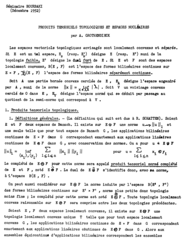
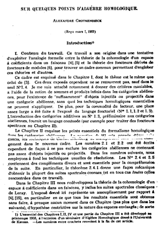
EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I

GROTHENDIECK

(1ª PARTE – 1/3)

"Es realmente por el descubrimiento sobre todo de *preguntas* nuevas, de *nociones* nuevas,
o aún de *puntos de vista* nuevos, o de nuevos *mundos*, que mi obra matemática ha resultado ser fecunda" [Grothendieck, 1985]

1 *(2 feb)* *Mapa del seminario: el mayor matemático del siglo XX (primera parte 1928-1960).*
2 *(4 & 9 feb)* *Espacios vectoriales topológicos y espacios holomorfos: grandes conceptos y problemas.*
3 *(11 & 16 feb)* *Categorías abelianas y K-teoría: grandes conceptos y problemas.*
4 *(18 & 23 feb)* *1950: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5 *(25 feb & 2 mar)* *La tesis doctoral: productos tensoriales y espacios nucleares (1951/1953).*
6 *(4 & 9 mar)* *EVT – Resumen de la teoría métrica de productos tensoriales topológicos (1953/1954).*
7 *(11 & 16 mar)* *Las categorías abelianas (1) (1955/1956).*

[La anormalidad académica –huelgas y bloqueos 2015-I– redujo en lo que sigue las exposiciones de estudiantes]

8 *(8 abr)* *Las categorías abelianas (2) (1955/1956).*
9 *(6 may)* *La K-teoría: teorema de Riemann-Roch generalizado (1957).*
10 *(13 may)* *Los espacios de funciones holomorfas (1960). La clave de los sueños (1) (1987).*
11 *(20 may)* *La clave de los sueños (2) (1987).*
12 *(27 may)* *Diagrama inicial de la creatividad en Grothendieck (fin de la primera parte).*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente (cuando indicado)
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.
Alexander Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (Tesis Doctoral, 1953), *Memoirs* AMS 16, 1955.
Alexander Grothendieck, "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques" (1953), *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* 8 (1956): 1-79.
Alexander Grothendieck, *Topological Vector Spaces* (1954), New York: Gordon and Breach, 1973.
Alexander Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique" (1955), *Tohoku Mathematical Journal* 9 (2ª serie) (1957): 119-221.
Alexander Grothendieck (escritura por Borel & Serre), "Le théorème de Riemann-Roch" (1957), *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958): 97-136.
Alexander Grothendieck, "Techniques de construction en géométrie analytique I-X", *Séminaire Cartan* 13 (1960-1961).
Alexander Grothendieck, *La Clef des Songes* (1987), manuscrito.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

Febrero 4

Espacios vectoriales topológicos y espacios holomorfos:
grandes conceptos y problemas

Dos formas de una "tensión esencial"

MÚLTIPLE $\xleftarrow{\textbf{\textit{análisis}}}$ UNO

MÚLTIPLE $\xrightarrow[\textbf{\textit{síntesis}}]{}$ UNO

(def. Gödel 1947)

descomposición	composición
INTERIOR	EXTERIOR
x x x elementos (conjuntos)	morfismos (categorías)
análisis	***síntesis***

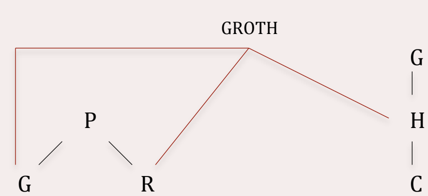
La obra de Grothendieck participa muy activamente en tales tensiones:
primera década (1950-1960) – más cercana al "análisis"
segunda década (1960-1970) – más cercana a la "síntesis"
tercera década (1980-1990) – más cercana a la "horosis" (frontera)

Fuerzas transversales y pendulares en Grothendieck

(A) multiplicación
objetivación en la multiplicidad / disolución de lo singular
(B) abstracción
libertad y plasticidad en la generalidad / excepcional poder creativo
(C) naturalización
revolución & naturalidad / profundidad & sencillez
(D) transición
multiplicatividad de la transversalidad / traducibilidad en vaivén reticular
(E) suavización
dialéctica (adjunciones) / armónica (representaciones) (yin/marea)

TEORÍA DE HACES (encarnada en categorías abelianas, esquemas, topos):
enlace perfecto de fuerzas (A)-(E)

Situación en el Seminario Continuo de Filosofía de las Matemáticas



espacios de Banach

L-espacios (≈ L^1 (absolut. integrables))
C-espacios (≈ C(K) (continuas sobre compacto))

espacios
finito
dimensionales

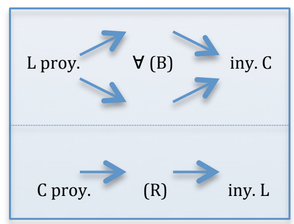
espacios nucleares
(seminormas "telescópicas"
espacios de funciones "suaves"
"calcos" FIN → INF)

productos tensoriales

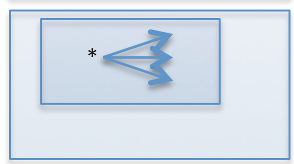
aproximaciones (topológica, métrica) de operadores
(semi)normas inyectivas y proyectivas

comienzos de estrategias categóricas

1. Estudio de "universales" en Espacios de Banach (B)
   Banach-Mazur: **∀(B)** ≈ L-cociente & C-subespacio
   Pregunta: ¿qué sucede con L-subespacios & C-cocientes?
   Grothendieck: tienen que ser **espacios reflexivos** (R)
   (isomorfismo con el doble dual)

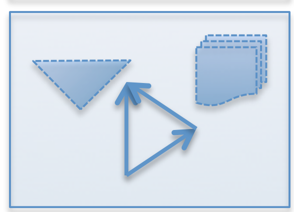


2. Caracterización de subclases de espacios de Banach mediante el comportamiento de operadores definidos sobre los espacios (atención especial a compacidad débil)

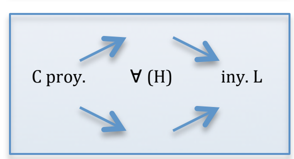


3. Detección de "arquetipos" en espacios de Banach:
   - espacios de Hilbert (H), L-espacios, C-espacios

   A partir de estos "teje" la categoría mediante:
   - envolventes (inyectivas, proyectivas)
   - factorización de operadores
   - pegamiento local/global (ideales operadores)
   - límites local/global (vía subespacios dim. fin.)



4. Solución sorprendente de Banach-Mazur:
   ∀(H) ≈ L-subespacio & C-cociente



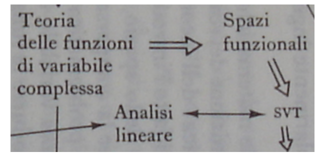
5. Desigualdad fundamental: un nuevo "arquetipo"
   ∀ normas tensoriales inyectivas (identidad) ≤ K
   (K constante de Grothendieck, valor exacto aún desconocido)

¿Inventa, define, descubre? multitud de problemas para las generaciones futuras.

(Thom 1982): variable compleja ≡ corazón de la matemática

razón $\rightleftarrows$ co/razón (FZ)

a/mor (FR)



tejido geométrico profundo

Riemann-Roch
(enlace dimensión geométrica intrínseca curva / dimensión analítica extrínseca espacio meromorfas)

geometría algebraica $\rightleftarrows$ geometría analítica (por analiticidad ≡ holomorfía)

(Serre *GAGA* 1956 - Grothendieck *TCGA* 1960)

esquemas $\rightleftarrows$ variedades holomorfas

(nilpotentes en
anillos locales)

"arquetipo": construcción de un espacio analítico de representación universal
("Espacio de Teichmüller")
"clasificador" de las curvas algebraicas sobre los espacios analíticos

técnicas:
• axiomatización de propiedades funtoriales globales
• jerarquía escalonada de funtores parciales locales
• recubrimientos, acciones de grupo, cambios de base

EMERGENCIA PROGRESIVA DE UNA

MATEMÁTICA RELATIVA

DETECCIÓN DE **INVARIANTES** UNIVERSALES GLOBALES
*DEBIDO A LA **VARIACIÓN** COHERENTE MISMA* DE LOS OBJETOS LOCALES

Febrero 11
Categorías abelianas y K-teoría:
grandes conceptos y problemas

CATEGORÍAS ABELIANAS

marco axiomático de enlaces naturales

co/homología a coeficientes en un haz | funtores derivados de funtores de módulos

variable compleja
geometría algebraica
topología
álgebra abstracta
homología
lógica infinitaria

CO/RAZÓN
haces
(definiciones, ejemplos, teoremática)

ejemplo central de "clase" (= categoría) abeliana
haces (de módulos) sobre un espacio topológico

teoremática central
existencia de suficientes inyectivos

cambio central de perspectiva
argumentos cohomológicos basados sobre objetos abelianos (haces)
en vez de hacerlo sobre objetos no abelianos (espacios) [Gelfand & Manin 1996]

multitud de variaciones de ejemplos:
módulos, grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos,
acciones de grupo, espacios holomorfos, gérmenes, formas diferenciales

MATEMÁTICA RELATIVA Y VARIACIÓN SOBRE LA BASE
"hacer álgebra homológica será cambiar la clase abeliana todo el tiempo"
"lenguaje módulo C de Serre"

GENERALIDAD ("sans hypothèse restrictive") – SUAVIDAD ("assouplissement")

K-TEORÍA

marco abstracto de generalización del teorema de Riemann-Roch

introducción de "grupo misterioso" K(X):
clases formales de fibrados vectoriales sobre variedad algebraica X (+ condiciones adicionales)
(*K* por "classen", clases en alemán)

enlace de K(X) con cohomología H*(X) (caracteres de Chern)

la "variación natural" *no es conmutativa* (OBSTRUCCIÓN)

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r] \arrow[d] & K(Y) \arrow[d] \\ H^*(X) \arrow[r] & H^*(Y) \end{tikzcd}$$

pero mediante controles de "desviación" (clases de Todd) (TRÁNSITO)

se obtiene un *teorema Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck*
que "ajusta" la conmutatividad del diagrama
(caso particular: fórmula calculatoria que enlaza género y dimensión en Riemann-Roch)

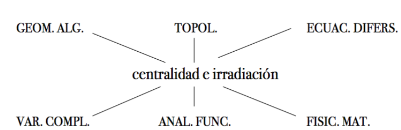
LOS *TIPOS* DE ESPACIO Y NÚMERO SE OBTIENEN COMO SUBDETERMINACIONES DE UN *ARQUETIPO* GENERAL

INFLUENCIA MAYOR: TEOREMA DEL ÍNDICE

tránsito y obstrucción en los cambios de la naturaleza, caracterizados por la geometría del entorno

índice: (#soluciones) - (#restricciones) para operadores diferenciales elípticos
determinado por adecuados invariantes topológicos
[inestables por separado, muy sensibles localmente; pero **diferencia** estable globalmente!]

el teorema del índice: influencia
uno de los teoremas mayores –y profundamente característicos– del siglo XX



Riemann-Roch (1850)
control algebraico (dimensión) meromorfas | control topológico (género) superficies Riemann

generalizable a control global de soluciones de sistemas lineales con parámetros algebraicos, mediante invariantes topológicos:

Schmidt (1929) → curvas algebraicas
Cartan-Serre (1950) - Hirzebruch (1954) → haces (*un* sistema)
Grothendieck (1957) → K-teoría (*todos* los sistemas)
Hirzebruch - Atiyah (1958) → K-teoría topológica (parámetros continuos)
Gelfand (1960) → enunciado genérico (invarianza homotópica índice)

Atiyah - Singer (1963) → **teorema del índice**

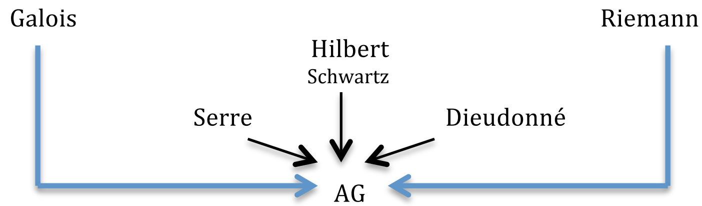
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I – GROTHENDIECK

