

5. Das Frequenzkennlinienverfahren

Beim so genannten *Frequenzkennlinienverfahren* handelt es sich um ein Reglerentwurfverfahren im Frequenzbereich. Der Reglerentwurf erfolgt dabei auf Basis von Anforderungen an das Einschwingverhalten der Antworten des geschlossenen Regelkreises auf gewisse ausgewählte Testfunktionen, die dann in Anforderungen an das Bode-Diagramm des offenen Kreises übertragen werden. Dem Frequenzkennlinienverfahren liegt der Regelkreis mit einem Freiheitsgrad von Abbildung 5.1 mit der Führungsgröße $r(t)$, der Stellgröße $u(t)$, dem Regelfehler $e(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ zu Grunde.

Ausgangspunkt für das Frequenzkennlinienverfahren ist die Vorgabe von Kenngrößen zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises mit der Übertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{r}} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (5.1)$$

als Antwort auf gewisse Testsignale. Dazu betrachte man den in Abbildung 5.2 dargestellten typischen Verlauf der Sprungantwort $h(t)$ des geschlossenen Kreises für $r(t) = \sigma(t)$.

Das Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises wird nun anhand der drei nachfolgenden Kenngrößen beurteilt:

- (1) Die *Anstiegszeit* t_r als Maß für die Schnelligkeit (Dynamik),
- (2) die *Überschwingweite* M oder das *prozentuelle Überschwingen* $\ddot{u} = (M - 1) 100$ als Maß für den Dämpfungsgrad (Dynamik) sowie
- (3) die *bleibende Regelabweichung* e_∞ als Maß für die stationäre Genauigkeit.

Diese *Kenngrößen des zeitlichen Verhaltens* der Sprungantwort des geschlossenen Kreises können nun über *empirische Näherungsbeziehungen* mit dem *Frequenzgang des offenen Kreises* $L(j\omega)$ in Zusammenhang gebracht werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ in der Form (4.54) angegeben werden kann und die Bedingungen von Satz 4.6 erfüllt.

- (1) Die *Anstiegszeit* t_r hängt mit der *Durchtrittsfrequenz* ω_C über die Näherungsbeziehung

$$\omega_C t_r \approx 1.5 \quad (5.2)$$

zusammen. Da vorausgesetzt wurde, dass der Amplitudengang von $L(s)$ nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie aufweist, trennt die Durchtrittsfrequenz ω_C jene Frequenzen, die vom offenen Regelkreis verstärkt werden, von jenen, die vom offenen Regelkreis abgeschwächt werden (zur Erläuterung siehe auch Abbildung 4.10).

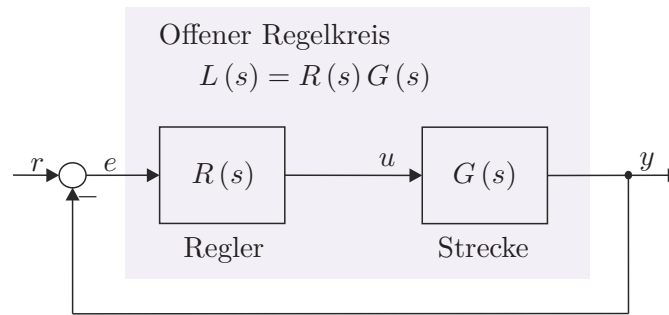


Abbildung 5.1.: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad als Basis für das Frequenzkennlinienverfahren.

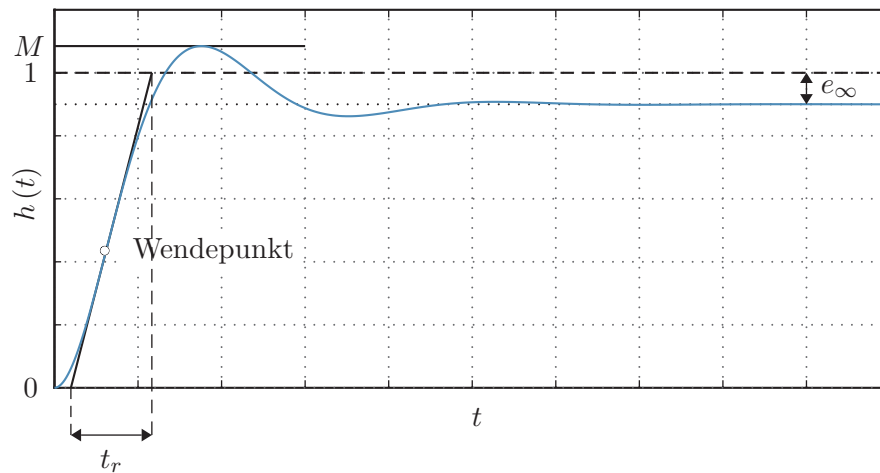


Abbildung 5.2.: Kenngrößen der Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Damit ist, wie bereits im vorigen Kapitel besprochen, die Durchtrittsfrequenz ω_C ein Maß für die Bandbreite des offenen Kreises und bei steigendem ω_C wird dementsprechend auch die Dynamik des geschlossenen Kreises schneller.

- (2) Das *prozentuelle Überschwingen* \ddot{u} kann über die empirische Näherungsbeziehung

$$\Phi[^\circ] + \ddot{u}[\%] \approx 70 \quad (5.3)$$

mit der Phasenreserve Φ von (4.55) in Verbindung gebracht werden (siehe auch Abbildung 4.19). Nach Satz 4.6 ist die Phasenreserve Φ ein Maß für den Abstand zur Stabilitätsgrenze. Dies hat zur Konsequenz, dass eine Verminderung der Phasenreserve Φ eine Zunahme der Schwingneigung bzw. des Überschwingens mit sich bringt.

