esterno. Al contempo, l'avvicinarsi verso fine traiettoria ad angoli intorno a  $-157.5^\circ$  permette di sfruttare ancora più favorevolmente anche una combinazione di perturbazione tangenziale solare, necessaria per l'ultima parte di escape. Queste perturbazioni positive, radiale e tangenziale, permettono di aumentare parzialmente l'energia senza dispendio di carburante (come si nota in tutte le figure che mostrano la  $C_3$  in funzione del tempo), e pertanto sono da considerarsi, sia per traiettorie a minimo consumo di carburante che per quelle che ne richiedono un quantitativo maggiore, come elementi che minimizzano i consumi.

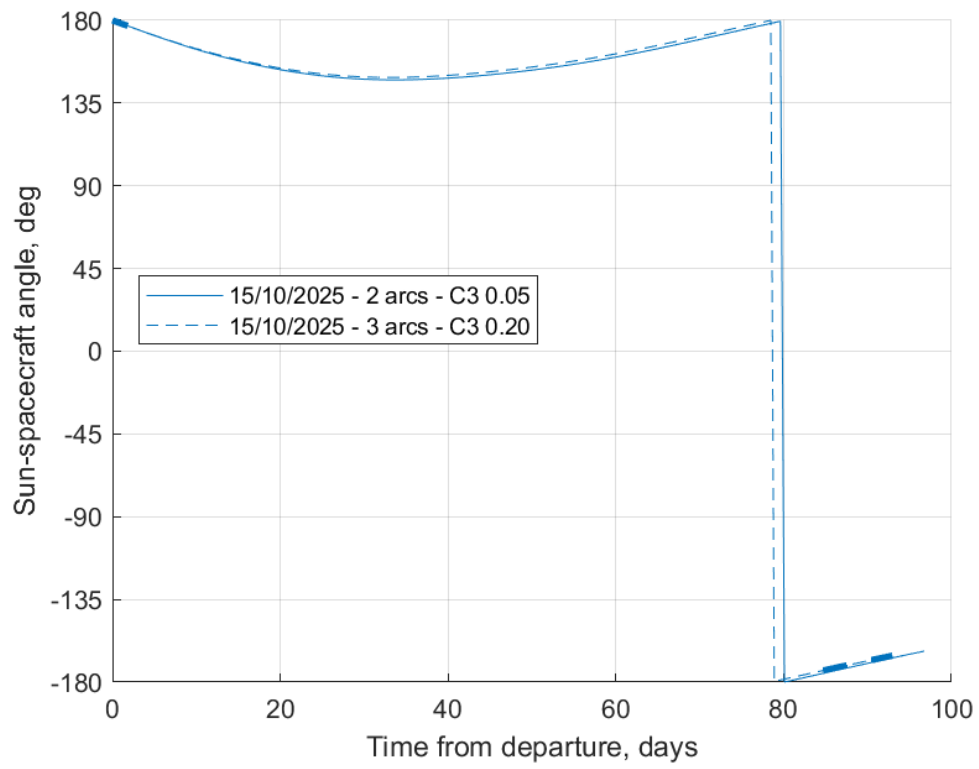


Figura 5-28 Grafico  $\theta$  Sole vs  $\theta$  Spacecraft



## Considerazioni

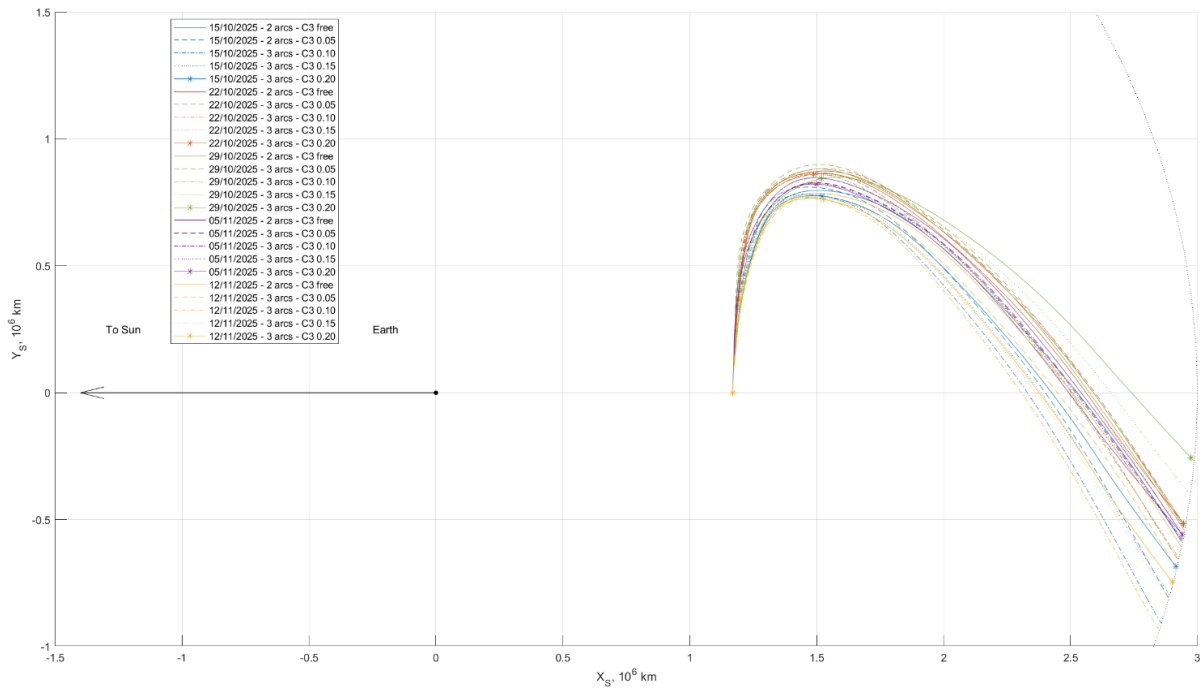


Figura 5-29 Manovra di escape nel sistema sinodico del sistema Sole-Terra. Tutti i casi.

In figura 5-30 è mostrato l'andamento di tutte le traiettorie studiate. Il colore indica una data mentre il tratto indica il vincolo imposto, o non imposto, alla  $C_3$ . È possibile apprezzare il simile andamento nella manovra di escape che tende a seguire la Lyapunov in cui orbita nella fase iniziale, e successivamente procedere con l'escape.

Creando un grafico che comprende l'evoluzione della  $C_3$  durante tutte le manovre studiate si ottiene il grafico 5-31 su cui possono essere fatte varie considerazioni.

