

MÉTRIQUE DE SCHWARZSCHILD

L D

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Variétés, Tenseurs et Espace-temps	2
2.1. Variétés topologiques, Variétés différentiables	2
2.2. Tenseurs, champs de tenseurs, Métriques	5
3. Fibré tangent, connexion, géodésiques	8
3.1. Fibré Tangent, connexions	8
3.2. Géodésiques	14
4. Dérivée de Lie et champ de Killing	14
4.1. Dérivée de Lie	14
4.2. Champ de Killing	18
5. Métrique de schwarzschild	19
5.1. Motivation	19
5.2. Métrique de Schwarzschild	20
5.3. Décalage Spectral	20
5.4. Géodésiques de l'espace temps de Schwarzschild	23
6. Extension	30
6.1. Extension de Kruskal	32
6.2. Le diagramme de Kruskal	35
6.3. Horizon des évènements	40
7. Ouverture : Métrique de Reissner-Nordström	41
Références	42

1. INTRODUCTION

La relativité Générale est une théorie de la Gravitation développée par Albert Einstein . Elle a révolutionné notre vision de la nature, de l'espace et du temps ainsi que notre compréhension de la force de Gravitation. Cette théorie est née en 1915 après la découverte de la relativité restreinte en 1905 par Einstein Lorentz et Poincaré. Le phénomène de Gravitation, jusqu'alors décrit par la loi de l'attraction universelle de Newton, possède en relativité générale une interprétation liée à la courbure de l'espace temps due à la présence de corps massifs. La relativité Générale constitue aujourd'hui le fondement de la compréhension des trous noirs. La relativité Générale fait aussi partie du schéma standard du Big Bang.

Les équations d'Einstein constituent le noeud central de la relativité Générale car elles fournissent une formulation de la relation entre la géométrie d'un espace temps et les propriétés de la matière. Les solutions exactes de ces équations décrivent une géométrie particulière de l'espace temps. En particulier, la solution de Schwarzschild décrit la géométrie autour d'un objet sphérique statique comme une étoile. Le but de cette présentation sera de présenter cette solution et d'étudier la déformation de l'espace temps due à un objet décrit par cette solution.

Dans un premier temps, nous définirons la notion d'espace temps en introduisant les notions de variété et de métrique. Nous développerons ensuite des notions telles que les connexions et les géodésiques qui nous permettront par exemple d'étudier la déviation des rayons lumineux par des objets massifs. Nous étudierons ensuite la métrique de Schwarzschild et nous terminerons par une extension de cette métrique.

2. VARIÉTÉS, TENSEURS ET ESPACE-TEMPS

Le but de cette section est de définir les objets avec lesquels nous allons travailler. Nous commencerons par définir la notion de variété topologique, différentiable. Ensuite, nous étudierons une notion essentielle, généralisant la notion de forme multilinéaire : les tenseurs. Nous terminerons cette section en développant la notion de métrique Lorentzienne et riemannienne et d'espace temps.

2.1. Variétés topologiques, Variétés différentiables.

Notation 1. — On notera $H_m = \{x \in \mathbb{R}^m | x_m \geq 0\}$. H_m est le demi-espace défini par l'ensemble des vecteurs dont la m -ème coordonnée est positive.

Définition 2.1. Soit U un ouvert de H_m et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dira que h est différentiable sur U s'il existe un ouvert V de \mathbb{R}^m contenant U et une application $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable sur V telle que $g|_U = h$

Intuitivement, une variété est un objet qui est fait de "parties" qui ressemblent à des ouverts de \mathbb{R}^n , accolées de manière lisse. En d'autres termes, une variété ressemble localement à un ouvert de \mathbb{R}^n . Définissons à présent proprement cette notion.

Définition 2.2 (Variété Topologique). On dit qu'un ensemble M est une variété topologique de dimension m si M est munie d'une topologie séparée à base dénombrable d'ouverts et dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de H_m

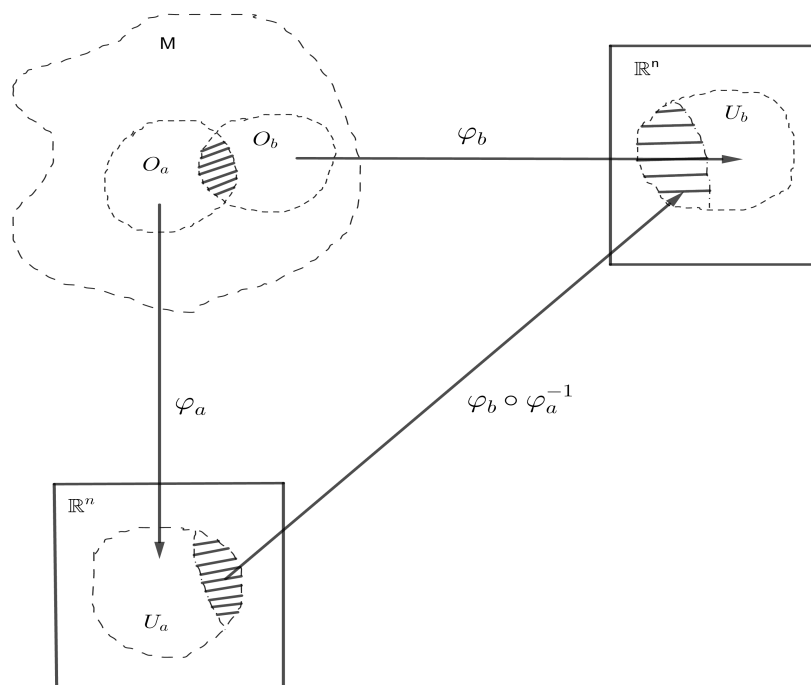
Remarque 2.1. La dimension m d'une variété dans cette définition a pour but de rappeler que localement, la variété est homéomorphe à \mathbb{R}^m .

Remarque 2.2. La définition d'une variété topologique fait appel aux demi-espace H_m afin de pouvoir parler d'une variété à bord.

Définition 2.3 (Carte et Atlas). — Soit M une variété topologique de dimension m . On appelle **carte** de M un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ un homéomorphisme de U sur un ouvert de H_m .
— Une famille de carte $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est appelée un **Atlas** si elle recouvre toute la variété.

Définition 2.4. Soit M une variété Topologique de dimension M . On note $Int(M)$ l'ensemble des points de la variété ayant un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Le bord de M noté $Fr(M)$ est l'ensemble $Fr(M) = M \setminus Int(M)$

Définition 2.5 (Variété différentiable). Soit M une variété topologique de dimension m . On dit que M est une variété différentiable si elle possède une atlas dénombrable $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est une application C^∞ de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$



Exemple 2.1 (La 2-Sphère S^2). *Considérons la 2-sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Montrons que la sphère S^2 est une variété de dimension 2.*

Considérons les six hémisphères $O_x^\pm = \{\pm x > 0\}$, $O_y^\pm = \{\pm y > 0\}$ et $O_z^\pm = \{\pm z > 0\}$. Chaque hémisphère est un ouvert de la sphère et il est homeomorphe à un disque unité de \mathbb{R}^2 noté \mathcal{D} . En effet, considérons par exemple O_x^+ . Soit $p^+ : O_x^+ \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $p^+(x, y, z) = (y, z)$. Alors p^+ est un homeomorphisme d'inverse $(y, z) \mapsto (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z)$. De même, on peut définir $p^- : O_x^- \rightarrow \mathcal{D}$ d'inverse $(y, z) \mapsto (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z)$. Les six hémisphères munis des applications p^+ et p^- constituent donc un atlas sur la sphère. Maintenant, considérons par exemple l'intersection des hémisphères O_x^+ et O_y^+ . Alors le changement de carte correspond à l'application $(y, z) \mapsto (x, z)$. Vu comme une application de \mathbb{R}^3 , le changement de carte correspond à une rotation, d'axe Ox et d'angle $\frac{\pi}{2}$, du plan yOz . Cette application est donc C^∞ et la sphère est une variété différentiable.

Remarque 2.3. *D'après la Remarque 2.1, une variété est un objet qui "ressemble localement à un ouvert de \mathbb{R}^n ". La notion de différentiabilité étant une notion locale, on a envie de définir la différentiabilité d'une fonction définie sur une variété en utilisant un atlas de M .*

Définition 2.6. — *Soit M, M' deux variétés différentiables (pas nécessairement de même dimension) et $f : M \rightarrow M'$ une application de M dans M' . On dit que f est différentiable sur M si pour toute carte (U, φ) de M et (V, ψ) de M' telles que $f(U) \cap V \neq \emptyset$, l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable de $\varphi(U) \cap f^{-1}(V)$ dans $\psi(V)$*

— *Soit M, M' deux variétés différentiables et $f : M \rightarrow M'$. On dit que f est un difféomorphisme si f est un homeomorphisme tel que $f^{-1} : M' \rightarrow M$ est différentiable.*

Définition 2.7. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une courbe C sur la variété différentiable M est une application $C : I \rightarrow M$ qui est C^∞ sur I .*

2.1.1. *Espace Tangent à Une variété.* A partir de maintenant, toutes les variétés considérées sont différentiables.

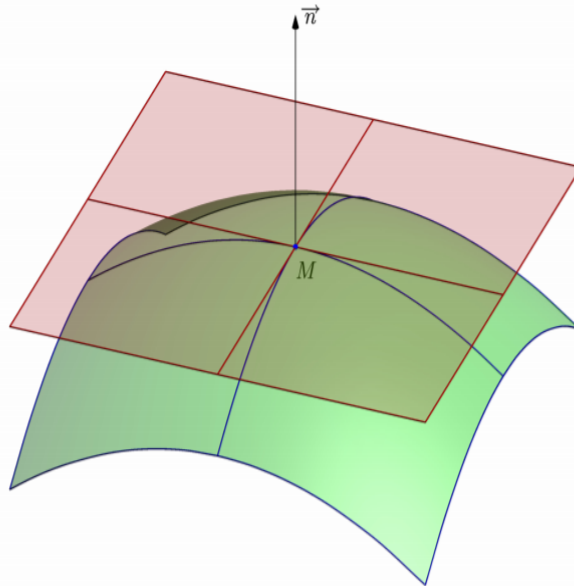
Définition 2.8 (Vecteur tangent à une variété en un point). *Soit M une variété différentiable et \mathcal{F} l'ensemble des fonctions C^∞ de M dans \mathbb{R} . Soit $p \in M$.*

Un vecteur tangent $v(p)$ à la variété M en p est une application $v(p) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) (linéarité) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F} \quad v(p)(af + g) = av(p)(f) + v(p)(g)$
- (2) (propriété de Leibniz) $\forall f, g \in \mathcal{F}, v(p)(fg) = f(p)v(p)(g) + v(p)(f)g(p)$

On appelle espace tangent en p à la variété M l'ensemble des vecteurs tangent en p à M . On note T_pM l'espace tangent et

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$



Remarque 2.4. *La figure ci-dessus représente un plan tangent à une surface*

Remarque 2.5. *$v(p)$ est une application linéaire ainsi, si h est la fonction constante nulle, on a $v(p)(h) = 0$. Si h est une fonction constante non nulle alors 2 implique que $v(p)(h^2) = 2hv(p)(h)$. Comme $v(p)(h^2) = hv(p)(h)$ par linéarité, on obtient que $v(p)(h) = 0$.*

Remarque 2.6. L'ensemble des vecteurs tangents correspond à l'ensemble des dérivations sur M

Proposition 2.9. Soit M une variété différentiable. Alors l'ensemble des vecteurs tangents en un point p à M peut être muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel

Démonstration. Si $v(p), w(p)$ sont deux vecteurs tangents en p à M on définit :

- $(v(p) + w(p))(f) = v(p)(f) + w(p)(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}$
- $(av(p))(f) = av(p)(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$

On vérifie aisément que ces deux lois munissent $T_p M$ d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. □

Théorème 2.10. Soit M une n -Variété différentiable et $p \in M$. Alors L'espace tangent $T_p M$ en p est un espace vectoriel de dimension n .

Démonstration. Soit (U, φ) une carte de M . Si $f \in \mathcal{F}$ alors $f \circ \varphi^{-1}$ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Soit (X_1, \dots, X_n) telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\} X_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$(1) \quad X_i(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

Montrons que la famille (X_1, \dots, X_n) est une famille libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k = 0$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On définit $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_i(p) = (0, \dots, x_i, \dots, 0)$ si $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ où (U, φ) est une carte de l'atlas telle que $p \in U$.

Alors $f_i \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, x_i, \dots, 0)$. Dès lors, en évaluant l'équation 2 en f_i , on obtient $\lambda_i = 0$.

Finalement, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\lambda_i = 0$ ce qui montre la liberté de la famille (X_1, \dots, X_n) .

Montrons que (X_1, \dots, X_n) est une famille génératrice.

Soit $v(p) \in T_p M$. $f \circ \varphi^{-1}$ est une application d'un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . Posons $F = f \circ \varphi^{-1}$ et $p = \varphi^{-1}(a)$. On en déduit que

$$(3) \quad F(x) = F(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) H_i(x)$$

Où H_i est une fonction \mathcal{C}^∞ telle que $H_i(a) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$. On pose .

On obtient alors que

$$(4) \quad f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i \circ \varphi - x_i \circ \varphi(p)) H_i \circ \varphi$$

En composant par v_p , en utilisant le fait que $v_p(\text{cste}) = 0$, la linéarité de v_p , et la propriété de Leibniz, on obtient

$$(5) \quad v(p)(f) = \sum_{i=1}^n (x_i \circ \varphi - x_i \circ \varphi(p))|_p v(p)(H_i \circ \varphi) + v(p)(x_i \circ \varphi - x_i \circ \varphi(p)) H_i(\varphi(p))$$

On en déduit que

$$(6) \quad v(p)(f) = \sum_{i=1}^n v(x_i \circ \varphi - x_i \circ \varphi(p)) X_i(f)$$

Car $X_i(f) = H_i(\varphi(p))$.

On a donc bien montré que $v(p)$ est combinaison linéaire de $(X_1(f), \dots, X_n(f))$. Donc cette famille est une base de $T_p M$ et on a bien $\dim(T_p(M)) = n$ □

Remarque 2.7. Soit C une courbe sur la variété M . Soit $p = C(t_0) \in C(\mathbb{R})$. On note

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto T(f) = (f \circ C)'(t_0)$$

D'après la preuve du théorème 2.10, on a

$$(7) \quad T(C)(f) = \sum_{i=1}^n T(x_i \circ \varphi) X_i(f) = \sum_{i=1}^n (x_i \circ \varphi \circ C)'(t_0) X_i(f)$$

On remarque que $\gamma = \varphi \circ C$ est une courbe de \mathbb{R}^n . Si on note γ_i l'application i -ème coordonnée, on a :

$$(8) \quad T(C)(f) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t_0) X_i(f)$$

Définition 2.11. On appelle *champ de vecteur tangent* sur la variété M une application $v : M \rightarrow TM$ telle que $\forall p \in M, v(p) = v(p) \in T_p M$

Remarque 2.8. Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors l'application $v(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(f)(p) = v(p)(f)$ est une fonction sur M

Définition 2.12. On dit qu'un champ de vecteur v est lisse si $\forall f \in \mathcal{F}$, l'application $v(f)$ associée à v est C^∞

Définition 2.13. On appelle **groupe de difféomorphisme à un paramètre** toute application de $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \phi_t : M \rightarrow M$ est un C^∞ difféomorphisme de M dans M et $\forall s, t \in \mathbb{R}, \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$

Remarque 2.9. — On a $\phi_0 \circ \phi_0 = \phi_0$. Donc en composant de part et d'autre de l'égalité par ϕ_0^{-1} , on obtient que $\phi_0 = id$.
 — Soit $p \in M$. D'après la définition 2.13 l'application $\phi(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ définie par $\phi(p)(t) = \phi_t(p)$ est une courbe C^∞ sur la variété M . D'après la remarque 2.7 la dérivée de $\phi(p)$ en 0 est un vecteur tangent en p à la variété M . Le champ de vecteur qui à $p \in M$ associe ce vecteur tangent est appelée **Champ de vecteur qui génère ϕ**
 — Réciproquement, étant donnée v un champ de vecteur lisse on peut construire un groupe de difféomorphismes à un paramètre associé à v . En effet, soit $p \in M$. On cherche une famille de courbe telle qu'il existe une seule et unique courbe passant par un point $p \in M$ donné et telle que le vecteur tangent en p est v_p . On remarque que si γ est une courbe vérifiant le système

$$(9) \quad \begin{cases} T(\gamma) = v(\gamma) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

alors γ passe par p et a v_p pour vecteur tangent en p . Ceci revient à dire que si on choisit une carte (U, φ) comme dans la preuve du théorème 2.10

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma'(t) = v(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

Un tel système ayant une unique solution, on peut donc définir une famille de courbe associée au champ de vecteur v . On note $(\phi_t)_t$ une telle famille et on définit $\phi_t(p)$ comme la valeur en t de l'unique courbe de cette famille passant par p .

2.2. Tenseurs, champs de tenseurs, Métriques.

Définition 2.14. Soient (k, l) un couple d'entiers naturels. Un tenseur de type (k, l) sur un \mathbb{R} -espace vectoriel V est une application multilinéaire

$$(11) \quad T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs de type (k, l) est noté $\mathcal{T}(k, l)$

Remarque 2.10. — Un tenseur de type $(0, 1)$ est une application linéaire.

— $\mathcal{T}(k, l)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n^{k+l} . En effet, comme une application linéaire ou bilinéaire, un tenseur est totalement déterminé par ses valeurs sur les vecteurs de la base. L'ensemble de toutes les valeurs qu'un tenseur peut prendre sur les vecteurs de la base correspond à l'ensemble de toutes les applications d'un ensemble de $k+l$ éléments dans un ensemble de n éléments si V est un espace vectoriel de dimension n .

Définition 2.15 (Contraction d'un tenseur de type (k, l)). Soit $(v_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base de V et $(v_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ la base duale correspondante. On appelle contraction par rapport à la i -ème et j -ième coordonnée l'application suivante :

$$(12) \quad \begin{aligned} C : \mathcal{T}(k, l) &\rightarrow \mathcal{T}(k-1, l-1) \\ T &\mapsto CT = \sum_{i=1}^n T(\dots, \underbrace{v_i^*}_{i\text{-ème}}, \dots, \underbrace{v_j}_{j\text{-ème}}, \dots) \end{aligned}$$

Définition 2.16. Soit $T \in \mathcal{T}(k, l)$, $T' \in \mathcal{T}(k', l')$. On appelle produit extérieur de T et T' le tenseur de type $(k + k', l + l')$, noté $T \otimes T'$ et défini pour tout $(v_i)_{i \in \{1, \dots, l + l'\}}$, $(u_i^*)_{i \in \{1, \dots, k + k'\}}$ par

$$(13) \quad T \otimes T'(u_1^*, \dots, u_{k+k'}^*, v_1, \dots, v_{l+l'}) = T(u_1^*, \dots, u_k^*, v_1, \dots, v_l)T'(u_{k+1}^*, \dots, u_{k+k'}^*, v_{l+1}, \dots, v_{l+l'})$$

Remarque 2.11. — Soit $(u_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base de V et $(u_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ la base duale associée. Alors on peut montrer que la famille $(u_{k_1}^* \otimes \dots \otimes u_{k_p}^* \otimes u_{l_1} \otimes \dots \otimes u_{l_s} | k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_s \in \{1, \dots, n\})$ est une base de $\mathcal{T}(k, l)$.