Um diese Argumentation zu unterstreichen, berechne man den Betrag der Füh-

rungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ von 5.1 an der Stelle $s = \mathbb{I}\omega_C$

$$|T_{r,y}(\mathbb{I}\omega_C)| = \frac{|L(\mathbb{I}\omega_C)|}{|1 + L(\mathbb{I}\omega_C)|} = \frac{|-\cos(\Phi) - \mathbb{I}\sin(\Phi)|}{|1 - \cos(\Phi) - \mathbb{I}\sin(\Phi)|} = \frac{1}{2\left|\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right|}. \quad (5.4)$$

Man erkennt, dass wegen

$$\lim_{\Phi \rightarrow 0} |T_{r,y}(\mathbb{I}\omega_C)| = \infty \quad (5.5)$$

der geschlossene Kreis $T_{r,y}(s)$ für $\Phi = 0$ ein konjugiert komplexes Polpaar bei $\pm\mathbb{I}\omega_C$ aufweist und damit die Sprungantwort ungedämpft schwingt.

Aufgabe 5.1. Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$L(\mathbb{I}\omega_C) = -\cos(\Phi) - \mathbb{I}\sin(\Phi)$$

mit der Durchtrittsfrequenz ω_C und der Phasenreserve Φ gilt.

(3) Die *bleibende Regelabweichung*

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) \quad (5.6)$$

steht nun direkt mit dem *Verstärkungsfaktor* V der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ in Verbindung. Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist, kann für (5.6) unmittelbar der Endwertsatz der Laplace-Transformation angewandt werden, und man erhält für e_∞ die Beziehung

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \hat{r}(s). \quad (5.7)$$

Setzt man für $L(s)$ in (5.7) die Beziehung (4.54)

$$L(s) = \frac{V z_L(s)}{s^\rho n_L(s)} \exp(-sT_t), \quad z_L(0) = n_L(0) = 1, \quad T_t > 0 \quad \text{und} \quad \rho \in \{0, 1, 2\} \quad (5.8)$$

ein, dann folgt e_∞ zu

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^\rho n_L(s)}{s^\rho n_L(s) + V z_L(s) \exp(-sT_t)} \hat{r}(s). \quad (5.9)$$

Die bleibende Regelabweichung e_∞ für die beiden Testsignale $r(t) = \sigma(t)$ und $r(t) = t$ jeweils für $\rho \in \{0, 1\}$ sind nachfolgender Tabelle

$$\begin{array}{l} r(t) = \sigma(t) \quad \text{bzw.} \quad \hat{r}(s) = \frac{1}{s} : \\ r(t) = t \quad \quad \quad \text{bzw.} \quad \hat{r}(s) = \frac{1}{s^2} : \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \Rightarrow e_\infty = \frac{1}{1 + V} \\ \rho = 1 \Rightarrow e_\infty = 0 \\ \rho = 0 \Rightarrow e_\infty = \infty \\ \rho = 1 \Rightarrow e_\infty = \frac{1}{V} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

zu entnehmen.

Aufgabe 5.2. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung e_∞ für die beiden Testsignale $r(t) = \sigma(t)$ und $r(t) = t$ für $\rho = 2$.

Lösung von Aufgabe 5.2.

$$\rho = 2 : \begin{cases} r(t) = \sigma(t) & \Rightarrow e_\infty = 0 \\ r(t) = t & \Rightarrow e_\infty = 0 \end{cases}$$

Man erkennt also aus (5.9) und (5.10), dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ mindestens eine einfache Polstelle bei $s = 0$ ($\rho \geq 1$) haben muss, damit die bleibende Regelabweichung zufolge eines Eingangssprunges $r(t) = \sigma(t)$ Null ist. Analog dazu muss $L(s)$ mindestens eine doppelte Polstelle bei $s = 0$ ($\rho \geq 2$) haben, damit die bleibende Regelabweichung bei einer rampenförmigen Eingangsgröße $r(t) = t$ Null wird.

Man beachte, dass die *empirischen Näherungsbeziehungen* (5.2) und (5.3) für eine Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises vom Typ

$$T_{r,y}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2}, \quad T > 0 \quad \text{und} \quad 0 < \xi < 1 \quad (5.11)$$

mit der zugehörigen Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L(s) = \frac{1}{sT(2\xi + sT)} \quad (5.12)$$

auch exakt hergeleitet werden können. Lösen Sie dazu nachfolgende Aufgaben:

Aufgabe 5.3. Berechnen Sie die Steigung Δt_W der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (5.11) am Wendepunkt (siehe Abbildung 5.2).

Ergebnis:

$$\Delta t_W = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Anstiegszeit t_r gilt $t_r = 1/\Delta t_W$. Berechnen Sie weiters allgemein die Durchtrittsfrequenz ω_C für $L(s)$ von (5.12).

Ergebnis:

$$\omega_C = \frac{1}{T} \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$$

Zeichnen Sie das Produkt $\omega_C t_r$ als Funktion des Dämpfungsgrades ξ im Bereich $0.5 \leq \xi \leq 0.8$.

Aufgabe 5.4. Berechnen Sie das Maximum M der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (5.11) (siehe Abbildung 5.2).

Ergebnis:

$$M = 1 + \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Bestimmen Sie weiters allgemein die Phasenreserve Φ für $L(s)$ von (5.12).

Ergebnis:

$$\Phi = \arctan\left(\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}\right)$$

Zeichnen Sie den Ausdruck

$$\underbrace{(M-1)100}_{\ddot{u}[\%]} + \Phi[^\circ]$$

als Funktion des Dämpfungsgrades ξ im Bereich $0.5 \leq \xi \leq 0.8$.

Es hat sich nun gezeigt, dass die *empirischen Näherungsbeziehungen* (5.2) und (5.3) auch für Systeme höherer Ordnung sinnvoll sind, insbesondere dann, wenn die Sprungantwort des geschlossenen Kreises in erster Näherung durch ein konjugiert komplexes Polpaar bestimmt ist.

