

Matematická slovní úloha jako komunikát. Slovní úlohy ve výuce matematiky a komunikační kompetence v mateřském jazyce¹

Milada Hirschová, PedF UK

milada.hirschova@pedf.cuni.cz

Mathematical word problems as a type of communication

The article deals with preliminary results of linguistic analysis oriented at wording of mathematical contextual/word problems both in Czech textbooks and in international testing materials. As a major feature of such texts, a high level of stereotypy in formulations as well as a prevailing mechanical problem-wording was found. As a result, mathematical word problems often appear either semantically underdetermined, or overloaded, therefore requiring additional steps of re-interpretation.

1. Tento článek vychází z prvních výstupů výzkumného projektu zaměřeného na zkoumání faktorů ovlivňujících úspěšnost řešení matematických slovních úloh. Projekt rovnocenně bere v úvahu jak hlediska matematická, tak hlediska porozumění slovním úlohám jakožto specifickým textovým útvarům a jejich interpretaci (přístup k řešení úlohy je výsledkem její interpretace), tj. komunikační kompetenci. Slovní

¹ Příspěvek vychází z výzkumu podporovaného projektem GAČR *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům*, reg. č. 16-06134S. Na řešení se podílejí pracovníci Katedry matematiky a didaktiky matematiky a Katedry českého jazyka PedF UK.

úlohy tradičně patří ve výuce matematiky mezi nejméně oblíbené; jako jedno z obvyklých zdůvodnění žáci uvádějí, že úlohy jsou pro ně málo srozumitelné. Článek se soustřeďuje na jazykovou charakteristiku slovních úloh a na poznatky, které byly v první fázi zpracování projektu získány². Nejprve podáme přehled jevů, které se ve formulacích slovních úloh objevují (opakovaně na různých stupních)³ a které byly vyhodnoceny jako potenciálně problematické – svou formulací mohou ztěžovat porozumění, popř. být zavádějící. Za podstatné pokládáme, že zacházení se slovními úlohami představuje metakomunikační dovednost, tedy kompetenci, již si musí být učitel vědom a žák/řešitelé k ní směřovat. Dalším neméně důležitým aspektem, který máme na mysli, je konzistentnost přístupu k užívání jazyka v jednotlivých předmětech – nemělo by platit, že formulačně korektní a komunikačně kompetentní a kultivované vyjadřování je nutné jen ve výuce českého jazyka, kdežto v jiných předmětech může být zanedbáváno či přehlíženo.

1.1 Východisko, s nímž zde pracujeme, lze formulovat následovně: I slovní matematické úlohy představují sdělení/komunikát (message). V tomto sdělení je implicitní sdělující subjekt (autor/produktor/zadavatel úlohy), který adresátovi (potenciálnímu řešiteli) popisem nějaké výchozí situace nebo uvedením souboru údajů zadává úkol. Úkol pro adresáta je následně specifikován otázkou, kterou se autor na adresáta obrací (*kolik?! jak velký* apod.), případně je mu autorem úkol zadán formou imperativu (*zjistí / sestav / vypočtej*).

Z tohoto hlediska mají úlohy dvojsložkovou, respektive trojsložkovou strukturu **S (M)**, v níž **S** je autorská rovina, autorovo implicitně ukotvené funkční sdělení „já zadávám tobě úkol“, **M** je autorem zadaný text úlohy (message). **M** se dále diferencuje na složku **M1**, v níž se popisuje výchozí situace obsahující údaje důležité pro úlohu („autobus jede nějakou rychlostí z bodu A do bodu B; školní zájezd pro celou třídu stojí x Kč a dosud zaplatilo tolik a tolik studentů; Helena vytvořila číselnou řadu s takovými a takovými vlastnostmi“ apod.), a z úkolovací složky **M2**, která se zakládá na situaci popsané v **M1**. **M2** vychází/vyplývá z **M1** a stanovuje úkol. Nejde o vyplývání/entailment v logickém smyslu, nejde ani o „roviny“ v představě tradičního strukturalismu, nýbrž o navazování, řetězení. Jakožto komunikát má tedy matematická slovní úloha stavbu **S (M1 → M2)**.

