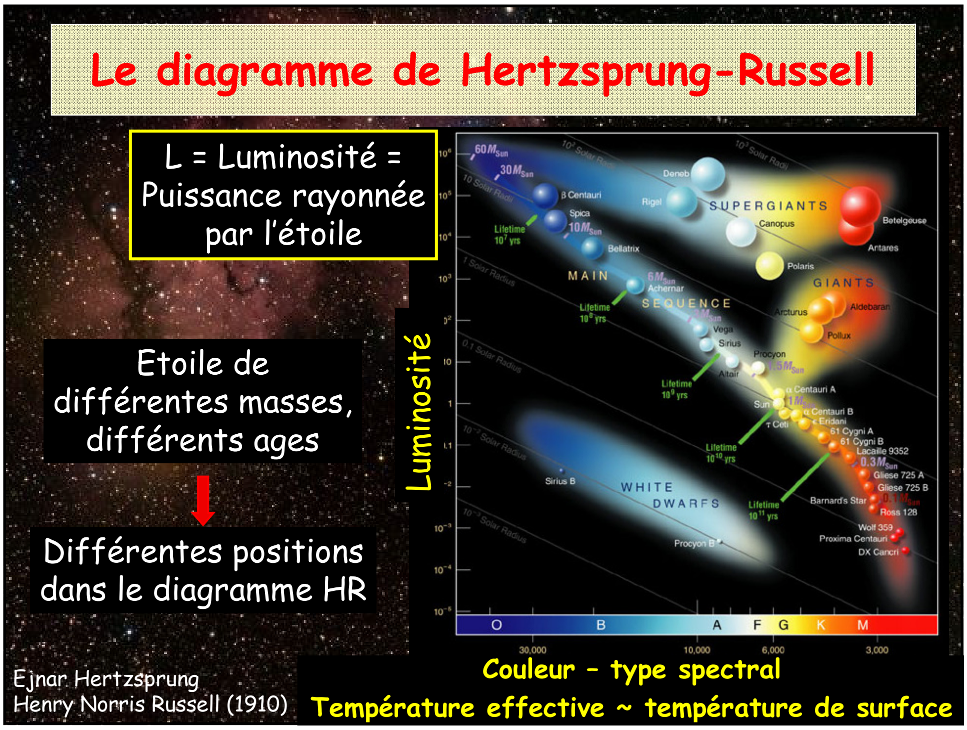
Structure des étoiles

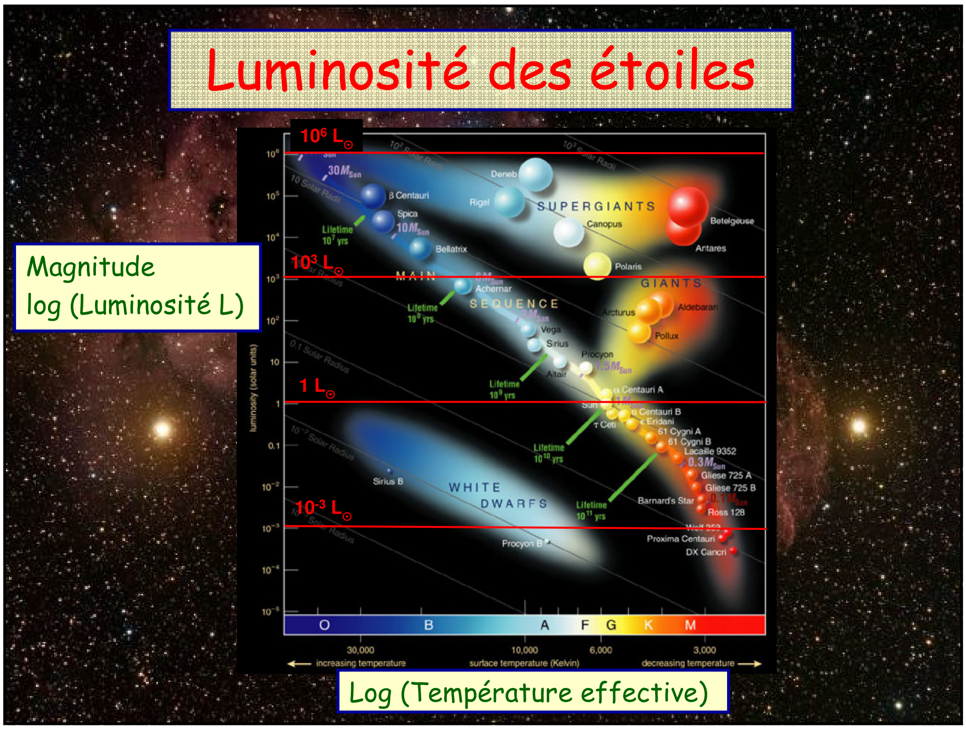
SPAT0044

Marc-Antoine Dupret
Chargé de Cours
email: ma.dupret@ulg.ac.be
tel: 04 3669732
Bât. B5c, 1er étage

Objectifs du cours

- Processus physiques au coeur des étoiles
  étoiles = laboratoires de physique fondamentale
  - Physique quantique (rayonnement - matière) et nucléaire
  - Thermodynamique et physique statistique quantique
  - Hydrodynamique
- Présentation d'approximations simples ouvrant à une discussion mathématique sur les problèmes
- Lien théorie - observations


Le diagramme de Hertzsprung-Russell
L = Luminosité = Puissance rayonnée par l'étoile
Etoile de différentes masses, différents ages
Différentes positions dans le diagramme HR
Luminosité
SUPERGIANTS
GIANTS
MAIN SEQUENCE
WHITE DWARFS
O B A F G K M
Couleur - type spectral
Température effective ~ température de surface
Ejnar Hertzsprung
Henry Norris Russell (1910)

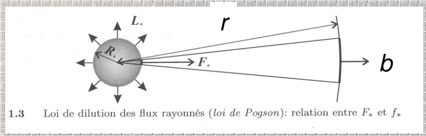

Luminosité des étoiles
Magnitude
log (Luminosité L)
10^6 L⊙
10^3 L⊙
1 L⊙
10^{-3} L⊙
SUPERGIANTS
GIANTS
MAIN SEQUENCE
WHITE DWARFS
O B A F G K M
Log (Température effective)

Luminosité et magnitude
(ordonnée du diagramme HR)

- **Luminosité L** : Puissance totale émise par l'étoile au travers d'une surface sphérique de rayon R (rayon de l'étoile)

$$L = 4\pi R^2 \cdot \int_0^\infty F_\lambda d\lambda$$

- **Eclat b** : flux d'énergie rayonnée au travers d'une surface sur terre perpendiculaire aux rayons lumineux [W/m2]



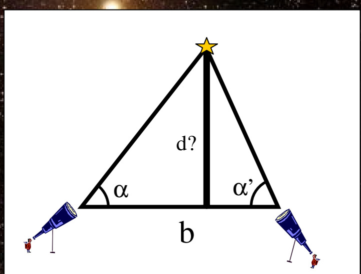
$$b = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} F$$

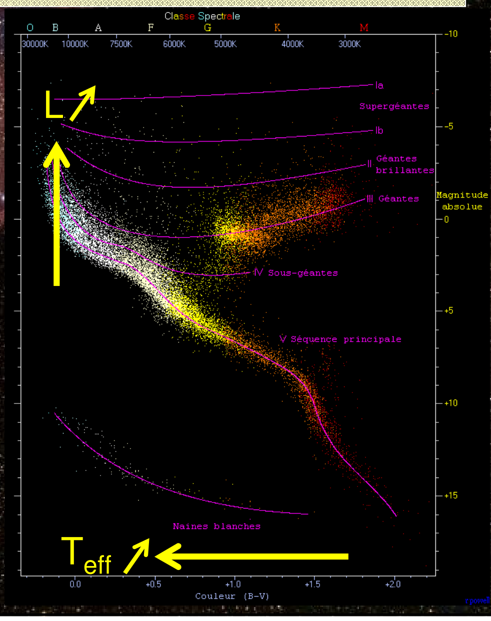
Pour une luminosité donnée, l'éclat décroît avec la distance.