— Un tenseur T de type $\mathcal{T}(k, l)$ peut donc s'écrire

$$(14) \quad T = \sum_{k_1, \dots, l_s=1}^n T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_p} u_{k_1}^* \otimes \dots \otimes u_{l_s}$$

avec $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_p} \in \mathbb{R}$.

Définition 2.17. Un champ de tenseur sur une variété M est une application qui à chaque $p \in M$ associe un tenseur sur $T_p M$.

Définition 2.18. Soit M une variété et $p \in M$. On appelle métrique un tenseur de type $(0, 2)$ sur $T_p M$ (i.e une application $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$) qui vérifie les propriétés suivantes :

— g est symétrique : $\forall v_1, v_2 \in T_p M, g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$

— g est non dégénérée : $\forall v_1 \in T_p M, [(\forall v_2 \in T_p M, g(v_1, v_2) = 0) \implies v_1 = 0]$

Une métrique sur une variété est la donnée en chaque point p de la variété d'une métrique sur $T_p M$

Remarque 2.12. Une métrique est donc une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. D'après le théorème de Sylvester une forme quadratique de rang $0 \leq r \leq n$ est équivalente à une forme $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ si $x = (x_1, \dots, x_r)$. Le couple $(p, r - p)$ correspondant au nombre de signes plus et de signes moins est unique et est appelé SIGNATURE de la forme quadratique. Si la signature de la forme quadratique est $(n, 0)$ on dit que la forme est DÉFINIE POSITIVE.

A partir de maintenant, désignera par "métrique" un champ de tenseur de type $(0, 2)$ sur une variété M de dimension n . Si g est une métrique alors on peut écrire $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j} dx_i \otimes dx_j$. Normalement, une métrique devrait avoir trois composantes ; une pour le point p de la variété et les deux autres pour les vecteurs de $T_p(M)$ que prend en argument la métrique. On voit alors que $\forall i, j, g_{i,j}$ est une fonction sur la variété. Dans la suite, on notera par abus $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j} dx_i \otimes dx_j$ pour parler de l'application g évaluée en un point $p \in M$.

Définition 2.19. Considérons $M = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors $g = -\frac{1}{t^4} dt \otimes dt + dx \otimes dx$ est une métrique sur M .

De même, si on considère $M = \mathbb{R}^2$, $g = -x^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx$ est une métrique sur M appelée métrique de RINDLER.

Définition 2.20. — Une variété différentiable M de dimension n est dite RIEMANIENNE si elle est munie d'une métrique g définie positive.

— Une variété différentiable M de dimension n est dite LORENTZIENNE si elle est munie d'une métrique de type $(n-1, 1)$.

Exemple 2.2. L'espace temps de Minkowski $(M, g) = (\mathbb{R}^{n+1}, m)$ où

$$m = -dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$$

est une variété Lorentzienne.

Définition 2.21. Soit (M, g) une variété Lorentzienne, $p \in M$ et $X \in T_p(M)$. On dit que X est

(1) un vecteur de type espace si $g(X, X) > 0$

(2) un vecteur de type temps si $g(X, X) < 0$

(3) un vecteur de type lumière si $g(X, X) = 0$

Exemple 2.3. Dans l'espace temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+n}, m) , un vecteur $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ est de type

— espace si $|t| < \|x\|$

— temps si $|t| > \|x\|$

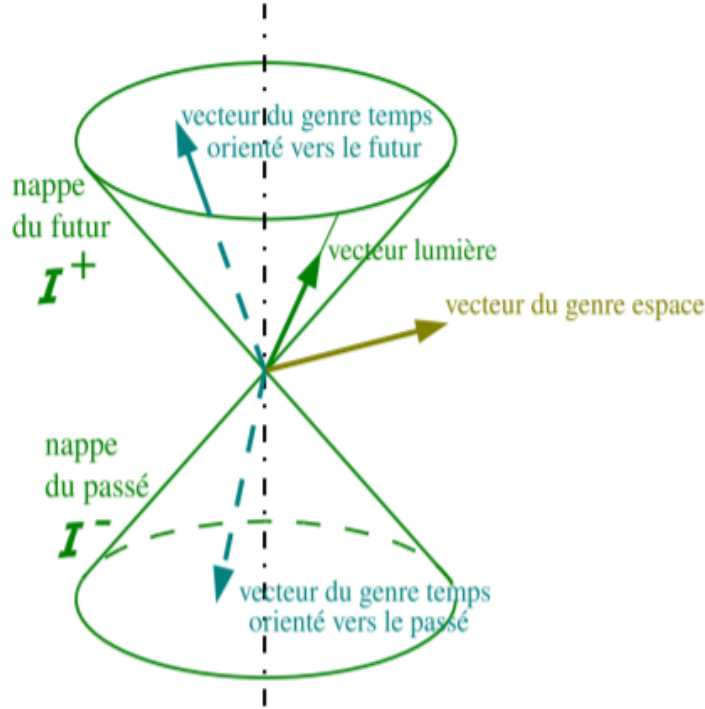
— lumière si $|t| = \|x\|$

Si $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x sur \mathbb{R}^n .

Définition 2.22. Soit (M, g) une variété Lorentzienne, I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de M . On dira que :

- (1) γ est de type TEMPS si : $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0 \forall t \in I$
- (2) γ est de type ESPACE si : $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \forall t \in I$
- (3) γ est de type LUMIÈRE si $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0 \forall t \in I$

Remarque 2.13. Si (M, g) est une variété Lorentzienne et $T_p(M)$ l'espace tangent en un point p , on appelle cône de lumière l'ensemble $I_p = \{v \in T_p(M) | g(v, v) = 0\}$. Le mot cône vient du fait que si $v \in I_p$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v \in I_p$. Le cône de lumière correspond donc à l'ensemble des vecteurs de type lumière. On représente le cône sur la figure suivante :



Le cône de lumière sépare les vecteurs du genre temps des vecteurs du genre espace. Les vecteurs du genre temps sont à l'intérieur du cône tandis que ceux du genre espace sont à l'extérieur. Prenons un espace temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Alors $v = (t, x, y, z) \in I_p$ si et seulement si $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ou $t = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On voit dans cet exemple que le cône de lumière a deux composantes connexes. Dans le cas général, le cône isotrope possède aussi deux composantes connexes et convient d'en noter une I_p^+ et l'autre I_p^- . Les vecteurs situés à l'intérieur de la composante I_p^+ seront appelés vecteurs orientés vers le futur et ceux de I_p^- orientés vers le passé.

Définition 2.23. Soit (M, g) une variété de dimension n . Soit $H \subseteq M$. On dit que H est une Hypersurface de M si H est une sous-variété de M de dimension $(n - 1)$.

Exemple 2.4. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r telle que $\forall p \in M, df(p) \neq 0$. Alors les ensembles de niveau de f sont des hypersurfaces de M .

Remarque 2.14. Si H est une hypersurface de M , on peut considérer la métrique g induite sur H par M c'est à dire que $\forall p \in H$ et tout $X, Y \in T_p(H)$ (on a $p \in M$ et $X, Y \in T_p(M)$) on définit :

$$g(X, Y) = g(X, Y)$$

En tant que variété, H a une dimension $n - 1$ donc $T_p(H)$ est un hyperplan de M . On peut donc trouver N un champ de vecteur normal à M dans le sens où si X est un champ de vecteur sur M , on a :

$$g(X, N) = 0$$

Définition 2.24. Soit (M, g) une variété de dimension n et H une hypersurface de M . Soit N un champ de vecteur normal sur M .

- (1) Si N est de type espace, on dit que H est une hypersurface de type TEMPS

(2) Si N est de type temps, on dit que H est une hypersurface de type ESPACE

(3) Si N est de type lumière, on dit que H est une hypersurface de type LUMIÈRE

Exemple 2.5. Soit (\mathbb{R}^{1+n}, m) l'espace temps de Minkowski. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\{t = a\}$ est une hypersurface en tant que courbe de niveau de la première projection. Le vecteur $u = (-1, 0, \dots, 0)$ est un vecteur normal à la surface et $g(u, u) = -(-1^2) + 0^2 + \dots + 0^2 < 0$. Donc $\{t = a\}$ est une Hypersurface de type espace. De même on peut montrer que $\{x_1 = a\}$ est une hypersurface de type temps et $\{t + x_1 = a\}$ est une hypersurface de type lumière

Définition 2.25. On appelle ESPACE-TEMPS une variété Lorentzienne différentiable de dimension 4.

Maintenant qu'on a introduit un cadre géométrique (M, g) , on peut énoncer le premier postulat de la physique à la base de la théorie de la relativité. Ce postulat fait appel à la notion de géodésique, définie en 3.11 :

"Les photons sont décrits par des géodésiques de type lumière."

"Les courbes représentant la trajectoire d'un point matériel sont des courbes du genre temps"

Définition 2.26. On appelle ligne d'univers toute courbe γ représentant la trajectoire d'un point matériel.

3. FIBRÉ TANGENT, CONNEXION, GÉODÉSQUES

3.1. Fibré Tangent, connexions.

Définition 3.1. Soit M une m -variété. On appelle fibré tangent, et on note TM l'ensemble

$$(15) \quad TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

où $T_p(M)$ est l'espace tangent à la variété M au point p .

Remarque 3.1. — Si M est une m -variété. Alors l'espace tangent $T_p(M)$ est un espace vectoriel de dimension m d'après 2.10. On peut définir la projections $\pi : TM \rightarrow M$ qui envoie $T_p(M)$ sur M . La préimage d'un point $p \in M$ est alors un m -plan de \mathbb{R}^n qu'on appelle fibre.

— Étant donné une carte (U, ϕ) sur M ($\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$), le fibré tangent à U est l'ensemble $TU = \{(a, u) | a \in U, u \in T_a(U)\} \subset TM$. L'application :

$$(16) \quad \begin{aligned} T(\phi) : TU &\rightarrow V \times \mathbb{R}^m \\ (a, f) &\mapsto (\phi(a), (\phi \circ \gamma)'(0)) \end{aligned}$$

est une bijection. On peut munir TM d'une topologie pour laquelle les applications $T(\phi)$ sont des cartes. Le fibré tangent peut donc être muni d'une structure de variété de dimension $2m$ si M est de dimension m .

— Soit M est une m - sous-variété de \mathbb{R}^n . Soit $p \in M$, et (U, ψ) une carte de M telle que $p \in U$. On définit une base de l'espace tangent $(e_1(p), \dots, e_m(p))$ par $e_i(p) = d\psi^{-1}(\psi(p))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ où $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est le i -ème vecteur de la base canonique. L'application $(p, v_1, \dots, v_m) \rightarrow \sum_{i=1}^m e_i(p)v_i$ permet d'identifier $M \times \mathbb{R}^m$ avec $T(M)$

Remarque 3.2. Dans la partie précédente, nous avons défini la notion de variété et de champ de vecteur sur une variété. On aimerait maintenant trouver une manière de dériver un champ de vecteur.

Soit V un champ de vecteur sur une variété. On sait qu'il existe des fonctions v_1, \dots, v_m telles que $V(p) = \sum_{i=1}^m v_i e_i$. Si l'on note $w[v_i]$ la dérivée directionnelle de la fonction v_i au point p alors on obtient une manière très naturelle de dériver un champ de vecteur. En effet, on peut poser :

$$(17) \quad \nabla_w V = \sum_{i=1}^m w[v_i] e_i(p)$$

On voit que cette définition dépend du choix de la base de l'espace tangent en p . Étudions l'effet d'un changement de base sur la valeur de $\nabla_w V$.

Soit (e'_1, \dots, e'_m) un base de l'espace tangent $T_p(M)$. Notons ∇^0 la dérivation dans la base précédente et ∇ la dérivation dans cette base. Alors :

$$(18) \quad V = \sum_{i=1}^m v'_i e'_i$$

On a d'un part

$$(19) \quad \nabla_w V = \sum_{i=1}^n d(v'_i)(w)e'_i$$

et d'autre part :

$$(20) \quad \nabla_w^0 V = \sum_{i=1}^m \nabla_w^0(v'_i e'_i) = \sum_{i=1}^m d(v'_i)(w)e'_i + v'_i \nabla_w^0(e'_i)$$

On voit donc bien que les deux quantités définies ∇, ∇^0 sont égales si et seulement si $\sum_{i=1}^m v'_i \nabla_w^0 e'_i = 0$ ce qui implique que

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$ et $\forall w \in T_p(M)$, on a $\nabla_w^0(e'_i)$ est nul donc les composantes de e'_i sont constantes dans la base (e_1, \dots, e_m) . Finalement on voit que cette définition dépend de la base et qu'on définit en général deux opérateurs de dérivations différents. Cela nous amène à la notion de Connexion.

Définition 3.2. Une connexion ∇ sur une variété M est une application qui à un champ de vecteur V associe l'application $\nabla V : TM \rightarrow TM$ ($\nabla V(p, w) = \nabla_w V(p)$) telle que ∇V est C^∞ par rapport à la première variable et C^∞ linéaire par rapport à la deuxième variable et vérifie la condition suivante :

Pour toute fonction f à valeurs réelles et tout vecteur w :

$$(21) \quad \nabla_w(fV) = f\nabla_w V + df(w)(V)$$

Définition 3.3. Soit M une m -variété et (e_1, \dots, e_m) une base de l'espace tangent au point $p \in M$. On a :

$$(22) \quad \nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k = \Gamma(e_i, e_j)$$

Les Γ_{ij}^k sont appelés les symboles de Christoffel du système de coordonnées relativement à la connexion ∇ .

Remarque 3.3. Soit ∇^0 la connexion définie dans la remarque 3.2. Si ∇ est une autre connexion sur le fibré. On note

$$V = \sum_{i=1}^m v_i e_i$$

$$(23) \quad \nabla_w V = \sum_{j=1}^m \nabla_w(v_j e_j) = \sum_{j=1}^m d(v_j)(w)e_j + \sum_{j=1}^m v_j \nabla_w(e_j) = \sum_{j=1}^m d(v_j)(w)e_j + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{e_j} e_i$$

On a donc :

$$(24) \quad \nabla_w V = \sum_{j=1}^m d(v_j)(w)e_j + \sum_{i,j} v_j w_i \Gamma(e_i, e_j)$$

On note $\Gamma(w, V) = \sum_{i,j} v_j w_i \Gamma(e_i, e_j)$. $\Gamma(., .)$ est donc une application bilinéaire. On peut donc écrire :

$$(25) \quad \nabla_w V = \nabla_w^0 V + \Gamma(w, V)$$

Proposition 3.4 (Transport parallèle). Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent de M une m -variété. Soit γ une courbe paramétrée de M et $v \in T_{\gamma(0)}(M)$. Si V est un champ de vecteurs, on note $t \rightarrow V(t) = V \circ \gamma(t)$. Alors le problème de Cauchy :

$$(26) \quad \begin{cases} \nabla_{\gamma'(t)} V(t) = 0 \\ V(0) = v \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_m) un champ de repère local. On note ∇_0 la connexion définie dans la remarque 3.2 On a

$$(27) \quad V(t) = \sum_{i=1}^m v_i(t)e_i$$

Donc par la remarque 3.3

$$(28) \quad \nabla_{\gamma'(t)}V(t) = \nabla_{\gamma'(t)}^0V(t) + \Gamma(\gamma'(t), V(t)) = \sum_{i=1}^m v_i'(t)e_i + \sum_j v_j\Gamma(\gamma'(t), e_j)$$

Comme $\nabla_{\gamma'(t)}V(t)$ est nul et en développant $\Gamma(\gamma'(t), e_j)$ on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre. Elle admet donc une unique solution. \square

Définition 3.5. Avec les même notations que la proposition 3.4 on appelle transport parallèle de v le long de γ l'unique solution de l'équation 26.

Définition 3.6. Soit V, W deux champs de vecteurs sur une variété M munit de la connexion ∇^0 de la remarque 3.2. On appelle Crochet de Lie de V, W , noté $[V, W]$, le champ de vecteurs défini de la manière suivante :

$$(29) \quad [V, W] = \nabla_V^0 W - \nabla_W^0 V$$

Remarque 3.4. Notons $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ un système de coordonnées. On rappelle que cette famille est une famille de fonctions qui en un point p forment une base de l'espace tangent. On peut alors écrire

$$(30) \quad V = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$(31) \quad W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On a alors :

$$(32) \quad [V, W] = \sum_{i,j} (v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Si ∇^0 est la connexion introduite dans la remarque 3.2, on vérifie facilement qu'on a :

$$(33) \quad [V, W] = \nabla_V^0 W - \nabla_W^0 V$$

Si ∇ est une autre connexion on a :

$$(34) \quad \nabla_V W = \sum_{i=1}^m v_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W = \sum_{i,j} v_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (w_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + w_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

De la même manière, on obtient

$$(35) \quad \nabla_W V = \sum_{i,j} w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

En soustrayant les équations 35 et 34, on obtient :

$$(36) \quad \nabla_V W - \nabla_W V = [V, W] + \sum_{i,j} (v_i w_j - v_j w_i) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La somme dans le membre de droite de l'équation illustre bien le fait qu'à priori ∇ et ∇^0 sont deux connexions différentes.

Définition 3.7 (Torsion d'une connexion). Étant donnée ∇ une connexion, on appelle torsion de la connexion la fonction T définie par :

$$(37) \quad T(v, w) = \sum_{i,j} (v_i w_j - v_j w_i) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Remarque 3.5. L'application T est antisymétrique. On peut étendre la notion de connexion à tout type de tenseur. Ceci nous mène à la définition suivante

Définition 3.8 (Dérivation d'une métrique). Soit g une métrique sur une variété M . et ∇ une connexion sur M . Alors on définit $\nabla_w g(V, Z)$ de la manière suivante :

$$(38) \quad \nabla_w g(V, Z) = d(g(V, Z))(w) - g(\nabla_w V, Z) - g(V, \nabla_w Z)$$

Remarque 3.6. Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locale. Soit g une métrique sur M . Alors on peut écrire $g = \sum_{i,j} a_{i,j} dx_i \otimes dx_j$. Prenons $V = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Z = \sum_i z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et w un vecteur de l'espace tangent. On a :

$$(39) \quad g(V, Z) = \sum_{i,j} a_{i,j} v_i z_j$$

D'où, on peut écrire :

$$(40) \quad d(g(V, Z))(w) = \sum_{i,j} d(a_{i,j})(w) v_i z_j + a_{i,j} d(v_i)(w) z_j + a_{i,j} v_i d(z_j)(w)$$

Ensuite, :

$$(41) \quad \nabla_w V = \sum_i \left(\sum_j w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

D'où :

$$(42) \quad g(\nabla_w V, Z) = \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k w_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) z_j$$

Or :

$$(43) \quad d(v_i)(w) = \sum_k w_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

On en déduit que :

$$(44) \quad \sum_{i,j} a_{i,j} d(v_i)(w) z_j = \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k w_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) z_j = g(\nabla_w V, Z)$$

Finalement, on peut écrire que :

$$(45) \quad d(g(V, Z))(w) = \sum_{i,j} d(a_{i,j})(w) v_i z_j + g(\nabla_w V, Z) + g(V, \nabla_w Z)$$

Et donc :

$$(46) \quad \nabla_w g(V, Z) = \sum_{i,j} d(a_{i,j})(w) v_i z_j + g(\nabla_w V, Z) + g(V, \nabla_w Z) - g(\nabla_w V, Z) - g(V, \nabla_w Z) = \sum_{i,j} d(a_{i,j})(w) v_i z_j$$

On peut donc exprimer la dérivée covariante de la métrique dans le système de coordonnées locales et on a :

$$(47) \quad \nabla_w g = \sum_{i,j} \nabla_w (a_{i,j}) dx_i \otimes dx_j$$

Définition 3.9. Une métrique est dite parallèle pour une connexion ∇ si et seulement si : $\nabla g = 0$

Exemple 3.1. Soit g une métrique sur une variété M muni d'une connexion ∇ . Supposons que g est parallèle. On a pour tout champs de vecteurs V, W, Z :

$$d(g(W, Z))(V) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z)$$

Si cette relation est vérifiée alors la métrique g est parallèle.