Damit lässt sich die *Vorgangsweise beim Reglerentwurf nach dem Frequenzkennlinienverfahren* wie folgt angeben:

- (A) Zu einer gegebenen Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ müssen die Kenngrößen des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises (t_r , M oder \ddot{u} und e_∞) spezifiziert werden.
- (B) Die Kenngrößen t_r , M oder \ddot{u} und e_∞ werden mit Hilfe der Beziehungen (5.2), (5.3) und (5.9) in Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises $L(i\omega)$ übersetzt.
- (C) Ein Regler $R(s)$ muss so gewählt werden, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist und die Forderungen von (B) erfüllt werden. Erfüllt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ die Bedingungen von Satz 4.6, dann kann die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der Phasenreserve Φ beurteilt werden, anderenfalls muss man das Nyquistkriteriums von Satz 4.5 anwenden.
- (D) Um ein kriechendes Einlaufen der Sprungantwort in den stationären Endwert zu vermeiden, soll in (C) der Regler $R(s)$ so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz ω_C die Betragskennlinie von $L(s)$ mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Qualität des Entwurfes ist immer durch Simulation zu überprüfen, insbesondere auch deshalb, weil das Verfahren sich auf empirische Formeln stützt. Sind die

Ergebnisse nicht zufriedenstellend, dann muss man sich die Frage stellen, ob die Anforderungen von (A) überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob ein anderer Regler $R(s)$ von (C) die Situation verbessern würde.

- (F) Die Begrenzung der Stellgröße $u(t)$, die bei jedem technisch relevanten Prozess vorhanden ist, kann im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht systematisch berücksichtigt werden. Sollte sich bei der Simulation herausstellen, dass man zu viel Stellgröße benötigt, dann muss man die Anforderungen in (A) entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 4.3.1 verändern, also die Anstiegszeit t_r vergrößern. Im Rahmen einer Führungsregelung sollte auf keinen Fall ein Sprung sondern immer ein hinreichend glattes Signal als Führungsgröße verwendet werden (man wiederhole dazu auch die Überlegungen von Abschnitt 4.3.2).

Für die im Punkt (C) angesprochene geeignete Wahl des Reglers $R(s)$ soll in den drei folgenden Abschnitten exemplarisch gezeigt werden, wie und unter welchen Voraussetzungen man systematisch einen PI-Regler, einen Lead-Lag-Regler und einen Kompensationsregler entwerfen kann.

5.1. PI-Reglerentwurf

- (A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{5}{1 + 2 \times 0.707s + s^2} \quad (5.13)$$

Entwurfsvorgaben: $t_r = 3 \text{ s}$, $\ddot{u} = 10 \%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

- (B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises $L(\mathbb{I}\omega)$: $\omega_C = 0.5 \text{ rad/s}$, $\Phi = 60^\circ$ und der offene Kreis muss mindestens eine einfache Polstelle bei $s = 0$ haben.
- (C) Als Regler wird ein PI-Regler der Form

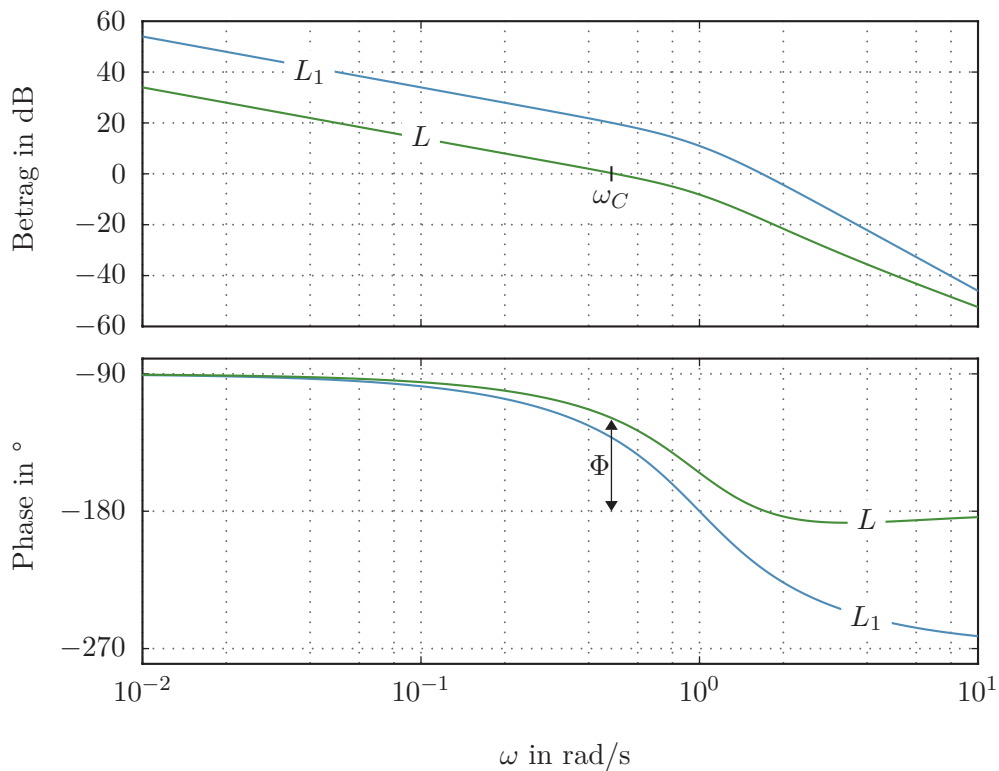
$$R(s) = \frac{V_I(1 + sT_I)}{s} \quad (5.14)$$

gewählt. Im ersten Schritt wird das Bode-Diagramm aller bekannten Terme des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$, also

$$L_1(s) = \frac{5}{s(1 + 2 \times 0.707s + s^2)} \quad (5.15)$$

gezeichnet, siehe Abbildung 5.3. An der Durchtrittsfrequenz $\omega_C = 0.5$ errechnet sich das Argument von $L_1(\mathbb{I}\omega_C)$ zu $\arg(L_1(\mathbb{I}\omega_C)) = -133.3^\circ$. Damit muss wegen $\Phi = 60^\circ$ mit Hilfe des Linearterms im Zähler des PI-Reglers $(1 + sT_I)$ die Phase um 13.3° angehoben werden. Aus dieser Bedingung

$$\arg(1 + \mathbb{I}\omega_C T_I) = \arctan(\omega_C T_I) = 13.3 \frac{\pi}{180} \quad (5.16)$$

Abbildung 5.3.: Bode-Diagramme des offenen Kreises $L_1(s)$ und $L(s)$.

folgt T_I zu $T_I = 0.47$.