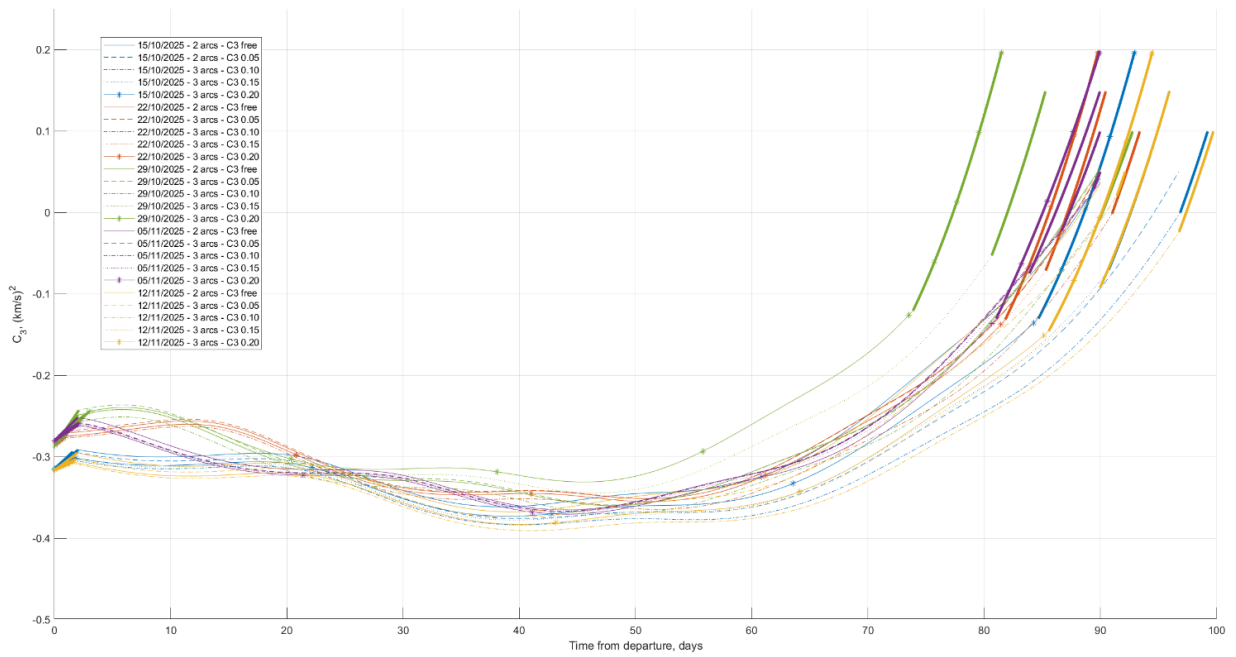


Figura 5-30 Andamento  $C_3$  nel tempo. Tutti i casi

Si possono identificare due diversi comportamenti, il primo caratterizzato da un andamento leggermente decrescente. Questo indica una fase di attesa in cui il veicolo ha accelerato in modo soprattutto radiale, causando una sorta di rallentamento e dunque il valore dell'energia caratteristica non aumenta. Questo comportamento è concorde anche con le osservazioni appena fatte circa l'angolo relativo fra la direzione dello spacecraft e il Sole. Invece il secondo comportamento vede un andamento simile e comprende il caso in cui non è stato imposto nessun vincolo alla  $C_3$ . In alcuni casi l'arco di spinta dura più del caso libero e di conseguenza, il veicolo spaziale tende a procedere in un'orbita più veloce.

## Conclusioni

Tale tesi riporta i risultati ottenuti tramite l'utilizzo di un metodo indiretto di ottimizzazione per manovre di fuga da un'orbita Lyapunov attorno al punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Terra-Sole. Anche in presenza di dinamiche complesse e di effetti non lineari, il metodo si dimostra veloce e affidabile.

Nel capitolo precedente sono presentati e discussi i risultati che ha portato tale studio. In questo capitolo l'obiettivo è quello di fornire un riassunto dei concetti fondamentali acquisiti e uno sguardo ai possibili sviluppi futuri. La partenza da un'orbita Lyapunov è una prima applicazione a casi reali, le orbite sono stabili, o quasi, mentre il punto Lagrangiano, come ben noto, è un punto matematico instabile. È infatti sempre necessaria una, anche se minima, quantità di propellente al fine di mantenere l'orbita attorno a tale punto. Le manovre di escape, soprattutto a partire da orbite attorno al punto Lagrangiano  $L_2$  stanno diventando sempre più comuni e ricercate. In tale posizione infatti il satellite gode di una stabilità dell'illuminazione del Sole e di un ottimo puntamento verso lo spazio profondo. Questo è un ottimo punto di partenza per