Proposition 3.10 (Connexion de Levi-Civita). Soit M une variété muni d'une métrique g . Alors il existe une unique connexion ∇ telle que :

— ∇ est sans torsion

— La métrique g est parallèle pour cette connexion

Cette connexion est appelée connexion de LEVI-CIVITA.

Démonstration. Supposons l'existence d'une telle connexion. Alors la métrique est parallèle signifie que pour tout champ de vecteur V, W, Z on a d'une part

$$d(g(W, Z))(V) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z)$$

et d'autre part la métrique est sans torsion donc :

$$g([V, W] - \nabla_V W - \nabla_W V, Z) = 0$$

Donc on a :

$$g(\nabla_V W, Z) - g(\nabla_W V, Z) = g([V, W], Z)$$

En intervertissant les rôles de V, W, Z , on a :

$$d(g(V, Z))(W) = g(\nabla_W V, Z) + g(V, \nabla_W Z) \text{ et } d(g(V, W))(Z) = g(\nabla_Z V, W) + g(V, \nabla_Z W)$$

On a aussi :

$$g(\nabla_V Z, W) - g(\nabla_Z V, W) = g([V, Z], W) \text{ et } g(\nabla_W Z, V) - g(\nabla_Z W, V) = g([W, Z], V)$$

On en déduit que :

$$g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g(W, \nabla_V Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - g(\nabla_Z V, W)$$

Donc

$$g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - d(g(V, W))(Z) + g(V, \nabla_Z W)$$

Ensuite,

$$g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - d(g(V, W))(Z) - g([W, Z], V) + g(\nabla_W Z, V)$$

Ensuite on a :

$$g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - d(g(V, W))(Z) - g([W, Z], V) + d(g(V, Z))(W) - g(\nabla_W V, Z)$$

Dès lors, on peut écrire :

$$g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - d(g(V, W))(Z) - g([W, Z], V) + d(g(V, Z))(W) + g([V, W], Z) - g(\nabla_V W, Z)$$

Finalement, on en déduit que :

$$2g(\nabla_V W, Z) = d(g(W, Z))(V) - g([V, Z], W) - d(g(V, W))(Z) - g([W, Z], V) + d(g(V, Z))(W) + g([V, W], Z)$$

Cette connexion s'exprime donc en fonction de la métrique et des crochets de Lie de champs de vecteurs. On en déduit qu'elle est unique.

On prouve maintenant l'existence d'une telle connexion. Choisissons une connexion quelconque ∇ . On notera ∂_i pour $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Prenons (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées. Soit x_i, x_j, x_k . On a

$$(48) \quad \nabla_{\partial_i} g(\partial_j, \partial_k) = g(\nabla_i \partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k) = \sum_m \Gamma_{ij}^m g(\partial_m, \partial_k) + \Gamma_{ik}^m g(\partial_j, \partial_m)$$

En intervertissant les rôles de i, j, k , on obtient.

$$(49) \quad \nabla_{\partial_j} g(\partial_i, \partial_k) = \sum_m \Gamma_{ji}^m g(\partial_m, \partial_k) + \Gamma_{jk}^m g(\partial_i, \partial_m)$$

et :

$$(50) \quad \nabla_{\partial_k} g(\partial_i, \partial_j) = \sum_m \Gamma_{ki}^m g(\partial_m, \partial_j) + \Gamma_{kj}^m g(\partial_i, \partial_m)$$

En sommant les équations 48 et 49 et en soustrayant l'équation 50, on obtient :

$$(51) \quad 2 \sum_m g(\partial_m, \partial_k) \Gamma_{ij}^m = (\nabla_{\partial_i} g(\partial_j, \partial_k) + \nabla_{\partial_j} g(\partial_i, \partial_k) - \nabla_{\partial_k} g(\partial_i, \partial_j))$$

L'équation 51 peut s'écrire sous la forme $2L_j M = B_k$ où M est la matrice de g , $(L_j)_{i,k} = \Gamma_{ij}^k$ et $(B_j)_{i,k} = \nabla_{\partial_i} g(\partial_j, \partial_k) + \nabla_{\partial_j} g(\partial_i, \partial_k) - \nabla_{\partial_k} g(\partial_i, \partial_j)$. La métrique g étant une forme bilinéaire non dégénérée, on en déduit que M est inversible. Il suffit alors de multiplier à gauche et à droite par M^{-1} pour obtenir les symboles de Christoffel.

Pour terminer, on définit la connexion en utilisant les cartes et les symboles de christoffel obtenus avec l'équation 51. Les équations 48, 49, 50 montrent que la métrique est parallèle que la métrique est parallèle pour cette connexion. \square

Remarque 3.7. *En général, si on se donne une connexion ∇ sur une variété M , il suffit de calculer les symboles de christoffel de ∇ pour décrire complètement cette connexion. En effet, par la définition 3.3, on sait qu'on a $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k = \Gamma(e_i, e_j)$.*

D'après l'équation 51, on a :

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \sum_m g^{im} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl})$$

où g_{ij} est le (i, j) ème coefficient de la matrice de la métrique g et g^{im} est le (i, m) ème coefficient de la matrice inverse de la métrique.

Prenons pour exemple S^2 . Si (e_1, e_2, e_3) un champ de repère sur S^2 et si $V = \sum_i v_i e_i$ est un champ de vecteur sur la sphère alors $\nabla_v V = \sum_i dv_i(v) e_i$. Soit $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ le champ de repère sphérique. Exprimons la métrique avec les coordonnées r, θ, φ . On a

$$\begin{cases} dx = \sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\varphi) \sin(\theta) d\varphi \\ dy = \sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \cos(\varphi) \sin(\theta) d\varphi \\ dz = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta \end{cases}$$

d'où la métrique s'exprime sous la forme suivante :

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

Si M désigne la matrice de la métrique alors on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire les symboles de Christoffel. On a $\Gamma_{\theta, \theta}^r = -r$, $\Gamma_{r, \theta}^\theta = \Gamma_{\theta, r} = r^{-1}$, $\Gamma_{\varphi, \varphi}^\theta = -\cos(\theta)\sin(\theta)$, $\Gamma_{\varphi, \theta}^\varphi = \Gamma_{\theta, \varphi}^\varphi = \cot(\theta)$, $\Gamma_{r, \varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi, r}^\varphi = r^{-1}$, $\Gamma_{\varphi, \varphi}^r = -r \sin^2 \theta$

3.2. Géodésiques. Intuitivement, une géodésique est une "ligne très peu courbée" en géométrie. En géométrie euclidienne par exemple ce sont des droites. On comprend donc intuitivement que si on transporte le vecteur tangent à cette courbe le long de celle-ci, on va obtenir en chaque point un vecteur parallèle. Ceci nous amène à définir une géodésique de la manière suivante :

Définition 3.11. Soit M une m -variété munie d'une connexion ∇ et γ une courbe de M . On dit que γ est une géodésique si et seulement si elle vérifie l'équation suivante :

$$(52) \quad \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

Théorème 3.12. Soit M une variété munie d'une connexion ∇ . Alors $\forall p \in M$ et $\forall v \in T_p(M)$, il existe une unique géodésique γ sur M telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v_p$

Démonstration. Prenons (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées locales. Prenons ∇ la connexion de Levi-Civita. On note $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dans ce système de coordonnées nous avons :

$$(53) \quad \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}$$

Où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion.

$t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ une courbe de M . Soit Y un champ de vecteurs sur M tel que $Y(\gamma(t)) = \gamma'(t)$. Notons y_1, \dots, y_k les composantes locales du champ de vecteurs dans le système choisit. La courbe γ est une géodésique

$$(54) \quad \nabla_{\gamma'(t)} Y(\gamma(t)) = \sum_k d(y_k)(\gamma'(t)) \partial_{x_k} + y_k \nabla_{\gamma'(t)} \partial_{x_k} = 0$$

Mais comme $d(y_k)(\gamma'(t)) = \gamma_k''(t)$, $y_k = \gamma_k'(t)$ et $\nabla_{\gamma'(t)} \partial_{x_k} = \sum_i y_i \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_k} = \sum_{i,j} y_i \Gamma_{ik}^j \partial_{x_j}$, on a :

$$(55) \quad \nabla_{\gamma'(t)} Y(\gamma(t)) = \sum_k \gamma_k''(t) \partial_{x_k} + \sum_{i,j,k} \gamma_k'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ik}^j \partial_{x_j} = 0$$

On en déduit que $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, on a :

$$(56) \quad \gamma_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) = 0$$

Cette équation admet une unique solution pour toute condition initiale $\gamma(0)$, $\gamma'(0)$. Ainsi, étant donné $p \in M$ et $v_p \in T_p(M)$, il existe une unique Géodésique valant p en 0 et ayant pour vecteur tangent v_p en 0. \square

4. DÉRIVÉE DE LIE ET CHAMP DE KILLING

4.1. Dérivée de Lie. Soient M et N deux variétés (pas nécessairement) de même dimension et $\phi : M \rightarrow N$ une application \mathcal{C}^∞ . Étant donné $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, on peut naturellement utiliser la fonction ϕ pour "transformer f en une fonction de M dans \mathbb{R} ". Le "pull-back" de f par ϕ est la fonction $f \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall v \in T_{\phi(p)}(M)$ et pour toute fonction f , \mathcal{C}^∞ sur N par $\phi^*(v)(f) = v(f \circ \phi)$

On peut de la même manière utiliser ϕ afin de transporter les vecteurs de $T_p(M)$ vers $T_{\phi(p)}(N)$. En effet, l'application $\phi^* : T_p(M) \rightarrow T_{\phi(p)}(N)$ définie par $\phi^*(v)(f) = v(f \circ \phi)$ est bien définie et est à valeurs dans l'espace tangent en $\phi(p)$ à la variété N . D'après les propriétés de la dérivée directionnelle, ϕ est une application linéaire.

De la même manière, on peut utiliser ϕ afin de transporter des vecteurs de l'espace dual $T_{\phi(p)}^*(N)$ vers $T_p(M)$ de la manière suivante.

$$\phi_* : T_{\phi(p)}(N)^* \rightarrow T_p(M)^* \quad \text{où } \forall v \in T_p(M), \phi_*(f)(v) = f(\phi^*(v)).$$

$$f \mapsto \phi_*(f)$$

Soit T un tenseur de type $(0,1)$ sur N au point $\phi(p)$. Alors on peut transporter T en un tenseur, noté $\phi_*(T)$, défini sur M au point p en utilisant l'application ϕ_* . En effet, pour tout $v_1, \dots, v_l \in T_p(M)$ on définit :

$$(57) \quad \phi_*(T)(v_1, \dots, v_l) = T(\phi^*(v_1), \dots, \phi^*(v_l))$$

De même, on peut transporter un tenseur de type $(k,0)$ sur M en p en un tenseur de type $(k,0)$ sur N en $\phi(p)$ par l'application ϕ^* . On définit :

$$(58) \quad \phi^*(T)(f_1, \dots, f_k) = T(\phi_*(f_1), \dots, \phi_*(f_k))$$

où f_1, \dots, f_k sont des formes linéaires sur $T_p(M)$.

Supposons maintenant que ϕ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de M sur N . (Les variétés M et N ont donc nécessairement la même dimension). On peut utiliser l'application réciproque ϕ^{-1} afin d'étendre l'action de ϕ^* à tous les tenseurs de type (k,l) .

En effet, soit T un tenseur de type (k,l) au point $p \in M$. Soit f_1, \dots, f_k des formes linéaires sur $T_{\phi(p)}(N)$ et v_1, \dots, v_l des vecteurs de $T_{\phi(p)}(M)$. On définit $\phi^*(T)$ de la manière suivante :

$$(59) \quad \phi^*(T)(f_1, \dots, f_k, v_1, \dots, v_l) = T(\phi_*(f_1), \dots, \phi_*(f_k), (\phi^{-1})^*(v_1), \dots, (\phi^{-1})^*(v_l))$$

$\phi^*(T)$ est bien définie car $(\phi^{-1})^* : T_{\phi(p)}(N) \rightarrow T_p(M)$.

On peut étendre de manière similaire l'action de ϕ_* aux tenseurs de type (k,l) sur N en $\phi(p)$ en des tenseurs sur M en p .

Étant donné ϕ un difféomorphisme d'une variété M et T un champ de tenseurs sur M , il est naturel de comparer $\phi^*(T)$ avec T . Si $\phi^*(T) = T$, on dit que ϕ est une transformation symétrique. Dans le cas d'une métrique g sur la variété M , on obtient la définition suivante.

Définition 4.1 (Isométrie). *Soit M une variété munie d'une métrique g . Soit ϕ un difféomorphisme de M . Alors on dira que ϕ est une isométrie si et seulement si :*

$$(60) \quad \phi_*(g) = g$$

Remarque 4.1. $\phi_*(g)$ est un champ de métrique. L'équation 60 nous dit que en appliquant ϕ_* sur la métrique g , on obtient exactement le même champ de métrique g .

Une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E est une application qui préserve la norme. En particulier une telle application est linéaire. Ici, un isométrie est définie sur une variété et la notion de linéarité n'a donc à priori de sens. En un point p de la variété M , g est un tenseur de type $(0,2)$ sur $T_p(M)$ mais on ne peut pas comparer $\phi_*(g)$ et g sur $T_p(M)$. En effet, au point $p \in M$, $\phi_*(g)$ est défini sur $T_{\phi(p)}(M)$ et les espaces tangents sont à priori différents.

Proposition 4.2. *Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M et $(\phi_t)_t$ le groupe de difféomorphismes à un paramètre associé à X . Alors on a :*

$$(61) \quad [X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y|_p - (\phi_t^* Y)|_p}{t}$$

Démonstration. Prenons $f : M \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$. On note $f_t = f \circ \phi_t$. On peut considérer ϕ_t comme une fonction de $M \times \mathbb{R}$ dans M . ϕ_t est solution d'une équation différentielle à paramètre. On peut supposer que $t \rightarrow \phi_t$ est \mathcal{C}^1 . Fixons $p \in M$.

Dès lors, f_t est aussi une fonction à deux paramètres et on a :

$$(62) \quad \frac{d}{dt} f_t(t=0) = df(p) \left(\frac{d}{dt} \phi_t(t=0) \right) = X(f)$$

On a $f_t = f_0 + tX(f) + O(t^2) = f + tX(f) + O(t^2)$. Dès lors :

$$(63) \quad \frac{Y|_p(f) - (\phi_t^* Y)(f)}{t} = \frac{Y|_p(f) - Y(f \circ \phi_t)}{t} = \frac{Y|_p(f) - Y(f) - tY(X(f) - Y(O(t^2)))}{t}$$

On en déduit que :

$$(64) \quad \frac{Y|_p(f) - (\phi_t^* Y)(f)}{t} = \frac{Y(f)(p) - Y(f)(\phi_{-t}(p))}{t} - Y(X(f)) + O(t)$$

Maintenant,

$$(65) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(f)(p) - Y(f)(\phi_t)(\phi_{-t}(p))}{t} = \frac{d}{dt} Y(f)(\phi_{-t}(p))|_{t=0} = d(Y(f))(\phi_{-t}(p)) \left(\frac{d}{dt} (\phi_{-t})|_{t=0} \right) = -X(Y(f)(p))$$

Finalement, d'après l'équation 64 on a :

$$(66) \quad \frac{Y|_p(f) - (\phi_t^* Y)(f)}{t} = -\frac{d}{dt} Y(f)(\phi_{-t}(p))|_{t=0} - Y(X(f)) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

□

Définition 4.3. Soit M une variété et T un champ de tenseurs de type (k, l) sur M . Soit (ϕ_t) une groupe à un paramètre de difféomorphismes et X le champ de vecteurs qui génère (ϕ_t) . Pour tout $p \in M$, on note Tp le tenseur obtenu en évaluant T en p . On définit la dérivée de Lie de T comme :

$$(67) \quad (\mathcal{L}_X T)p = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(\phi_{-t}^* T)p - Tp}{t} \right)$$

Remarque 4.2. — La limite dans le membre de droite de l'égalité a bien un sens car $(\phi_{-t}^* T)p$ est un tenseur sur T_p . En effet, $(\phi_t)_* : T_{\phi_t(p)}^*(M) \rightarrow T_p^*(M)$ donc $\phi_{-t}^* : T_p(M)^* \rightarrow T_{\phi_t(p)}^*(M)$. Ensuite, $(\phi_{-t})^{-1} = \phi_t$ et $\phi_t^* : T_p(M) \rightarrow T_{\phi_t(p)}(M)$.

On en déduit d'après 59 que $(\phi_{-t}^* T)p$ prend en arguments des éléments de $T_p(M)$ et $T_p^*(M)$. Dès lors, en faisant $\frac{(\phi_{-t}^* T)p - Tp}{t}$, on compare bien deux tenseurs de même type définis sur un même espace tangent.

— D'après la définition, on peut voir l'application \mathcal{L} comme une application définie sur l'ensemble des champs de tenseurs de type (k, l) dans l'ensemble des champs de tenseurs de type (k, l) .

On énonce sans démonstration la proposition suivante sur les propriétés de la dérivée de Lie.