2. Jádrem skupiny problémů spojených se slovními úlohami je právě sám fakt, že úloha je formulována slovně. Žáci (potenciální řešitelé; dále užíváme označení *řešitel*) jsou nuceni, aby jednu formu kódování úkolu (verbalizace matematického problému v přirozeném jazyce) převedli na formu jinou, matematicky formulovanou, tedy aby rozeznali, které z údajů obsažených ve slovní úloze (v její složce **M1**) reprezentují prvky matematického zadání a mohou (mají) být převedeny na mate-

² První verze článku byla redakci ČJL zaslána již před časem a odráží, jak je uvedeno, výsledky první fáze pozorování jazykové stránky slovních úloh. Je pochopitelné, že od té doby se celý výzkumný projekt významně posunul, zejména v tom ohledu, že tým má k dispozici výsledky prvních fází testování. Nejde však o výsledky finální, které by mohly být brány za potvrzení výchozích hypotéz, proto by začlenění jejich popisu do stávajícího textu mohlo být zavádějící; navíc by musel vzniknout zcela jiný text. Opakuji tedy, že předkládaná studie upozorňuje na nejnepřehlednější jazykové rysy slovních úloh, jak byly zjištěny v první fázi výzkumu.

³ Jednotlivé úlohy, s jejichž texty zde pracujeme, pocházejí jednak z uvolněných souborů úloh TIMSS a PISA (2007, 2011, 2015), jednak z učebnic a cvičebnic užívaných na českých školách. Autory úloh neuvádíme proto, aby se případně necítili dotčeni tím, že jejich text byl podroben kritickému rozboru.

matické entity, s nimiž se následně bude operovat. Dále musejí řešitelé zvolit postup (algoritmus) řešení, tzn. použít identifikované podstatné složky v určitých, ke správnému výsledku vedoucích operacích. V této fázi je důležitá úloha učitele – má řešiteli usnadnit orientaci v získávání podstatných údajů, nasměrovat ho na ně, nemůže však zajít až do fáze explikace, kdy by úlohu řešil sám a řešiteli ji pouze předkládal.

2.1 Mimo jiné tedy řešitel musí odfiltrovat data podstatná od nepodstatných, významným faktorem proto bývá délka úlohy. Složka M1 ve slovních úlohách často obsahuje prvky „příběhu“:

- (1) *Michal a Katka plánují jednodenní výlet pro svou třídu;*
- (2) *Triatlon je závod, ve kterém sportovci nejprve plavou, pak jedou na kole a potom běží. První závodník, který dokončí celý závod, se stává vítězem;*
- (3) *Na světě je 95 % zboží přepravováno po moři tankery, nákladními a kontejnerovými loděmi.*

Taková úvodní pasáž má řešitele zaujmout, případně vztáhnout úlohu k jeho vlastním zkušenostem, tj. její funkce je motivační. (Slovní úlohy se často označují jako nástroj, který má ukázat uplatnění matematiky v běžném životě.) Úvodní informace však mohou svou délkou ovlivnit (zdržovat) porozumění tomu, co se vlastně zjišťuje, obsahovat (někdy záměrně) falešné signály. (Vliv prodloužení, nebo naopak zkrácení úvodní složky na úspěšnost řešení je v uvedeném projektu jedním z testovaných parametrů.) Přítomnost úvodní složky popisující situaci se do jisté míry kříží se snahou formulovat zadání co nejstručněji – preferovaně má zadání úlohy oživující, motivační prvky obsahovat, ty ale mají být vyjádřeny krátce. To často vede k vyjadřování stručnému až nenáležitě, buďto nevhodně kondenzovanému (ve výsledku nelogickému) nebo neexplicitnímu.

Příklad nelogické formulace:

- (4) *Veronika a Petra nasbíraly sušenou hluchavku, které bylo 1,5 kg.*

Užití nepravé přívlastkové věty, smysl je „sbíraly hluchavku a tu sušily“; sémanticko-syntakticky neakceptovatelné ani jako tzv. věta pokračovací (srov. Daneš 1985, s. 136–137). Mimojazyková zkušenost žáků navíc může obsahovat i to, že sběr v tomto případě není zaměřen na celé rostliny hluchavky, nýbrž pouze na květy.

Příklady nejednoznačných formulací:

- (5) *Kolik stojí kytice se stuhou a beze stuhy?*

U této otázky je nutno rozhodnout, zda mluvíme o jedné kytici, nebo o dvou kyticích různých.