Pour déduire la luminosité de l'éclat, il faut connaître la distance

Le diagramme de Hertzsprung-Russell

Etoiles dont la distance a pu être « mesurée » par le satellite Hipparcos (méthode de la parallaxe)





Luminosité et magnitude

- Magnitude apparente *m* :

$$m = -2.5 \log \mathrm{b} + \mathrm{Cst} \qquad m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{b_1}{b_2}$$

- Magnitude absolue *M* :

ramener les éclats stellaires aux valeurs qui seraient observées si l'étoile était à la distance r=10pc ⟶ B

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{r_{pc}}{10}\right)^2 \qquad M = -2.5 \log \mathrm{B} + \mathrm{Cst}$$

$$M - m = 5 - 5 \log r_{pc}$$

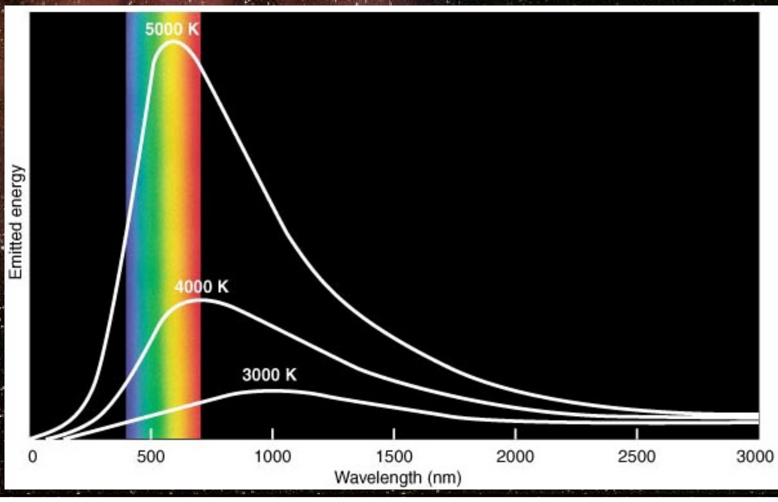
Pour passer de la magnitude apparente à la magnitude absolue, il faut connaître la distance de l'étoile

Luminosité et magnitude

- Luminosité $L = 4\pi R^2 F$ (W)
- Eclat apparent $b = L / 4\pi r^2$ (W/m²)
- Magnitude apparente $m_1 - m_2 = -2{,}5 \log (b_1/b_2)$
- Eclat absolu $B = b\,(r_{pc}/10)^2$
- Magnitude absolue $M - m = 5 - 5 \log r_{pc}$

Température effective
(abscisse du diagramme HR)

Spectre d'une étoile ~ Corps Noir



Température effective

Lois des corps noirs

- Loi de Planck

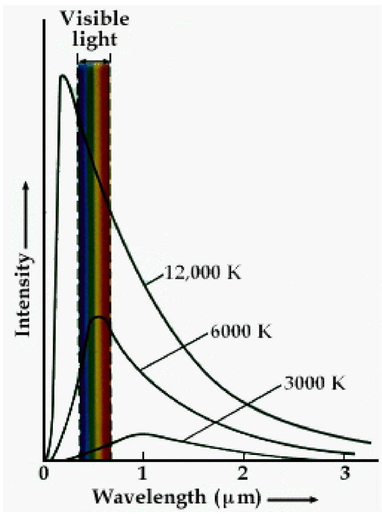
$$F_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}$$

- Loi de Stefan-Boltzmann

$$F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = \sigma T^4$$

- Loi de Wien

$$\lambda_{\max}(cm) = \frac{0{,}29}{T(K)}$$

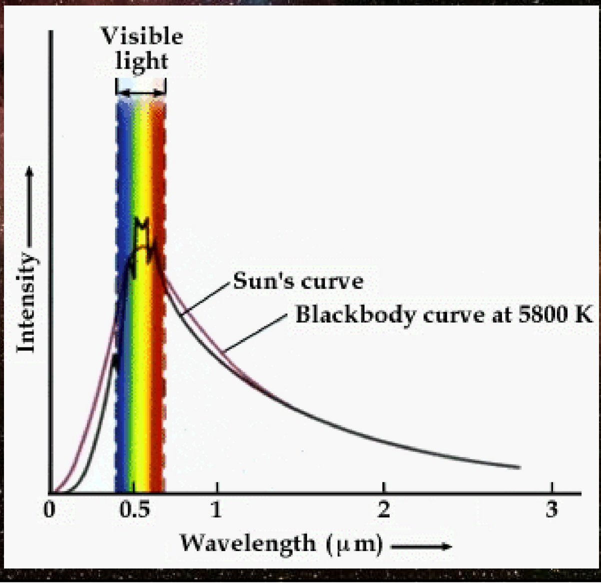


Température effective: Définition

- Température effective (T_{eff}) ≡ température du corps noir émettant un flux d'énergie identique à celui de l'étoile au niveau de sa surface

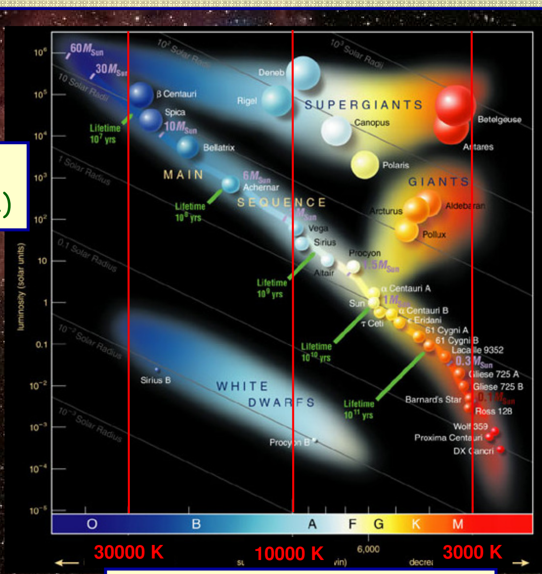
- Il vient : $L = 4\pi R^2 \, \sigma \, T_{eff}^4$

Température effective : notre Soleil



Température effective étoiles

Magnitude
log (Luminosité L)



Log (Température effective)

Taille des étoiles

•Taille des étoiles : $F = \dfrac{L}{4\pi R^2} = \sigma T_{eff}^{\ 4} \rightarrow \log L = 2 \log R + 4 \log T_{eff} + Cst$

- Les étoiles de la séquence principale présentent une gamme restreinte de rayons

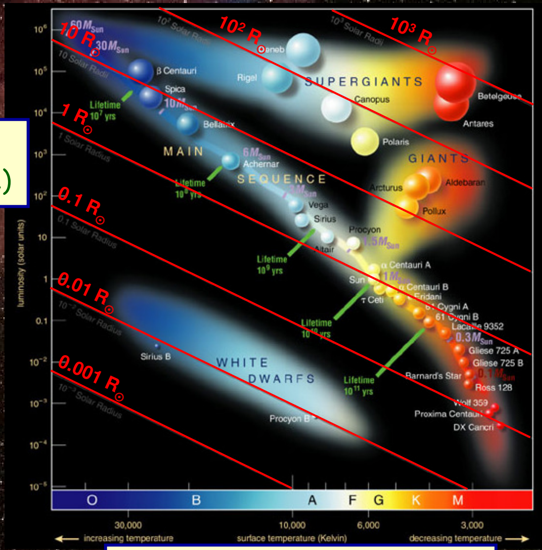
- Les supergéantes sont un millier de fois plus grandes que le Soleil