Febrero 18
1950: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A). ENTORNO TÉCNICO

INFLUENCIA

autodidacta



HERENCIA

enorme rango de continuadores
escuelas mayores en Francia y Rusia
Panorama Fields (1970-hoy): "notas al pie a Grothendieck"

[véase Segunda Parte del Seminario Grothendieck, 2/3, 2015-II]

(B). ENTORNO FILOSÓFICO

ingenuidad – ingeniosidad
co/razón sensible (pianista / artesano del lenguaje)

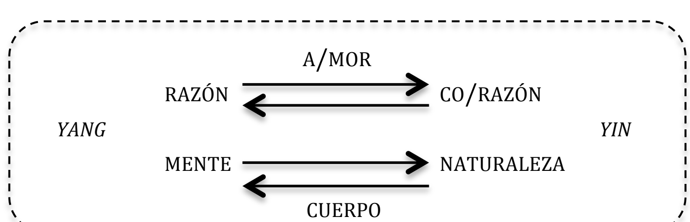
CORAZÓN METODOLÓGICO
RELATIVIZACIÓN / GENERALIZACIÓN
MULTIPLICACIÓN / UNIFICACIÓN
SUAVIZACIÓN / NATURALIZACIÓN

Maurice MERLEAU-PONTY
[1960-1961, *Lo visible y lo invisible*, *El ojo y el espíritu*]

versus dualidad cartesiana mente/naturaleza, Merleau-Ponty incita a una
observación fenomenológica donde el cuerpo ejerce como tercera vía

FRONTERA

"el cuerpo es un *haz* de funciones que entrelaza visión y movimiento"
"lo propio de lo visible es tener un doblez de *invisibilidad en un sentido estricto*"
"el despliegue del mundo *sin pensamiento separado* es precisamente ontología moderna"



(C). ENTORNO BIOGRÁFICO (1ª parte: 1928-1960)

[referencias fundamentales: Scharlau, Schneps, Jackson]

1928 (Marzo 28)	Nacimiento en Berlín (padres: Alexander/Sascha Schapiro 1890-1942, Johanna/Hanka Grothendieck 1900-1957)	
1928-1933	Infancia en Berlín (con padres y hermana Maidi, nacida 1924, en matrimonio previo de Hanka)	
1934-1939	Colegio y Liceo en Blankenese (Hamburgo) (bajo familia Heydorn, pastor protestante; sus padres luchan en la Guerra Civil española)	
1939	Reencuentro con sus padres en Francia	
1940-1942	Internado con Hanka como "indeseables" en el campo de Rieucros (el padre es internado en Le Vernet y luego deportado a Auschwitz, 1942)	
1942-1944	Disolución de Rieucros – Alexander enviado al Liceo Cévénol en Le Chambon (bajo familia Trocmé, pastor protestante)	
1945-1948	Vive en Mairargues, pequeño pueblo en medio de los viñedos, mientras realiza sus estudios de matemáticas en la Universidad de Montpellier (Noviembre 1945: ingreso; Junio 1946: Certificat d'études supérieures, "Très bien"; 1948: Licence)	Redescubre y reescribe la teoría de la medida de Lebesgue
1948	André Magnier detecta la "genialidad" de Grothendieck y le otorga una beca de estudios para París (carta de recomendación de Monsieur Soula, profesor en Montpellier, para "Cartan")	
1948-1949	Oyente en el Seminario Cartan, ENS (topología algebraica y haces)	
1949-1953	Dirigido a la Universidad de Nancy, bajo Schwartz y Dieudonné Beca del CNRS – Realiza su Tesis Doctoral (defensa 28 Febrero 1953) (resolución de todos los problemas propuestos por Schwartz-Dieudonné; elaboración de varios artículos, cada uno digno de Tesis, obra "solo comparable con Banach y Hilbert" [Dieudonné 1966]) Ingresa ("cobaye", 1951) al grupo Bourbaki	***Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*** [Tesis, publ. AMS, 1955] Primera decena de artículos sobre análisis funcional [1950-1953]
1953-1954	Enseña en la Universidad de Sao Paulo	***Espaces vectoriels topologiques*** [libro mimeografiado, Sao Paulo, 1954; trad. imglés, 1973] **"Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques "** [publ. Sao Paulo, 1956]
1955	Investigación en la Universidad de Kansas Intensa correspondencia con Serre Visita Chicago – Regresa a París	Trabajos en categorías abelianas **"Sur quelques points d'algèbre homologique"** [publ. Tohoku 1957] Segunda decena de artículos sobre análisis funcional [1954-1957] 
1956	Obtiene una posición de trabajo en el CNRS	
1957	Bourbaki (marzo): el congreso del "funtor inflexible" *Mathematische Arbeitstagung* (julio) – Universidad de Bonn Muerte de la madre (diciembre)	Trabajos en Riemann-Roch **"Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)"** [publ. Borel & Serre, Bull. SMF, 1958]
1958	Plenaria (agosto) en el Congreso Internacional de Matemáticas Visita (octubre) a Harvard (Zariski, Tate, Mumford)	Visión de la geometría algebraica **"The cohomology theory of abstract algebraic varieties"** [Proc. ICM, Edimburgo, 1958]
1959	Junto con Dieudonné, es nombrado (marzo) profesor en el IHES	
1960	Cinco hijos: 1 con Alice, Nancy, 1950s – 3 con Mireille, París, 1959, 1961, 1965 – 1 con Justine, Comunidad, 1970s	**"Techniques de construction en géométrie analytique. I-X"** [Sem. Cartan, tomo 13, 1960-1961]

Febrero 25
La tesis doctoral: productos tensoriales topológicos y espacios nucleares

----

Artículos asociados

1950-51	Cinco primeras notas breves (13pp., *CRAS* 230, 231, 233) (evt, duales, compacidad, patologías, productos tensoriales topológicos)
1952	"Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux" (*Amer. J. Math* 74: 168-186) **"Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires"** (*Ann. Inst. Fourier* 4: 73-112) (resultados concebidos en "otoño 1951") **[1952] "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires"** (*Sem. Bourbaki* 69: 193-200 - Dic. 1952)
1953	"Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)" (*Canad. J. Math.* 5: 129-173) "Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'EDP" (*J. Analyse Math.* 2: 243-280) "Sur certains espaces de fonctions holomorphes I, II" (*J. reine angew. Math.* 192: 35-64, 77-95)

Tesis

1953	Tesis Doctoral *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* – Tesis Complementaria sobre teoría de haces (Defensa 28 Febrero: Presidente del Jurado, Henri Cartan; Jurados: Schwartz, Dieudonné, Choquet) Extractos del Reporte Schwartz: "Grothendieck posee a su activo varias memorias importantes, cada una de las cuales podría constituir una Tesis" – "Muchas ideas originales, una técnica perfecta (cada demostración es tan corta como sea posible y utiliza exactamente los métodos adecuados)" – "Carácter y valor muy excepcionales" – "El autor ha adquirido una tal virtuosidad que no es exagerado considerarlo como el mayor especialista mundial en la materia".
1955	**[1955] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*** (*Memoirs Amer. Mathem. Soc.*, No. 16)

[1952] "Produits..." *(Sem. Bourbaki)*	Caso de espacios de Banach: primer "producto tensorial normado completo" (^) (norma proyectiva), segundo producto tensorial normado completo (^^) (norma inyectiva); topologías "razonables" en el ⊗ de evt loc. conv. elc) yacen entre (^) y (^^) (193). Definiciones para el caso general de elc; aplicación lineal canónica (^) → (^^) (194). Operadores de Fredholm: "telescopía" (194). Caracterización de productos tensoriales proyectivos con L^1 (Dunford-Pettis generalizado), obstrucciones con L^p (p>1) (195). Buenos ejemplos de productos tensoriales sobre espacios nucleares (espacios de funciones suaves u holomorfas) (195). Definición global de espacios nucleares (vía isomorfismo topológico de (^) y (^^) para todos elc) – Caracterizaciones semi-globales (para todos Banach, para l^1) - Caracterización local (vía operadores de Fredholm) (196). Reducción: Banach nucleares = dimensión finita (197). "Teoremas de permanencia": estabilidad bajo duales, cerrados, cocientes, productos arbitrarios, sumas enumerables, etc. (pensamiento categórico, tipos de infinitud) (197). "Propiedades de elevación" (extensión sobre nucleares) (198). "Propiedades de decrecimiento rápido" (sucesiones de valores propios rápidamente convergente) (200).
[1953/55] ***Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires***	Introducción (3-27, 1ª parte). Objetivo: "estudio sistemático" de productos tensoriales topológicos y de "una nueva clase notable", los espacios nucleares (3). Perspectiva: observación desde *todos* los evt localmente convexos "generales" (4). Notaciones, límites inductivos, casos especiales, recordatorios. Capítulo 1 – "Teoría general de los productos tensoriales topológicos" (28-191, 1ª parte). §1 Producto proyectivo: generalidades, definiciones, "propiedades de permanencia" (clausura de construcciones categóricas). §2 Casos especiales (tipo Fréchet, tipo sumabilidad). §3 Variantes diversas de productos tensoriales: producto inductivo, operadores de Fredholm, topologías varias en el producto tensorial. §4. Dualidad: formas bilineales y lineales. §5. Problemas de aproximación. Capítulo 2 – "Teoría de los espacios nucleares" (3-140, 2ª parte). §1. Clases notables de operadores de Fredholm. §2. Teoría "interna" de los espacios nucleares: definiciones, caracterizaciones, propiedades de permanencia, ejemplos. §3. Producto tensorial topológico de un espacio nuclear por un espacio localmente convexo: extensión (ascenso, relevo), permanencia, dualidad, casos funcionales usuales. §4. Producto tensorial de espacios tipo Fréchet y distribuciones: consideraciones generales y contraejemplos, espacios escalonados, aplicaciones. "Preguntas no resueltas" (135-137). Algunas características: • escritura *à la* Bourbaki (primera Tesis Doctoral de un matemático excepcional con ese estilo) • habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas) • esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones • discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos • entendimiento en la pluralidad (categorías) y construcción de bordes (tipos) a partir de límites (arquetipos)

Los números de páginas remiten a los textos originales [1952], [1955]
Resúmenes complementarios en [Pietsch 2007], [Diestel 2014]

(A) Armonía Grothendickiana en los productos tensoriales topológicos

"natural" global

E nuclear ssi las dos topologías naturales
sobre E⊗F coinciden (para todo F elc)

⊗ proyectivo (*trans*)

ARMONÍA .... BALANCE

⊗ inyectivo (*obstr*)

E nuclear ssi la familia de seminormas que le
definen posee propiedad telescópica (Fredholm)

"artificial" local

reticulado
fuerzas en EQUILIBRIO

urdimbre: red de definiciones
trama: red de equivalencias y caracterizaciones
ramificación: red de clases de ejemplos (obstrucciones / tránsitos)

(B) Arquetípica Grothendickiana en el contexto Romanticismo-Modernidad

Urphänomen
[Goethe: ideas 1786/87; publicación 1795]
fenómeno "simple", "abstracto", "inicial"
[Carta de Hegel a Goethe, 1821]

Arquetipo
(UNO)

Tipos
(MÚLTIPLE)

Hannah Arendt sobre Walter Benjamin [1968]:

Para él [Benjamin] el tamaño de un objeto tenía una relación inversamente proporcional a su importancia.
Y esta pasión (...) derivaba directamente de la única visión del mundo que siempre tuvo una influencia decisiva sobre él,
la **convicción de Goethe sobre la real existencia de un *Urphänomen*, un fenómeno arquetípico,**
una cosa concreta que se podía descubrir en el mundo de las apariencias donde la "significación" y la apariencia, palabra y cosa, idea y experiencia coincidirían.
Cuanto más pequeño el objeto, más parecía poder contener la forma más concentrada de todo lo demás.