Proposition 4.4. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, T_1, T_2 deux champs de tenseurs et X un champ de vecteurs généré par un groupe de difféomorphismes à un paramètre. Alors on a les propriétés suivantes :

- $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$
- $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ pour tout champ de vecteur Y sur la variété
- $\mathcal{L}_X(T_1 + T_2) = \mathcal{L}_X(T_1) + \mathcal{L}_X(T_2)$
- $\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{L}_X T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{L}_X(T_2)$
- $\mathcal{L}_X(fT) = X(f)T + f\mathcal{L}_X(T)$

— $\mathcal{L}_X C_i^j T = C_i^j \mathcal{L}_X T$ où C_i^j est la contraction des coordonnées i, j

Remarque 4.3. Soit g une métrique sur la variété M . Nous allons donner une expression de la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X(g)$. Cette expression nous servira Dans la sous-section suivante sur les champs de Killing. On rappelle qu'une métrique est un tenseur de type $(0,2)$. On peut donc écrire :

$$(68) \quad g = \sum_{i,j} a_{i,j} dx_i \otimes dx_j$$

D'après les propriétés 2, 3 et 4 on a :

$$(69) \quad \mathcal{L}_X(g) = \sum_{i,j} \mathcal{L}_X(a_{i,j} dx_i \otimes dx_j) = \sum_{i,j} X(a_{i,j}) dx_i \otimes dx_j + a_{i,j} \mathcal{L}_X(dx_i \otimes dx_j)$$

Soit $w = \sum_i w_i dx_i$ un tenseur de type $(0,1)$. Pour tout champ de vecteurs Y , on a :

$$(70) \quad \mathcal{L}_X(w \otimes Y) = \mathcal{L}_X(w) \otimes Y + w \otimes \mathcal{L}_X Y$$

D'après la propriété (6), la i -ème composante de $\mathcal{L}_X(w \otimes Y)$ est $\mathcal{L}_X((w \otimes Y)_i)$ où $(w \otimes Y)_i$ est la i -ème composante du tenseur $\sum_i w_i Y_i dx_i$. La i -ème composante du tenseur $\mathcal{L}_X(w \otimes Y)$ est donc $\mathcal{L}_X(w_i Y_i) = X(w_i Y_i)$. Or :

$$(71) \quad X(w_i Y_i) = X(w_i) Y_i + w_i X(Y_i) = Y_i(\mathcal{L}_X w)_i + w_i [X, Y]_i$$

Si maintenant $Y = \frac{\partial}{\partial x_i}$, et en remarquant que $[X, \frac{\partial}{\partial x_j}]_i = -\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ on peut écrire :

$$(72) \quad (\mathcal{L}_X(w))_i = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} X_j + w_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

$$(73) \quad \mathcal{L}_X(g) = \sum_{i,j} X(a_{i,j}) dx_i \otimes dx_j + \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \otimes dx_j + \sum_{i,j} a_{i,j} dx_i \otimes \left(\sum_k \frac{\partial X_j}{\partial x_k} dx_k \right)$$

On a :

$$(74) \quad \sum_{i,j} X(a_{i,j}) dx_i \otimes dx_j = \nabla_X g$$

Montrons que :

$$(75) \quad \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \otimes dx_j = g(\nabla_X, \cdot)$$

Prenons deux vecteurs u, v et un système de coordonnées locale (x_1, \dots, x_n) . Supposons $u = \sum_i u_i \partial x_i$ et $v = \sum_j v_j \partial x_j$

On a :

$$(76) \quad \nabla_u X = \sum_{i,j} u_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

La i -ième composante du vecteur $\nabla_u X$ est $\sum_k u_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$. Dès lors, on a :

$$(77) \quad g(\nabla_u X, v) = \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k u_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) v_j$$

Ensuite,

$$(78) \quad \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \otimes dx_j \right) (u, v) = \left(\sum_{j,k} \left(\sum_i a_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) dx_k \otimes dx_j \right) (u, v)$$

On peut donc écrire :

$$(79) \quad \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \otimes dx_j \right) (u, v) = \sum_{j,k} \left(\sum_i a_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) u_k v_j = \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k u_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) v_j$$

D'après les équations 77 et 79, on a :

$$(80) \quad g(\nabla_u X, v) = \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k u_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) v_j$$

On a donc bien :

$$(81) \quad \sum_{i,j} a_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \otimes dx_j = g(\nabla \cdot X, \cdot)$$

On en déduit que :

$$(82) \quad \mathcal{L}_X(g) = \nabla_X g + g(\nabla \cdot X, \cdot) + g(\cdot, \nabla \cdot X)$$

Si maintenant, ∇ est la connexion de Levi-civita, on obtient :

$$(83) \quad \mathcal{L}_X(g) = g(\nabla \cdot X, \cdot) + g(\cdot, \nabla \cdot X)$$

Cette caractérisation de la dérivée de Lie de la métrique est importante car elle va nous permettre de trouver plus facilement des géodésiques quand nous nous intéresserons à la métrique de Schwarzschild.

4.2. Champ de Killing.

Définition 4.5. Soit M une variété et (ϕ_t) un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur M . Notons X le champ de vecteurs que génère (ϕ_t) . Si $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_t^*(g) = g$ alors, On dit que X est un CHAMP DE KILLING

Remarque 4.4. Si $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_t^*(g) = g$, on dit que (ϕ_t) est un groupe à un paramètre d'isométries.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (ϕ_t) soit un groupe à un paramètre d'isométries est ; $\mathcal{L}_X(g) = 0$. Ainsi, si on munit M de la connexions de Levi-Civita, on obtient que X est un champ de killing si et seulement si :

$$(84) \quad g(\nabla \cdot X, \cdot) + g(\cdot, \nabla \cdot X) = 0$$

On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 4.6. Soit X un champ de Killing sur une variété M et γ une géodésique de vecteur tangent U . Alors $g(X, U)$ est constant le long de γ .

Démonstration. On a :

$$(85) \quad \nabla_U g(X, U) = g(\nabla_U X, U) + g(X, \nabla_U U)$$

□

Par définition d'une géodésique, on a $g(X, \nabla_U U) = g(X, 0) = 0$. Ensuite, d'après l'équation 84, on a :

$$(86) \quad g(\nabla_U X, U) + g(U, \nabla_U X) = 2g(\nabla_U X, U) = 0$$

On en déduit que :

$$(87) \quad \nabla_U g(X, U) = 0$$

5. MÉTRIQUE DE SCHWARZSCHILD

5.1. **Motivation.** Soit (M, g) une métrique Lorentzienne. L'équation d'Einstein est l'équation suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Elle relie le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, la courbure scalaire R , $g_{\mu\nu}$ la métrique lorentzienne, la constante cosmologique Λ , le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ et la constante de couplage κ .

Nous ne définirons pas ces termes et nous n'allons pas étudier l'équation d'Einstein. Néanmoins, nous avons besoin de l'évoquer pour définir la métrique de Schwarzschild.

La métrique de Schwarzschild est une métrique g solution de l'équation d'Einstein dans le vide qui décrit le champ gravitationnel extérieur d'un corps statique à symétrie sphérique. Avec les notions que nous avons développé jusqu'à présent nous sommes en mesure de décrire précisément ce qu'on entend par "symétrie sphérique" et "statique". Nous allons donner une définition précise de ces notions cependant nous ne nous attarderons pas dessus.

Définition 5.1. On dira qu'un espace temps (M, g) est STATIONNAIRE si :

- Il existe un système de coordonnées (t, x, y, z) tel que les composantes de la métrique par rapport à ces coordonnées soient indépendantes du temps : $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial t} = 0 \forall i, j$ si $g_{i,j}$ représentent les composantes de g .
- Le champ de vecteur ∂_t associé au champ de repère est du genre temps

Remarque 5.1. Le champ de vecteur ∂_t est un champ de killing pour un espace temps stationnaire. En effet $\nabla \partial_t = 0$ et comme $\forall i, j \nabla_{\partial_t} g_{i,j} = 0$ on en déduit que $g(\nabla_{\partial_t}(\partial_t), \cdot) = 0$. Donc d'après 83 on a :

$$(88) \quad \mathcal{L}_{\partial_t}(g) = 0$$

Donc On en déduit que ∂_t est un champ de killing. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble :

$$\Sigma_{t_0} = \{(t, x, y, z) \in M | t = t_0\}$$

est une hypersurface (sous-variété de dimension 3). Ceci nous amène à la définition suivante

Définition 5.2. Un espace temps (M, g) stationnaire dont le champ de killing ∂_t est orthogonal (au sens de la métrique g) aux hypersurface Σ_t est qualifié de statique.

Finalement, on définit un espace temps à symétrie sphérique de la manière suivante :

Définition 5.3. Un espace temps (M, g) sera dit à symétrie sphérique si il existe un système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) tel que :

- les surfaces $\{t = c, r = a\}$ ont une topologie qui est celle de la sphère
- la métrique s'écrit $g = -A(r, t)^2 dt^2 + B(r, t)^2 dr^2 + C(r, t)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$ où A, B, C sont des fonctions quelconques de (r, t) .

Remarque 5.2. Les composantes $g_{i,j}$ de la métrique ne dépendent pas de ϕ . On en déduit que $\forall i, j$, on a :

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial \phi} = 0$$

On raisonnant comme pour la remarque 5.1 on a que le champ de vecteur ∂_ϕ est un champ de killing pour la métrique g . Ceci traduit l'invariance par rotation autour de l'axe des z .

Un espace temps statique à symétrie sphérique est donc un espace temps munit d'un système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) dans lequel la métrique a pour expression :

$$g = -A(r)^2 dt^2 + B(r)^2 dr^2 + C(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

Le champ de vecteur ∂_θ n'est pas un champ de killing car la composante devant $d\phi^2$ est une fonction de la variable θ . On en déduit que les composantes de la métrique dépendent bien de θ .

5.2. Métrique de Schwarzschild. Dans cette partie, on introduit la solution de Schwarzschild et nous allons étudier les géodésiques liées à cette métrique. Si (M, g) est un espace temps étant à symétrie sphérique, on notera (t, r, θ, ϕ) les coordonnées.

Définition 5.4. Soit la variété $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}^2$. La métrique de Schwarzschild est la métrique sur M définie de la manière suivante :

$$(89) \quad g_0 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Où $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$, M est une constante (voir remarque suivante), G est la constante de gravitation et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque 5.3. La quantité M dans la métrique de Schwarzschild est appelée masse totale. On ne donnera pas de définition précise de cette quantité mais on peut l'interpréter intuitivement comme "la masse mesurée à l'infini d'un objet situé à l'origine."

Les composantes de g_0 ne dépendent pas du temps, et pour $r > \frac{2GM}{c^2}$, on a $g(\partial_t, \partial_t) = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) < 0$ donc ∂_t est bien de type temps. Les composantes de la métrique caractérisent l'aspect statique de l'espace temps. De même l'écriture de la métrique nous permet directement de voir que l'espace temps est à symétrie sphérique.

Lorsque $r \gg M$, la métrique se "rapproche" de

$$(90) \quad g = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Cette métrique est la métrique de Minkowski (voir 2.2) en coordonnées sphérique.

On peut remarquer que la métrique de Schwarzschild à deux singularités, une à $r = \frac{2GM}{c^2}$ et $r = 0$. Ces singularités sont soit intrinsèques à l'espace temps, soit liées aux coordonnées qui ont été utilisées afin d'obtenir la métrique sous cette forme. Nous verrons plus tard que la singularité à $r = \frac{2GM}{c^2}$ est liée aux coordonnées et que l'on peut "étendre" cette métrique.

5.3. Décalage Spectral. D'après la proposition 4.6, on sait que si X est un champ de killing et si u est le vecteur tangent d'une géodésique alors la quantité $g(X, u)$ est conservée le long de la géodésique. On va utiliser cette propriété afin d'obtenir une prédiction très remarquable de la relativité générale : LE DÉCALAGE SPECTRAL GRAVITATIONNEL aussi connu sous le nom EFFET D'EINSTEIN. Nous allons montrer que si un observateur statique émet un photon de longueur d'onde λ_{em} alors sa longueur d'onde à sa réception λ_{rec} vérifiera $\lambda_{rec} > \lambda_{em}$. On dit qu'il y a un décalage vers le rouge. Dans la suite, on considère toujours g la métrique de Schwarzschild.

Dans la suite, on va considérer un observateur statique par rapport aux coordonnées de Schwarzschild. On va donc considérer une courbe représentant la trajectoire d'un point matériel. Cette courbe, disons γ , doit être du genre temps et si u est son vecteur tangent, on doit donc avoir $g(u, u) < 0$. Quitte à changer de paramétrage, on va supposer que $g(u, u) = -1$. De plus, notre observateur va être statique donc sa vitesse, dans les coordonnées de Schwarzschild (t, x, y, z) , est constante égale à $u = (u^0, 0, 0, 0)$. Cela signifie qu'en tout point, on a :

$$(91) \quad u = u^0 \partial_t$$

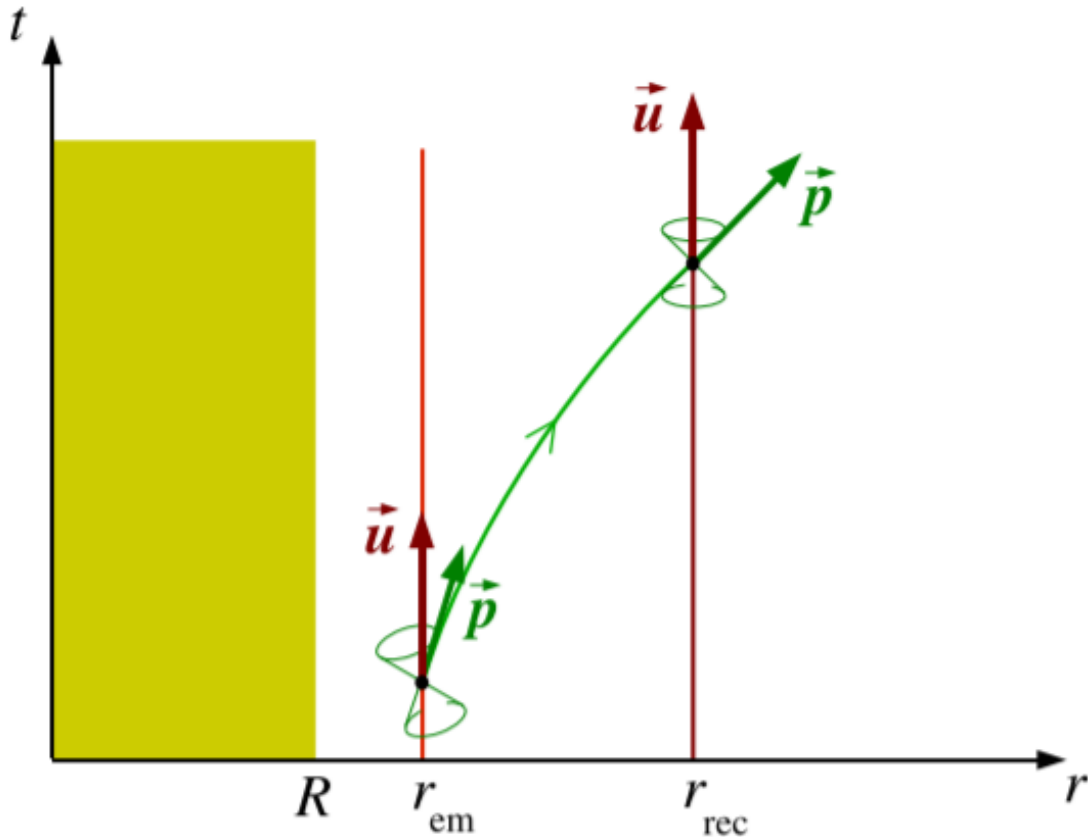
où ∂_t est un champ de killing de type temps. $g(u, u) = -1$, donc on peut écrire :

$$(92) \quad -1 = g(u, u) = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (u^0)^2$$

D'où

$$(93) \quad u^0 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

On considère maintenant, un photon émis de manière radiale par un observateur statique situé en $r = r_{em}$. Ce photon va donc décrire une géodésique de type lumière et être reçu par un observateur statique situé en $r = r_{rec}$.



La surface de l'objet central (de masse M) est située en $r = R$. Les deux lignes verticales sont les lignes d'univers d'un observateur statique qui émet (r_{em}) ou reçoit r_{rec} un photon.

Posons $p = mcu$. L'énergie du photon le long de la géodésique est donnée par la formule :

$$(94) \quad E = -cg(u, p)$$

D'après ce qu'on a fait, on a :

$$(95) \quad E = -g(u, p) = -u^0 cg(\partial_t, p) = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}} g(\partial_t, p)$$

Donc en écrivant E_{em} pour l'énergie au point d'émission et E_{rec} pour l'énergie au point de réception, on a d'une part :

$$(96) \quad E_{em} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{-\frac{1}{2}} (g(\partial_t, p))_{em}$$

et d'autre part

$$(97) \quad E_{rec} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}\right)^{-\frac{1}{2}} (g(\partial_t, p))_{rec}$$

Mais, on sait que la quantité $g(\partial_t, p)$ est conservée le long d'une géodésique. On en déduit donc que $(g(\partial_t, p))_{em} = (g(\partial_t, p))_{rec}$. Ainsi :

$$(98) \quad E_{rec} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}\right)^{-\frac{1}{2}} (g(\partial_t, p))_{rec} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{-\frac{1}{2}} (g(\partial_t, p))_{em}$$

Donc on en déduit que :

$$(99) \quad E_{rec} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}}\right)^{\frac{1}{2}} E_{em}$$

D'après la formule de Planck, on sait que l'énergie E des photons est reliée à leur longueur d'onde λ par la formule $E = \frac{hc}{\lambda}$ où h est la constante de Planck.

On en déduit alors que :

$$(100) \quad \lambda_{rec} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda_{em}$$

Le décalage spectral z valant :

$$(101) \quad z = \frac{\lambda_{rec} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

, on en déduit qu'on a :

$$(102) \quad z = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{rec}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

C'est cette quantité que l'on appelle Décalage spectral ou effet Einstein. Cet effet est un bien un effet de relativité générale car nous avons supposé que les observateurs (em et rec), qui mesurent respectivement λ_{em} et λ_{rec} , étaient statiques par rapport aux coordonnées de Schwarzschild. Cet effet n'est donc pas un effet Doppler.

On remarque que lorsque $z > 0$, on a $\lambda_{rec} - \lambda_{em} > 0$ ce qui signifie qu'on a un décalage vers les rouges des sources astrophysiques que l'on peut observer sur terre.

Pour l'observation des photons provenant de sources astrophysiques, on a $r_{em} = R$, la coordonnée de la surface de l'objet et on peut considérer que $r_{rec} = +\infty$. Ainsi, l'équation 102 devient :

$$(103) \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}}} - 1$$

Pour des corps tels que $\frac{2GM}{c^2 r_{em}} \ll 1$, on peut faire un développement limité et obtenir :

$$(104) \quad z \simeq \frac{2GM}{c^2 r_{em}}$$

Ainsi, pour des corps tels que $\frac{2GM}{c^2 r_{em}} \ll 1$, le facteur $\frac{2GM}{c^2 r_{em}}$ n'est autre que le décalage spectral gravitationnel du rayonnement émis depuis la surface de ce corps et reçu à l'infini.

5.4. Géodésiques de l'espace temps de Schwarzschild. D'après ce que nous avons dit dans la première partie, les géodésiques de type lumière vont représenter les trajectoires des photons et les géodésiques de type temps représenteront la trajectoire d'un point matériel. Nous allons donc, dans cette partie, étudier ces deux types de trajectoire. En général, il est assez difficile de déterminer les géodésiques d'un espace temps mais dans le cas de la métrique de Schwarzschild, nous pouvons utiliser les propriétés de symétrie pour les déterminer.

En raison de la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild, les orbites devront être planes. En effet soit $\gamma = (\gamma_t, \gamma_r, \gamma_\theta, \gamma_\phi)$ la trajectoire d'une particule de masse m et P un point de sa trajectoire. En ce point, notons $\mathbf{u} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ le vecteur tangent à la trajectoire γ . Notons $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ les coordonnées de Schwarzschild au point P de la particule. Par la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild et quitte à composer par une rotation, on peut directement supposer que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\phi_0 = 0$. Dans ce cas, on aurait que le point P se trouve sur une sphère S_{t_0, r_0} . De même, on peut supposer que le vecteur vitesse \mathbf{u} est parallèle à ∂_ϕ (La composante de \mathbf{u} en θ évaluée en P vaut 0). Dit autrement, le vecteur (u_θ, u_ϕ) est parallèle à l'équateur $\theta = \frac{\pi}{2}$ de la sphère S_{t_0, r_0} . Si la trajectoire déviait vers un des deux hémisphères séparés par cet équateur, on aurait une brisure de la symétrie sphérique. On en déduit que la particule doit rester dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $u_\theta = \frac{d\gamma_\theta}{d\tau} = 0$ le long de la trajectoire.

Dans la suite on va utiliser les unités géométriques c'est à dire qu'on va fixer $G = c = 1$ de sorte que la singularité se trouve à $r = 2M$.