- Les géantes ont entre une dizaine et une centaine de fois la taille Soleil

- Les naines blanches sont une centaine de fois plus petites que le Soleil

Taille des étoiles

Magnitude
log (Luminosité L)



Log (Température effective)

Le diagramme de Hertzsprung-Russell

La séquence principale

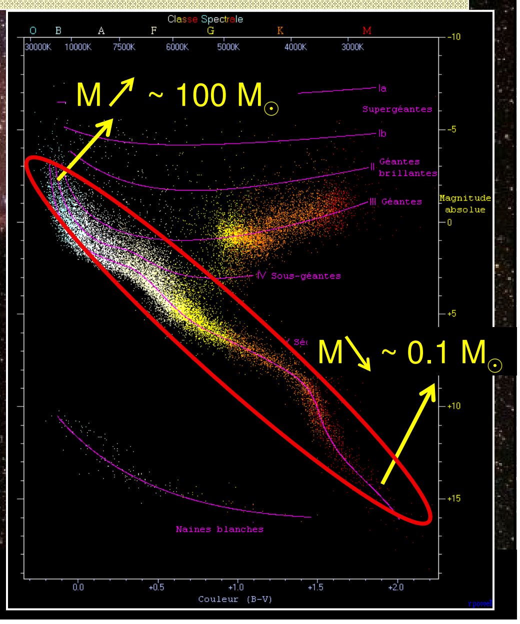
Source de l'énergie rayonnée:
Réactions thermonucléaires

Phase la plus longue: Fusion de l'hydrogène en helium

La plupart des étoiles sont dans cette phase

Elles occupent une région bien précise du diagramme HR:
La séquence principale

C'est le cas de notre soleil



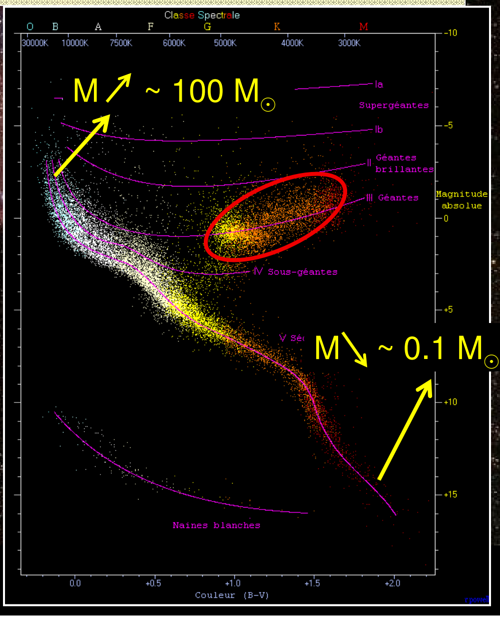
Le diagramme de Hertzsprung-Russell

Les géantes rouges

Le cœur d'une géante rouge est très dense,

son enveloppe est gigantesque (atteindra l'orbite terrestre)

Phase de fusion de l'helium en carbone et oxygène, …



Le diagramme de Hertzsprung-Russell

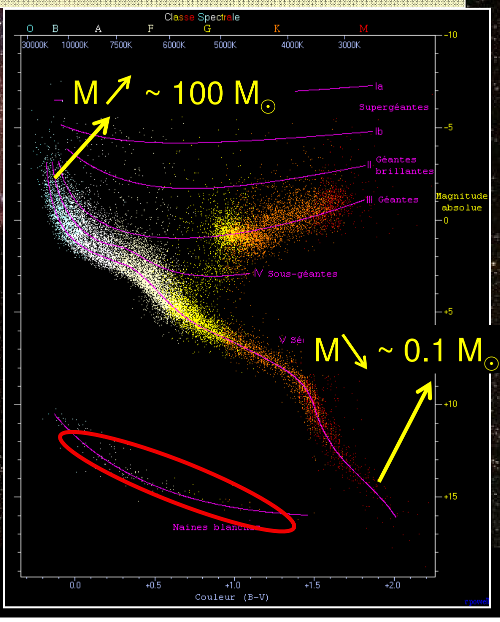
Les naines blanches

Fin de la vie de notre soleil:

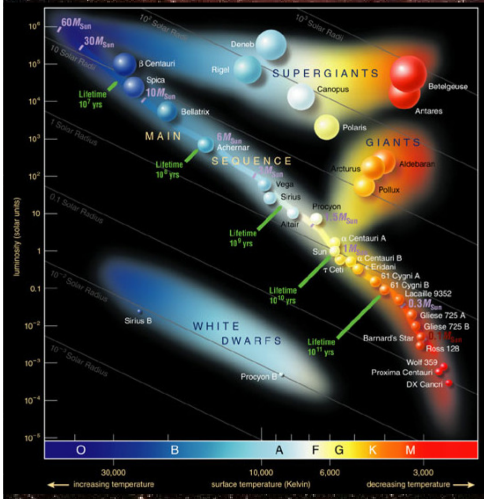
Petites et denses

($R \sim 0.01\ R_\odot$, $\rho \sim 1$ tonne / cm^3)

Lent refroidissement …



Masses des étoiles



Détermination de la masse possible dans les systèmes binaires:
Troisième loi de Kepler

- Séquence principale : 0.1 - 100 $M_\odot$
- Masse des géantes : 1 - 10 $M_\odot$
- Masse des supergéantes : ≥ 20 $M_\odot$
- Masse des naines blanches : ≈ 1 $M_\odot$

- Relation entre la masse et la luminosité pour les étoiles de la séquence principale

$L \sim M^{\nu(>1)}$

Caractéristiques des étoiles

$0.08\ M_\odot < M < 100\ M_\odot$

$...0... < L < 10^6\ L_\odot$

$3000\ K < T_{eff} < 100000\ K$

$...0... < R < 1000\ R_\odot$

Pop I - Pop II ⇒ X, Y, Z

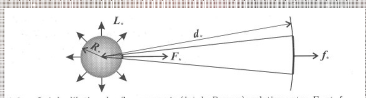
Notre Soleil

Rayon = 0.697×10^6 km

Mesurable connaissant :
- Sa distance d (mesure de parallaxe)
- Son diamètre angulaire θ

$\Longrightarrow R = d \,\mathrm{tg}\, \theta/2$

Luminosité = 3.826×10^{26} W



1.3 Loi de dilution des flux rayonnés (*loi de Pogson*): relation entre F_* et f_*

Mesurable connaissant :
- Sa distance d (mesure de parallaxe)
- Le flux reçu sur terre f

$\Longrightarrow L = 4\pi\, d^2 f$

Température effective = 5777 K

~ Température de surface

Obtenue via sa définition :

$L = 4\pi\, R^2 \sigma T_{eff}^4$

Masse = 1.989×10^{30} kg

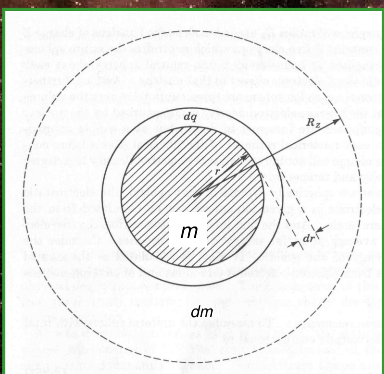
Mesurable par la mécanique céleste,

3ème Loi de Kepler : $GM = 4\pi^2\, a^3/P^2$

Caractéristiques interne des étoiles

Symétrie sphérique → Une seule dimension spatiale : la distance au centre : **r**