"Haz" de los *Pasajes* de París (Benjamin)

Forma

PROYECCIÓN ↓   ↑ **REFLEXIÓN** ("apocatástasis")

Residuos

Marzo 4
Espacios vectoriales topológicos
Resumen de la teoría métrica de productos tensoriales topológicos

---

1953-1956 Decena de artículos en análisis funcional

1953 **[1956] "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques"**
Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956): 1-79.

1954 *Espaces vectoriels topologiques* (curso dictado IMPA, Sao Paulo 1952; escrito y multicopiado 1954)
Traducción: *Topological Vector Spaces*, New York: Gordon and Breach, 1973 (Prefacio, 1968?).

<table>
<tr>
<td>[1956]

Résumé...</td>
<td>
"INTRODUCCIÓN" (1-5). "Resultados completamente nuevos sobre los espacios clásicos L^1, L^2, $L\infty$" (1). "La teoría de productos tensoriales topológicos de espacios localmente convexos generales gana en claridad y sencillez al exponerse primero para los espacios de Banach" (1). Búsquedas metodológicas: "despejar una sucesión lógica de ideas" (1), rastrear "consecuencias naturales" (1), adoptar una terminología nueva que lleve a "simplicidad, coherencia y simetría" (2), proporcionar "formas concisas y sugestivas" (2), abordar "en un solo golpe de vista las relaciones entre las muy numerosas variantes del teorema fundamental" (2), llegar a una "comprensión verdadera" de la teoría (2). [nuestras cursivas]

§1 (7-16) "LAS ⊗-NORMAS". "Normas razonables" en un producto tensorial de espacios de Banach: ∧ (proyectiva, "más grande"), ∨ (inyectiva, "más pequeña") – caracterizaciones de los completados asociados (7-8). ⊗-normas para espacios de dimensión finita – simetrías y orden entre normas (8-10). Extensión de ⊗-normas a espacios de dimensión infinita – aproximación a través de subespacios de dimensión finita – extensión por continuidad – normas accesibles (vía duales y finitud) (10-11). Formas bilineales y aplicaciones asociadas a una ⊗-norma (11-12). Formas y aplicaciones nucleares (13-15). Comparación de ⊗-normas: módulo accesibilidad, "todos" se sumergen en el "mismo" (15) (fina dialéctica platónica Otro/Mismo) – dominancia y equivalencia entre normas (15) – relación entre casos real y complejo (16).

§2 (16-32) "LAS ⊗-NORMAS LIGADAS A LOS ESPACIOS C Y L". Complementos sobre ∧, ∨ – representaciones integrales – representaciones por medio de factorizaciones canónicas – productos tensoriales con parámetros sobre L^1 y C_0 (16-18). Espacios de tipo C y de tipo L – estructura vectorial-topológica – prolongaciones (desde subespacios), relevos (desde cocientes) (18-21). ⊗-normas inyectivas y proyectivas – caso de ∨ (inyectiva), ∧ (proyectiva) – pasos sistemáticos generales de la obstrucción al tránsito (21-23). Formación de nuevas ⊗-normas – plasticidad notacional y terminológica (simetrías y dualidad) ligada a suavidad estructural (isometrías y factorizaciones) – red de productos tensoriales con tipos C, L y espacios generales a la luz de la red de nuevas normas (23-27). Red de 6 normas derivadas: /∧ , ∧\ , /∧\ , ∨/ , \∨, \∨/ (27-28). "Tablero de las ⊗-normas naturales" – 4 nuevas normas – arquetipos cociente y subespacio – normas naturales (clausura de ∨ bajo duales, transpuestas y diagonal) – 2 normas naturales adicionales ("hilbertianas") – Tablero general de las 14 (clases de) normas naturales (reticulado y propiedades de factorización) – metodología explicativa (designaciones simbólicas, simetrías transpuesta y dual, implicaciones de dominación, reducción del número de normas en los casos C, L o H) (28-32).

§3 (32-45) "LAS ⊗-NORMAS LIGADAS AL ESPACIO DE HILBERT". 2 normas "hilbertianas" H, H' (buen comportamiento sobre bilineales de productos de Banach en espacios de Hilbert) – comparaciones con /∧\ , \∨/ (32-33). Formas hermitianas asociadas a H (34-36) y H' (36-38) – representaciones vía L^2 (37). Relaciones elementales entre H y H' (38), y relaciones con "pesos" integrales (39-41) – factorizaciones canónicas (38-42). "Clases naturales de operaciones lineales en espacios de Hilbert" – Caracterización de espacios de Hilbert como L-subespacios y C-cocientes (*) – red de diversos enunciados equivalentes a (*) por medio de comparaciones entre normas (42-45).

§4 (45-59) "LAS RELACIONES ENTRE LOS DOS GRUPOS DE ⊗-NORMAS". Funciones de tipo α (enlaces tensoriales L^1, $L\infty$) (45-47). "Teorema fundamental de la teoría métrica de los productos tensoriales": Desigualdad de Grothendieck (47-50) y demostración (aproximación finitaria y cálculo geométrico natural) (50-52). Consecuencias para la teoría de operadores lineales – "mejoría de operadores por composición" – caracterización vectorial-topológica de (*) (52-55). Aplicaciones al análisis armónico (55-58). "Preguntas abiertas": problema de aproximación (accesibilidad / accesibilidad métrica de espacios de Banach) "parece improbable" (58) [en efecto, Enflo 1972]) – "mejores constantes" (58) y distinción casos complejo/real – "equivalencias de interés", "recíprocas diversas" (59) – comparaciones de normas proyectiva e inyectiva a través de sucesiones de operadores (59) – "estudio de la estructura vectorial-métrica fina de los espacios de Banach generales" (59).

"OBSERVACIONES" (61-63). Algunos resultados debidos a Schatten "reencontrados independientemente por el autor" (61). "Dificultades esenciales" ligadas a accesibilidad (61). Método de hipótesis generales y "numerosas consecuencias" (61). Existencia de una infinitud continua de ⊗-normas no equivalentes (62). Resultado de Takeda "obtenido simultáneamente por el autor" (63).

Características similares a la de la Tesis Doctoral: escritura à la Bourbaki, habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas, red notacional y terminológica), esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones, discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos, entendimiento en la pluralidad (red de normas) y construcción de acotaciones (tipos en la Desigualdad de Grothendieck) a partir de una constante universal (arquetipo K_G).
</td>
</tr>
</table>

Los números de páginas remiten a la transcripción del *Résumé* disponible vía www.ime.usp.br
Visita de Grothendieck a Brasil (otoño 1952 - fines 1954) descrita en [Azevedo 2008]
Visiones matemáticas del *Résumé* en [Diestel, Fourie, Swart 2008], [Pisier 2011]

tres normas tensoriales fundamentales

(arquetipo)

catorce normas tensoriales naturales

(tipos)

RETICULADO DE NORMAS TENSORIALES

Desigualdad de Grothendieck

relación profunda entre normas tensoriales para

operadores sobre L_2 (tipo Hilbert), L_1 L_∞ (tipo Banach)

$\exists K \; \forall T \in L_\infty \otimes L_\infty \; ||T||_\wedge \leq K \, ||T||_H$

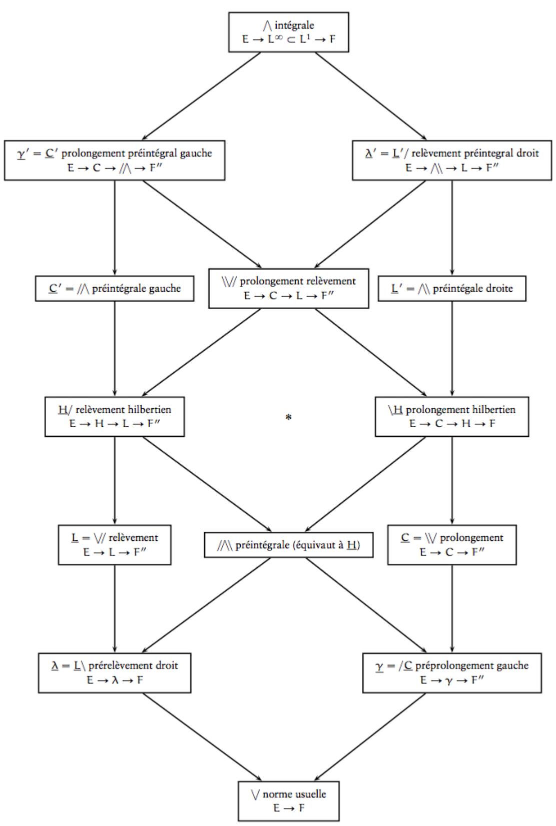
si K es óptima ($=K_G$), lo poco que se sabe es:

$1 < K_G$ (complejos) $< K_G$ (reales) ≤ 1.782

[Pisier 2011]

arquetipo profundo y desconocido

TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES



BIBLIOGRAPHIE D'ALEXANDER GROTHENDIECK

[1] *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* C. R. Acad. Sc. Paris **230**, 605–606 (1950).

[2] *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 1561–1563 (1950).

[3] *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces* $(\mathcal{LF})$. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 940–941 (1950).

[4] *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 839–841 (1951).

[5] *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 1556-1558 (1951).

[6] *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux.* Amer. J. Math. **74**, 168–186 (1952).

[7] *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$. Canadian J. Math. **5**, 129–173 (1953).

[8] *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles.* J. Analyse Math. **2**, 243–280 (1953).

[9] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I.* J. reine angew. Math. **192**, 35–64 (1953).

[10] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, II.* J. reine angew. Math. **192**, 77–95 (1953).

[11] *Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques.* Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173–177. Centro de Cooperación Cientifica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954.

[12] *Espaces vectoriels topologiques.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, 1954.

[13] *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **4**, 73–112 (1952).

[14] *Sur certains sous-espaces vectoriels de* L^p. Canadian J. Math. **6**, 158–160 (1954).

[15] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, I.* C. R. Acad. Sci. Paris **239**, 577–579 (1954).

[16] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, II.* C. R. Acad. Sc. Paris 239, 607–609 (1954).

[17] *Sur les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{DF})$. Summa Brazil. Math. **3**, 57–123 (1954).

[18] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955.

[19] *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1. Canad. J. Math. **7**, 552–561 (1955).

[20] *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* University of Kansas, 1955.

[21] Erratum au mémoire: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **6**, 117–120 (1955-56).

[22] *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 1–79 (1956).

[23] *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux.* Bull. Soc. Math. France **84**, 1–7 (1956).

[24] *La théorie de Fredholm.* Bull. Soc. Math. France **84**, 319–384 (1956).

[25] *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math. **79**, 121–138 (1957).

[26] *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 81–110, (1956).

[27] *Un résultat sur le dual d'une* C^**-algèbre.* J. Math. Pures Appl., **36**, 97–108 (1957).

[28] *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).

Marzo 11
El tránsito del análisis a la geometría
Hacia las categorías abelianas y Riemann-Roch

MULTIPLICIDAD

metodológica	*matemática*
necesidad de trabajar en múltiples campos a la vez (proyectividad)	categorías implícitas por doquier en la Tesis Doctoral y en el *Résumé*

El año 1955 marca un giro crucial en mi trabajo matemático: el paso del "análisis" a la "geometría". Recuerdo aún esa impresión fuerte, como si abandonara estepas áridas y ariscas, para encontrarme de pronto en una suerte de "país prometido" con lujuriantes riquezas, multiplicándose al infinito (...) Hay una cosa en matemáticas que (desde siempre sin duda) me fascina más que cualquier otra, no es ni el "número", ni la "magnitud", sino siempre la *forma*. Y entre los mil y un rostros que escoge la forma para revelársenos, el que me ha fascinado más y el que me sigue fascinando, es la *estructura* escondida en las cosas matemáticas. [RS01, pp. 26-27]

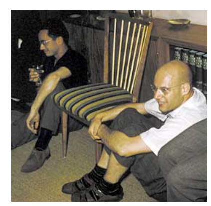
EVT, productos tensoriales topológicos, espacios nucleares: suavidad/naturalidad ***impuesta*** *por Grothendieck (invención)*

Categorías, Riemann-Roch, geometría algebraica: suavidad/naturalidad ***propia*** *del campo en cuestión (descubrimiento)*

LUGAR DE SERRE

1955

Papel de detonador (...) en la génesis de las principales ideas-fuerza y de las grandes tareas que desarrollé entre 1955 y 1970 (...)
Todo lo que aprendí en geometría, lo aprendí de Serre, cuando no lo aprendí yo mismo en mi trabajo (...)
Durante años fue mi *solo* interlocutor (...)
Era tan seductor que no resistía a sus encantos (...)
La historia de mi relación con Serre no es otra cosa que la historia de mis intereses matemáticos, de 1952 a 1970 (...)