In einem zweiten Schritt wird V so berechnet, dass der Amplitudengang bei ω_C die 0-dB-Linie schneidet, also die Bedingung

$$V_I \left| \frac{5(1 + 0.47I\omega_C)}{I\omega_C(1 - \omega_C^2 + I2 \times 0.707\omega_C)} \right| = 1 \quad (5.17)$$

erfüllt ist. Aus (5.17) erhält man sofort $V_I = 0.1$. Der PI-Regler lautet daher

$$R(s) = \frac{0.1(1 + 0.47s)}{s}. \quad (5.18)$$

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s)$ von Abbildung 5.3 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von $L(s)$ um die Durchtrittsfrequenz ω_C mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die zugehörige Sprungantwort des geschlossenen Kreises von Abbildung 5.4 zeigt, dass die Entwurfsanforderungen recht gut erfüllt werden.
- (F) In diesem Beispiel wurden an die Stellgröße keine Anforderungen gestellt.

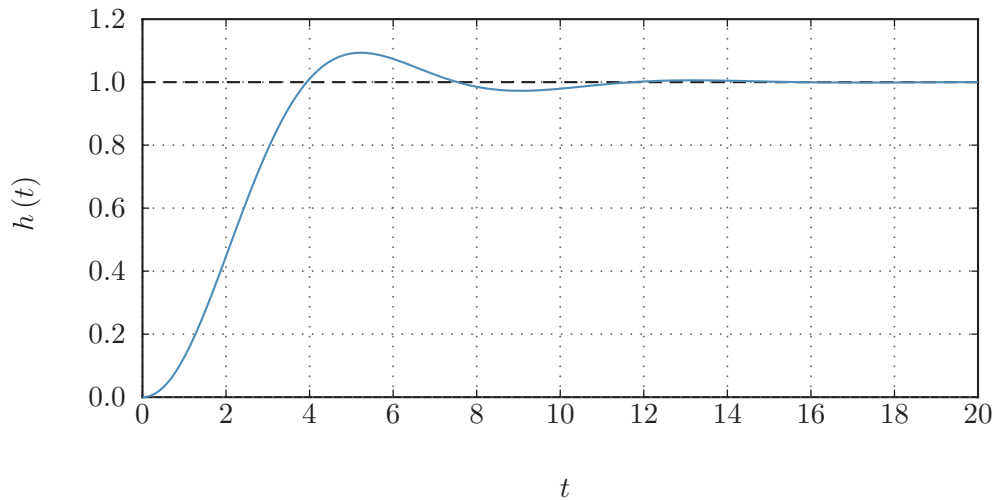


Abbildung 5.4.: Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Es sei noch anzumerken, dass die Vorgangsweise, zuerst die Phase an der Durchtrittsfrequenz ω_C mit dem Linearterm des PI-Reglers $(1 + sT_I)$ einzustellen und anschließend mit V_I den Betrag zu korrigieren, insofern Sinn macht, als der Verstärkungsfaktor V_I des PI-Reglers zwar den Betrag aber nicht die Phase ändert.

5.2. Lead-Lag-Reglerentwurf

(A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1.8 \left(\frac{s}{1.8} + 1 \right)}{s \left(1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left(\frac{s}{2.8} \right)^2 \right)} \quad (5.19)$$

Entwurfsvorgaben: $t_r = 0.1$ s, $\ddot{u} = 20\%$ und $e_\infty|_{r(t)=t} = 0.01$

(B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises $L(\mathbf{l}\omega)$: $\omega_C = 15$ rad/s, $\Phi = 50^\circ$ und der Verstärkungsfaktor V_L des offenen Kreises muss nach (5.10) den Wert

$$V_L = \frac{1}{e_\infty} = 100 \quad (5.20)$$

annehmen. Damit errechnet sich unmittelbar der Verstärkungsfaktor des Reglers zu

$$V_R = V_L/1.8 = 55.56 . \quad (5.21)$$

(C) Berechnet man nun Betrag und Phase von $L_1(\mathbf{l}\omega) = V_R G(\mathbf{l}\omega)$ an der Stelle $\omega = \omega_C$, dann erhält man

$$|L_1(\mathbf{l}\omega_C)| = 1.93, \quad (5.22a)$$

$$\arg(L_1(\mathbf{l}\omega_C)) = -169.65^\circ . \quad (5.22b)$$

Man erkennt also, dass der Betrag gesenkt und die Phase angehoben werden muss. Da der Verstärkungsfaktor V_L durch die Forderung an die bleibende Regelabweichung fixiert ist, kann nicht die gleiche Vorgangsweise wie im vorigen Abschnitt beim PI-Reglerentwurf gewählt werden, sondern man muss in diesem Fall einen Lead-Lag-Regler entwerfen. Dazu wird in einem ersten Schritt ein Lead-Regler so bestimmt, dass die Phase an der Durchtrittsfrequenz um $\Delta\varphi = 39.65^\circ + 10^\circ$ angehoben wird. Die Phase wird deshalb um zusätzliche 10° angehoben, da bei der nachfolgenden Betragsabsenkung durch ein Lag-Glied auch die Phase wieder abgesenkt wird.