Masse



Masse de chaque coquille sphérique d'épaisseur dr

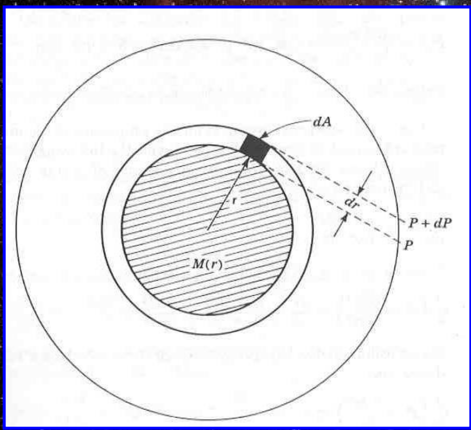
$$dm = \rho\, dV = \rho\, 4\,\pi\, r^2 dr$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho\, r^2$$

Soleil : $< \rho > = \dfrac{3}{4\pi} \dfrac{M}{R^3}$

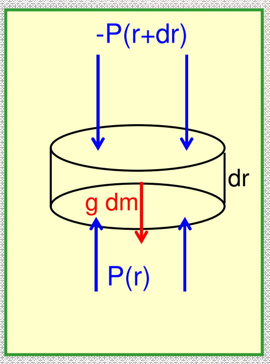
~ 2×10^3 kg/m^3

Sphère de gaz à l'équilibre hydrostatique



Résultante des forces sur chaque volume matériel infinitésimal = 0

Sphère de gaz à l'équilibre hydrostatique



Résultante des forces sur un volume matériel infinitésimal de section unitaire :

Pression : -P(r+dr) + P(r) (force de surface)

Pesanteur : $-\rho$ g dr (force de volume)

Equilibre des forces :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho\, g = -\rho \frac{Gm}{r^2}}$$

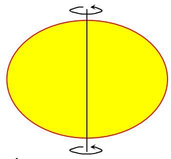
Forme intégrée :
(P(R) = 0)

$$\boxed{P(r) = \int_r^R g\, \rho\, dr \;=\; \int_{m(r)}^{M} \frac{Gm}{4\,\pi\, r^4}\, dm}$$

Rotation rapide et équilibre hydrostatique

Les étoiles peuvent tourner vite $\Rightarrow$ force centrifuge:

$\nabla P/\rho = -\nabla\phi + \Omega^2\, r \sin\theta\, \vec{e}_s$ $\Rightarrow$ Déformation de l'étoile



$\Rightarrow$ Toutes les grandeurs (T, P, ρ, $\vec{F}$, …) dépendent de 2 dimensions spatiales (r, θ) $\Rightarrow$ bcp. plus lourd à résoudre

Vitesse critique : si $V_{eq} = \Omega\, r > V_{crit} \approx (GM/R)^{1/2}$,

la force centrifuge dépasse la gravité $\Rightarrow$ enveloppe éjectée

Pour certaines étoiles (étoiles Be, …), on n'en est pas loin !

Influence de la rotation

Affecte la structure et l'évolution de l'étoile:
- Structure 2D
- Processus de transports

Affecte les observables spectro- et photométriques (T_{eff} , …), car à la photosphère: $F(\theta)$, $g_e(\theta)$

Rotation rapide et équilibre hydrostatique

La baroclinité:

$r \sin\theta\, \vec{e}_s = (1/2)\, \nabla(r^2 \sin^2\theta)$

Rotationel de l'équation d'équilibre $\nabla P/\rho = -\nabla\phi + \Omega^2\, r \sin\theta\, \vec{e}_s$

$$\nabla\times (\nabla P/\rho) = -(1/\rho^2)\, \nabla\rho\times\nabla P = (1/2)\, \nabla(\Omega^2) \times \nabla(r^2 \sin^2\theta)$$

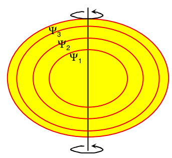
Pour une rotation solide ou cylindrique ($\Omega(r \sin\theta)$): $\nabla\rho\times\nabla P = 0$

$\longrightarrow$ Isobares = Iso-densité = Isothermes : $P(\Psi)$, $\rho(\Psi)$, $T(\Psi)$, …

Ψ = Potentiel total = $\phi - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta$ (Rot. solide)

Sinon (rotation différentielle plus complexe):

Isobares $\neq$ Iso-densité $\neq$ Isothermes



Baroclinité

Soleil, modèle simplifié de densité constante :

$$P_c = \frac{3}{8\pi}\frac{G M^2}{R^4}$$

$\sim 5 \times 10^{14}$ Pa

Etat hors équilibre hydrostatique

$$dm\,\vec{\gamma} = \sum \vec{F} = 0 \qquad \text{Accélération radiale} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{G m}{r^2}$$

Temps dynamique
~ temps de chute libre
(pression supprimée)

Ordre de grandeur :

$$\frac{R}{t_{dyn}^2} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow t_{dyn} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Soleil : t_{dyn} = 26 min << temps d'évolution stellaire

Durant l'essentiel de la vie de l'étoile, équilibre hydrostatique
Exception : Explosion en supernova (instabilité dynamique)

Etat de la matière stellaire

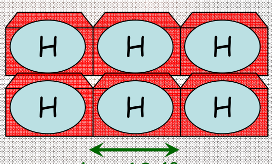
$$P_c = \frac{3}{8\pi}\frac{G M^2}{R^4}$$

$\sim 5 \times 10^{14}$ Pa

$$< \rho > = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}$$

$\sim 2 \times 10^{3}$ kg/m^3

Atomes d'hydrogène neutre en contact



$d_0 \sim 10^{-10}$ m

$$\rho = \frac{1.67 \times 10^{-27}}{\left(10^{-10}\right)^3} kg/m^3$$

Mais la répulsion entre les atomes est-elle suffisante pour soutenir un tel poids ?

$$P_{el} \simeq \frac{e^2/(4\pi\epsilon_0 d_0^2)}{d_0^2} \approx 2 \times 10^{12}\, Pa$$

La matière est ionisée

Etat de la matière stellaire

La matière stellaire est ionisée : plasma

Distance moyenne entre particules ~ 10^{-10} m >> 10^{-15} m Taille des noyaux

Equation d'état d'un gaz parfait : $P_g \simeq \frac{k\,\rho\,T}{\mu\,m_u}$

Estimation de la température centrale

$$T_c \simeq \frac{P_g\,\mu\,m_u}{k\,\rho} \simeq 10^7\ K$$

Température suffisante pour les réactions de fusion nucléaire

$$T_c \simeq 10^7\ K >> T_{\text{surf}} = 5800\ K$$

Transport de l'énergie du centre vers la surface

1) Radiation

Sources d'opacité

Dans les étoiles : k T ~ h ν < kev ⇒ transitions électroniques

Transitions lié-lié | Transitions lié-libre | Libre-libre | Diffusion

Libre parcours moyen des photons ~ cm
à l'intérieur des étoiles !

L'intérieur des étoiles est complètement opaque et à l'équilibre thermodynamique

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

1) Radiation

Au cœur des étoiles:

Libre parcours moyen des photons :
$\ell = (\kappa\rho)^{-1} \approx 2\text{cm}$
<<
dr / dlnT, dr/dln P, ...