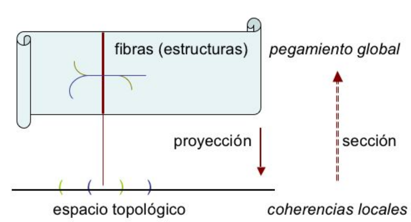


1961 (con Serre)

[RS3, pp. 555-556]

HACES

haz matemático



Abril 8
Categorías abelianas

1955-56 Elaboración del trabajo: Kansas 1955 - París 1956 (ver correspondencia Grothendieck-Serre, SMF 2001)

1957 **[1957] "Sur quelques points d'algèbre homologique"**
Tôhoku Math. J. 9 (1957): 119-221 (Tannaka, editor).

[1957]

Sur quelques points d'algèbre homologique

(**en negritas**, los aportes originales mayores de Grothendieck)

"INTRODUCCIÓN" (119-122). "Recibido Marzo 1 1957" – "Lo esencial de los capítulos I, II, IV y una parte del capítulo III ha sido desarrollado en la primavera 1955, en ocasión de un Seminario de Álgebra Homológica en la Universidad de Kansas" (119). *"Contenido del trabajo"*: "Este trabajo tiene su origen en un intento de explotar la analogía formal entre la teoría de la cohomología de un espacio con coeficientes en un haz y la teoría de los funtores derivados de funtores de módulos, para encontrar un cuadro común que permita englobar estas teorías y otras" (119). *Cap. I*: *(i)* estructura: existencia de suficientes inyectivos o proyectivos gracias a "criterios dúctiles" ligados a sumas y productos infinitos; *(ii)* lenguaje: categorías aditivas y abelianas (119). *Cap. II*: "formalismo homológico en categorías abelianas", resoluciones, sucesiones espectrales (119). *Cap. III*: "redesarrollo" de la cohomología a coeficientes en un haz, "suavización" con respecto a Cartan y Serre ("sin casi hipótesis restrictivas sobre la naturaleza de los espacios"), aplicabilidad a los espacios no separados de la geometría algebraica abstracta o la "geometría aritmética"; "conversaciones preciosas" con Godement y Cartan (119-120). *Cap. IV*: "pregunta no clásica" de Ext de haces de módulos, enlace de Ext globales y locales (120). *Cap. V*: estudio de acciones de grupo adicionales sobre el espacio, el haz de anillos sobre el espacio y un segundo haz de módulos sobre el primer haz; "forma definitiva" de homología tipo Cech, gracias a nuevos funtores de cohomología, implícitos en casos anteriores (120). *"Aplicaciones"*: "por falta de espacio, solo pude dar muy pocas aplicaciones". Otras más: *(a)* **dualidad de Grothendieck**, extiende teoremas de Serre (FAC); *(b)* extensión (a variedades algebraicas completas) de resultados de Serre sobre variedades proyectivas; *(c)* "intermediación natural" de resultados de Steenrod (potencias reducidas y simétricas) en haces (120). *"Lagunas"*: "silencié las estructuras multiplicativas" de las cuales "no parece haber aún una teoría satisfactoria, con el grado de generalidad y sencillez necesaria" (nota a pie de página: Cartier acaba de encontrar esa "formulación satisfactoria general") (120). "Expreso mis agradecimientos a los señores Godement, Cartan y Serre, cuyo interés ha sido el estímulo indispensable para la redacción del trabajo" (121). *Tabla de contenidos* (121-122).

"CAPÍTULO I. GENERALIDADES SOBRE LAS CATEGORÍAS ABELIANAS" (122-139). *"I.1. Categorías".* Categoría (**conjuntos** Hom), categoría dual, epis y monos (vía conjuntos Hom), isos, **subobjetos** ("sous-trucs"), objetos cociente ("trucs quotient"), (representación de) productos directos (escogencia vía símbolo τ de Hilbert), categorías con productos y con **productos infinitos**, (representación de) sumas directas (escogencia vía símbolo τ de Hilbert) (122-124). *"I.2. Funtores".* Funtores covariantes y contravariantes, morfismos funtoriales (= transformaciones naturales), **equivalencia** de categorías (en realidad, define una **adjunción** [observación posterior de Marquis], que luego se subespecializa en equivalencia), distinción de equivalencia e isomorfismo (124-125). *"I.3. Categorías aditivas".* Categoría **aditiva** (los Hom son grupos abelianos, existen sumas y productos finitos, existe un cero), núcleo, conúcleo, imagen (126). *"I.4. Categorías abelianas".* Categoría aditiva con axiomas suplementarios AB1 (existencia de núcleo y conúcleo para todo morfismo), AB2 (*Coim(u)* $\to$ *Im(u)* es iso para todo morfismo *u*); ejemplos de **categorías aditivas no abelianas** (módulos topológicos separados, grupos abelianos filtrados, espacios fibrados holomorfos sobre superficies de Riemann); **retículos** de subobjetos y objetos cociente; sucesiones exactas y funtores exactos (127-128). *"I.5. Sumas y productos infinitos".* Axiomas adicionales "en orden de fuerza creciente": **AB3** (existencia de sumas directas arbitrarias), **AB4** (AB3 + suma arbitraria de monos es mono), **AB5** (AB3 + ley de distribución locálica para subobjetos), **AB6** (AB3 + extensión arbitraria de distribución AB5, "no se usará en el trabajo"); ejemplos de **categorías abelianas que distinguen los axiomas infinitarios** (grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos, **HACES DE GRUPOS ABELIANOS SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO**); "axiomas sobre todo útiles para el estudio de límites inductivos y proyectivos" (128-130). *"I.6. Categorías de diagramas y propiedades de permanencia".* Esquemas (S), diagramas en una categoría (C), categoría de diagramas C(S), diagramas conmutativos (Σ), **categoría de diagramas conmutativos** $C(\Sigma)$, propiedades de permanencia: C aditiva, con productos o sumas infinitas, satisface ABj $1 \leq j \leq 6$, implica lo mismo para $C(\Sigma)$; extensiones canónicas de funtores de C a $C(\Sigma)$ (130-131). *"I.7. Ejemplos de categorías definidas por esquemas de diagramas".* Categoría trivial, categoría producto, categoría de funtores, categoría de complejos (homológicos), categoría de **acciones de grupo**, categoría de **representaciones de un anillo unitario**, sistemas inductivos y proyectivos, **prehaces** (131-133). *"I.8. Límites inductivos y proyectivos".* Definición de límites inductivos (escogencia canónica vía simbolo de Hilbert τ), **existencia de límites inductivos en categorías abelianas con AB3**, funtorialidad **exacta** de la construcción asumiendo además **AB5** (133-134). *"I.9. Generadores y cogeneradores".* Familia de generadores, **generador**, ejemplos (en módulos, haces, haces de haces), sistema de generadores provenientes de un esquema, **existencia de generador implica existencia de cogenerador** en categorías abelianas con **AB5** (ejemplo, toro como cogenerador de categoría de módulos) (134-135). *"I.10. Objetos inyectivos y proyectivos".* Definición de objeto inyectivo (vía exactitud del **funtor representable**); teorema principal: **EXISTENCIA DE SUFICIENTES INYECTIVOS EN CATEGORÍAS ABELIANAS CON AB5 Y CON UN GENERADOR**; prueba vía buena potenciación (deducida del generador), lema de Zorn, propiedades del maximal y recurrencia transfinita; caso de interés "no visible a un ojo desnudo": categorías de diagramas (135-137). *"I.11. Categorías cociente".* "Las consideraciones sistematizan y suavizan el «lenguaje módulo C» de Serre"; subcategorías completas ("complètes") y espesas ("épaisses"); **categorías cociente** e interés de propiedades de reflexión (137-139).

"CAPÍTULO II. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA EN LAS CATEGORÍAS ABELIANAS" (139-153). "*2.1. ∂-funtores y ∂*-funtores".* ∂-funtores (y duales ∂*) (entre una categoría abeliana y una aditiva, formalización de la noción de borde); **funtores cohomológicos** como ∂-funtores exactos de grado infinito (y duales homológicos) (entre dos categorías abelianas) (139-140). *"2.2. ∂-funtores universales".* **∂-funtores universales** (proyectores de la cohomología, "arquetipos") y funtores satelitales ("tipos" medios); caracterización de los universales como borrables ("effaçables") ligados a resoluciones inyectivas; existencia de satelitales en categorías abelianas con condiciones de finitud (ejemplo: categoría abeliana de grupos algebraicos completos sobre característica 0), y, ortogonalmente, en categorías abelianas con sumas infinitas, buena potenciación y AB5 (140-143). *"2.3. Funtores derivados".* Funtores derivados, subobjetos de un inyectivo y resoluciones inyectivas (extensión de Cartan-Eilenberg a categorías abelianas); construcción universal de funtores cohomológicos a partir de propiedades de inyectividad y exactitud; obstrucción en el caso de proyectivos (categoría abeliana con suficientes inyectivos y no suficientes proyectivos: **haces de módulos sobre un haz de anillos** dado sobre un espacio topológico) (143-144). *"2.4. Sucesiones espectrales y funtores espectrales".* "Despejar los casos generales más útiles" detrás del Cartan-Eilenberg; categoría de objetos filtrados como ejemplo de **categoría aditiva no abeliana**; familia graduada asociada a un objeto filtrado, sucesión espectral, funtor espectral, sucesión espectral cohomológica, caso de la cohomología de un complejo; funtores espectrales derivados; relaciones diversas entre funtores derivados; **CONSTRUCCIÓN DE FUNTORES ESPECTRALES COHOMOLÓGICOS CON DERIVADOS FINALES DADOS, A PARTIR DE PROPIEDADES DE INYECTIVIDAD Y EXACTITUD** (144-148). "*2.5. Funtores resolventes".* Funtores resolventes y reconstrucciones cohomológicas vía resoluciones inyectivas; resolución de la identidad; **funtor representable** resolvente asociado a una resolución proyectiva; **cálculo de sucesiones espectrales mediante funtores resolventes** (mediaciones y diagramas generales) (149-153).