Prenons donc γ une géodésique. On souhaite étudier l'effet d'un corps de masse M sur un rayon lumineux ou sur une particule test. Nous allons donc étudier les géodésiques de type temps et les géodésiques de type lumière. En effet, les géodésiques de type lumière représentent la trajectoire d'un rayon lumineux tandis que les géodésiques de type temps représentent la trajectoire d'une particule. On note $\gamma' = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ son vecteur dérivé. Si γ est une géodésique de type temps, on doit avoir :

$$(105) \quad g(\gamma', \gamma') = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 < 0$$

Quitte à changer de paramétrage, on peut supposer que $g(\gamma', \gamma') = -1$. On obtient pour les géodésiques de type temps :

$$(106) \quad -1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Si maintenant γ est une géodésique de type lumière, on a :

$$(107) \quad 0 = g(\gamma', \gamma') = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

On sait que ∂_t est un champ de Killing. Maintenant, on a :

$$(108) \quad -g(\partial_t, \gamma') = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}$$

Par la proposition (4.6), on sait que $g(\partial_t, \cdot)$ est constant le long d'une géodésique ainsi la quantité $-g(\partial_t, \gamma')$ est constante. Dans la suite, nous noterons :

$$(109) \quad E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}$$

Pour des géodésiques de type temps, on peut interpréter E comme l'énergie totale d'une particule par unité de masse suivant la géodésique γ . Pour une géodésique de type lumière, cette quantité représente l'énergie totale d'un photon.

De la même manière, la quantité $g(\partial_\phi, \gamma')$ est constante car nous avons vu que ∂_ϕ est un champ de killing. Nous noterons cette quantité L :

$$(110) \quad L = g(\partial_\phi, \gamma') = r^2 \dot{\phi}$$

On peut interpréter L comme le moment angulaire. Ainsi, on peut écrire les deux équations 106 et 107 de la manière suivante :

$$(111) \quad E + \delta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

où δ vaut -1 si la géodésique est de type temps et 0 si elle est de type lumière. Ainsi en multipliant par $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, on obtient :

$$(112) \quad \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \delta\right) = \frac{1}{2}E^2$$

Cette équation montre que le mouvement radial d'une particule suivant une géodésique est le même que le mouvement d'une particule d'énergie $\frac{E^2}{2}$ variant dans le potentiel

$$(113) \quad V(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \delta\right)$$

Le graphe de la fonction V va nous permettre de comprendre "l'évolution radiale" d'une particule dans la métrique de Schwarzschild.

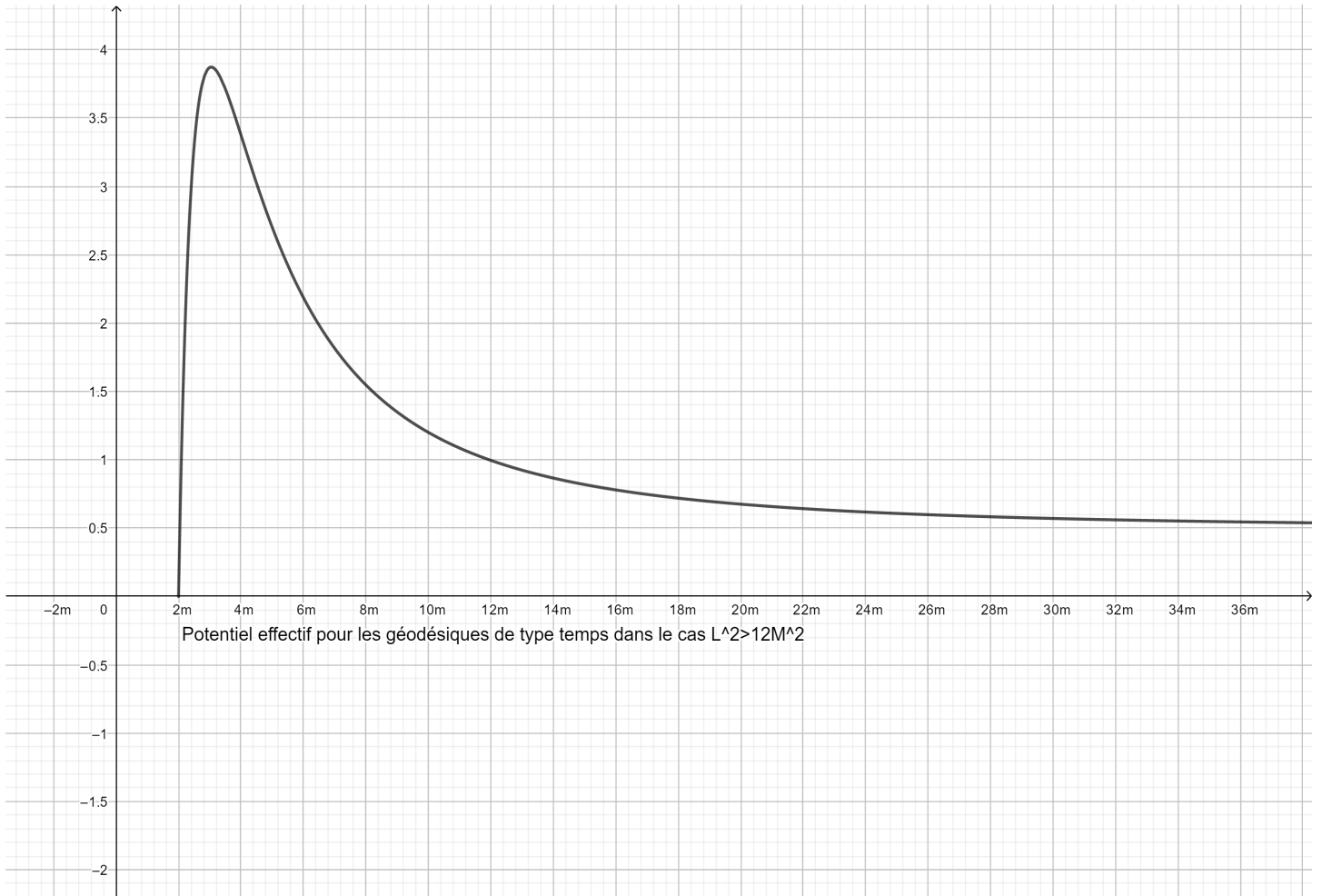
Calculons les extremas de la fonction potentiel V pour une géodésique de type temps c'est à dire pour $\delta = -1$ On a :

$$(114) \quad \frac{dV}{dr} = \frac{Mr^2 - L^2r + 3ML^2}{r^4}$$

On en déduit que :

$$(115) \quad \frac{dV}{dr} = 0 \iff Mr^2 - L^2r + 3ML^2 = 0 \iff L^2 > 12M^2 \quad \text{et} \quad r_{\pm} = \frac{L^2 \pm (L^4 - 12L^2M^2)^{\frac{1}{2}}}{2M}$$

Supposons d'abord que $L^2 > 12M^2$. On obtient donc deux extremums, r_+ et r_- . On vérifie facilement que r_+ est un minimum du potentiel V et r_- est un maximum. Si on représente la fonction V dans le cas ou , $L^2 = 24M^2$, on obtient le graphe suivant.



Une particule suivant un géodésique de type temps est en orbite autour de M si sa composante radiale est constante ($\dot{r} = 0$). Ainsi, le graphe de V , nous permet de voir qu'une particule en orbite à $r = r_+$ est sur une orbite stable (une petite perturbation de r ramènera toujours la particule à $r = r_+$). Cependant si une particule est en orbite à $r = r_-$ alors une petite perturbation de r fait chuter cette dernière vers $r = 2M$ ou vers l'orbite stable à $r = r_+$. L'énergie d'une particule en ces extremas du potentiel est juste la valeur du potentiel en ces points. Notons R l'un de ces deux extremums.

En $r = R$, la quantité L peut s'exprimer en fonction de R . En effet, $\frac{dV}{dR} = 0$ donc on a :

$$L^2 = \frac{MR^2}{R - 3M}$$

Alors l'énergie par unité de masse est :

$$(116) \quad \frac{1}{2}E^2(R) = V(R) = \frac{1}{2} \frac{(R - 2M)^2}{R(R - 3M)}$$

Ainsi :

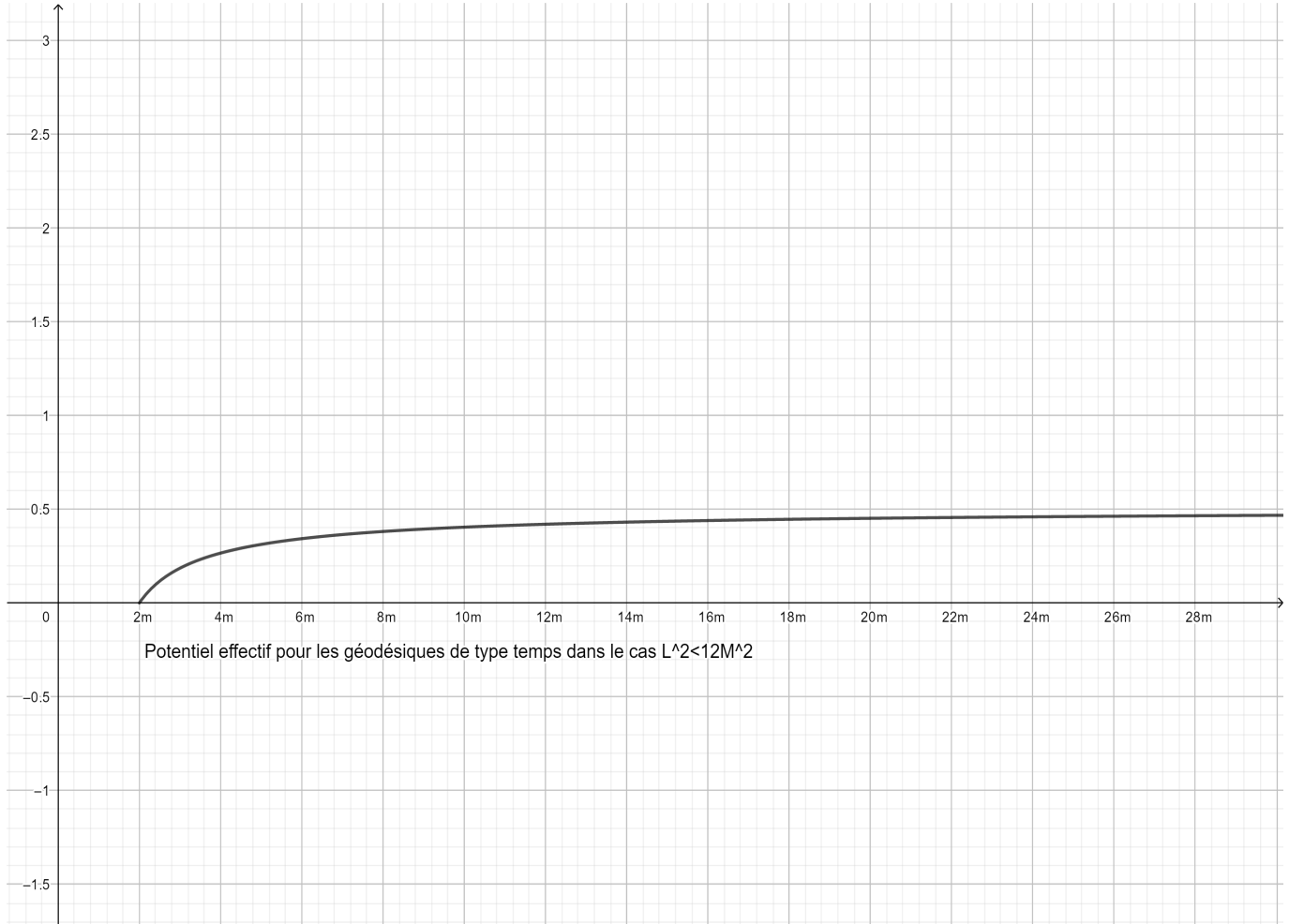
$$(117) \quad E(R) = \frac{R - 2M}{R^{\frac{1}{2}}(R - 3M)^{\frac{1}{2}}}$$

On en déduit que si R_+ désigne l'orbite stable alors il faudrait que la particule ait une énergie d'au moins $E(R_+)$ pour atteindre l'orbite stable à $R = R_+$. On remarque aussi que $E \rightarrow \infty$ lorsque $R \rightarrow 3M$.

On observe sur ce graphe, une remontée du potentiel lorsque r se rapproche de 0. En effet, le terme $\frac{L^2}{2r^2}$ l'emporte sur $-\frac{ML^2}{r^3}$. Il s'agit de la BARRIÈRE CENTRIFUGE qui interdit à une particule d'approcher $r = 0$ si $L \neq 0$. Lorsque r tend vers

0, le terme $\frac{-ML^2}{r^3}$ l'emporte sur $\frac{L^2}{2r^2}$ et étant de signe opposé provoque une chute du potentiel V vers $-\infty$.

Supposons maintenant que $L^2 < 12M^2$. Alors la fonction V n'admet pas d'extremas. Lorsque r tend vers $2M$, le potentiel V tend vers 0 et lorsque r tend vers $+\infty$ le potentiel V converge vers 1. On obtient le graphe suivant :

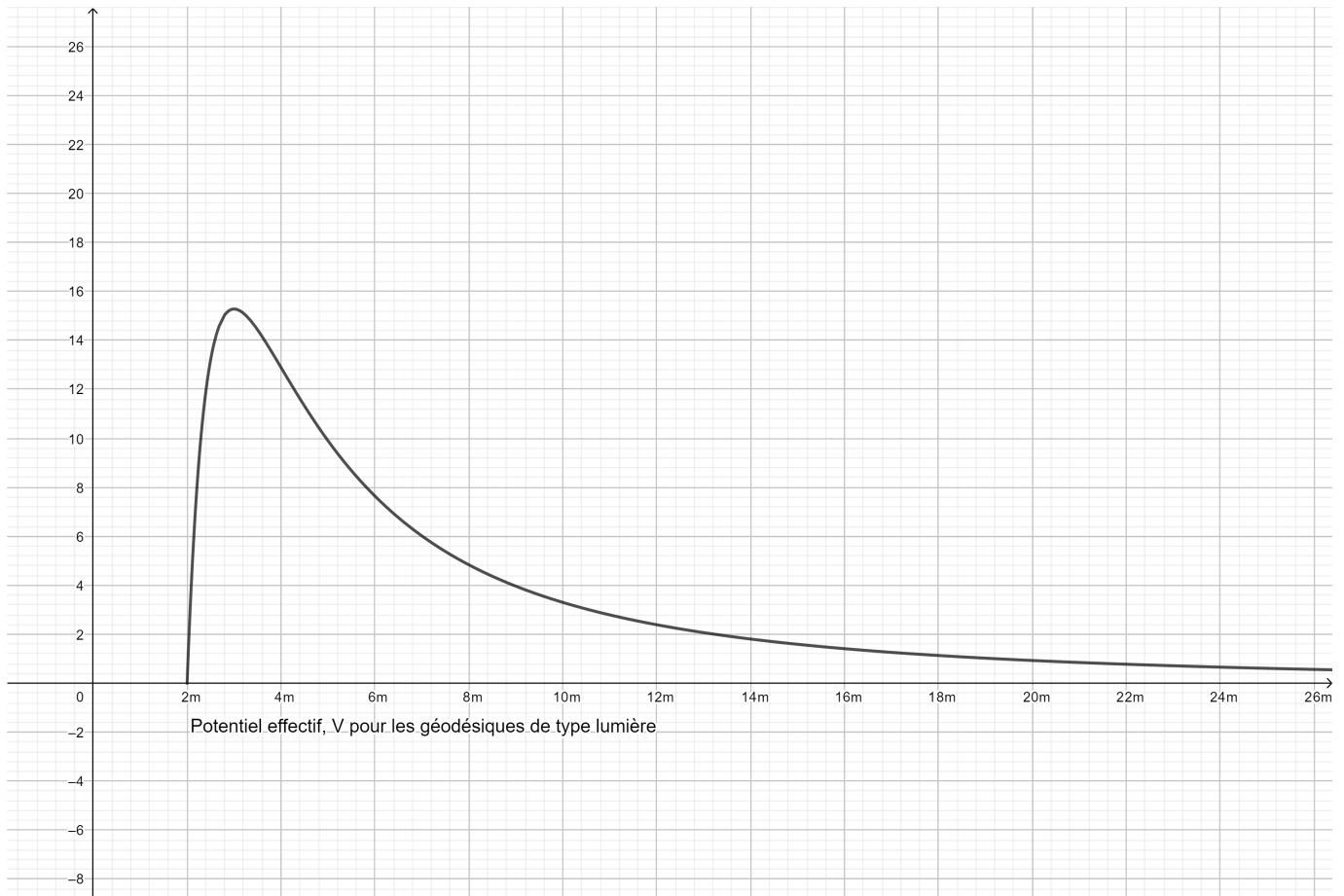


Ainsi, une particule suivant une géodésique γ et se dirigeant vers le centre de l'attraction ($\dot{r} \leq 0$) tombera directement vers la singularité à $r = 2M$.

On considère maintenant le cas des géodésiques de type lumière ($\delta = 0$). D'après l'équation 113 on a :

$$(118) \quad V(r) = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2M)$$

La quantité L étant constante le long d'une géodésique de type lumière, on en déduit que le potentiel V ne dépend plus de L (contrairement aux géodésiques de type temps). Ainsi, tout comme les particules matérielles, la composante radiale de la trajectoire d'un photon obéit à une équation de mouvement unidimensionnelle dans un potentiel V . La fonction V a le graphe suivant :



L'énergie minimum pour passer au dessus de la barrière potentiel est :

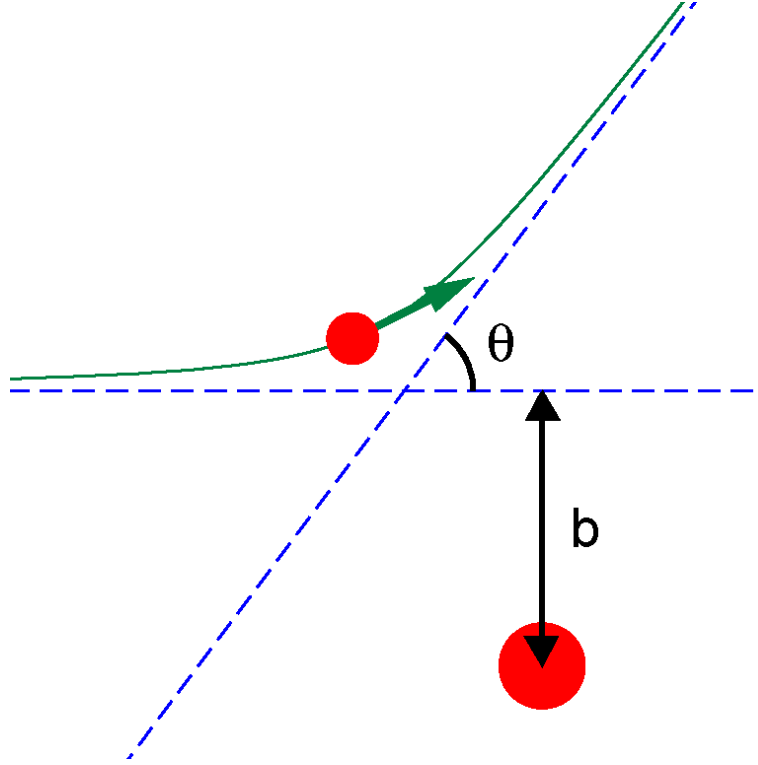
$$(119) \quad E^2 = 2V(r = 3M) = \frac{L^2}{27M^2}$$

C'est à dire :

$$(120) \quad \frac{L^2}{E^2} = 27M^2$$

La quantité $\frac{L}{E}$ est appelée PARAMÈTRE D'IMPACT du rayon lumineux et on la notera b . Si le paramètre d'impact est plus petit que $3^{\frac{3}{2}}M$ alors on obtient $E^2 < V(r = 3M)$ et le rayon "rebondit sur la barrière potentiel ($V(r = 3M)$)" et repart vers l'infini. Si maintenant le paramètre d'impact est strictement plus grand que $3^{\frac{3}{2}}M$ alors $E^2 > V(r = 3M)$ et l'énergie totale du photon est suffisante pour passer la barrière potentiel et si le corps est un trou noir alors le photon sera piégé.