Das Lead-Glied mit der Übertragungsfunktion (siehe auch (3.151))

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (5.23)$$

hat nach (3.155) und (3.156) an der Stelle

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\eta}T} \quad (5.24)$$

die maximale Phasenhebung φ_{\max} von

$$\varphi_{\max} = \arg(R_{Lead}(j\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{\eta}) . \quad (5.25)$$

Legt man nun die Durchtrittsfrequenz genau an die Stelle der maximalen Phasenhebung, also $\omega_{\max} = \omega_C$, dann folgt aus (5.25)

$$\eta = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right)^2 = 0.135 \quad (5.26)$$

bzw. mit (5.24) gilt

$$T = \frac{1}{\sqrt{\eta}\omega_C} = 0.1814 . \quad (5.27)$$

Das Lead-Glied hat demnach die Übertragungsfunktion

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} . \quad (5.28)$$

Eine erneute Berechnung des offenen Kreises führt zu der Übertragungsfunktion

$$L_2(s) = V_R G(s) R_{Lead}(s) = 55.56 \frac{1.8\left(\frac{s}{1.8} + 1\right)}{s\left(1 + 2 \times 0.8\frac{s}{2.8} + \left(\frac{s}{2.8}\right)^2\right)} \frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} . \quad (5.29)$$

Der Betrag und die Phase von $L_2(j\omega)$ an der Stelle $\omega = \omega_C$ ergibt sich zu

$$|L_2(j\omega_C)| = 5.252, \quad (5.30a)$$

$$\arg(L_2(j\omega_C)) = -120^\circ . \quad (5.30b)$$

Im nächsten Schritt muss nun an der Durchtrittsfrequenz ω_C der Betrag um $\Delta a = 1/5.252 = 0.19$ und die Phase um $\Delta\varphi = -10^\circ$ gesenkt werden. Dazu wähle man ein Lag-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}, \quad \eta > 1. \quad (5.31)$$

Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \arg(R_{Lag}(j\omega_C)) &= \arctan(\omega_C T) - \arctan(\omega_C \eta T) = \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_C T - \eta \omega_C T}{1 + \eta \omega_C^2 T^2}\right) = \Delta\varphi \end{aligned} \quad (5.32)$$

und

$$|R_{Lag}(j\omega_C)| = \frac{\sqrt{1 + \omega_C^2 T^2}}{\sqrt{1 + \eta^2 \omega_C^2 T^2}} = \Delta a \quad (5.33)$$

folgen für T und η die allgemeinen Beziehungen

$$T = \frac{\Delta a \sqrt{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} - 1}{\omega_C \tan(\Delta\varphi)}, \quad (5.34a)$$

$$\eta = \frac{\omega_C T - \tan(\Delta\varphi)}{\omega_C T (1 + \omega_C T \tan(\Delta\varphi))} \quad (5.34b)$$

bzw. für obiges Beispiel $T = 0.305$ und $\eta = 5.37$.

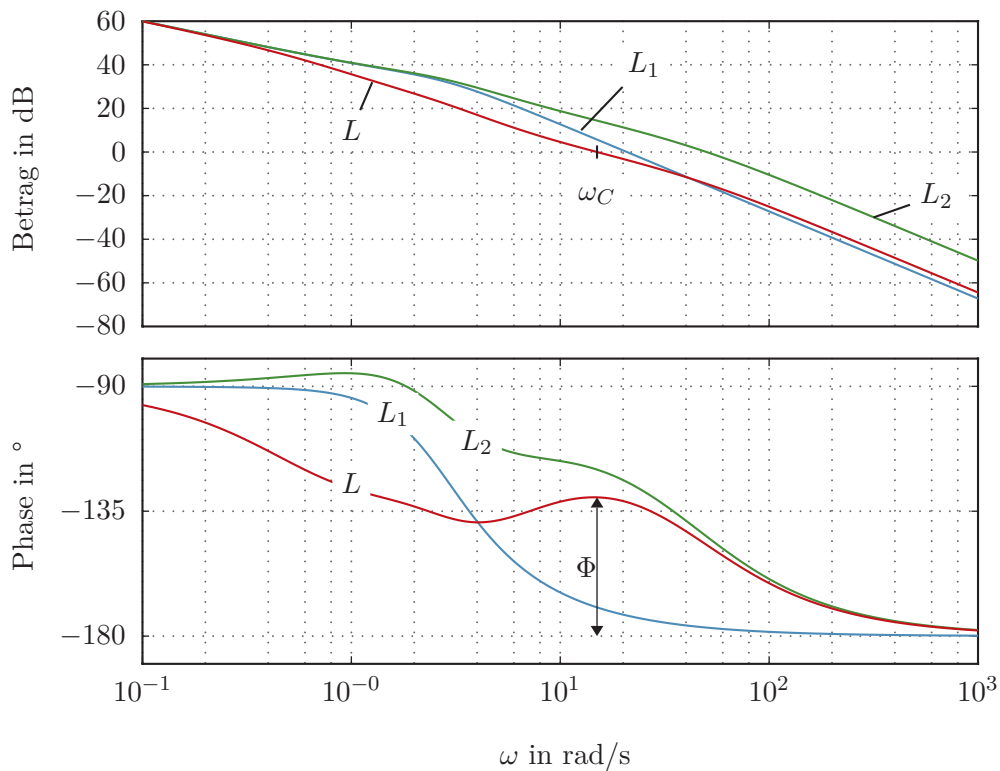
Damit lautet die Übertragungsfunktion des Lag-Reglers

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + 0.305s}{1 + 1.638s}. \quad (5.35)$$

Fasst man (5.21), (5.28) und (5.35) zusammen, dann ergibt sich die Reglerübertragungsfunktion zu

$$R(s) = V_R R_{Lead}(s) R_{Lag}(s) = 55.56 \left(\frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} \right) \left(\frac{1 + 0.305s}{1 + 1.638s} \right). \quad (5.36)$$

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s)$ von Abbildung 5.5 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von $L(s)$ um die Durchtrittsfrequenz ω_C mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Sprung- sowie die Rampenantwort des geschlossenen Kreises sind Abbildung 5.6 zu entnehmen.
- (F) In diesem Beispiel wurden an die Stellgröße keine Anforderungen gestellt.

Abbildung 5.5.: Bode-Diagramme des offenen Kreises $L_1(s)$ und $L(s)$.

Aufgabe 5.5. Berechnen Sie die Beziehungen für T und η von (5.34).