"Capítulo III. Cohomología a coeficientes en un haz" (153-182). *"3.1. Generalidades sobre los haces".* Prehaces y haces a partir de abiertos; prehaces y haces de grupos, o a valores en una categoría arbitraria; categoría aditiva de prehaces o haces a valores en una categoría aditiva; **categoría abeliana de prehaces o haces de grupos abelianos**; funtor de hacificación; relaciones entre espacios fibrados ("espaces étalés") y (pre)haces; caracterización de haces: un prehaz es haz si y sólo si el homomorfismo natural entre el prehaz y su espacio fibrado natural es isomorfismo (se obtiene entonces una **equivalencia** entre la categoría de espacios fibrados y la categoría de haces); espacios fibrados de grupos: las leyes de grupo en cada fibra satisfacen una ley de continuidad natural; **haz de haz de módulos** (sobre un haz original O de anillos unitarios); **la categoría C^0 de esos haces de haces es aditiva, abeliana, satisface AB5 y AB3*, y admite un generador**; **C^0 posee suficientes inyectivos** (prueba nueva según Grothendieck, prueba clásica según Godement) (153-156). *"3.2. Definición de los $H^p(X,F)$".* Se trata de los funtores derivados (= satelitales) asociados a un haz *F* de grupos abelianos sobre un espacio topológico *X*; resultan ser **funtores cohomológicos**; cálculo eventual vía anulaciones de los $H^p(X,F)$ para $p>0$ (condiciones de "aciclicidad"); imagen inversa de haces; cohomología natural asociada a la imagen inversa (156-158). *"3.3. Criterios de aciclicidad".* "Desarrollos debidos a Godement"; condiciones de exactitud y cubrimiento para tener una clase de objetos inyectivos; validación de esas condiciones para clases de haces fofos ("flasques") y blandos ("mous"), y consecuencias de aciclicidad; resoluciones de la identidad (Godement, Cartan); "un ejemplo divertido": aciclicidad obtenida para un haz constante de grupos abelianos sobre un espacio irreducible (158-160). *"3.4. Aplicaciones a cuestiones de relevo del grupo estructural".* Enlace con trabajos de Serre en geometría algebraica y trabajos de Chevalley en variedades algebraicas (por venir: **esquemas**); combinación de geometría, aritmética, álgebra, variable compleja (por venir: **Riemann-Roch** generalizado); **construcción de un cobordismo funtorial entre los grupos de cohomología de haces**; comparación del estudio de $H^1(X,F)$ vía cohomología de Cech y vía el "**tratamiento axiomático de este trabajo**"; ejemplos con variedades holomorfas y fibrados holomorfos (160-166). *"3.5. La sucesión exacta relativa a un subespacio cerrado".* Caracterización de las cohomologías a coeficientes en funtores restringidos a cerrados y abiertos (166-167). *"3.6. Sobre la dimensión cohomológica de ciertos espacios".* Control estructural (vía **AB4** y **límites inductivos**) de los **funtores cohomológicos** definidos sobre categorías de haces de grupos abelianos (prueba utiliza aproximaciones finitarias); control estructural (vía **AB5** y **generadores**) de los **funtores derivados** definidos sobre categorías abelianas (prueba utiliza aproximaciones inyectivas); permutación de funtores cohomológicos y límites inductivos bajo condiciones adecuadas de finitud (compacidad local, espacio de Zariski = sucesión decreciente de cerrados es estacionaria); **dimensión combinatoria acotada implica dimensión cohomológica acotada para haces abelianos sobre espacios de Zariski** ("el tema generaliza un teorema anterior de Serre") (167-171). "*3.7. La sucesión espectral de Leray de una aplicación continua"*. Imagen directa de un haz; propiedades del funtor imagen (ecuación universal, exactitud, preservación de inyectivos, etc.); **construcción natural de funtor cohomológico (sobre haces abelianos) asociado a una aplicación (imagen) continua** (171-174). *"3.8. Comparación con la cohomología de Cech".* Grupos de cohomología de Cech; *obstrucción*: no forman en general un funtor cohomológico sobre haces de grupos abelianos (ejemplo delicado de Grothendieck); *tránsito*: bajo condiciones adicionales (paracompacidad, siguiendo a Cartan) la sucesión espectral asegura isomorfismos entre las dos cohomologías (vía funtores derivados o vía Cech) (174-179). *"3.9. Criterios de aciclicidad por el método de recubrimientos".* Recubrimientos de un espacio y enlace entre grupos de cohomología locales y globales; aplicaciones a variedades de Stein (Cartan) y matrices holomorfas (179-181). *"3.10. Pasos al límite en cohomología de haces".* Con condiciones adecuadas sobre las categorías (**suficientes inyectivos**, **AB5**), los límites inductivos de funtores entre esas categorías permiten reconstruir los morfismos coborde; aplicación en el caso de grupos topológicos metrizables completos (181-182).

"Capítulo IV. Los Ext de haces de módulos" (183-195). *"4.1. Los funtores Hom".* Funtores *Hom* locales (sobre vecindades) y puntuales (sobre puntos) y pasajes entre ellos mediante consideraciones de tipo finito (coherencia) (185-187). *"4.2. Los funtores Ext y la sucesión espectral fundamental".* Reconstrucción como funtores derivados y como prehaz abeliano, dicotomía local/global, **enlace mediante funtores representables y condiciones de coherencia**, aplicaciones a sucesiones espectrales y resoluciones canónicas (187-190). *"4.3. Caso de un haz de anillos constante".* Condiciones de exactitud (envío de inyectivos en inyectivos), existencia de funtores canónicos (cohomología espectral), resoluciones abelianas (191-193). *"4.4. Caso de haces con un grupo de operadores".* Aplicación de los resultados del capítulo al caso de la **categoría de acciones de grupo sobre haces** (193-195).

"Capítulo V. Estudio cohomológico de los espacios con operadores" (195-220). *"5.1. Generalidades sobre los G-haces".* Categorías (aditivas) de *G*-haces de grupos, anillos, *G*-haces abelianos, etc. **Categoría abeliana de *G-O*-módulos** (sobre un *G*-haz de anillos *O*), satisface AB5, AB3* y posee un generador. Imágenes inversas y directas de *G*-haces. Ejemplos en el caso de variedades diferenciables u holomorfas (preludio intuitivo al **Riemann-Roch** generalizado, por venir) (195-199). *"5.2. Los funtores $H^n(X, G, A)$ y las sucesiones espectrales fundamentales".* "**Funtores cohomológicos universales**" (formados por grupos abelianos o haces), aplicaciones a construcción de sucesiones espectrales y resoluciones canónicas, casos particulares de aciclicidad. Ejemplo en el caso de un grupo de Galois de un recubrimiento y "mismos resultados en el caso de las variedades aritméticas" (intuición de los **esquemas**, por venir) (199-203). *"5.3. Caso de un grupo discontinuo de homeomorfismos".* Aplicaciones de resultados anteriores a condiciones sobre estabilizadores y (ausencia de) puntos fijos (203-205). *"5.4. Transformación de la primera sucesión espectral".* **Cálculos de sucesiones espectrales** y aplicaciones diversas a grupos finitos (205-207). *"5.5. Cálculo de los $H^n(X,G, A)$ mediante recubrimientos".* **Teoremas de representación locales y globales**, enlaces vía condiciones topológicas (paracompacidad, separación, etc.) (207-213). *"5.6. Los $Ext^n(X, A, B)$".* Fórmulas de enlace entre funtor de secciones y funtores representables en el caso de *G-O*-módulos; conexiones entre inyectivos, aciclicidad; construcción de sucesiones espectrales y resoluciones; isomorfismos entre funtores *Ext* y funtores derivados (213-219*)*. *"5.7. Introducción de las familias Φ".* Fórmulas funtoriales extendidas, y aplicaciones a casos de grupos finitos o acciones triviales (219-220).

Bibliografía (221): Atiyah, Borel, Buchsbaum, Cartan, Cartier, Chevalley, Eilenberg, Godement, Grothendieck, Hochschild, Mac Lane, Serre, Shapiro, Weil.

[2001]

Correspondencia Grothendieck-Serre
(apuntes sobre el Tôhoku)

(G →S, 25 Feb 1955) Analogía de teoría de funtores derivados y cohomología de espacios a coeficientes en un haz, sin saber aún "si marcha tan bien en el caso de un espacio no separado" (13-14). (S →G, 13 Feb 1955) "Tu artículo sobre el álgebra homológica fue leído con cuidado [en el Congreso Bourbaki] y convirtió a todo el mundo (aún a Dieudonné, ¡quien parece completamente funtorizado!)" (17); comparación con Buchsbaum y papel disruptor de Eilenberg (18-19). (G →S, 1 Sep 1956) "Pasé lo mejor del mes pasado en la redacción de mi *multiplodoco* de álgebra homológica (...) más de 100 páginas en gran formato"; incluye tabla de contenidos muy similar a la definitiva (43). (G →S, 19 Sep 1956) Dificultades de publicación en Estados Unidos y en Bourbaki (45). (G →S, 13 Nov 1956) Propuesta de publicación al *Tôhoku*, revista de Tannaka, donde "los artículos-río no les desaniman" (49).

Los números de páginas remiten al texto original [1957]
y a la correspondencia Grothendieck-Serre [2001]

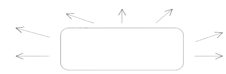
ALGUNAS FUERZAS MAYORES EN EL *TÔHOKU*

---

(1) vaivenes entre lo uno y lo múltiple

NO: definir *un* objeto y explorar una estructura *externa* sobre el objeto — Cat + E — general
SÍ: definir la **categoría** de *todos* los objetos y explorar la estructura *interna* de la categoría — Obj **+** E — particular

NO: entender un objeto "en sí" (*uno*: objeto interno X)
SÍ: entender un objeto "en otro" (*múltiple*: **funtor representable** externo h_X)



---

(2) "cuadro común"

"analogía formal" entre
cohomología a coeficientes en un haz (herencia *riemanniana*)
serie de funtores derivados de funtores de módulos (herencia *galoisiana*)

enlaces naturales entre
geometría algebraica, topología, variable compleja, (co)homología

sustento: **teoría de haces**

---

(3) construcciones universales y nociones de equivalencia

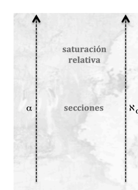
	NO: $(\exists)$ $\approx$	**SÍ**: $(\exists!)$ $\sim$
inversión "metafísica":	(tipos)	(arquetipos)
inversión metodológica:	(estática)	(dinámica)

el arquetipo (= ***arkhê***; *ark-* raíz griega; *arkeô* = alejar; *akhô* = fundar; *arkhên* = proyectar)
emerge a través de las *transformaciones* de los tipos y las *invarianzas* de las transformaciones
("lenguaje módulo C de Serre", **categorías cociente** y variación sobre la base según Grothendieck)

arquetipología general: esquemas horizontales (comando), verticales (corte), rítmicos (giro, ramificación, dilatación)
[*Les structures anthropologiques de l'imaginaire*, Durand 1960]

---

(4) manejos infinitarios (el "paraíso" cantoriano)



axiomas **AB3-AB6**: productos y límites inductivos arbitrarios
generador: *integración* interna (en *un* objeto) de la *diferenciación* externa (en *toda* la categoría)

fuerza arquetípica de **AB5 + generador**: existencia de suficientes inyectivos
fuerza arquetípica de **abelianidad + inyectividad**: construcción de funtores cohomológicos y derivados

---

ALGUNAS CITAS SOBRE LA INFLUENCIA DEL *TÔHOKU*

"Los primeros artículos sobre categorías no tuvieron secuelas inmediatas, puesto que en ese periodo proveyeron solo un lenguaje. La noción de teoría de categorías como un tema propio de estudio aparece solo en la tercera fase del movimiento del álgebra abstracta, es decir, el periodo 1957-1974, bajo la influencia de Grothendieck." [MacLane 1981]

"El *Tôhoku* demostró que las categorías podían ser un instrumento para realmente *hacer* matemáticas, y desde allí en adelante el desarrollo fue rápido." [Barr & Wells 1985]

"Después de la creación de la noción moderna de espacio topológico y el descubrimiento de los procesos básicos de límites en la teoría de la medida, el siguiente conglomerado mayor de nuevas y sorprendentes construcciones infinitarias fue introducido por Alexander Grothendieck con su tratamiento del álgebra homológica, categorías derivadas y funtores, topos y sitios." [Manin 1998]

"Se reconoce el toque del Maestro en la idea de que el problema no es cómo definir un motivo: el problema es definir la categoría de los motivos, y desenterrar las estructuras que lleva la categoría." [Deligne 1998]

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I – GROTHENDIECK

Abril 15
Riemann-Roch y K-teoría

Registro parcial de intereses:

- 1951: *Tribu* No. 25 (exposición de Grothendieck para Seminario Bourbaki: Riemann-Roch según Kodaira)
- 1955-57: *Correspondencia Grothendieck-Serre* (ver resumen abajo)
- 1955-56: *Tôhoku* (pistas indicadas en sesión previa de este Seminario)
- 1957: *Séminaire Cartan* (exposición de Grothendieck, "Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents")

1957 **[1957] "Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch" (Rapport Riemann-Roch, RRR)**
(Noviembre 1 1957), reproducido en: *SGA6*, pp. 20-77.