- (6) *Kolik kg vody se vypařilo z 1 kg květů a 1 kg listů?*

U (6) je nutno se dohodnout, zda se výpočet bude týkat [1kg květů + 1 kg listů], tedy celkového množství odpařené vody bez rozlišení toho, ze které části rostliny pocházela (tzv. koordinace sjednocující), nebo zda se bude počítat množství vody odpařené z květů a množství odpařené z listů zvlášť, tj. [kolik z 1 kg květů] + [kolik z 1 kg listů]; tj. šlo by o koordinaci rozšiřující.

Podobné formulace (zejména (6)) vedou k tomu, že řešitel je nucen významy v úloze vyjádřené implikativně doplňovat, tj. pracovat s tím, jak byla úloha zadavatelem nejpravděpodobněji míněna – např. u (5) se pravděpodobně míní dvě kytice ze stejného počtu stejných květů; na jedné z nich je stuha s (předpokládanou) fixní cenou, na druhé nikoli. (I kytice ze stejného počtu stejných květů však může mít různou

cenu podle toho, jaká stuha na ní je.) U (6) ovšem v dané formulaci rozhodnout nelze a možnost, která se bude počítat, musí být zvolena.

2.2. Samostatnou kapitolu v jazykových formulacích slovních úloh představují souvětí užívající podmínkových spojek *jestliže*, *pokud*, resp. hovorového *když* (viz př. (7) níže), která ovšem podmínkovými souvětími ve vlastním slova smyslu nejsou. Jde o formulační stereotyp, který je rovněž nutno korigovat na základě zkušenosti (komunikační kompetence) se zadáváním podobných úkolů. Produktor zde očekává, že řešitel ví (ve své vzdělávací praxi se již s podobnými úlohami setkal), „co se tím obvykle myslí“, dále spoléhá na řešitelovu mimojazykovou zkušenost. Např. to, že osoba A odvedla procentuálně větší objem (stejně) práce než osoba B, není nutnou podmínkou (resp. působící příčinou) toho, že by měla dostat o stejné procento více zaplacení („jestliže/protože A odpracoval o 50 % více než B, dostane o 50 % více peněz“), jde pouze o naplnění platné konvence, jejíž znalost se u řešitele předpokládá. Dále např. běžná formulace typu „Jakou jelo auto průměrnou rychlostí, jestliže vyjelo z A v 15. 30, dojelo do B v 17. 15 a cesta z A do B je dlouhá x km?“ vyžaduje, aby na základě znalosti řešení podobných úloh byly veličiny uvedené v zadání změněny na veličiny jiné. Nejde o jednoznačný podmínkový vztah založený na *jestliže* A (protaze, antecedent) – pak B (apodoze, konsekvent), jaký je např. v souvětí *Jestliže bude špatné počasí, bude se zábava konat v sokolovně / Zábava se bude konat v sokolovně, jestliže bude špatné počasí*; převoditelný na *protože A, B (Protože bylo špatné počasí, konala se zábava v sokolovně.)* (Srov. např. Encyklopedický slovník češtiny, 2000, s. 41–42, 313.) O podmínkový vztah (implikaci v logicko-sémantickém smyslu) v takových formulacích nejde, vyžadovaná informace/výsledek (formální konsekvent – objem peněz, rychlost auta) se zjišťuje konvenčně, přičemž zásadní operace dointerpretování se nepojmenovává.

2.3 Další část problémů plyne ze skutečnosti, že zadání úloh např. v testování TIMSS a PISA se záměrně vyhýbá uvádění údajů, které by úlohu vztahovaly ke konkrétní zemi (zeměpisné názvy, názvy měn – např. se pracuje s fiktivní měnou pojmenovanou *zed*). Původní texty jsou v angličtině a používají se jejich překlady. České verze se vlivu angličtiny nevyhnuly – často mají tázací výrazy v jiné než počáteční pozici (*Přibližně kolik žab je v rybníku?*), z angličtiny se přebírá vysoký počet tzv. nepravých přívlastkových vět (které jsou v angličtině považovány za bezpříznakově korektní). V češtině je hypotaktické připojení obecně vnímáno jako kompaktnější než parataktické, proto se objevuje při snaze o stručnost. Nepravé vedlejší věty se v úlohách často spojují s nelogickými kondenzacemi. Např. *Veronika a Petra nasbíraly 1,5 kg sušené hluchavky* (nelogická kondenzace – kde by sbíraly sušenou hluchavku?), *za kterou dostaly 750 Kč* – nepravá přívlastková věta. V krajním případě lze takovouto hypotakticky připojenou větu považovat za tzv. vztažnou větu pokračovací nahrazující logické pokračování „a posléze za ni dostaly“ (srov. Daneš 1985, s. 136). Obecná tolerance tohoto stereotypního způsobu spojování vět ovšem vede k šíření případů, kdy je připojení s *který* zcela nesmyslné (*Cyklista nedal přednost dodávce, která ho odhodila na chodník*).