→ Intérieur opaque

↓

Equilibre thermodynamique entre rayonnement et matière

↓

Loi de Planck : $I_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}$

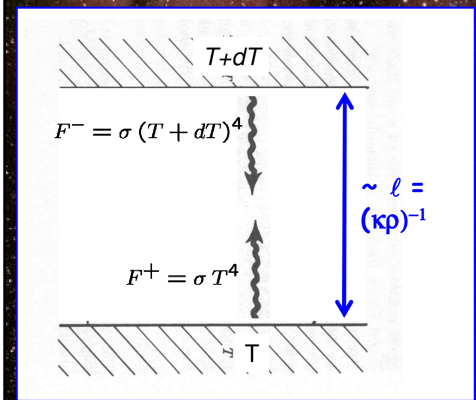
Loi de Stefan : $I = \sigma T^4/\pi$

$T_c \simeq 10^7\,K >> T_{\text{surf}} = 5800\,K$

Transport de l'énergie du centre vers la surface

1) Radiation

Raisonnement approximatif



$$
\begin{aligned}
F &= F^+ - F^- \\
&= -\sigma((T+dT)^4 - T^4) \\
&= -\sigma \frac{dT^4}{dr}\ell = -\frac{\sigma}{\kappa\rho}\frac{dT^4}{dr}
\end{aligned}
$$

Mais on n'a pas tenu compte rigoureusement des différentes directions de propagation

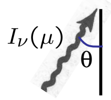
$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r}$$

1) Radiation — Raisonnement rigoureux

Solution de l'équation de transfert radiatif

$$I_\nu(\tau) = \int_\tau^\infty B_\nu(T(\tau'))\, e^{\tau-\tau'}\, d\tau' \simeq B_\nu(T(\tau))$$

$\mu = \cos\theta$



Equation de transfert radiatif

$$\frac{\mu}{\kappa_\nu\rho}\frac{dI_\nu}{dr} = B_\nu - I_\nu$$

* 2 π μ et intégration

$$2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mu^2}{\kappa_\nu\rho}\frac{dI_\nu}{dr}\,d\mu \simeq 2\pi\frac{1}{\kappa_\nu\rho}\frac{dB_\nu}{dr}\overbrace{\int_{-1}^{1}\mu^2\,d\mu}^{2/3}$$

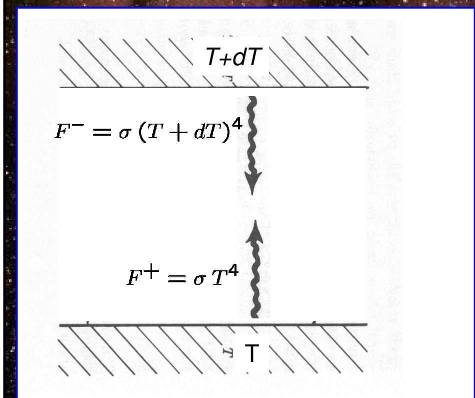
$$= 2\pi\underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1}} B_\nu\,\mu\,d\mu}_{0} - F_\nu$$

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{dT}{dr} \qquad F = \int_0^\infty F_\nu\,d\nu = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr}$$

Moyenne de Rosseland → $$\frac{1}{\kappa} = \frac{\pi}{acT^3}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}\,d\nu$$

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

1) Radiation



$$L = 4\pi r^2 F = -\frac{16\pi r^2 acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr}$$

$T_{centre} >> T_{surface}$

Gradient de T → L

Quelle que soit la source d'énergie

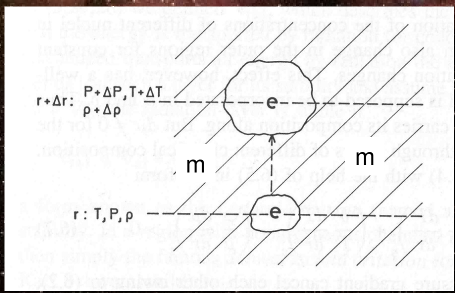
Si la source d'énergie est imposée → L est imposée

$\kappa \nearrow \Rightarrow |dT/dr| \nearrow$

Exemple: zones d'ionisation partielle

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

2) Convection



Si $(\Delta\rho)_e < (\Delta\rho)_m$

Poussée d'archimède vers le haut

Milieu instable vis-à-vis De la convection

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

2) Convection

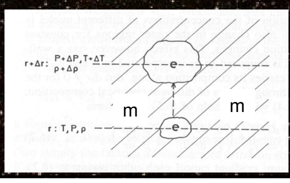
Milieu instable vis-à-vis de la convection ssi : $(\Delta\rho)_e < (\Delta\rho)_m$

Equilibre de pression : $(\Delta P)_e = (\Delta P)_m$

Critère en température ?

Gaz parfait $P = R\rho T/\mu$ → $\Delta\rho/\rho = \Delta P/P - \Delta T/T$ → $\Delta P/P - (\Delta T/T)_e < \Delta P/P - (\Delta T/T)_m$

$\Leftrightarrow$ $(\Delta T/T)_e > (\Delta T/T)_m$



Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

2) Convection

Milieu instable vis-à-vis de la convection ssi :

$(\Delta T/T)_e > (\Delta T/T)_m$

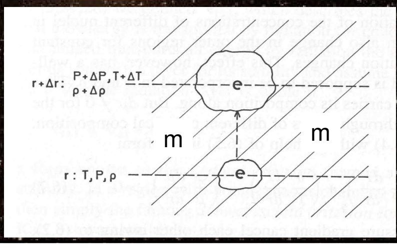
$\Delta T < 0$

$|d\ln T/dr|_e < |d\ln T/dr|_m$

$\Delta P < 0$

$(d\ln T/d\ln P)_e < (d\ln T/d\ln P)_m$

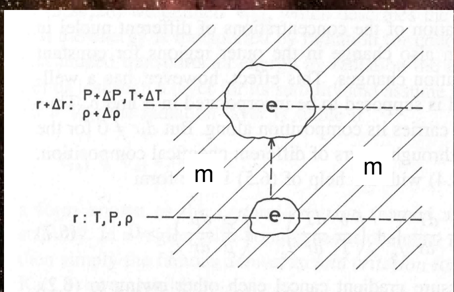
$T_e > T_m$



Transport d'énergie !

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

2) Convection



Milieu instable vis-à-vis de la convection ssi :

$(d\ln T/d\ln P)_e < (d\ln T/d\ln P)_m$

Convection efficace

→ peu de pertes radiatives

$(d\ln T/d\ln P)_e = \partial \ln T/\partial \ln P|_s \equiv \nabla_{ad}$

Milieu instable vis-à-vis de la convection ssi :

$(d\ln T/d\ln P)_m \equiv \nabla > \nabla_{ad}$

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

Convection + radiation

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\,\kappa\,\rho\,L_R}{16\pi\,ac\,r^2\,T^3}$$

÷ T dlnP/dr = - T ρ g / P

$$\frac{d\ln T}{d\ln P} = \frac{3\,\kappa\,P\,L_R}{16\pi\,ac\,GmT^4}$$

$$\nabla_{rad} \equiv \frac{3\,\kappa\,P\,L}{16\pi\,ac\,GmT^4}$$

∇_{rad} = gradient radiatif = gradient fictif nécessaire pour pouvoir transporter toute l'énergie par radiation

Critère de Schwarzschild: Milieu instable vis-à-vis de la convection **ssi** $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

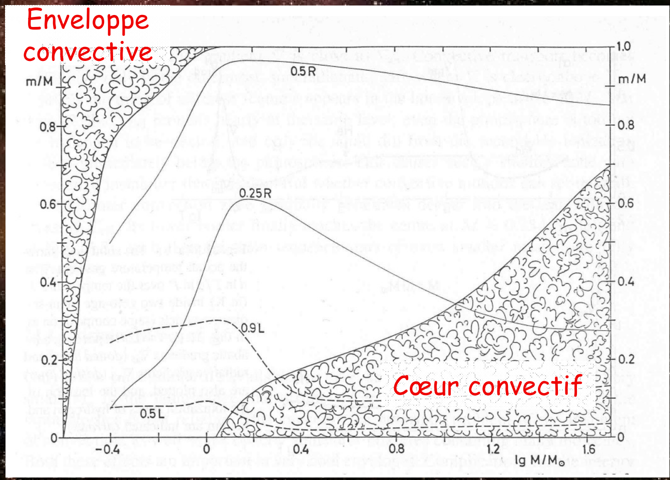
Critère de Schwarzschild: Milieu instable vis-à-vis de la convection **ssi** $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

$$\nabla_{rad} \equiv \frac{3\,\kappa\,P\,L}{16\pi\,ac\,GmT^4}$$

La convection apparaît typiquement quand :

- L/m très grand — Réactions nucléaires ↗ près du centre → **Cœur convectif**
- κ (opacité) très grande — Zones d'ionisation partielle proches de la surface → **Enveloppe convective**

Transfert de l'énergie (du centre à la surface)



Transfert de l'énergie (du centre à la surface)

Transport d'énergie proprement dit

$F_c = \rho\, c_p\, \overline{V_{c,r}\, \Delta T}$ (flux d'enthalpie)

$\approx \boxed{\rho\, c_p T} (P/\rho)^{1/2} \alpha^2 (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2}$

Théorie de la longueur de mélange (très approximatif !)