De cette analyse ressort le fait qu'un observateur distant ne voit pas les photons de paramètre d'impact plus petit que $3^{\frac{3}{2}}M$.



Sur cette image, le petit point rouge représente la particule matérielle tandis que le corps de masse M est représenté par le gros point rouge. L'angle θ représente ici l'angle de déviation du rayon lumineux et b le paramètre d'impact.

Les rayons lumineux qui ne sont pas capturés sont alors déviés et on peut analyser l'effet de cette déviation. Il est donc nécessaire d'obtenir ϕ en fonction de r . D'après l'équation 112, on a :

$$(121) \quad \dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M)$$

On souhaite regarder l'évolution de ϕ en fonction de r . On regarde donc la fonction $\phi(r(\tau))$. On a $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \dot{\phi} \frac{1}{\dot{r}}$. Mais $\dot{r} = \pm(E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M))^{\frac{1}{2}}$ et par définition on a $\frac{L^2}{r^2} = \dot{\phi}$. Ainsi, on en déduit que :

$$(122) \quad \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{L}{r^2} (E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M))^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi :

$$(123) \quad \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left(\frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

on a posé $b = \frac{L}{E}$ donc on a finalement :

$$(124) \quad \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

On cherche à trouver la variation de la coordonnée angulaire ϕ de la trajectoire du photon $\Delta\phi = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty}$. Pour que cette valeur ait un sens, il faut que le paramètre d'impact b soit supérieur à $3^{\frac{3}{2}}M$. Ainsi, un photon arrivant depuis l'infini avec un paramètre $b > 3^{\frac{3}{2}}M$ voit sa valeur de r diminuer jusqu'à une valeur critique r_0 . r_0 vérifie l'équation $V(r_0) = \frac{E^2}{2} \iff \frac{L^2}{2r_0^3}(r_0 - 2M) = \frac{E^2}{2} \iff r_0^3 E^2 - L^2(r_0 - 2M) = 0 \iff r_0^3 - b^2(r_0 - 2M) = 0$. La résolution de cette équation du troisième degré fournit r_1 en fonction du paramètre d'impact et de la masse M du corps. La fonction $\phi : r \mapsto \phi(r)$

étant décroissante sur $] -\infty, r_1[$ et croissante sur $]r_1, +\infty[$, on obtient que $\forall r \in] -\infty, r_1[$, $\frac{d\phi}{dr}(r) < 0$ et $\forall r \in]r_1, +\infty[$, $\frac{d\phi}{dr}(r) > 0$. Maintenant, on a :

$$(125) \quad \Delta\phi = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty} = - \int_{+\infty}^{r_1} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dr + \int_{r_1}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

Ainsi, on obtient :

$$(126) \quad \Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

En développant l'intégrant au premier au premier ordre par rapport à $\frac{2M}{b}$, on peut montrer que :

$$(127) \quad \Delta\phi \simeq \frac{4M}{b}$$

Par exemple, dans le cas du soleil, la déviation est maximale pour un paramètre d'impact valant $b = R_{\odot}$ (où \odot est le rayon du soleil) et vaut :

$$(128) \quad \Delta = 1.75''$$

où l'unité ici est la seconde d'arc. Cette déviation a pu être mis en évidence en mesurant la position des étoiles au voisinage du disque solaire lors de l'éclipse de 1919. Après l'avance du périhélie de Mercure, il s'agissait du second test passé avec succès par la relativité générale. Aujourd'hui, la déviation des rayons lumineux a pu être mesurée avec beaucoup plus de précision en considérant des signaux radio émis par des sources extra-Galactiques.

Dans la partie suivante, on va s'intéresser aux points "singuliers" de la métrique de Schwarzschild ($r = 2M$ et $r = 0$). Pour cela nous aurons besoin d'un système de coordonnées qui va reposer sur les géodésiques de type lumière. Soit donc $\gamma : \tau \mapsto \gamma(\tau)$ une géodésique de type lumière que nous supposons radiale. Ses composantes selon θ et ϕ sont donc constantes. Notons $u = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ les composantes de γ' On doit avoir :

$$(129) \quad g(u, u) = 0$$

Ce qui équivaut à dire que :

$$(130) \quad -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0$$

C'est à dire

$$(131) \quad \dot{t}^2 = \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}$$

On tire de cette équation que :

$$(132) \quad \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}$$

En fixant r_0 et en intégrant jusqu'à r on trouve :

$$(133) \quad t(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} dr$$

Posons $x = \frac{r}{2M}$. Alors on obtient :

$$(134) \quad t(r) = \pm 2M \int_{x_0}^x \frac{dx'}{1 - \frac{1}{x'}} = x + \log(|x - 1|) - x_0 - \log(|x_0 - 1|)$$

Ainsi on obtient :

$$(135) \quad t(r) = \pm \left(r + 2M \log\left(\left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) \right) + cste$$

Le signe \pm donne lieu à deux type de géodésiques que l'on va classer de la manière suivante :

Définition 5.5. Une géodésique radiale γ est :

- sortante si $\frac{dt}{dr} > 0$ donc a pour équation $t(r) = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + cste$ si $r > 2M$ ou $t(r) = -r - 2M \log\left(1 - \frac{r}{2M}\right) + cste$ si $r < 2M$
- Entrante si $\frac{dt}{dr} < 0$ donc ont pour équation $t(r) = -r - 2M \log\left(1 - \frac{r}{2M}\right) + cste$ si $r > 2M$ ou $t(r) = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + cste$ si $r < 2M$

6. EXTENSION

On tourne notre attention maintenant vers les points "spéciaux" de la métrique de Schwarzschild c'est à dire les points $r = 0$ et $r = 2M$. Ces deux points sont des points où la métrique ne semble pas être définie. On parle en général de singularité de l'espace temps. Avant d'aller plus loin définissons la notion de point singulier.

Définition 6.1. Soit M une n -variété et $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j} dx_i \otimes dx_j$ une métrique sur M . Soit $A(p) = (g_{i,j}(p))_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ la matrice des coefficients de la métrique g en un point $p \in M$ de la variété. On dit que un point $p \in M$ est un point singulier pour M si $\det(A(p)) = 0$ et si le tenseur de Riemann n'est plus continu au point p .

Remarque 6.1. Cette définition fait intervenir la notion de courbure et plus précisément de tenseur de Riemann. Nous ne parlerons pas de ces notions mais elles sont très importantes car elles permettent d'exprimer la courbure d'une variété disposant d'une connexion. Il faut retenir qu'en général, les singularités d'un espace temps sont soit dues aux fonctions coordonnées de la métrique soit à la géométrie de l'espace temps qui devient en effet singulière. En général, pour montrer que la singularité est une singularité de l'espace temps, on calcule des quantités liées au tenseur de Riemann qui sont continues aux points où le tenseur de Riemann l'est.. Si cette dernière "explose" alors le point est un point singulier de l'espace temps.

Remarque 6.2. Prenons l'exemple de la métrique de Schwarzschild $g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ Alors le déterminant des composantes de la métrique en un point (t, r, θ, ϕ) est :

$$(136) \quad \det(A) = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^2 r^2 \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -r^4 \sin^2(\theta)$$

On voit donc bien que le déterminant ne s'annule pas en $r = 2M$. Le déterminant s'annule en $r = 0$ et en $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Les points $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ ne font apparaître qu'une singularité illusoire due seulement à un mauvais choix de coordonnées. ($\theta = 0$ et $\theta = \pi$ représentent les pôles du système de coordonnées sphériques) De même la singularité à $r = 2M$ semble seulement être due à un mauvais choix de coordonnées.

Par contre, le calcul de l'invariant de Kretschmann (invariant continu si le tenseur de Riemann l'est) de la variété en (t, r, θ, ϕ) donne $\frac{48M^2}{r^6}$ et donc en $r = 0$ l'espace temps devient singulier.

Nous avons vu dans la partie précédente les géodésiques de genre temps. Une géodésique radiale du genre temps est toujours séparée en deux parties par l'asymptote $r = 2M$. Une telle représentation de l'espace temps est dite géodésiquement incomplète.

Si l'espace temps possède une singularité intrinsèque (dans notre exemple $r = 0$) il ne pourra pas être géodésiquement complet.

On va donc essayer de trouver un autre système de coordonnées qui réalise la complétude géodésique de l'espace temps. Une telle extension d'un espace temps n'existe pas toujours et même si elle existe, rien ne garantit qu'elle soit unique.

Exemple 6.1. Commençons par deux exemples simples qui vont nous aider à comprendre notre objectif.

On considère la métrique $g = -\frac{1}{t^4}dt^2 + dx^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La transformation de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* définie par $t \mapsto \frac{1}{t}$ donne un nouveau système de coordonnées dans lequel la métrique a pour expression

$$g = -(dt')^2 + dx^2$$

Ainsi, on obtient la métrique de Minkowski sur la variété $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ainsi, une simple composition par une application a permis d'enlever le point pathologique et d'obtenir une métrique non singulière

Pour deuxième exemple, nous allons considérer la variété $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ munit de la métrique de Rindler $g = -x^2 dt^2 + dx^2$. Le déterminant des coordonnées de la métrique s'annule en $x = 0$ cependant, la courbure ne montre pas de "mauvais" comportement de la métrique en $x = 0$. On en déduit que la singularité à $x = 0$ est illusoire. Contrairement à l'exemple précédent, il est assez difficile dans ce cas d'avoir l'intuition du bon changement de coordonnées. De plus, on aimerait trouver une manière plus générale pour trouver un nouveau système de coordonnées. Une bonne manière de procéder est d'introduire un certain type de géodésique allant vers la singularité et de définir le paramètre τ de la géodésique comme une coordonnée. En fait, si une géodésique, disons de type lumière, va vers la singularité (i.e est rentrante), on peut espérer qu'elle atteigne la singularité "dans le futur" ($t = +\infty$). Ainsi, si u est un paramètre variant sur une géodésique rentrante il atteindra $x = 0$ en $t = +\infty$. Réciproquement, pour une géodésique sortante, on peut espérer qu'elle atteigne 0 en $t = -\infty$. C'est ce que nous allons montrer :

Introduisons par exemple des géodésiques de type lumière. Soit donc γ une telle géodésique et $u = (\dot{t}, \dot{x})$ son vecteur tangent. Le type lumière de la géodésique donne :

$$(137) \quad g(u, u) = -x^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2 = 0$$

Ainsi :

$$(138) \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

On peut donc en déduire que le long de la géodésique, :

$$(139) \quad t = \pm \log(x) + cste$$

Prenons par exemple le cas $t = \log(x) + cste$. lorsque t (le temps augmente) $\log(x)$ doit augmenter donc x doit s'éloigner de la singularité $x = 0$. On en déduit que le signe $+$ correspond à des géodésiques sortantes. Réciproquement si $t = -\log(x) + cste$ et lorsque t augmente, x diminue et donc x doit se rapprocher de la singularité $x = 0$. Le signe $-$ correspond donc aux géodésiques sortantes.

Ceci nous amène donc considérer les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} u &= t - \log(x) \\ v &= t + \log(x) \end{aligned}$$

On a donc $x^2 = \exp v - u$ et $du = dt - \frac{1}{x} dx$, $dv = dt + \frac{1}{x} dx$. Donc $dt = \frac{du + dv}{2}$ et $dx = \frac{x}{2}(dv - du)$. Finalement, on obtient :

$$(140) \quad -x^2 dt^2 + dx^2 = -e^{v-u} \left(\frac{du + dv}{2}\right)^2 + \frac{e^{v-u}}{4} (dv - du)^2$$

Finalement on obtient la nouvelle expression de la métrique :

$$(141) \quad g = -e^{v-u} du dv$$

Ce changement de coordonnées n'est pas suffisant. En effet prenons par exemple u et supposons que l'on définisse u comme une de nos nouvelles coordonnées. Alors en "suivant u ", on se déplace sur la géodésique rentrante et on atteindra la singularité à l'infini $t = +\infty$. De même en se "déplaçant" sur la géodésique sortante, on atteindra la singularité à $t = -\infty$. Il nous faut donc trouver un moyen de "ramener" cette singularité, située à l'infini, en un point fini. Pour cela nous allons composer par e^{-u} et e^v . On aurait bien sur pu composer par une autre fonction.

Calculons maintenant le paramètre affine τ le long de la géodésique. De même que pour la métrique de Schwarzschild, on peut montrer que ∂_t est un champ de killing sur la variété.

On a $g(u, \partial_t) = -x^2 \frac{dt}{d\tau}$. Cette quantité est conservée le long de la géodésique. Notons cette quantité E . Ainsi :

$$(142) \quad E = g(u, \partial_t) = -x^2 \frac{dt}{d\tau}$$

Pour les géodésiques sortantes, on obtient en fixant u constant :

$\tau = \frac{1}{2E} \int e^{v-u} dv = C + \left(\frac{e^{-u}}{2E}\right) e^v$ où C est une constante. Ainsi, on peut poser $\tau_{\text{sort}} = e^v$ comme paramètre affine. De la même manière, on peut montrer que $\tau_{\text{ent}} = -e^{-u}$ est un paramètre affine la long de la géodésique rentrante. Posons donc $U = -e^{-u}$ et $V = e^v$ comme nouveaux paramètres.

Alors la métrique s'exprime simplement sous la forme :

$$(143) \quad g = -dU dV$$

On voit bien que il n'y a plus de singularités à $U = 0$ ou $V = 0$. nous avons donc bien trouvé un nouveau système de coordonnées dans lequel les composantes de la métrique ne sont plus singulières. Afin de se ramener à une métrique non dégénérée, on pose $T = \left(\frac{U+V}{2}\right)$ et $X = \left(\frac{V-U}{2}\right)$. On obtient alors l'expression suivante :

$$(144) \quad g = -dT^2 + dX^2$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, la métrique est simplement une métrique de Minkowski. L'expression de x et t dans ce nouveau système de coordonnées est la suivante :

$$(145) \quad \begin{aligned} x &= (X^2 - T^2)^{\frac{1}{2}} \\ t &= \text{Argth}\left(\frac{T}{X}\right) \end{aligned}$$

Ces expressions ayant un sens uniquement si $X > |T|$, on en déduit que l'espace temps de Rindler correspond uniquement à une partie de \mathbb{R}^2 . On a le diagramme suivant.

L'espace temps de Rindler est donc limité au "coin droit" de \mathbb{R}^2 et la transformation de coordonnées que nous avons utilisé nous a permis de passer à travers les droites $X = T$ et $X = -T$ et de définir ainsi la nouvelle métrique sur \mathbb{R}^2 . On remarque aussi que en suivant ces droites, on suit les géodésiques rentrantes et sortantes de l'espace temps de Rindler.

6.1. Extension de Kruskal. Maintenant que nous avons vu l'extension de la métrique de Rindler, nous allons procéder de la même manière pour trouver une extension à la métrique de Schwarzschild.

Proposition 6.2. Si g désigne la métrique de Schwarzschild alors il existe un système de coordonnées (u, v, θ, ϕ) tel que la métrique de Schwarzschild a pour expression

$$(146) \quad g = \frac{32m^3}{r} e^{\frac{-r}{2M}} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Démonstration. Nous allons raisonner de la même manière que pour l'espace temps de Rindler c'est à dire considérer des géodésiques allant vers la singularité $r = 2M$. Comme nous l'avons précisé dans la partie sur les géodésiques de la métrique de Schwarzschild, nous pouvons choisir une géodésique qui reste dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. De cette manière, on se retrouve comme précédemment à considérer des géodésiques évoluant dans un plan. Nous allons donc considérer des géodésiques radiales de type lumière. On considère des géodésiques allant vers la singularité donc on doit avoir $r(\tau) > 2M$ si $\gamma = (t, r, \theta, \phi)$ est une géodésique. D'après la définition 5.5, les géodésiques rentrantes ont pour expression :

$$(147) \quad t(r) = -r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

et les géodésiques sortantes ont pour expression :

$$(148) \quad t(r) = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

Posons alors :

$$(149) \quad \begin{aligned} U &= t - (r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)) \\ V &= t + r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \end{aligned}$$

On peut exprimer la métrique des Schwarzschild dans ce nouveau système de coordonnées cependant, elle reste pathologique en $r = 2M$. En effet :

$$(150) \quad \begin{aligned} V - U &= 2(r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)) \\ V + U &= 2t \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$(151) \quad d(V - U) = dV - dU = dt + dr + \frac{dr}{\frac{r}{2M} - 1} - (dt - dr - \frac{dr}{\frac{r}{2M} - 1}) = 2(dr + \frac{dr}{\frac{r}{2M} - 1}) = 2\left(1 + \frac{1}{\frac{r}{2M} - 1}\right)dr$$

Ainsi, on obtient :

$$(152) \quad \begin{aligned} d(V - U) &= 2 \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} \\ d(V + U) &= 2dt \end{aligned}$$

On peut écrire $g = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2$ sous la forme :

$$(153) \quad g = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(-dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}dr^2) + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2$$

Donc, on a :

$$(154) \quad g = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\left(\frac{dV + dU}{2}\right)^2 + \left(\frac{dV - dU}{2}\right)^2\right) + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2$$

Par l'identité $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$, on obtient :

$$(155) \quad g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dUdV + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2$$

Ici, r est une fonction implicite de V et U . Les coefficients de la métrique s'annulent toujours en $r = 2M$. La métrique présente donc toujours un problème en ce point. Maintenant, on sait que $\frac{v-u}{2} = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ et .

Dès lors, $e^{\frac{v-u}{2}} = e^r \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{2M}$. Ainsi, on a $1 - \frac{2M}{r} = -e^{\frac{v-u}{4M}} e^{\frac{-r}{2M}}$ et on peut écrire :

$$(156) \quad g = -\frac{2M e^{-\frac{r}{2M}}}{r} e^{\frac{v-u}{4M}} dudv + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

En comparant avec ce que nous avons fait pour la métrique de Rindler, on pose $U = e^{\frac{-u}{4M}}$ et $V = e^{\frac{v}{4M}}$. La métrique a donc pour expression :

$$(157) \quad g = -\frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2M}}}{r} dU dV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Cette expression montre qu'il n'y a plus de singularités en $r = 2M$. Cependant, on voit aussi que la singularité en $r = 0$ est toujours présente. D'après ce que nous avons dit, cette singularité est liée à l'explosion de la courbure scalaire et ne peut être éliminée par une autre transformation de coordonnées.