missioni interplanetarie o missioni verso oggetti interstellari. Le manovre studiate in tale tesi presentano sempre due tipologie di archi. Il primo è sempre un arco propulsivo che consente di posizionare in modo corretto il veicolo spaziale per la fase successiva, in tale fase si ha un arco di coasting dove la navicella sfrutta la Lyapunov da cui parte e l'influenza del Sole per accelerare fino alla fine della sfera di influenza.

A seconda dei casi sono presenti una o due fasi propulsive per soddisfare l'eccesso iperbolico richiesto. I risultati ottenuti hanno fatto emergere quanto le perturbazioni siano importanti e incidano sulle manovre. La Luna ha un'influenza maggiore nella prima fase della missione in cui si notano importanti oscillazioni, mentre al Sole è legato il macroandamento. Si è inoltre potuto apprezzare come una certa data di partenza legata alla posizione della Luna possa permettere una riduzione del propellente necessario. L'influenza del Sole ha invece il compito di accelerare il veicolo spaziale e la massimizzazione di questo effetto è visibile nei risultati ottenuti per il caso libero.

Nella seconda parte di questo lavoro si è fissato il valore della  $C_3$  a quattro valori specifici, partendo da un valore simile al valore ottenuto dal caso libero e successivamente aumentandolo con step di 0.05 fino al valore finale di  $C_3=0.2$ . L'obiettivo era studiare e capire come variano le trattorie e le strategie con un vincolo sull'energia caratteristica. È stata individuata ovviamente come soluzione migliore il caso a  $C_3$  non vincolata, ma in un caso reale l'eccesso iperbolico di velocità è un valore ben preciso, è stato dunque fondamentale lo studio dei parametri che sono variati al crescere del vincolo imposto, come il  $\Delta V$ , il numero delle fasi necessarie, la durata in giorni e la massa finale. La massa finale è un parametro importante da monitorare poiché da questa deriva la massa del payload che è possibile trasportare che deve essere ovviamente massimizzata.