1958 **[1958] Armand Borel & Jean-Pierre Serre,**
"Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)",
Bulletin de la Société Mathématique de France 86 (1958): 97-136.

[1957] ***RRR***	*"Cap. I. λ-anillos (preliminares formales)". "1. Definiciones".* Anillos con operadores homomórficos en series formales (21-23). *"2. Ejemplos".* *K(G,k)* para *G* grupo, *k* anillo conmutativo; casos de grupos algebraicos, topológicos, de Lie, formas cuadráticas, etc. ("Prometemos no necesitar todos esos ejemplos para tratar el teorema de Riemann-Roch!"); determinaciones específicas con condiciones adicionales sobre *G*; *K(X)* para *X* variedad algebraica (24-28). *"3. El "λ-anillo definido por un anillo graduado".* Construcción formal y funtorial de un homomorfismo de Chern, que da lugar a las clases de Chern (28-33). *"4. Las operaciones $\lambda^p(N,x)$".* Ecuaciones relativas, características (Euler-Poincaré), alternadas (Riemann-Roch), en el caso abstracto de anillos de series formales y polinomios universales (33-38). *"Cap. II. Clases de haces algebraicos coherentes y clases de Chern". "1. La teoría de Chow".* "Fijaremos un cuerpo de base *k* que supondremos algebraicamente cerrado. Un gran fragmento de lo que sigue, y tal vez todo, es sin embargo válido sin esa restricción" (38); anillo de Chow *A(X)* (anillo graduado de clases de ciclos sobre una variedad *X* con buenas propiedades); *matemática relativa*: *A* como funtor contravariante; ecuación relativa; teoría Chow de clases de Chern (38-42). *"2. Definición de clases de Chern de haces algebraicos coherentes".* Definición de *K(C)* para *C* subclase de una categoría abeliana; *matemática relativa*: construcción de funtores cohomológicos entre los *K(C)* gracias a resoluciones inyectivas; aplicación al caso de haces coherentes (42-47). *"3. Generalidades funtoriales sobre K(X)".* Definición de multiplicación gracias a alternación de los Tor; propiedades homomórficas y funtoriales; ecuación relativa (47-54). *"4. Algunos resultados técnicos".* Propiedades funtoriales para filtraciones; descomposición celular (generación del grupo *K*) (54-63). *"5. Definición hacificada de clases de Chern. Aplicación al estudio de morfismos inyectivos".* Ecuaciones relativas para el caso inyectivo; observaciones sobre limitantes, extensiones y modificaciones de la prueba (demostración "situada" en un espacio, aunque "ciertamente verdadera" en general, 68) (63-68) *"6. El teorema de Riemann-Roch".* Prueba en característica 0, ampliada a toda característica (ver añadido); referencias: Hirzebruch, Serre, Grothendieck (69-71) *Añadido. "Demostración del teorema de Riemann-Roch (Grothendieck, Noviembre 1 1957)"* (71-76). Prueba en característica arbitraria, "basada sobre un principio diferente" (69). "Notamos *K(X)* el grupo abeliano generado por las clases de haces coherentes sobre *X* (módulo la identificación de una extensión a una suma); la suma alternada de los *Tor* hace de *K(X)* un anillo" (71). "Notamos *A(X)* el anillo graduado de las clases de ciclos de *X* (para la equivalencia racional, *cf.* Chow)" (72). Clases de Chern (ch) y de Todd (T) (elementos en $A(X)\otimes Q$) (72). *Matemática relativa*: dado un morfismo propio $f : Y\to X$, construcción de homomorfismos naturales $f_* : A(Y)\to A(X)$, $f_! : K(Y)\to K(X)$ (72). "Teorema de Riemann-Roch" (RR): en condiciones adecuadas, $f_*(ch(y)T(Y))=ch(f_!(y))T(X)$ para $y\in K(Y)$ (73). Condiciones de permanencia / reducibilidad para RR (73). Con un "cálculo estándar" y con "cálculos elementales" se concluye la prueba (74-76).
[1958] ***Le théorème de Riemann-Roch***	"Lo que sigue constituye las notas de un Seminario llevado a cabo en Princeton, en el otoño de 1957, sobre los trabajos de Grothendieck; los resultados nuevos que figuran se le deben a este último; nuestra contribución atañe únicamente a la redacción. El «teorema de Riemann-Roch» del que se trata es válido para variedades algebraicas (no singulares) sobre un cuerpo de característica arbitraria; en el caso clásico, donde el cuerpo de base es **C**, el teorema incluye como caso particular aquel demostrado hace unos años por Hirzebruch" (97). Generalidades sobre haces, haces coherentes y aplicaciones propias (98-102). *Matemática relativa*: imágenes de haces, referencias al *Tôhoku*, propiedades de permanencia de haces coherentes (102-104). **Grupo *K(X)* de clases de haces sobre una variedad algebraica *X*** – Presentación de *K(X)* a través del grupo $K_1(X)$ de fibrados, vía resoluciones y diagramas conmutativos largos (105-108). Operaciones sobre *K(X)*: *interior*: anillo conmutativo; *exterior*: potencia; *matemática relativa*: imágenes directa e inversa (ojo, p. 110: *ecuación relativa*: propiedad estructural de un conectivo intuicionista a la Peirce-Caicedo) (108-111). "El hecho de que $K(X) = K_1(X)$ permite extender la definición de clases de Chern a haces coherentes arbitrarios" – "En el caso de un cuerpo de base arbitrario, Grothendieck (...) reemplaza *H*(X)* por el anillo graduado *A(X)* de las clases de ciclos sobre *X*, bajo equivalencia lineal a la Chow" (111). **Ecuación relativa** para anillos *A(X)* – Clases de Todd – Clase exponencial de Chern – Ecuaciones relativas para clases de Todd y de Chern (112). "Enunciado del teorema de Riemann-Roch": diagrama no conmutativo (obstrucción) entre clases de Chern (para imágenes inversas asociadas a un morfismo propio entre "buenas" variedades) y **diagrama conmutativo (tránsito) entre clases de Chern "desviadas" por clases de Todd** (113) – "El teorema R-R bajo la forma Grothendieck implica la fórmula R-R-Hirzebruch" – "La demostración se hará por reducción a los casos particulares de una **proyección** y una **inyección**" (113). Lemas de reducción: "caso de la inyección (...) más difícil" (113-115). Propiedades de exactitud y homotopía para *K(X)* (115-118). **Demostración R-R para el caso proyectivo**: comportamiento funtorial de *K* con respecto a productos tensoriales, fórmula de Hirzebruch válida para espacios proyectivos (118-119). **Demostración R-R para el caso inyectivo**: resoluciones locales de haces (120-124), fórmula de Hirzebruch para el caso inyectivo (124), pruebas locales (125) y "explosión" global (125-128), lemas de translación (128, 129-135), "fin de la prueba de R-R" (129). "Manuscrito recibido el 9 Mayo 1958" (136).
[2001] ***Correspondencia Grothendieck-Serre*** *(apuntes sobre Riemann-Roch)*	(G→S, 18 Feb 1955) Intuición de cómo ciertos espacios universales y clasificadores podrían jugar un "papel en un Riemann-Roch algebraico, similar al que me has vagamente explicado y que funciona en el caso complejo (debido a Hirzebruch)" (5). (G→S, 1 Nov 1957) "En anexo una demostración muy simple de Riemann-Roch, independiente de la característica" – "Te señalo que «moralmente» el nuevo método descansa sobre la determinación de *K(X)* y *A(X)*" – enfatizando así la emergencia del grupo *K(X)*, fundamento de la K-teoría (57). (G→S, 12 Nov 1957) "De acuerdo con todas tus rectificaciones" – "Con la definición de clases de Chern para haces (...) el teorema de Riemann-Roch puede también enunciarse en el caso de variedades no proyectivas (lo que sucederá en el caso clásico, gracias a la definición trascendente de las clases de Chern)" (59).

Los números de páginas remiten al texto de Grothendieck [1957], al artículo Borel-Serre [1958] y a la correspondencia Grothendieck-Serre [2001]

Riemann-Roch clásico

Teoría de las funciones abelianas [Riemann 1857, sección V]
Apelación "Riemann-Roch" dada al teorema en [Brill & Noether 1874]

idea básica
conjugación armónica de lo UNO (geométrico) y lo MÚLTIPLE (algebraico)

el estudio de *una* función se determina por el estudio de una *multiplicidad* de funciones *sobre la superficie de Riemann* de la función original

función f holomorfa
→ **superficie de Riemann** S asociada (asuma compacidad)
→ sistema de puntos P_i sobre S afectados con multiplicidades m_i, $m=\sum m_i$
→ **espacio vectorial** H de funciones holomorfas con m ceros asignados sobre S
→ espacio vectorial M de funciones meromorfas con m polos asignados sobre S

$$\underbrace{m - \text{género}(f) + 1}_{\text{invariante geométrico}} = \underbrace{\dim(M) - \dim(H)}_{\text{armonía algebraica}}$$

Riemann-Roch-Serre

haz Θ de (gérmenes de) funciones meromorfas con polos asignados
→ grupos de cohomología $H^0(\Theta)$, $H^1(\Theta)$ (espacios vectoriales complejos finito-dimensionales)
haz Ω de (gérmenes de) funciones holomorfas con polos asignados
→ teorema de **dualidad** de Serre: $H^1(\Theta) \approx (H^0(\Omega))^*$

$$\underbrace{m - \text{género}(f) + 1}_{\text{invariante geométrico}} = \dim(H^0(\Theta)) - \dim(H^1(\Theta)) = \underbrace{\dim(H^0(\Theta)) - \dim(H^0(\Omega))}_{\text{equilibrio cohomológico}}$$

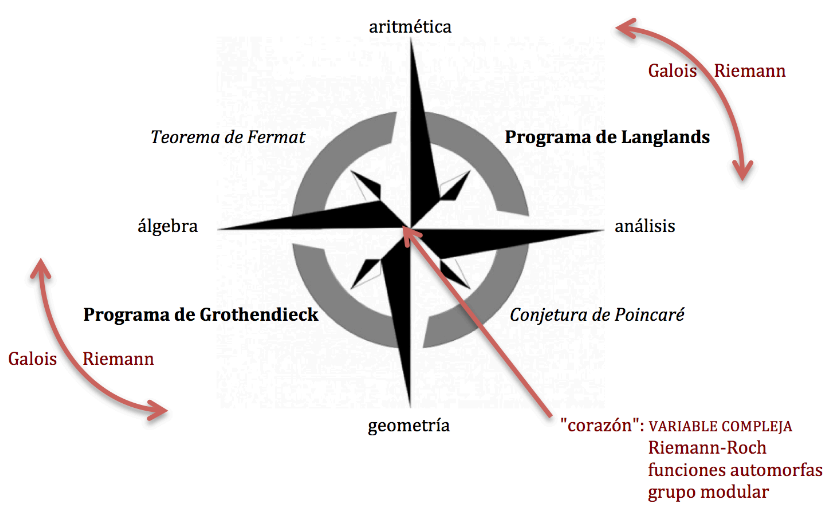
Riemann-Roch-Hirzebruch

en variedad fija X con "buenas" propiedades,
enlace entre clases de Chern (invariantes "aditivos" exponenciales en $H^*(X)$),
clases de Todd (invariantes "multiplicativos" polinomiales en $H^*(X)$)
y sumas alternadas de dimensiones cohomológicas

Riemann-Roch-Grothendieck

- **linealización** profunda: emergencia de la **K-teoría**: grupo $K(X)$, anillo $A(X)$
- **naturalización** de clases de Chern y de Todd como transformaciones entre K y H^*
- **relativización** de Serre-Hirzebruch al caso de un morfismo $f: X \to Y$ (variación)

ROSA MATEMÁTICA DE LOS VIENTOS



Mayo 13
Espacios de funciones holomorfas

[1953] "Sur certains espaces de fonctions holomorphes" (I, II), *J. reine angew. Math.* 192 (1953): 35-64 & 77-95.
[recibido 7 Noviembre 1951]

[1957] "Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann", *Amer. J. Math.* 79 (1957): 121-138.
[recibido 12 Octubre 1956; "la mayoría del trabajo se realizó en 1955, mientras el autor era Visiting Associate Professor en la Universidad de Kansas" (121)]

[1961] ***Techniques de construction en géométrie analytique (I-X)***, *Séminaire Cartan*, Año 13 (1960-61), exps. 7-17.