Si on pose $T = \left(\frac{U+V}{2}\right)$ et $X = \left(\frac{U-V}{2}\right)$, la métrique prend la forme finale suivante :

$$(158) \quad g = \frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2M}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Comme pour l'espace temps de Rindler, on peut exprimer les nouvelles coordonnées u, v en fonction de r et t . On obtient alors les formules suivantes :

$$(159) \quad (I) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y-x) = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} ch\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= \frac{1}{2}(y+x) = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} sh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

On remarque que $u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}}$. Les coordonnées u, v n'ont de sens que si $\frac{r}{2M} - 1 \geq 0$ ce qui revient à dire que $|u| \geq |v|$. Il semblerait que les coordonnées soient définies uniquement sur la partie du plan $\{u^2 - v^2 \geq 0\}$. Cependant on peut reprendre la même construction que l'on vient de faire avec cette fois des géodésiques sortantes ou rentrantes vérifiant $r < 2M$. De cette manière on peut définir les coordonnées sur tout le plan en posant :

Pour $r > 2M$

$$(160) \quad (I) \quad \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} ch\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} sh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

Pour $r < 2M$

$$(161) \quad (II) \quad \begin{aligned} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{\frac{r}{4M}} sh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{\frac{r}{4M}} ch\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

Pour $r > 2M$

$$(162) \quad (III) \quad \begin{aligned} u &= -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} ch\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{\frac{r}{4M}} sh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

Pour $r < 2M$

$$(163) \quad (IV) \quad \begin{aligned} u &= -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{\frac{r}{4M}} sh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{\frac{r}{4M}} ch\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

Les régions (I) et (III) d'une part, (II) et (IV) d'autre part sont symétriques. Réciproquement, on obtient t, x par les relations :

$$(164) \quad u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}}$$

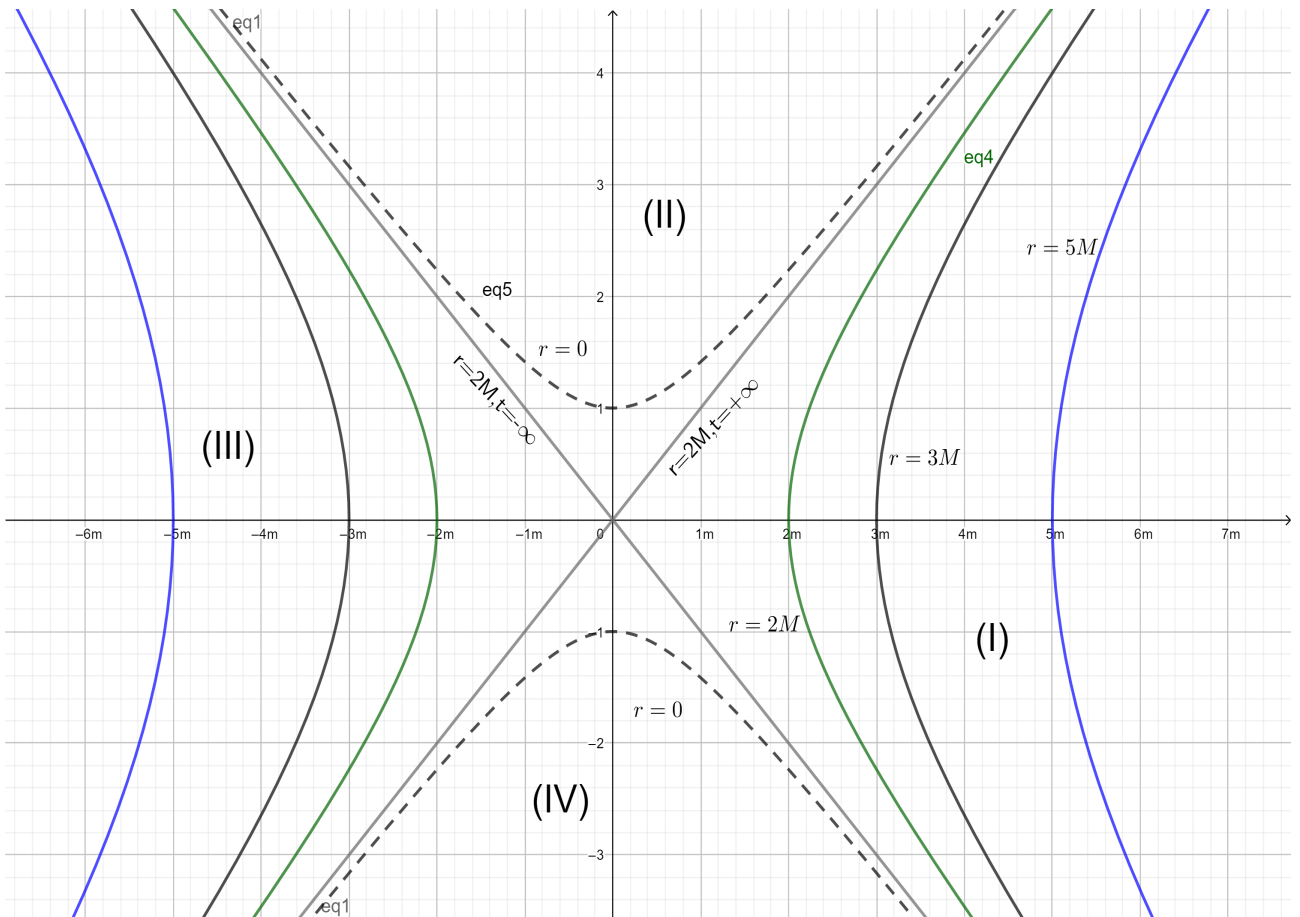
$$(165) \quad \begin{aligned} \frac{t}{4M} &= \operatorname{argth}\left(\frac{v}{u}\right) && \text{dans (I) et (III)} \\ \frac{t}{4M} &= \operatorname{argth}\left(\frac{u}{v}\right) && \text{dans (II) et (IV)} \end{aligned}$$

□

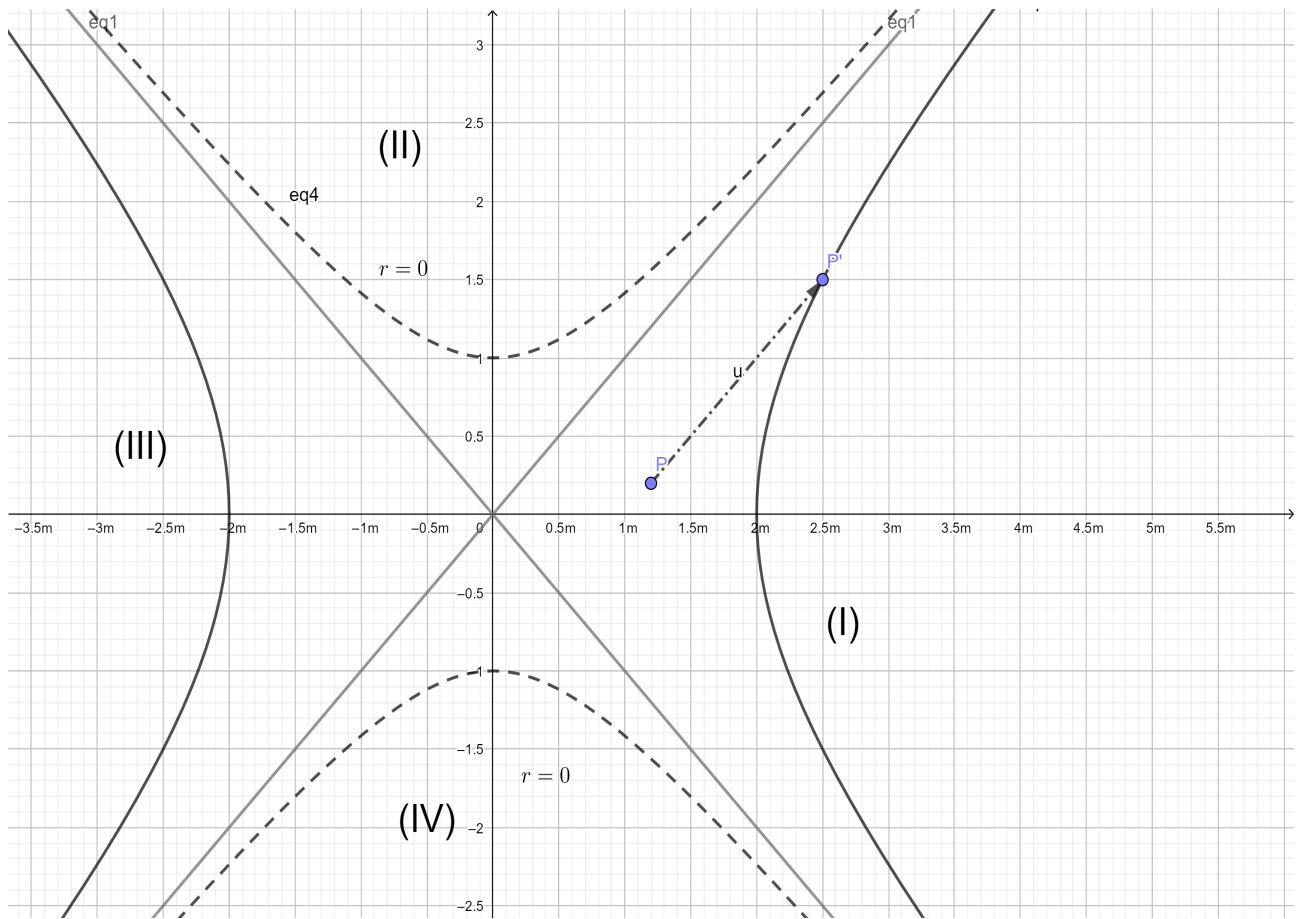
6.2. Le diagramme de Kruskal. Maintenant que nous avons réalisé une extension maximale de la métrique de Schwarzschild, nous allons nous intéresser aux géodésiques dans ce nouveau système de coordonnées. Nous nous bornerons aux mouvements radiaux ($d\theta = 0, d\phi = 0$) c'est à dire aux mouvements dans le plan u, v . Par la relation 164, on obtient que les hyperboles $u^2 - v^2 = cste$ correspondent aux courbes $r = cste$. Il faut bien sur garder l'esprit que ces hyperboles sont en réalité des hyperboles "tridimensionnelle" de l'espace temps. En particulier, si $r = 2M$ on obtient $u^2 = v^2$ soit $v = \pm u$. Par la relation 165, on obtient que les courbes du type $t = cste$ sont des droites passant par l'origine.

Si γ est une géodésique de type lumière et si $u = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ est son vecteur tangent, alors en utilisant l'expression de la métrique de kruskal et le fait que c'est une courbe plan, on obtient que $\dot{v}^2 - \dot{u}^2 = 0$. D'où $\frac{dv}{du} = \pm 1$. Dès lors les géodésiques de type lumière sont les droites parallèles aux bissectrices des axes.

On résume ces propriétés sur le diagramme suivant appelé diagramme de Kruskal :



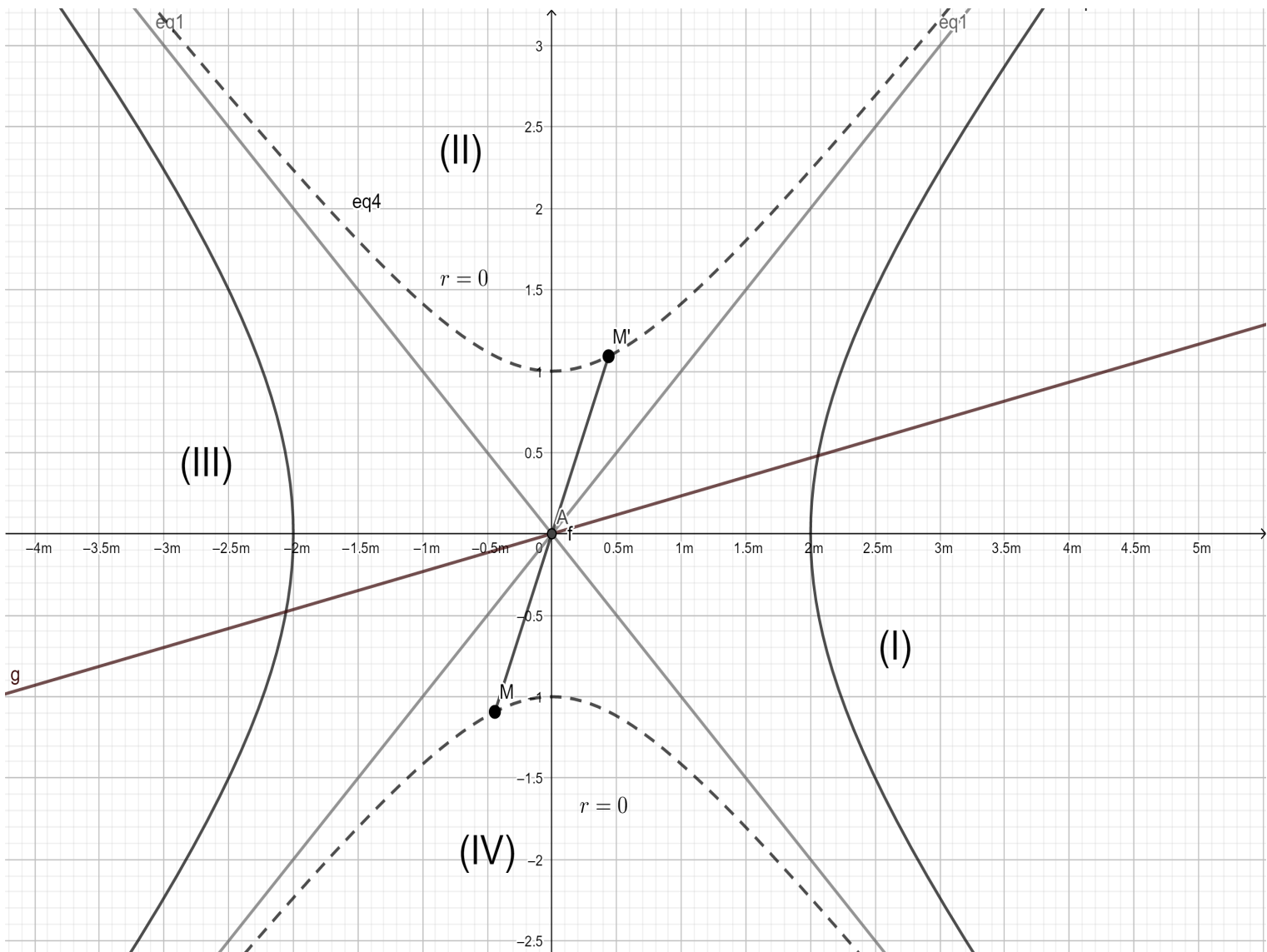
Sur le graphe suivant, on a représenté un vecteur représentant un photon émis au point P et reçu au point P' par un observateur statique. Un observateur statique ayant pour coordonnée $r = cste$, sa courbure d'univers est donc une hyperbole. Le vecteur est un vecteur directeur d'une droite parallèle à la première bissectrice.



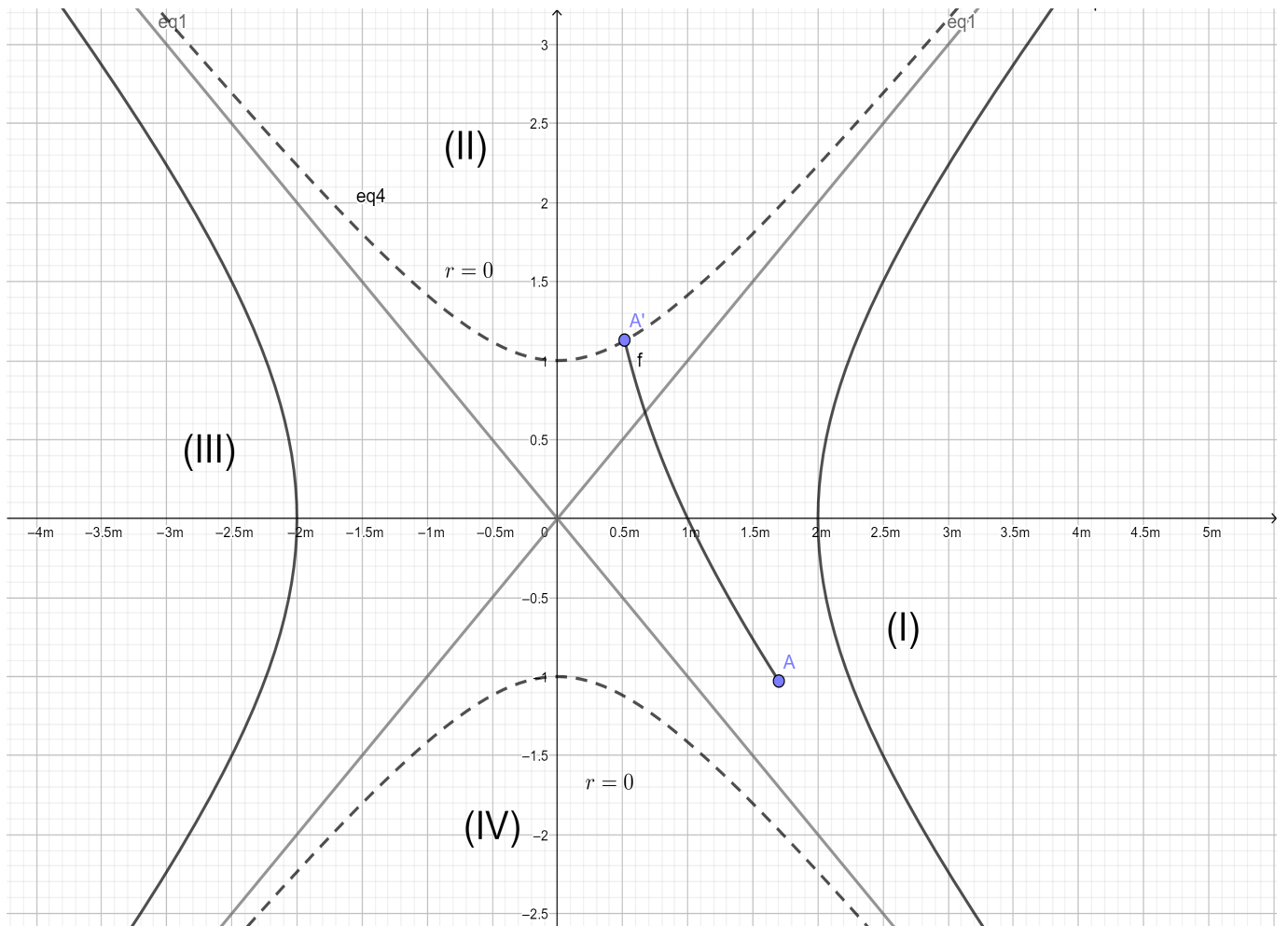
Les hyperboles $r = cste$ montrent bien le caractère asymptotiquement plat de l'espace temps : la courbure de chaque branche d'hyperbole diminue lorsque r croît et devient à l'infini une droite verticale du diagramme. Dans les régions symétriques (II) et (IV), on a représenté la singularité $r = 0$ par une hyperbole...

Cette extension analytique permet d'obtenir des propriétés du trou noir (bien qu'un tel objet n'ait pas été proprement défini) car toute l'information à $r = 2M$, que la métrique de Schwarzschild rejetait à l'infini, est comprise ici sur les deux bissectrices.