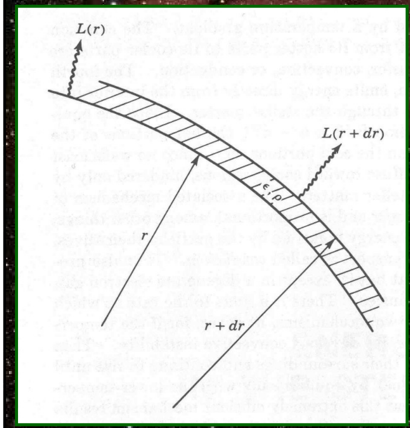
Très grande capacité calorifique → Petit $(\nabla - \nabla_{ad})$ suffit

$\nabla \simeq \nabla_{ad} \simeq 2/5$

Dans les couches profondes où la convection est très efficace

Gaz complètement ionisé

Equation de conservation de l'énergie



Bilan d'énergie :

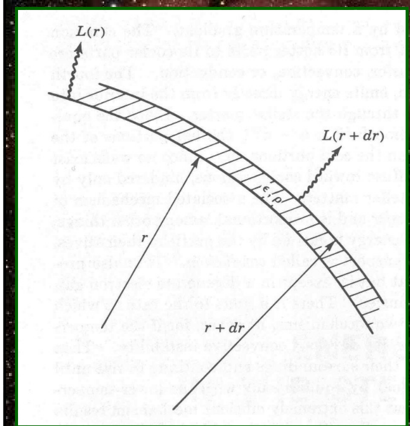
Source volumique d'énergie ds les étoiles : réactions nucléaires

On définit $\boxed{\varepsilon_n}$ comme le taux de production d'énergie nucléaire par unité de masse et de temps

$\boxed{\varepsilon_n\, dm}$ est la quantité d'énergie produite ds la coquille sphérique de masse dm par unité de temps

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\rho, T, X_i)$$

Equation de conservation de l'énergie



Bilan d'énergie :

Quantité d'énergie échangée par la coquille sphérique avec l'extérieur / unité de temps :

$$\boxed{L(r+dr) - L(r) = dL = \partial L/\partial r\, dr}$$

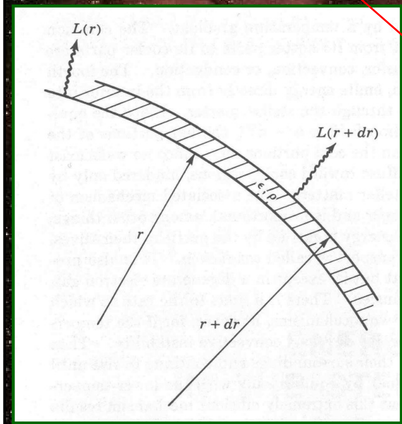
A l'équilibre thermique :
$\sum$ énergie fournie =
$\sum$ énergie perdue

$$dL = \varepsilon_n\, dm \Rightarrow dL/dm = \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow dL/dr = 4\pi r^2 \rho\, \varepsilon_n$$

Equation de conservation de l'énergie

↗ Energie interne



Hors équilibre thermique :

Puissance de dilatation

$$\varepsilon_n dm - dL = \frac{dQ}{dt} dm = \left(\frac{du}{dt} + P\frac{dv}{dt}\right) dm = T\frac{ds}{dt} dm$$

$$\frac{dL}{dm} = \varepsilon_n - T\frac{ds}{dt}$$

Apport d'énergie venant de la contraction gravifique (voir théorème du Viriel) ε_{grav}

La Rotation

La baroclinité:

$r \sin\theta \, \vec{e_s} = (1/2) \nabla(r^2 \sin^2\theta)$

Rotationel de l'équation d'équilibre $\nabla P/\rho = -\nabla\phi + \Omega^2 r \sin\theta \, \vec{e_s}$

$\nabla\times (\nabla P/\rho) = -(1/\rho^2) \nabla\rho\times\nabla P = (1/2) \nabla(\Omega^2) \times \nabla(r^2 \sin^2\theta)$

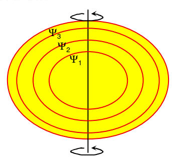
Pour une rotation solide ou cylindrique ($\Omega(r \sin\theta)$): $\nabla\rho\times\nabla P = 0$

➡ Isobares = Iso-densité = Isothermes : $P(\Psi)$, $\rho(\Psi)$, $T(\Psi)$, …

Ψ = Potentiel total = $\phi - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta$ (Rot. solide)

Sinon (rotation différentielle plus complexe):

Isobares ≠ Iso-densité ≠ Isothermes



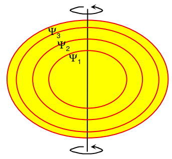
Baroclinité

Processus non-standards: La Rotation

Le paradoxe de Von Zeipel:

Considérons la zone radiative d'une étoile en rotation solide

➡ P(Ψ), ρ(Ψ), T(Ψ), …



$$\boxed{\vec{F}_{\rm rad} = -\chi\vec{\nabla}T = -\left\{\chi(\Psi)\frac{dT}{d\Psi}\right\}\vec{\nabla}\Psi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{\rm rad} = -\chi\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\Psi}\nabla^2\Psi - \vec{\nabla}\left(\chi\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\Psi}\right)\cdot\vec{\nabla}\Psi,$$

$$= -\chi\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\Psi}\left[4\pi G\rho - 2\Omega^2\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Psi}\left(\chi\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\Psi}\right)|\vec{\nabla}\Psi|^2$$

Non-constant sur les équipotentielles

Quel que soit T(Ψ), il est impossible d'avoir $\nabla\cdot(F_{rad}) = 0$ partout !

➡ Déséquilibre thermique : $\boxed{\rho T\left[\partial_t S + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}S\right] = -\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{\rm rad} + \rho\epsilon \neq 0},$

Cas stationaire : $\vec{V}\cdot\nabla S \neq 0$ ➡ Circulation méridienne

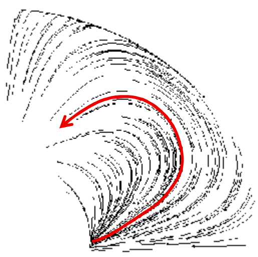
Processus non-standards: La Rotation

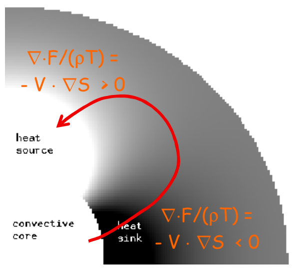
Circulation méridienne

Mécanisme de transport à grande échelle:

1) Transport du moment cinétique

2) Transport des élements chimiques





Temps caractéristique associé à son établissement:

temps d'Eddington-Sweet: $t_{ES} = \frac{R}{U} \approx \frac{GM^2}{RL}\frac{g}{\Omega^2 R}$

Ensuite, la circulation s'adapte pour assurer le transport du moment angulaire requis par les conditions aux limites (vents, accrétion, effet de marée dans les binaires proches, …)

Equations de structure

Conservation de la masse
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2$$

Equilibre hydrostatique
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2}$$

Transfert d'énergie

Radiation
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa \rho L}{16\pi a c r^2 T^3}$$