I risultati mostrano la fattibilità della manovra di escape per tutti i casi studiati.

Possibili sviluppi futuri sono:

- Utilizzare come punto di partenza diversi punti dell'orbita utilizzata in questa tesi.
- Utilizzare come orbite di partenza le Effemeridi per avere un livello di accuratezza ancora più elevato e vicino alla realtà.
- Studiare di manovre di escape da un'orbita Lyapunov attorno al punto Lagrangiano  $L_2$  nel sistema Terra-Luna.
- Analizzare in modo più approfondito la perturbazione Lunare.

- Analizzare un range di date più ampio nel tempo al fine di apprezzare gli effetti di un ciclo Solare, non solo Lunare come studiato in questa tesi.
- Studiare come le tecnologie future potrebbero aiutare a realizzare manovre di escape in un tempo e un consumo inferiore.

## Bibliografia

- Casalino L., S. F. (s.d.). *Indirect Optimization of Satellite Deployment into a Highly Elliptic Orbit*.
- Giovanni Mengali, A. A. (2013). *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*. Pisa.
- Henri Poincaré, A. L. (s.d.). *Poincaré–Lindstedt method*.
- Howell, K. C., & Pernicka, H. J. (1986). Numerical Determination of Lissajous Trajectories in the Restricted Three-Body Problem. *Astrodynamics Conference* (p. 86-2002). Williamsburg, Va.: AIAA/AAS.
- Mascolo, L. (2022). *Ph.D. Thesis, personal correspondence, "Low-Thrust Trajectory Optimization from Quasi-Periodic Orbits in the Ephemeris Model via Indirect Methods"*.
- Richardson, C. (1975). *A Uniformly Valid Solution for Motion About the Interior Libration Point of the Perturbed Elliptic-Restricted Problem*.
- Robert W. Farquhar, A. A. (1972). *Quasi-Periodic Orbits about the translunar Libration Point*.
- Roger R. Bate, D. D. (1971). *Fundamental of Astrodynamics*. New York: Dover Publications.
- William, M. F., James, G. W., Dale, H. B., Ryan, S. P., & Petr, K. (2014). *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*. IPN Progress Report 42-196.
- ESA, Comet Interceptor  
<https://www.cometinterceptor.space/>
- ESA, SCIENCE and EXPLORATION, L2, the second Lagrangian Point  
[https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Herschel/L2\\_the\\_second\\_Lagrangian\\_Point](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Herschel/L2_the_second_Lagrangian_Point)
- NASA, WMAP Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP News  
<https://wmap.gsfc.nasa.gov/news/facts.html>
- NASA, Solar system exploration, Lagrangian points.,  
<https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point/>
- ESA, SCIENCE and EXPLORATION, Herschel overview  
[https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Herschel overview](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Herschel%20overview)
- ESA, Gaia  
<https://sci.esa.int/web/gaia>
- ESA, Euclid  
<https://sci.esa.int/web/euclid>
- ESA Website. SOHO  
<http://sci.esa.int/soho/>
- NASA, James Webb Space Telescope, Engineering Webb Space Telescope  
<https://www.jwst.nasa.gov/>
- NASA, Solar system exploration, Lagrangian points.,  
<https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point/>
- Casalino L., Simeoni F., Zavoli A., Colasurdo G., Indirect Optimization of Satellite Deployment into a Highly Elliptic Orbit, International Journal of Aerospace Engineering, Hindawi Publishing Corporation

Casalino L., Equazioni in coordinate sferiche

Casalino L., Ottimizzazione Indiretta di traiettorie Spaziali

Casalino L., Dispense corso di Propulsione spaziale

Giovanni Mengali, Alessandro A. Quarta - Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale

Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White, Fundamental of Astrodynamics, Dover Publications, Inc. New York, 1971

Curtis H., Orbital Mechanics for Engineering Students, Elsevier, Oxford, 2005.