5.3. Kompensationsreglerentwurf

- (A) Als Streckenübertragungsfunktion betrachte man die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion (siehe auch (4.6a))

$$G_{u_{T,n},\omega_2}(s) = \frac{222.22}{\left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)}. \quad (5.37)$$

Entwurfsvorgaben: $t_r = 0.5$ s, $\ddot{u} = 5\%$, $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ und $|u_{T,n}| \leq 1$ für $r(t) = 100\sigma(t)$

- (B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises $L(i\omega)$: $\omega_C = 3$ rad/s, $\Phi = 65^\circ$ und der offene Kreis muss mindestens eine einfache Polstelle bei $s = 0$ haben
- (C) Als Regler wird in diesem Fall ein so genannter Kompensationsregler der Form

$$R(s) = \frac{V_R \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)}{s(1 + sT_R)^2} \quad (5.38)$$

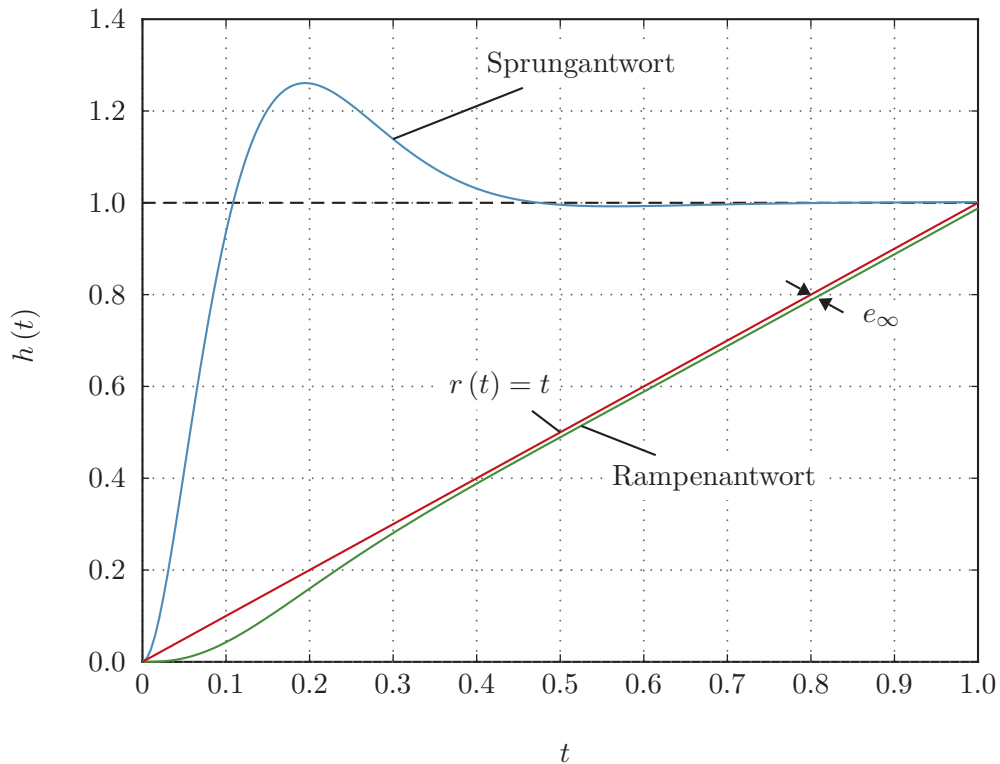


Abbildung 5.6.: Sprung- und Rampenantwort des geschlossenen Kreises.

gewählt. Im ersten Schritt wird das Bode-Diagramm aller bekannten Terme des offenen Kreises $L(s) = R(s) G_{uT,n,\omega_2}(s)$, also

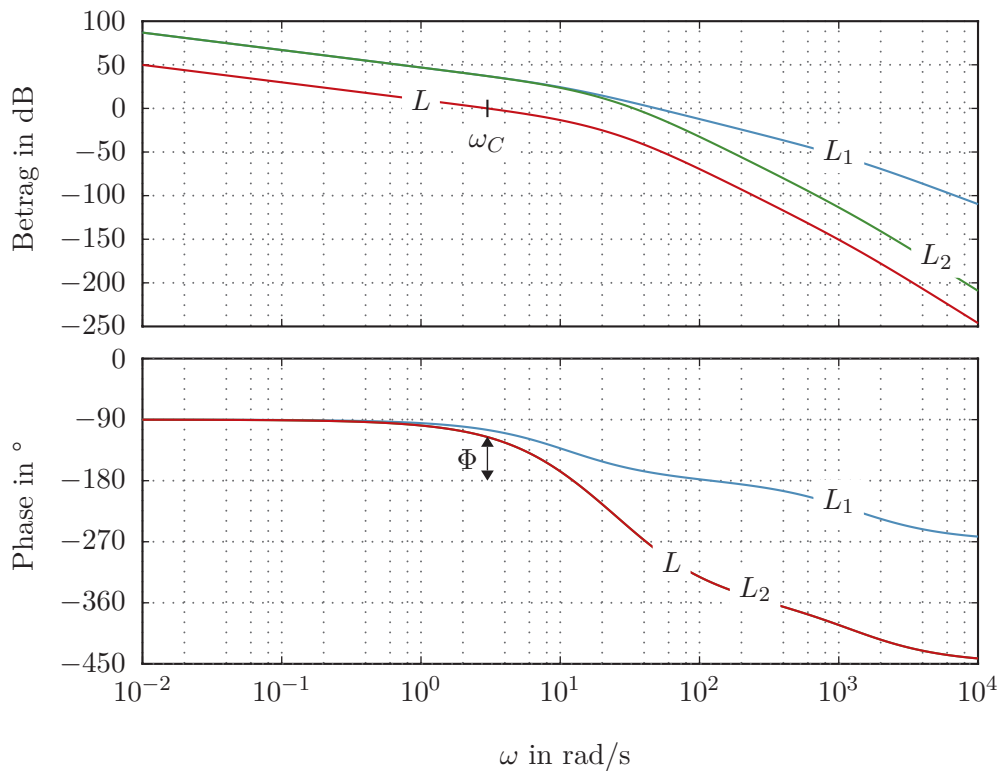
$$L_1(s) = \frac{222.22}{s \left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right)} \quad (5.39)$$

gezeichnet, siehe Abbildung 5.7. An der Durchtrittsfrequenz $\omega_C = 3$ errechnet sich das Argument von $L_1(j\omega_C)$ zu $\arg(L_1(j\omega_C)) = -104.5^\circ$. Daher muss wegen $\Phi = 65^\circ$ mit Hilfe der verbleibenden Terme im Nenner des Reglers $(1 + sT_R)^2$ die Phase um 10.5° abgesenkt werden. Aus dieser Bedingung errechnet sich T_R zu

$$T_R = \frac{\tan\left(\frac{10.5}{2} \frac{\pi}{180}\right)}{\omega_C} = 0.0306 \text{ .} \quad (5.40)$$