Convection
$$\frac{dT}{dr} = -\nabla_{\mathrm{ad}} \frac{Gm\rho}{r^2}\frac{T}{P}$$

Conservation de l'énergie
$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \rho r^2 (\varepsilon_n + \varepsilon_{grav})$$

4 équations

7 inconnues ($m, \rho, P, T, L, \kappa, \varepsilon$)

$\rho = \rho(T, P, X_i)$, $\kappa = \kappa(T, P, X_i)$, $\varepsilon = \varepsilon(T, P, X_i)$

X_i : composition chimique

Equations de structure

Conservation de la masse
$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi \rho r^2}$$

Equilibre hydrostatique
$$\frac{dP}{dm} = -\frac{G m}{4\pi r^4}$$

Transfert d'énergie

Radiation
$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa L}{64\pi^2 a c r^4 T^3}$$

Convection (efficace)
$$\frac{dT}{dm} = -\nabla_{\mathrm{ad}} \frac{Gm}{4\pi r^4}\frac{T}{P}$$

Conservation de l'énergie
$$\frac{dL}{dm} = \varepsilon_n + \varepsilon_{grav}$$

4 équations

7 inconnues ($r, \rho, P, T, L, \kappa, \varepsilon$)

$\rho = \rho(T, P, X_i)$, $\kappa = \kappa(T, P, X_i)$, $\varepsilon = \varepsilon(T, P, X_i)$

X_i : composition chimique

Conditions aux limites

4 équations différentielles ⇒ 4 conditions aux limites

Au centre

Masse : $m(0) = 0$
Luminosité : $L(0) = 0$

A la photosphère

Raccord avec un modèle d'atmosphère

Température : $T = T_{eff} = (L/4\pi R^2\sigma)^{1/4}$
Pression : $P = P(T_{eff}, \log g, X_i) = f(L, R, M, X_i)$
≈ 0

Equations d'état et Composition chimique

Les étoiles sont composées pour l'essentiel d'
- Hydrogène (fraction en masse initiale $X \simeq 0.7$)
- Helium (fraction en masse initiale $Y \simeq 0.28$)
- Eléments lourds (« métaux »: Fe, C, N, O, …)
  fraction en masse totale $Z \simeq 0.015$ pour le soleil)

Le gaz est presque complètement ionisé à l'intérieur mais les intéractions coulombiennes entre ions et électrons affectent peu les trajectoires des particules:
$(3/2)\,kT = E_{cin} > e^2/d$ (énergie potentielle coulombienne)

→ **Gaz parfait**

Equations d'état

Gaz parfait

$$P_{gaz} = n\,k\,T = \frac{k\rho T}{\boxed{\mu} m_u}$$

Poids moléculaire moyen (sans dim.)

Mélange de plusieurs éléments complètement ionisés

$P_{gaz} = P_e + \sum_i P_i$

$n = n_e + \sum_i n_i = \sum_i (1+Z_i) n_i$

$n_i = \rho_i/(\mu_i\, m_u) = \rho\, X_i\, /(\mu_i\, m_u)$

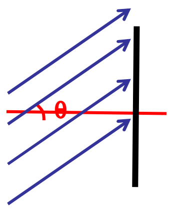
$\mu = (\sum_i X_i\, (1+Z_i)\, /\, \mu_i\,)^{-1}$

L'intégrale de pression

Pression = flux d'impulsion normale à une surface

Particules de mêmes direction :

$$P = n\,p\,v\,\cos^2\theta$$



Gaz isotrope :

Fraction de particules faisant un angle entre θ et θ+dθ : $\sin\theta d\theta/2$

Pression des particules d'angles ∈ [θ , θ+dθ] et impulsions ∈ [p , p+dp] :

$$dP(\theta,p) = n(p)\,p\,v\cos^2\theta\sin\theta/2\,dp\,d\theta$$

Pression totale:

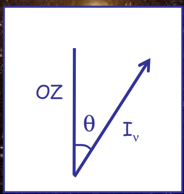
$$P = \int_0^\infty n(p)pvdp \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta/2 = \frac{1}{3}\int_0^\infty vpn(p)dp$$

Equations d'état

Pression de radiation

Pression = flux d'impulsion

Impulsion d'un photon projetée sur OZ : $p_z(\nu) = \cos\theta \, h\nu/c$



Nbre de phot. /m³/4π rad

V_z

$$\begin{aligned} P_R &= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi p_z(\nu) \boxed{\frac{n(\nu)}{4\pi}} \boxed{c\cos\theta} \sin\theta d\theta d\nu \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty h\nu \, n(\nu)\, d\nu \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty h\nu \, n(\nu)\, d\nu = \frac{1}{3}\int_0^\infty \boxed{E_\nu} d\nu \\ &= \boxed{\frac{1}{3} a T^4} \end{aligned}$$

Cas général non isotrope → Tenseur

Corps noir

Densité d'énergie

Equations d'état

Pression totale

$$P = \frac{k\rho T}{\mu m_u} + \frac{1}{3} a T^4$$

Dans les étoiles « chaudes », P_R = (1/3) aT^4 peut devenir significatif comparativement à P_{gaz} .

Equations d'état

Pression totale

$$P = \frac{k\rho T}{\mu m_u} + \frac{1}{3} a T^4$$

Mais, gaz de fermions

Principe d'exclusion de Pauli

On ne peut avoir plus de 2 fermions identiques dans le volume de phase : $dp_x dp_y dp_z\, dx\, dy\, dz = h^3$

Equations d'état

Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

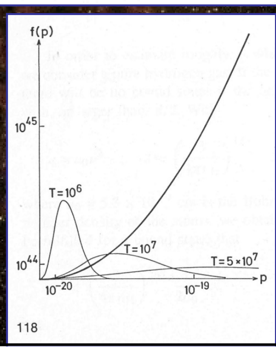
Distribution de Boltzmann

$$\boxed{f(p)dpdV} = n_e \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp\, dV \quad .$$

Nbre d'électrons dans dV, impulsion entre p et p+dp

Volume occupé dans l'espace des phases:

$4\pi\, p^2\, dp\, dV$



$$\frac{f(p)dpdV}{4\pi p^2 dpdV} \leq \frac{2}{h^3} \quad \rightarrow \quad f(p) \leq 8\pi p^2/h^3$$

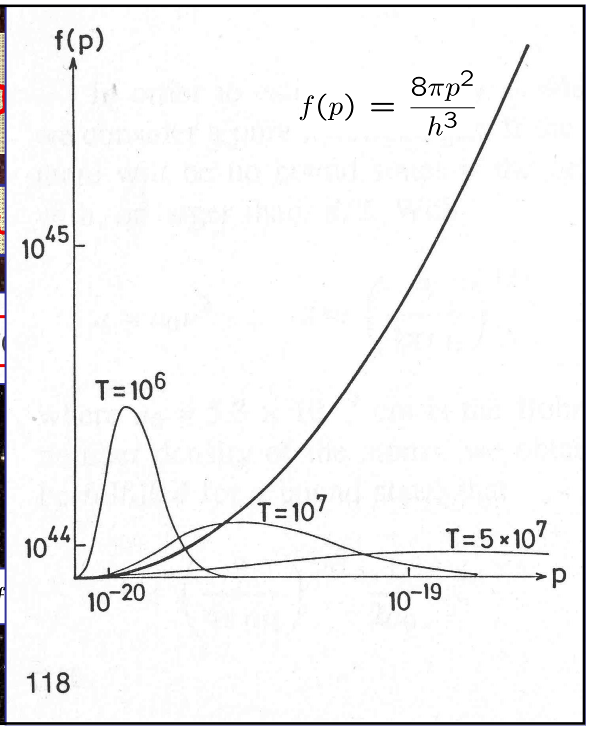
Equa

Dégénérescence qu

Distribution de Boltzmann

Nbre d'électrons dans dV, impulsion entre p et p+dp

$$\frac{f(p)dpdV}{4\pi p^2 dpdV} \leq \frac{2}{h^3}$$



Equations d'état

Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

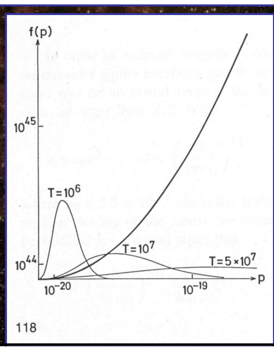
Distribution de Boltzmann

$$f(p)dpdV = n_e \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp\, dV \quad .$$

$$\frac{f(p)dpdV}{4\pi p^2 dpdV} \leq \frac{2}{h^3} \quad \rightarrow \quad f(p) \leq 8\pi p^2/h^3$$