[1953]	Esquema del artículo en tres partes: (*Ia*) funciones holomorfas a valores en un evtlc (§§2-3); (*Ib*) espacios de funciones holomorfas sobre la esfera de Riemann, representaciones integrales de aplicaciones lineales acotadas, teorema de estructura para *todas* las aplicaciones lineales continuas en un evtlc completo, estudio de una "vasta clase de ecuaciones elípticas sobre una variedad, gracias al formalismo de los núcleos-distribuciones introducido por L. Schwartz" (36) (§§4-6); (*II*) "estudio topológico de espacios de funciones holomorfas – la parte sin duda más original e importante" (36), "los métodos empleados son susceptibles de generalidad" (36), propiedades topológicas intrínsecas ligadas a espacios nucleares (§7), propiedades topológicas "elementales" ligadas a localidad (§8). [Los espacios de funciones holomorfas aparecen como ejemplo crucial de **espacios nucleares**, paralelamente (en su concepción, 1951) a las primeras notas breves sobre productos tensoriales topológicos y criterios de compacidad en espacios funcionales generales (1950-1952)]
[1957]	*Par. 1.* Teorema general (*"Lie"zación*). Reducción del grupo estructural de un fibrado holomorfo sobre la esfera de Riemann *S* (teorema 1.1, 122). *Par. 2.* Teorema particular (*Linealización*). Descomposición directa, en fibras de dimensión 1, de un fibrado vectorial holomorfo sobre *S* (teorema 2.1, 126). *Par. 3.* Teorema dual (*Estructuración*). Un fibrado vectorial holomorfo sobre *S* posee una estructura ortogonal ssi es isomorfo a su fibrado dual (teorema 3.2, 131). *Par. 4.* Demostración del teorema principal (Par. 1). Conjetura: "Parece plausible que la única variedad proyectiva *X* sobre la cual todo fibrado vectorial holomorfo pueda descomponerse en suma de fibrados holomorfos de fibra **C**, sea la esfera de Riemann" (136). Marco de la escuela francesa (referencias: Cartan, Cartier, Chevalley, Grothendieck, Serre, Weil), particularmente FAC + GAGA (Serre). [Ejemplo importante de enlaces Riemann (fibraciones holomorfas, esfera) / Galois (descomposición), y cercanía (en su concepción, 1955) con trabajos paralelos sobre **Riemann-Roch**]
[1961] ***Techniques de construction en géométrie analytique***	"I. Descripción axiomática del espacio de Teichmüller y de sus variantes" (7-1 / 7-33; 19 Diciembre 1960 y 9 Enero 1961). "II. Generalidades sobre espacios anillados y espacios analíticos" (9-1 / 9-14; 16 Enero 1961). "III. Productos fibrados de espacios analíticos" (10-1 / 10-11; 23 Enero 1961). "IV. Formalismo general de los funtores representables" (11-1 / 11-28; 30 Enero 1961). "V. Fibrados vectoriales, fibrados proyectivos, fibrados en bandera" (12-1 / 12-15; 6 Febrero 1961). "VI. Estudio local de morfismos: gérmenes de espacios analíticos, platitud, morfismos simples" (13-1 / 13-13; 20 y 27 Febrero 1961). "VII. Estudio local de morfismos: elementos de cálculo infinitesimal" (14-1 / 14-27; 6 y 20 Marzo 1961). "VIII. Reporte sobre los teoremas de finitud de Grauert y Remmert" (15-1 / 15-10; 10 Abril 1961). "IX. Algunos problemas de módulos" (16-1 / 16-20; 17 y 24 abril 1961). "X. Construcción del espacio de Teichmüller" (17-1 / 17-20; 8 Mayo 1961). *Ejemplo de estrategia conceptual.* El objetivo consiste en construir un espacio analítico de representación universal ("espacio de Teichmüller") que clasifique a todas las demás curvas algebraicas sobre los espacios analíticos (7-8). Grothendieck procede a describir axiomáticamente las propiedades funtoriales (7-6) que debe verificar ese espacio, y condiciona teoremáticamente su existencia (global) a la existencia de una jerarquía escalonada (local) de adecuados funtores fibrantes ("funtores de Jacobi") que permitan controlar el número de automorfismos de las estructuras en juego (funtores rígidos) (7-32). A su vez, la explicitación de estas condiciones técnicas se consigue por medio de recubrimientos y acciones de grupo (7-18 / 7-21), cambios de base (7-2) y operaciones libres sobre los mismos funtores rígidos (7-27). Nos encontramos así ante una verdadera matemática en movimiento, una *matemática relativa* que, no obstante, permite encontrar ciertos invariantes universales ("espacio de Teichmüller") *debido a la variación misma* de los objetos matemáticos locales, a lo largo de una fina jerarquía de mediaciones que da lugar al objeto matemático global. [Se trata de un volumen entero de Grothendieck sobre **variable compleja** (!), desaprovechado y poco conocido hasta el momento. Deberá realizarse en el futuro un estudio mucho más profundo de estas exposiciones realizadas en el Seminario Cartan]

Los números remiten a *páginas* en los artículos de Grothendieck [1953], [1957] y a *secciones-páginas* en el conjunto de exposiciones [1961]

ALGUNAS ESTRATEGIAS EN LAS EXPOSICIONES DEL SEMINARIO CARTAN [1961]

- despejar ("dégager") un *mecanismo funtorial* general para el manejo de módulos, aplicado en particular al caso de la variable compleja
- despejar una "buena formulación" de problemas de módulos en el marco de los espacios analíticos
- enlazar propiedades de *proyectividad* con teoremas de existencia en ese marco (*espacio de Teichmüller*)
- acercar el marco de los esquemas (geometría algebraica) y el marco de las variedades holomorfas (geometría analítica), aprovechando en particular, en ambos casos, las propiedades cruciales de ciertos *elementos nilpotentes en anillos locales*.

ENCARNACIÓN –EN LO CONCRETO– DE LOS MÉTODOS GENÉRICOS DE GROTHENDIECK

- procesos de *ascenso* (funtorialidad general, problemáticas en la abstracción, marcos globales) y de *descenso* (proyectividad, módulos complejos, anillos locales, nilpotencia),
- *dialéctica de lo uno y lo múltiple* (acercamiento de marcos, funtorialidad específica de módulos, enlaces entre proyectividad y existencia)
- *estructuración jerárquica del saber matemático en niveles circulatorios*, donde se combinan la rica multiplicidad conceptual de cada objeto (o morfismo), la colección de funtores que permite medir la multiplicidad diferencial en cada nivel, y la colección de transformaciones (naturales) que permite reintegrar las marcas diferenciales encontradas.

MOMENTO NUCLEAR ESENCIAL

INICIOS AÑO 1955 - UNIVERSIDAD DE KANSAS
(DESPUÉS DE LA "CRISIS BRASILEÑA" DE 1954)

EL "GIRO HACIA LA GEOMETRÍA" PRODUCE EN POCOS MESES

FIBRADOS HOLOMORFOS SOBRE LA ESFERA DE RIEMANN
RIEMANN-ROCH GENERALIZADO (K-TEORÍA)
CATEGORÍAS ABELIANAS

Mayo 20
La Llave (= Clave) de los Sueños

[1987] *La Clef des Songes ou Dialogue avec le Bon Dieu*
[manuscrito, no publicado]

I. TODOS LOS SUEÑOS SON CREACIÓN DEL SOÑADOR (1-46) (§§1-16: el sueño y el conocimiento de sí mismo, descubrimiento del Soñador, la niñez, los sueños proceden del Soñador, instantes de verdad, la llave del gran sueño, la voz de la razón y la otra voz, actos de conocimiento y actos de fe, la voluntad de conocimiento, la chispa y la llama, trabajo y concepción, el ritmo de la creación, cuatro tiempos para un ritmo, ciclos de Eros, emoción y pensamiento).
II. DIOS ES EL SOÑADOR (47-79) (§§17-26: Dios es el Soñador, el conocimiento perdido, la increíble Buena Nueva, hermanos en el hambre, encuentro con el Soñador, preguntas prohibidas, reencuentro con Dios, solo existe un Soñador, el Creador y la Tela, Dios no se define ni se prueba, una nueva tabla de multiplicación).
III. EL VIAJE A MEMPHIS (1): EL ERRAR (80-136) (§§27-36: mis padres, esplendor de Dios, Rudi, cascada de maravillas, Dios por sana razón, reencuentros perdidos, el llamado, el giro, fe y misión, muerte, Dios habla en voz baja).
IV. ASPECTOS DE UNA MISIÓN (1): UN CANTO DE LIBERTAD (137-182) (§§37-46: impensable convergencia, el testimonio como llamado al descubrimiento de sí mismo, Eros o la potencia, el Ojo o el sentido, la visión, visión novadora como testimonio, alma y labor, el hombre como creador, creación y represión, libertad creadora y obra interior).
V. ASPECTOS DE UNA MISIÓN (2): EL CONOCIMIENTO ESPIRITUAL (183-268) (§§47-56: conocimiento inclusivo, belleza y contemplación, dolor y sombras, el alma de las cosas y el hombre sin alma, la mentalidad del rebaño, el uso de los Tiempos, creación y voz interior, creación y escucha, el árbol del bien y del mal, esprituralidad arcaica, ley, ignorancia, verdad y creación, resistencia y sufrimiento).
VI. EL VIAJE A MEMPHIS (2): SIEMBRAS PARA UNA MISIÓN (269-315) (§§57-66: el acto, separación, comienzo sin fin, esperanza, Tempestad, el hombre nuevo, superficie y profundidad, el llamado del silencio, el mensajero, travesía del desierto y revelación, siembras y cosechas, tareas y gestación).

ALGUNOS TEMAS ESCOGIDOS (PARTE I).

LOS SUEÑOS Y EL SOÑADOR. Primer sueño profundamente transformador: "reencuentro con mi «*alma*»", "diez años atrás" (escrito el 30 abril 1987) (1). "La historia de mi madurez hacia un conocimiento de mí mismo (...) se confunde con la historia de mi experiencia del sueño" (2). Sueño como "testigo *directo*, *fiel* y de finura incomparable" de la "vida profunda de la psiquis", "cuadro trazado por la mano de un maestro" (2-3). "Viaje al descubrimiento del *Soñador* (...) del Pintor (...) del *Ojo* (...) de la *Mano*" (4). "Entendí poco a poco que es Él quien crea cada uno de nuestros sueños (...) aparecemos como «soñadores», en realidad «soñados»" (4). "Fue en agosto 1982, seis años después de mi primer trabajo sobre el sueño, que tuvo lugar un segundo gran giro en mi relación con los sueños y el Soñador (...) comprendí que *todos* salen de la misma Mano" (6). "He anotado cerca de un millar de sueños, de los cuales he sabido agarrar el mensaje en trescientos o cuatrocientos" (6). "En todos sin excepción, a través de su prodigiosa diversidad, siento un mismo «toque», percibo un mismo *soplo*, que no tiene nada mecánico y que no viene de mí" (7). "Especie de durmiente, ¡despiértate!" (7). "Como un seno materno, el «gran sueño» nos presenta una leche tupida y sabrosa, buena para nutrir y vivificar el alma" (9). "Me obstinaba, cada vez, a volver a escribir, sentado en mi cama (...) hasta dos horas seguidas" (10). "El Soñador era un poco como un *hermano* mayor, travieso y benévolo, sin la menor complacencia pero al mismo tiempo de una inagotable paciencia" (18). Las "dos llaves" del gran sueño (hambre espiritual / acto de fe) son "indistinguibles" y conforman un "*acto completo*" – enlace creador de *yin* y *yang* (19). "Para todos los sueños mensajeros que me llegaron y que he sondado, necesité horas, y a veces días de trabajo, para agarrar el mensaje" (24). "La *emoción* (...) es el alma misma y el soplo del sueño" (43). Descripción de la primera gran revelación (mediados de octubre 1976) (44-46).