Die Betragskorrektur an der Durchtrittsfrequenz $\omega_C = 3$ erfolgt mit Hilfe des Verstärkungsfaktors V_R

$$V_R = \frac{1}{|L_2(j\omega_C)|} = 0.0141, \quad L_2(s) = \frac{222.22}{s \left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) (1 + 0.0306s)^2} \quad (5.41)$$

Abbildung 5.7.: Bode-Diagramme des offenen Kreises $L_1(s)$, $L_2(s)$ und $L(s)$.

und somit lautet die gesamte Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{0.0141 \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82} \right) + \left(\frac{s}{1.82} \right)^2 \right)}{s(1 + 0.0306s)^2}. \quad (5.42)$$

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s)$ von Abbildung 5.7 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von $L(s)$ um die Durchtrittsfrequenz ω_C mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Sprungantwort des geschlossenen Kreises ist dem linken Bild von Abbildung 5.8 zu entnehmen.
- (F) Zur Überprüfung der Betragsbeschränkung der Stellgröße $|u_{T,n}| \leq 1$ für $r(t) = 100\sigma(t)$ wird die Übertragungsfunktion

$$G_{r,u_{T,n}}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G_{u_{T,n},\omega_2}(s)} \quad (5.43)$$

berechnet und die Sprungantwort für $r(t) = 100\sigma(t)$ aufgezeichnet. Im rechten Bild von Abbildung 5.8 erkennt man, dass diese Forderung nicht eingehalten wird. Den

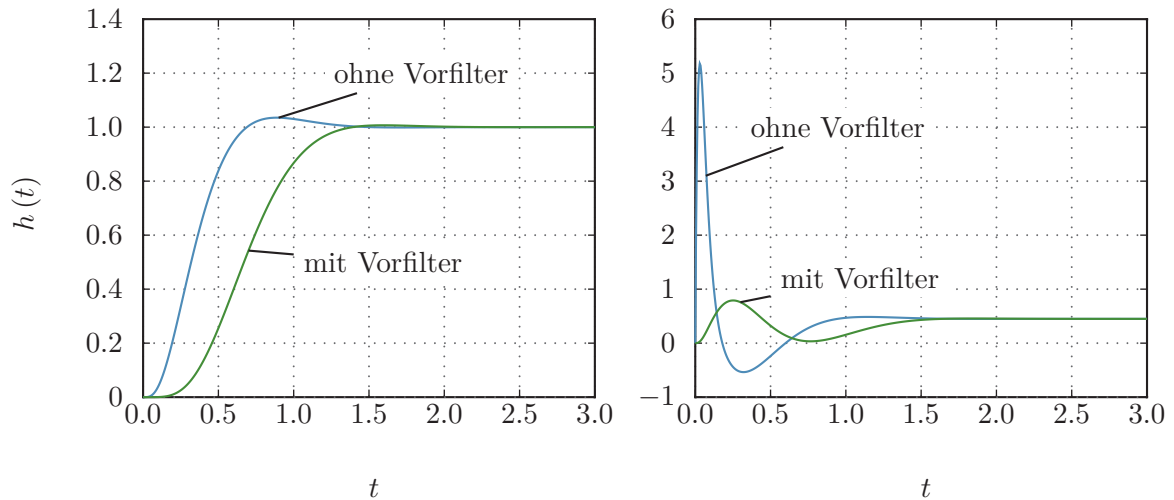


Abbildung 5.8.: Sprungantworten der Führungsübertragungsfunktion für $r(t) = \sigma(t)$ (links) und Stellgrößenübertragungsfunktion für $r(t) = 100\sigma(t)$ (rechts) mit und ohne Vorfilter.

Ausführungen von Abschnitt 4.3.2 folgend wird deshalb dem Regelkreis ein Vorfilter der Form

$$F(s) = \frac{\hat{r}}{\hat{\omega}_{2,soll}} = \frac{1}{1 + 2 \times 0.92 \left(\frac{s}{5}\right) + \left(\frac{s}{5}\right)^2} \quad (5.44)$$

vorgeschaltet.

Wie man sich anhand von Abbildung 5.8 selbst überzeugen kann, bedingt diese Maßnahme eine drastische Verringerung der Stellgröße ohne dabei wesentlich die Dynamik der Führungsregelung zu verringern.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass schwach gedämpfte quadratische Terme der Form $(1 + 2\xi sT + (sT)^2)$ mit $T > 0$, $0 < \xi < 0.7$ wie der Term $(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2)$ von (5.37) typischer Weise bei der Regelung mechanischer Systeme auftreten. Man beachte, dass obige Vorgangsweise eines Kompensationsreglerentwurfes dann bei praktischen Implementationen nicht zum Ziel führt, wenn die tatsächlichen Streckenparameter vom Modell zu weit abweichen. In diesem Fall empfiehlt es sich, den quadratischen Term nicht exakt zu kompensieren, sondern ein so genanntes *Notchfilter* zu entwerfen. Abbildung 5.9 zeigt das Bode-Diagramm eines möglichen Notchfilters für den Term $(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2)$ der Form

$$R_N(s) = \frac{1 + 2 \times 0.138/a \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2}{1 + 2 \times 0.138a \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2} \quad (5.45)$$

für verschiedene Werte von $a > 0$.