2.4 V reformulacích navržených k testování (ve dvojicích úloh lišících se vždy jedním formulačním jazykovým nebo matematickým rysem – matematickým jevům se zde nevěnujeme) jsme se tedy snažili potenciálně problematickým jevům vyhnout.

Odstraňovány byly případy nezačleňovací hypotaxe (nepravé přívlastkové věty s *kte-rý* aj.) a nepravá podmínková souvětí, rovněž nenáležitě kondenzovaná vyjádření; obecně zde byla snaha o maximální explicitnost. Dbali jsme i na pořadí, v němž byly údaje důležité pro výpočet uváděny. Pro ilustraci uvádíme jednu úlohu v původní formulaci (7) a reformulaci (8) zvolenou pro testování jako výchozí:

(7) *Veronika s Petrou nasbíraly dohromady 1,5 kg sušené hluchavky, za kterou dostaly 750 Kč. Kolik dostala Petra a kolik Veronika, jestliže (v jiné cvičebnici když) Petra nasbírala o 25 % květu více než Veronika?*

Formulace v (7) obsahuje výše zmíněnou nelogickou kondenzaci, nepravou (nelogickou) přívlastkovou větu a nepravé podmínkové souvětí.

(8) *Veronika s Petrou sbíraly hluchavkové květy a sušily je. Petra nasbírala o 25 % květu více než Veronika. Po usušení měly 1,5 kg květu, ve sběrně za něj dohromady dostaly 750 Kč. Kolik peněz by měla dostat Petra a kolik Veronika?*

3. Komplexní přehled analýz a reformulací hodláme v další fázi projektu spolu s dalšími pracovníky podat v samostatné studii, zde se následně chceme podrobněji věnovat jednomu jevu vyskytujícímu se v úvodní součásti slovních úloh. Jak jsme již uvedli, na slovní úlohy můžeme nahlížet jako na jakýkoli jiný komunikát; slovní úlohy se z tohoto hlediska jeví jako útvar se stavbou S (M1 → M2).

3.1 Některé úlohy jsou však autorem formulovány tak, že před vlastní M1 autor do úvodního zadání vsouvá další, a to explicitní složku (Sa), v níž popisuje situaci (M1) jako dění týkající se fiktivní osoby:

(9) *Pepa ví, že jedna tužka stojí o ...*

(10) *Jean Baptiste, fotograf zvířat, se vydal na roční expedici.*

Zajímal se zejména o ...

(11) *Řidič autobusu si pamatuje, že ...*

Podobné úlohy mají tedy stavbu S (Sa (M1)) → (M2).

Ve složce, kterou označujeme jako Sa (explicitní rozšíření autorského zadání) se zde vyskytují slovesa popisující ve tvaru 3. os. kognitivní postoje nebo mentální stavy a procesy fiktivní osoby (proživatele postoje). Vždy jde o postoje atd., které z hlediska epistémické (jistotní, pravděpodobnostní) modality fungují jako tvrzení nezpochybňující platnost údajů uváděných v M1. (Neobjevují se např. postojové predikáty jako *myslí si / domnívá se / předpokládá*, u nichž se platnost následných údajů prezentuje nikoli jako jednoznačně pravdivá/platná, nýbrž jako relativizovaná.) Takové formulace vyžadují, aby řešitel k úloze nejprve přistupoval z pozice fiktivní osoby, tj. aby nejprve bral na vědomí postoje atd., které produktor fiktivnímu proživateli připisuje. Pro adekvátní řešení úlohy je však nezbytné, aby řešitel následně od této složky abstrahoval. Neznamená to, že tyto interpretační kroky, tj. identifikace a následné abstrahování od ní, nutně musí být explicitně reflektovány, tedy slovně vyjádřeny; zpravidla probíhají intuitivně, zůstávají implicitní.