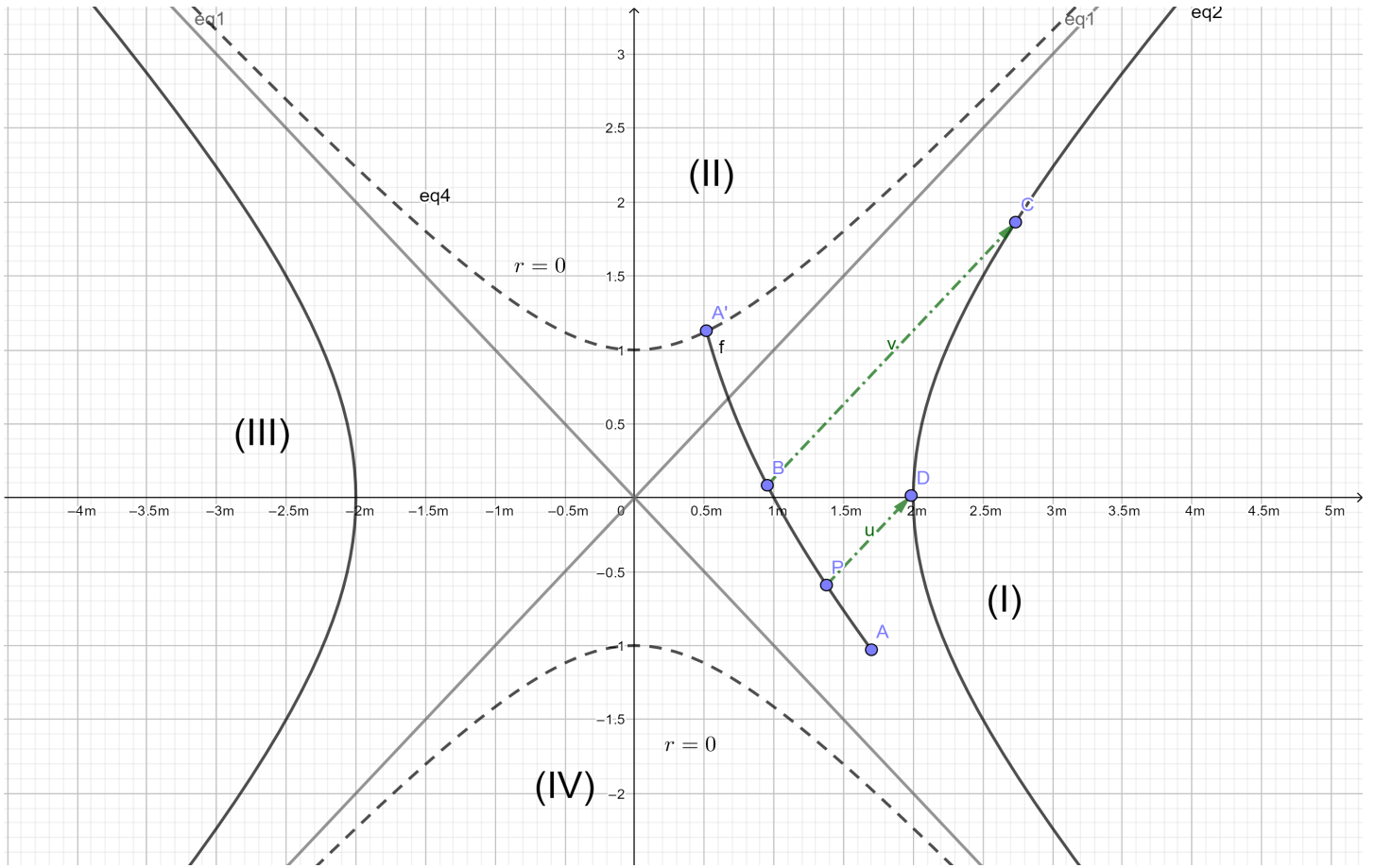
Une géodésique de type $t = cste$ est soit une droite passant par l'origine avec une longueur propre infinie, soit un segment de droite $([M, M'])$ avec des extrémités situées sur la singularité $r = 0$. Ce diagramme montre qu'il n'y a aucune discontinuité en $r = 2M$ ce qui confirme encore une fois la nature apparente de la singularité.



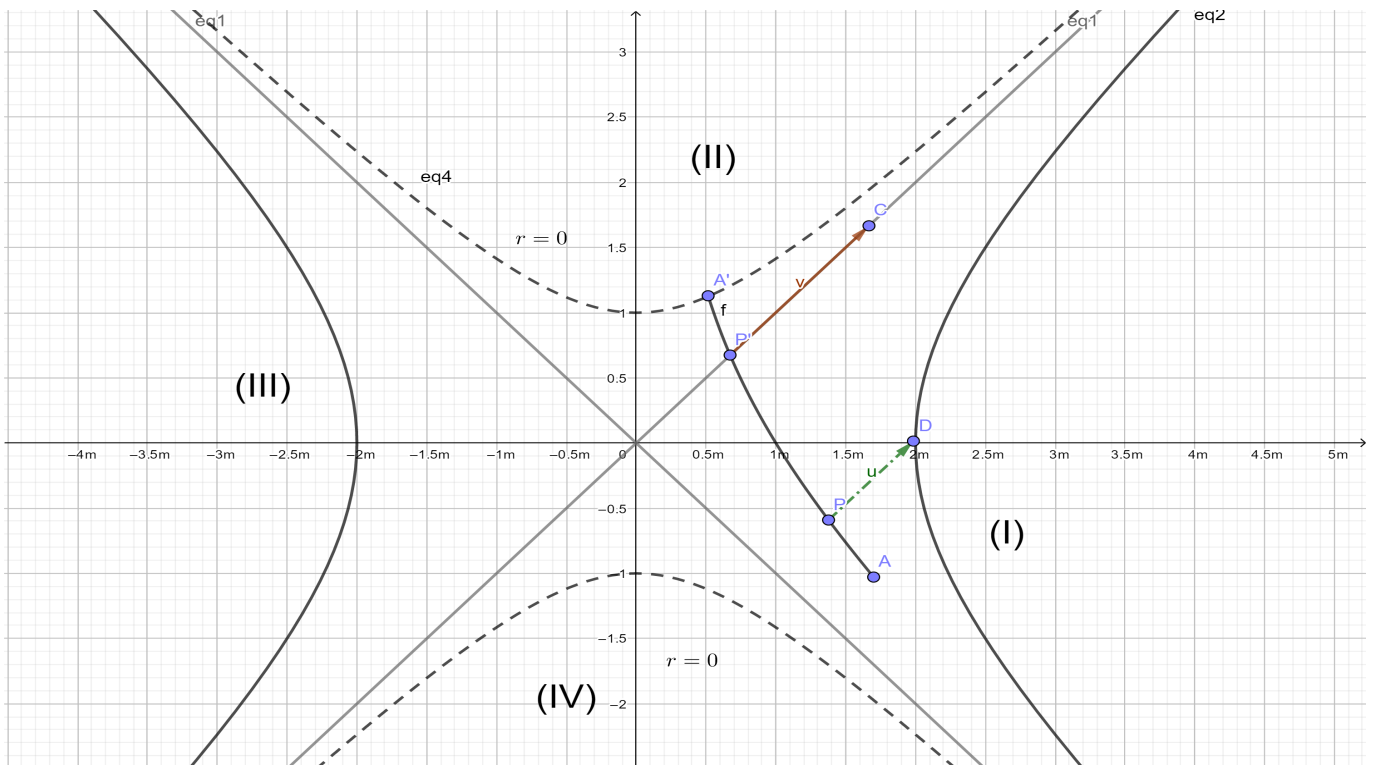
Une géodésique de genre temps prend naissance en A à un instant donné disons t et à une coordonnée radiale r . Cette géodésique va décroître et rencontrer successivement toutes les surfaces $r = cste$ jusqu'à $r = 0$. Cette géodésique décrit l'éroulement gravitationnel de la surface d'une sphère homogène.



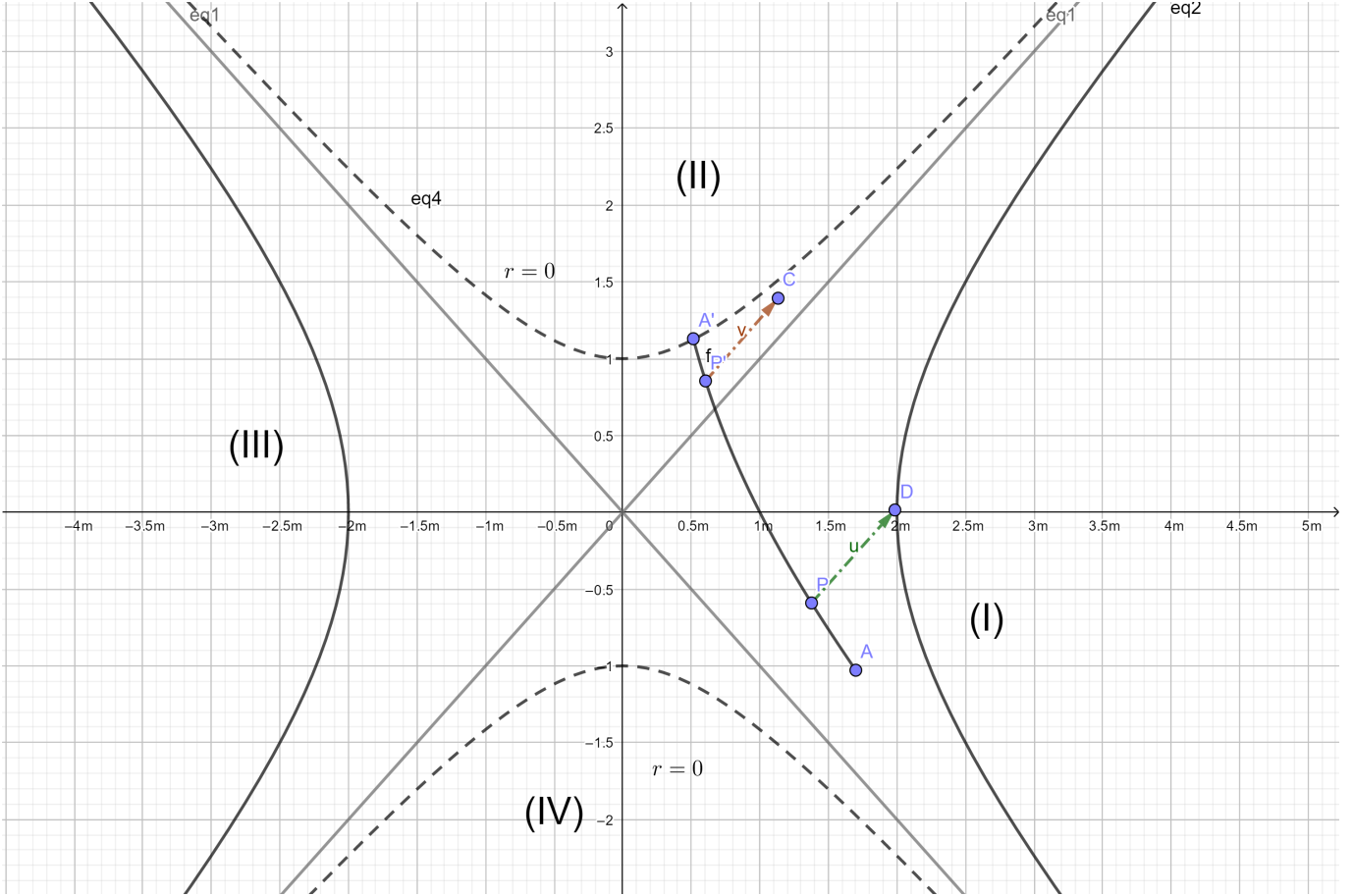
Prenons maintenant une géodésique de type temps et supposons que l'on émette en un point P de la trajectoire un photon. Considérons aussi un observateur statique. La ligne d'univers (i.e sa trajectoire) correspond à une courbe $r = cste$ donc à une hyperbole. Tant que le photon est émis en un point de coordonnée $r \neq 2M$, il rejoindra la ligne d'univers de l'observateur (i.e sa trajectoire intersectera l'hyperbole) en un temps fini. En effet la trajectoire du photon est une géodésique de type lumière donc une droite affine parallèle à l'une des bissectrices et on en déduit que cette droite intersectera n'importe quelle hyperbole en un temps fini. Si maintenant un autre photon est émis en un point P' de la trajectoire tel que $r_{P'} \neq 2M$ alors comme précédemment, il attendra la ligne d'univers de l'observateur en un temps fini mais mettra plus de temps que le photon émis au point P .



Considérons maintenant S le point d'intersection de la géodésique avec la bissectrice $r = 2M$ et supposons qu'un photon est émis en ce point. La courbe du photon suivra donc cette bissectrice, asymptote de toutes les hyperboles $r = cste$. Le photon ne rejoindra donc jamais la ligne d'univers de l'observateur (décalage spectral infini) et on en déduit qu'un observateur ne perçoit pas des objets à $r = 2M$.



Par ailleurs, toute géodésique radiale du genre temps ou du genre lumière issu d'un point de la région (II) ne sort pas de l'angle formé par les deux bissectrices. En effet si par exemple un photon est émis en un point correspondant à $r < 2M$ dans l'intersection des régions (I) et (II) alors sa trajectoire sera parallèle à la première bissectrice et par conséquent, il n'atteindra jamais la ligne d'univers d'un observateur. Ainsi un observateur statique ne voit jamais des objets situés à $r \leq 2M$.



Le diagramme permet aussi de parler du temps propre de l'écrasement d'un astre sur lui-même. Un observateur en mouvement avec l'écrasement gravitationnel de la surface de l'astre constaterait que le rayon de Schwarzschild est atteint en un temps fini et que l'écrasement se poursuit au delà de $r = 2M$. Cependant, pour un observateur extérieur à la sphère qui s'écrase, l'horizon $r = 2M$ qui est atteint en un temps "infini". En effet, la droite d'équation $v = u$, la première bissectrice correspond à $r = 2M$ et $t = +\infty$. L'hypersurface $\{r = 2M\}$ est donc appelée un horizon car c'est la limite de l'observable. Aucun photon ni aucune particule à $r \leq 2M$ ne peut sortir quelque soit l'observateur considéré.

Tous les diagrammes jusqu'ici ont été fait en supposant que la ligne d'univers de l'observateur est située dans la partie (I) du plan. De même, nous avons majoritairement utilisé les régions (I) et (II) pour comprendre la trajectoire d'un photon ou d'une particule matérielle. Les régions (I) et (III) ainsi que les régions (IV) et (II) jouent des rôles symétriques. Ainsi nous aurions pu travailler avec les partie (II) et (IV) bien que dans ces parties, lorsque t croît, v décroît et cela enlève à v son caractère de variable temporelle.

6.3. Horizon des événements. Un trou noir statique est décrit par la métrique de Schwarzschild (qui est solution des équations d'Einstein dans le vide). Cette métrique, comme nous l'avons vu précédemment a deux singularités ; la singularité centrale qui est liée à l'espace temps et la fausse singularité à $R = 2M$ du à un mauvais système de coordonnées. La singularité à $r = 0$ n'est pas la caractéristique première d'un trou noir. Cette dernière est en réalité l'horizon des événements dont nous allons parler à présent.

Remarque 6.3. Nous allons étudier l'horizon soit l'hypersurface $r = 2M$. La métrique de Schwarzschild est singulière en $r = 2M$ il va donc falloir utiliser un autre système de coordonnées. On pourrait utiliser les coordonnées de Kruskal mais nous n'avons pas besoin de l'extension maximal pour étudier cette hypersurface. Posons $\tilde{t} = t + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$. Des calculs

similaires à ceux de la partie 6 donnent l'expression de la métrique dans les coordonnées (v, r, θ, ϕ) :

$$(166) \quad g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\tilde{t}^2 + 2\frac{2M}{r}d\tilde{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

Définition 6.3. Si g est la métrique de Schwarzschild en coordonnées (t, r, θ, ϕ) alors l'hypersurface $r = 2M$ est appelée horizon des évènements.

Remarque 6.4. — La condition $r = \text{cste}$ définit une sous variété de codimension 1 donc une hypersurface.

— D'une manière générale, l'existence d'un horizon des évènements définit un trou noir. Si la singularité $r = 0$ n'était pas entourée d'un horizon alors elle porterait le nom de singularité nue. Une conjecture appelée conjecture de censure cosmique stipule qu'un effondrement gravitationnel d'une étoile engendre un trou noir et non une singularité nue.

Remarque 6.5. L'horizon des évènements est une hypersurface du genre lumière ce qui revient à dire que la métrique g est dégénérée. En effet l'horizon des évènements est l'hypersurface $r = 2M$ ainsi, on obtient en posant $R_S = 2M$:

$$(167) \quad g|_{\mathcal{H}} = R_S^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

La direction t est une direction sur laquelle la métrique est induite est dégénérée. Pour cette métrique, le champ de Killing ∂_t est un champ de vecteurs de type lumière sur \mathcal{H} . En effet, on a :

$$(168) \quad g(\partial_t, \partial_t) = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

Ainsi, en évaluant en $r = R_S$, on obtient $g(\partial_t, \partial_t) = 0$. Un point (t, r, θ, ϕ) de \mathcal{H} a une coordonnée en r constante. On en déduit que l'espace vectoriel tangent en un point p de \mathcal{H} est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\partial_t, \partial_\theta, \partial_\phi)$. Soit donc $v \in T_p(\mathcal{H})$. On a

$$(169) \quad v = v_t\partial_t + v_\theta\partial_\theta + v_\phi\partial_\phi$$

Maintenant, on sait que ∂_t est orthogonal à $\partial_\theta, \partial_\phi$. Ainsi, ∂_t est orthogonal à l'hypersurface \mathcal{H} . Mais le vecteur ∂_t est aussi tangent à l'hypersurface en posant $v_t = 1, v_\theta = 0, v_\phi = 0$.

Cette propriété de l'hypersurface \mathcal{H} est en fait une propriété générique pour les autres solutions aux équations d'Einstein. L'horizon peut donc s'interpréter comme un sorte de "couche" qu'une particule ne peut traverser que de l'extérieur vers l'intérieur. Les photons émis à "l'intérieur" de cette "couche" ne peuvent donc jamais sortir et atteindre la région asymptotiquement plate située à l'infini.

7. OUVERTURE : MÉTRIQUE DE REISSNER-NORDSTRÖM

La solution de Schwarzschild aux équation d'Einstein décrit un objet M statique à symétrie sphérique. Cependant cette solution ne prend pas en compte la charge de l'objet M . La métrique de Reissner-Nordström est une autre métrique solution des équations d'Einstein dans le vide. Cette solution corrige légèrement la métrique de Schwarzschild. Elle décrit un astre de masse M et de charge Q statique et à symétrie sphérique. Elle a pour expression :

$$(170) \quad g = c^2\left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{R_Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{R_Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

où (t, r, θ, ϕ) sont les coordonnées que nous avons utilisé pour la métrique de Schwarzschild. M représente la masse de l'objet et Q sa charge électrique. c et G sont respectivement la vitesse de la lumière dans le vide et la constante de Gravitation.

R_S est le rayon de Schwarzschild $\frac{2GM}{c^2}$. R_Q est un rayon défini par $R_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}$.

Cette métrique, contrairement à la métrique de Schwarzschild, possède deux horizons : L'horizon de évènements comme dans la métrique de Schwarzschild et l'horizon de Cauchy. Ces horizons sont situés en $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ où r_+ est l'horizon des évènements et r_- l'horizon de Cauchy.

RÉFÉRENCES

- [1] Robert M.Wald,*General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago and London,1984
- [2] Charles Cochet, *Généralités sur les Fibrés*, Université Paris 7 Denis Diderot
- [3] Pierre Pansu,*Chapitre 7 :Connexions, Théorie de Chern-Weil*,2005
- [4] Pierre Pansu,*Chapitre 3 :Connexion de Levi-Civita*,2005
- [5] Pierre Marx, *Sur l'exactitude de la solution de Reissner-Nordström*,2009, France
- [6] Gilles Leborgne,*Mécanique : Tenseurs 3ème partie-calcul sur les surfaces*,Université Clermont-Auvergne, 2010
- [7] Yannis Bardoux,*Trous noirs dans des théories modifiées de la Gravitation*,Université Paris-Sud
- [8] H.Andrillat,*Introduction aux développements récents de la théorie Einsteinienne de la Gravitation*, HAL archives-ouvertes,1973
- [9] Marc Troyanov, *Notes du cours d'introduction à la Géométrie Riemannienne*,EPFL,2018
- [10] Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Françoise et Claude Piquet, *Géométrie différentielle avec 80 figures*, 2ème édition, ellipses, 2000