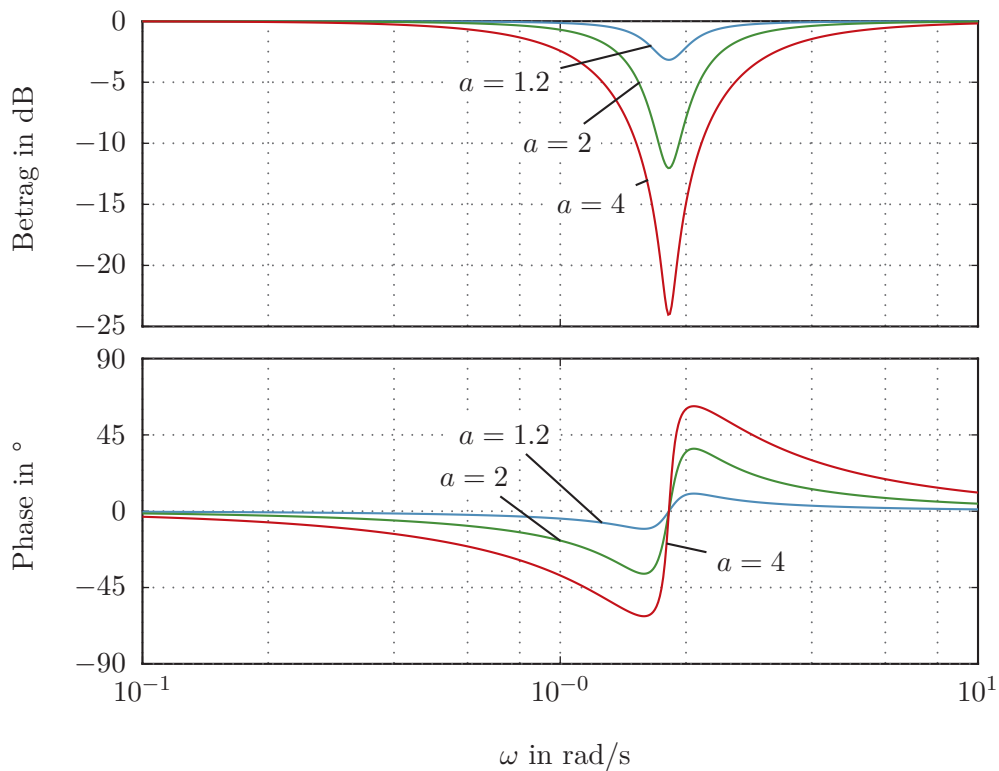


Abbildung 5.9.: Bode-Diagramm eines Notchfilters zur Kompensation der Resonanzfrequenz.

Man erkennt, dass größere Werte von a ein breitbandigeres Kompensieren der störenden Resonanzfrequenz bedingen und somit der Regelkreis robuster gegenüber Schwankungen des Wertes der Resonanzfrequenz wird, sich gleichzeitig aber die Phase vor der Resonanzfrequenz entsprechend verschlechtert.

Aufgabe 5.6. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{50}{\left(1 + \frac{s}{171}\right) \left(1 + \frac{s}{2330}\right)}$$

einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r = 0.01$ s, $\ddot{u} = 10\%$, $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ und $|u| \leq 15$ für $r(t) = 500\sigma(t)$ erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Lösung von Aufgabe 5.6. Ein möglicher PI-Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R(s) = 3.9 \frac{1 + \frac{s}{567.3}}{s} .$$

Aufgabe 5.7. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.5}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen $t_r = 1$ s, $\ddot{u} = 10\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ genügt.

Hinweis: Benutzen Sie einen Regler der Form

$$R(s) = V_R \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + sT_R}$$

und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Aufgabe 5.8. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.759}{\left(1 + \frac{s}{0.196}\right) \left(1 + 2 \times 0.152 \left(\frac{s}{5.945}\right) + \left(\frac{s}{5.945}\right)^2\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen $t_r = 2$ s, $\ddot{u} = 0\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ genügt.

Hinweis: Entwerfen Sie in einem ersten Schritt einen PI-Regler. Falls bei der Überprüfung des Entwurfsergebnisses durch Simulation in MATLAB/SIMULINK kein zufriedenstellendes Resultat erzielt wird, erweitern Sie den PI-Regler um ein geeignetes Notchfilter.

Aufgabe 5.9. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{2 + 2s + s^2}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen $t_r = 1$ s, $\ddot{u} = 20\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ genügt.

Hinweis: Benutzen Sie einen PI-Regler und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Aufgabe 5.10. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{s \left(2 + 2 \left(\frac{s}{5}\right) + \left(\frac{s}{5}\right)^2\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen $t_r = 0.25$ s, $\ddot{u} = 20\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ genügt.

Hinweis: Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Aufgabe 5.11. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{2 + 2\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

einen Regler so, dass die Anstiegszeit der Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgender Spezifikation $t_r = 0.75$ s genügt.

Hinweis: Da außer an die Anstiegszeit t_r keine weiteren Anforderungen gestellt sind, versuchen Sie den Entwurf mit Hilfe eines einfachen P-Reglers $R(s) = V_R$ durchzuführen.

Aufgabe 5.12. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = 2 \frac{1 + \frac{s}{1.2}}{s \left(1 + 2 \times 0.6 \left(\frac{s}{0.8} \right) + \left(\frac{s}{0.8} \right)^2 \right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen $t_r = 0.625$ s, $\ddot{u} = 10\%$ und $e_{\infty}|_{r(t)=t} = 0.25$ genügt.

Hinweis: Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

5.4. Literatur

- [5.1] C. Chen, *Control System Design*. New York: Pond Woods Press, 1987.
- [5.2] —, *Linear System Theory and Design*. New York: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1984.
- [5.3] J. C. Doyle, B. A. Francis und A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: MacMillan, 1992.
- [5.4] O. Föllinger, *Regelungstechnik*, 6. Aufl. Heidelberg: Hüthig Buch Verlag, 1990.
- [5.5] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, *Digitale Regelkreise*. München: Oldenbourg, 1991.
- [5.6] M. Horn und N. Dourdoumas, *Regelungstechnik*. München: Pearson Studium, 2004.
- [5.7] C. Rohrs, J. L. Melsa und D. G. Schultz, *Linear Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1993.
- [5.8] A. Weinmann, *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*, 3. Aufl. Wien New York: Springer, 1998, Bd. 1 und 2.