3.2 Variantu Sa představují formulace, kdy je kognitivní postoj vyjádřen tvarem 1. os.:

(12) *Jestliže vím, že jeden oběd ve školní jídelně stojí x Kč, kolik obědů si mohu koupit ...*

(12a) *Kolik obědů ve školní jídelně si mohu koupit, jestliže vím, že ...*

Ve (12a) je kognitivní postoj Sa spolu s M1 (školní jídelna) začleněn do M2, stavba slovní úlohy je v takovém případě nikoli kontinuálně záramovaná, ale navrstvená, schematicky S (M2 (Sa (M1))). Užití tvaru 1. os. je formulace zdánlivě jednodušší, ve skutečnosti však také od řešitele vyžaduje, aby si nejprve uvědomil, že 1. os. nereprezentuje jeho samého, nýbrž autora/produktora, tj. při zpracování se od řešitele rovněž vyžadují dodatečné kroky. Práce se vsouváním, resp. odstraňováním této další, „rámovací“ produktorské roviny je také předmětem testování, protože lze důvodně předpokládat, že nutnost abstrahování od rozšíření úvodu může pro některé řešitele představovat stupeň obtížnosti navíc. (S informací o přítomnosti této produktorské roviny by měl pracovat především učitel.)

3.3 Příklady (9)–(11) však ukazují, že z hlediska řešení úlohy je uvádění kognitivního postoje Sa redundantní – údaje potřebné pro řešení v ní obsaženy nejsou. Příklady (12) a (12a) to ukazují jednoznačně: u formulací typu (12)–(12a) *Jestliže vím, že jeden oběd stojí ..., kolik obědů si mohu koupit za ...* samozřejmě nejde o regulární podmínkové souvětí, viz výše 2.2.1, protože možný počet koupených obědů nezávisí na mé (číkoli) *znalosti* ceny. Složka Sa tedy může být odstraněna. Otázka je, nakolik to řešení usnadní, protože úloha se sice zkrátí a minimálně jeden krok k řešení odpadne, text by se ale, zejména v některých případech, zároveň podstatně ochudil. Viz např. PISA 2012, soubor úloh 3 – *Tučňáci*, s. 44–47, kdy „příběhové“ uvedení úlohy může mít výraznou motivační funkci. Testování tohoto aspektu by mělo přinést informace ve prospěch aplikovatelného řešení.

4. Předkládané poznatky o jazykovém ztvárnění matematických slovních úloh mají především analytický charakter a vyplynulo z nich, že u formulací i stručných úloh se uplatňuje více mechanických stereotypů, než je z hlediska smysluplné a kultivované komunikace žádoucí. Např. úlohy typu (5) a (6) mohou, pokud by jejich reformulace byly využity (také) při výuce syntaxe, ukázat na důležitost přesných formulací pro vyjádření významových rozdílů. Podstatné pro hodnocení formulací budou výsledky získané testováním jednotlivých variací existujících úloh i úloh v týmu nově vytvořených. Doufáme ale, že náš pohled na slovní matematické úlohy zohledňující faktory syntakticko-sémantické a pragmalingvistické a) ukázal, že tyto specifické útvary fungují stejně jako komunikáty ostatní, b) přinesl zjištění podporující integrující pohled na kultivaci komunikační kompetence jak na straně žáků, tak na straně učitelů-autorů a zadavatelů matematických slovních úloh. Mechanické stereotypy ve vyjadřování mohou vyústit v mechanické přístupy k interpretaci textu/komunikátu; výsledkem mechaničnosti je často dezinterpretace nebo nepochopení.

Literatura

DANEŠ, F. *Věta a text*. Praha: Academia, 1985.

De CORTE, E. aj. Influence of re-wording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology* 77/4, 1985, s. 460–470.

Encyklopedický slovník češtiny. Praha: Nakladatelství Lidové noviny, 2002.

HIRSCHOVÁ, M. *Pragmatika v češtině*. Praha: Karolinum, 2013.

HIRSCHOVÁ, M. Postoje mluvčího k propozičnímu obsahu v pohledu syntakticko-pragmatickém.

Didaktické studie, 8, 2016, s. 17–27.

MARTIN, S., A.; BASSOK, M. Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word-problem solving and equation construction tasks. *Memory & Cognition* 33/3, 2005, s. 471–478.

O'HALLORAN, K. L. Classroom discourse in Mathematics: A multiseimiotic analysis. *Linguistics and Education*, 3, 2000, s. 359–388.

PALMER, R. *Mood and modality*. Cambridge (UK), New York & Melbourne: Cambridge University Press 1986.