EL INTELECTO Y EL ESPÍRITU / LA RAZÓN Y LA FE. "El *alma* estaba hambrienta" (5). "La realidad espiritual es otra cosa (...) mis ojos solo comienzan ahora a abrirse a esa realidad" (5). "Con un retroceso de diez años, veo ahora claramente que esa «otra voz» es la que me aguijonea siempre hacia lo *esencial*, mientras que la voz «de la razón», del gran sentido común, intenta desviarme en todas las formas" (11). "Solo un *acto de fe* torna «eficaz» y actuante el acto de conocimiento", como la mano torna eficaz al escalpelo (14). "La fe en mis sueños, o por decirlo mejor, la fe en el Soñador, se ha decantado como la quintaesencia misma de la fe en lo que hay de mejor en mí – lo que me hace capaz de conocer, de amar, de crear con la mano, el espíritu y el corazón" (19). "En el par fe–conocimiento, la fe juega el papel *yang*, y «fecunda» el conocimiento, que juega el papel *yin*" (20). La llave (espíritu/fe) se introduce en la cerradura, pero la mano y el trabajo (intelecto/razón) abren la puerta – la "*chispa*" y el "fuego" desarrollan la obra (23). Lugar del trabajo ("*organización*", "*orden*", "*dinamización*", "*profundización*", "*penetración*" – "de la periferia hacia las profundidades"): buscar "la metamorfosis de una imagen amorfa en una viva realidad interior", donde se revela su "«evidencia», su viva sencillez" (25). Aspectos *yang* (más intelectual) y *yin* (más espiritual) del trabajo (26-28).

LA ESCUCHA Y LA VISIÓN. Años (1977-1987) de "superación de «*umbrales*» (...) de escucha intensa" (1). Dificultad de acceder a manifestaciones "ocultas" en las "capas profundas de la psiquis" (2). "Somos ciegos (...) pero hay en nosotros un *Ojo* que ve y una *Mano* que pinta" (3). Al entrar a una realidad espiritual, "los ojos terminarán por abrirse y podrán ver" (5). "La «otra voz» es la *misma* que te habla en el sueño, es la del Soñador, la de la Madre, te murmura muy bajo *dónde* se encuentra la leche verdadera, a la que aspira no tu superficie, sino tu profundidad" (12). "Cuando, bajo la impresión aún del sueño recién realizado, sabes escuchar la voz humilde del hambre, entonces, sin saberlo, estás girando una llave delicada y segura" (13). El *habla* (de alguien, de los sueños) como "*conocimiento*" (13). "Un estado de apertura, de rigor o de *verdad*" sirve de preludio a "un acto de percepción esencialmente espiritual, en cuyo instante el ojo espiritual en nosotros, que percibe y distingue lo verdadero y lo falso, se abre o se entreabre, *y ve*" (14). "El estado de verdad parcial sería el estado de silencio interior y de escucha, que nos permite distinguir claramente la *Palabra* del ruido circundante" (15). "Por poco que tendamos la oreja, nosotros, músicos-cantantes, podemos captar al vuelo los fragmentos desperdigados de un esplendor que nos supera" (32). "El trabajo tiene como efecto «cambiar nuestro ojo»" (39).

LAS SOMBRAS. Reencuentro con el "Otro", el "niño en mí" (1). "La inercia del alma se dobla con un *miedo* incoercible, profundamente escondido (...) *miedo de conocer* (...) *gran miedo de cambiar*" (8). "Las cosas esenciales son también las más delicadas y las menos «seguras» de todas – como vapores impalpables" (11). "Estabas ante una puerta cerrada y ¡hela milagrosamente abierta! Estabas en la negrura o la penumbra y ¡he ahí una irrupción de luz!" (12). "De un magma informe nace de repente un *orden*" (13). "Prácticamente todos los procesos y actos creativos tienen lugar (salvo raras excepciones) en el Inconsciente, al abrigo de la mirada" (17). "El «más allá» del que nadie habla nunca (...) de cosas delicadas y elusivas, cosas de la sombra y de la penumbra (...) escapa a las manos burdas de la razón, y a su red, el lenguaje" (23). "Es el momento más obscuro, más ignorado (...) el que es también el más decisivo, el *momento creador* entre todos" (35). "Los procesos creativos se realizan en la sombra" (40) – "desde las alturas hacia las profundidades, de la superficie al corazón" (42).

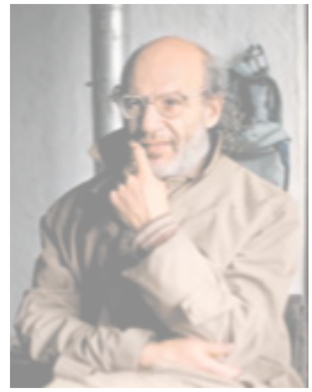
LA ERÓTICA. La "otra voz" (Soñador, Madre, hambre, alma) es también "el hambre de Eros, de Eros-que-quiere-conocer" (12). "En 1977 (...) descubrí con sorpresa (...) que la pulsión de conocimiento en mi trabajo matemático era de la misma naturaleza que la pulsión amorosa. Las palabras y las imágenes que me llegaban espontáneamente, queriendo evocar la pulsión del descubrimiento en su esencia, eran las palabras e imágenes del amor carnal que me soplaba Eros" (29-30). "Distingo tres niveles o planos del conocimiento: «*sensual*» o «*carnal*» («*erótico*») (...) «*intelectual*» o «*artístico*» (...) «*espiritual*» de esencia superior (...) con correspondencias íntimas y misteriosas entre ellos" – "el sueño se me manifestó poco a poco, a lo largo de los años, como el «*Intérprete*» por excelencia, que nos señalaba cómo «remontar» de las palabras de la carne y de la inteligencia humana, hacia la realidad original" (30). "Dos ciclos de Eros: el juego y la labor" – "ciclos arquetípicos que cabalgan entre sí" (35-38)

LA CREATIVIDAD (1): RITMOS Y TIEMPOS. "Parecería que hay un *arquetipo* común a todos los procesos creativos, a todos los procesos de descubrimiento (...) «modelo» eterno (...) Dios, Creador" (31). "Discierno, en los procesos de descubrimiento (...) «cuatro tiempos» que marcan el ritmo de la creación, como flujos y reflujos de una respiración infinita, suerte de medidas en un contrapunto sin comienzo ni final: tiempo largo (preparación), tiempo corto (concepción – o activación), tiempo largo (trabajo), tiempo corto (consecución)" (31). Cuatro tiempos para un ritmo: "sueño", "despertar", "trabajo", "brecha" (32-34).

LA CREATIVIDAD (2): LIBERTAD Y VOZ INTERIOR. "Mientras se obedece a una falsa «razón», no hay ni acto creador, ni obra novadora" (12). "Pregunta delicada: en qué medida los procesos y actos creadores (y sobre todo los «actos de conocimiento») que se realizan en la psiquis, y particularmente en sus estratos profundos, son obra de la psiquis misma, o de Dios actuando en nosotros" – "dos de mis sueños me dicen claramente que hay una parte de creatividad proveniente de la psiquis misma" (16). "El espíritu entra y penetra" a través de "capas o estratos sucesivos (...) sonda laboriosamente (...) atraviesa (...) persigue sin descanso su tenaz progresión hasta al fin tocar el *fondo* (...) y en ese momento adquiere nacimiento la cosa nueva – la imagen viva, encarnación de un conocimiento nuevo y verdadero" (26).

Los números remiten a *páginas* en el manuscrito [1987]

UN ESQUEMA DE TENSIONES EN
LA LLAVE DE LOS SUEÑOS


(1988)

ARQUETIPO

SOÑADOR

MANO – OJO

(UNO)

ASCENSO A LA REVELACIÓN

MUSICALIDAD

PROYECTIVIDAD

TIPOS DEL EROS

MANOS
SENSUALIDAD - SENSIBILIDAD

MULTITUD SUEÑOS **(millar)**

TIPOS DEL INTELECTO

OJOS
LENGUAJE - RAZÓN
ARTE - CIENCIA

(MÚLTIPLE)

DESCENSO A LA DEVELACIÓN

TIPOS DEL ESPÍRITU

SOPLOS
FE - CO/RAZÓN

RITMOS DE LA CREACIÓN

MOMENTOS CREADORES

ENTRONQUE *YANG* - *YIN*

TRABAJO DE ESCUCHA

REMONTAR A LO PROFUNDO

CAPAS - ESTRATOS - UMBRALES

OBSCURIDADES - SOMBRAS

Mayo 27

Diagramas de la creatividad en Grothendieck
Primer periodo (1950-1960)

----

(1) LA ARQUITECTÓNICA MATEMÁTICA

GERMINACIÓN
("COSECHAS")

1958
EL GIRO DEFINITIVO
(inicio de la Segunda Parte de este Seminario Grothendieck, 2015-II)
The cohomology theory of abstract algebraic varieties
(Conferencia Plenaria ICM, Edimburgo, 1958)

(B - C - G - K - L)

1957/1960
ALREDEDOR DE LA VARIABLE COMPLEJA
Técnicas de construcción en geometría analítica
Trabajos sobre fibraciones y espacios de holomorfas

(A - B - C - D - F - G - H - I)

1955
"EL GIRO HACIA LA GEOMETRÍA"
LOS SEGUNDOS MONUMENTOS MAYORES

Categorías abelianas (publ. 1957)
(B - F - J - K - L)

K-teoría (publ. 1958)
(B - C - G - J - K - L)

1953
LOS PRIMEROS MONUMENTOS MAYORES

Tesis Doctoral (publ. 1955)
(A - C - D - E - H - J - K)

Résumé (publ. 1956)
(A - C - D - E - F - J - K)

TOPOLOGÍA	ANÁLISIS FUNCIONAL	VARIABLE COMPLEJA	ÁLGEBRA
(A) evtlc	(D) espacios Hilbert/Banach	(G) Riemann-Roch clásico	(J) productos tensoriales
(B) haces	(E) espacios nucleares	(H) espacios de funciones holomorfas	(K) propiedades permanencia
(C) (no) separación	(F) aproximación	(I) esfera de Riemann	(L) co/homología

1950-1951
LOS GRANDES GÉRMENES
("SIEMBRAS")

CALIBRACIÓN DE FUERZAS
(# apariciones en los entornos de "germinación")

A (3)	D (3)	G (3)	J (4)
B (4)	E (2)	H (2)	**K (5)**
C (5)	F (3)	I (1)	L (3)

(2) LAS TENSIONES METODOLÓGICAS

DEL "EN SÍ" AL "EN OTRO" *inyección*

objeto particular | multiplicidad de objetos similares | categoría asociada

uno (nivel inferior) | *múltiple (nivel intermedio)* | *uno (nivel superior)*

DE LOS "TIPOS" AL "ARQUETIPO" concretos • • • ◊ abstracto

proyección

DE LO "ARTIFICIAL/SINGULAR" A LO "NATURAL/SUAVE"

las singularidades se suavizan en espacios generales
con equilibrios armónicos entre aritmética/álgebra/topología/análisis
(nuclearidad, holomorfía, hacificación, categorización)

DE LA "ESTRUCTURA" A LA "FORMA"

los objetos con *estructura externa* adicional
(aritmética, algebraica, topológica, analítica, etc.)
se subsumen en categorías cuya *forma interna* axiomática
se convierte en el objetivo esencial del conocimiento matemático

HACIA PROPIEDADES DE PERMANENCIA EN ENTORNOS NO SEPARADOS
(década 1960-1970)

espacio (geometría) : no enteramente determinado por puntos (separados)
emergencia de los TOPOS

tiempo (aritmética) : no enteramente determinado por enteros (separados)
emergencia de los ESQUEMAS

[todo esto se englobará en *Cosechas y Siembras* bajo la metáfora continua de la marea subiente]