La dégénérescence apparaît quand ρ ↗↗ ou T ↘↘

→ Statistique de Fermi-Dirac



Equations d'état

Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

Critère de dégénérescence

Volume spatial $V_S = \frac{1}{n_e} = \frac{\mu_e m_u}{\rho}$

Volume quantique (principe d'incertitude) $V_Q \simeq \lambda^3 = \frac{h^3}{(m_e v)^3}$

Pas de dégénérescence ssi : $V_Q << V_S$

$$\frac{h^3}{(m_e v)^3} << \frac{\mu_e m_u}{\rho}$$

$mv^2 = 3kT$ $\quad \frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} << \frac{m_u (3 m_e k)^{3/2}}{h^3} = 2.385 \times 10^{-5}$ (MKSA)

La dégénérescence apparaît d'abord pour les électrons (m ↘)

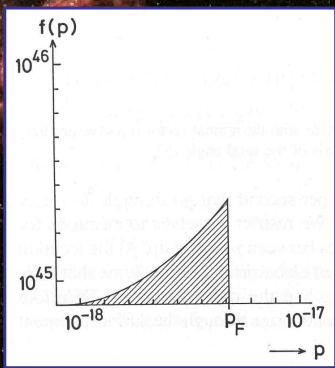
Equations d'état

Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

Exemple simple: gaz complètement dégénéré ($T \to 0$)

$$f(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \quad si \;\; p \leq \boxed{p_F}$$
$$f(p) = 0 \quad sinon$$

Impulsion de Fermi



Equations d'état

Dégénérescence quantique

Poids moléculaire par électron

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$$

$$\rho = m_u \boxed{\mu_e} n_e = \frac{8\pi m_u \mu_e p_F^3}{3h^3}$$

$$\begin{aligned} P_e &= 2\pi \int_0^{p_f} \int_0^{\pi} p_z \frac{f(p)}{4\pi} v_z \sin\theta d\theta dp \\ &= 2\pi \int_0^{p_f} \int_0^{\pi} (p\cos\theta) \left(\frac{8\pi p^2}{4\pi h^3}\right) \left(\frac{p\cos\theta}{m_e}\right) \sin\theta d\theta dp \\ &= \frac{8\pi}{15h^3} \frac{p_F{}^5}{m_e} \end{aligned}$$

$$P_e = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_u}\right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

Cas non-relativiste

Equations d'état

Dégénérescence quantique

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$$

$$\rho = m_u \mu_e n_e = \frac{8\pi m_u \mu_e p_F^3}{3h^3}$$

$$\begin{aligned} P_e &= 2\pi \int_0^{p_f} \int_0^{\pi} p_z \frac{f(p)}{4\pi} v_z \sin\theta d\theta dp \\ &= 2\pi \int_0^{p_f} \int_0^{\pi} (p\cos\theta) \left(\frac{8\pi p^2}{4\pi h^3}\right) \cancel{\left(\frac{p\cos\theta}{m_e}\right)} \sin\theta d\theta dp \\ &= \frac{2\pi c p_F^4}{3h^3} \end{aligned}$$

c cos θ

$$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_u}\right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

Cas extrêmement relativiste

Equations d'état

Dégénérescence quantique

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$$

$$\rho = m_u \, \mu_e \, n_e = \frac{8\pi m_u \mu_e \, p_F^3}{3h^3}$$

$$P_e = 2\pi \int_0^{p_f} \int_0^{\pi} p_z \frac{f(p)}{4\pi} v_z \sin\theta d\theta dp$$

Cas partiellement relativiste

$$v_z = v \cos\theta = \frac{p\cos\theta}{\sqrt{m_e^2 + p^2/c^2}}$$

Equations d'état

Calcul de la densité électronique et du poids moléculaire par électron :

$$n_e = \sum_i Z_i \, n_i = \frac{\rho}{m_u} \sum_i Z_i \frac{X_i}{\mu_i}$$

$n_i = \rho_i/(\mu_i \, m_u) = \rho \, X_i /(\mu_i \, m_u)$

Hydrogène (X), Helium (Y), métaux (pour les métaux, $Z_i/\mu_i \simeq \frac{1}{2}$)

$$n_e = \frac{\rho}{m_u}(X + Y/2 + (1 - X - Y)/2) = \frac{\rho}{m_u}\frac{1+X}{2}$$

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e \, m_u} \simeq \frac{2}{1+X}$$

$\mu_e = (\sum_i X_i Z_i / \mu_i)^{-1}$

Equations d'état

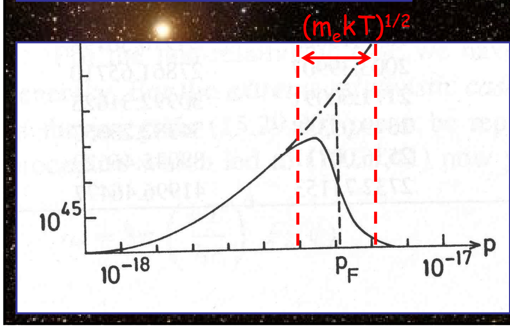
Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

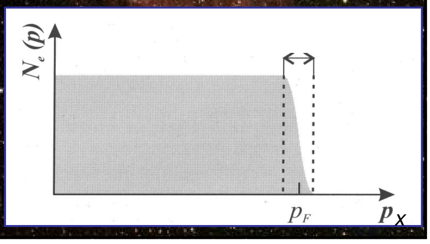
Statistique de Fermi-Dirac

$$f(p)dpdV = \frac{8\pi p^2 dpdV}{h^3} \frac{1}{1+e^{E/kT-\psi}}$$

Pression et densité sont quasiment insensibles à la température

$\Rightarrow$ $\partial \ln P / \partial \ln T|_\rho \simeq 0$





Equations d'état

Pression de radiation:

$$P_R = \frac{1}{3} a T^4 \geq P_g = \frac{k\rho T}{\mu m_u}$$

$$\log T \geq \frac{1}{3} \log \rho + cst.$$

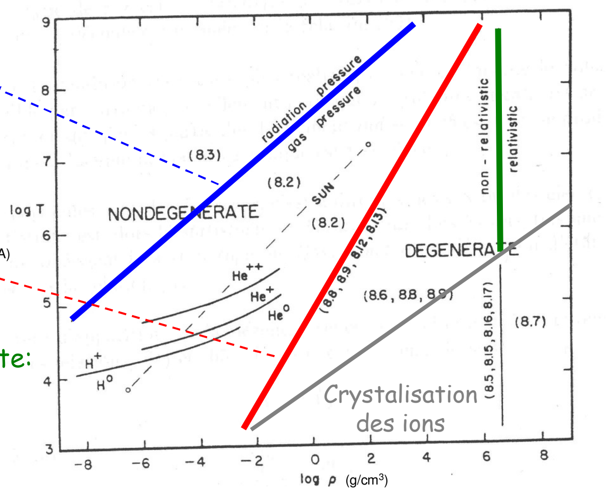
Dégénérescence:

$$\frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} \geq 2.385 \times 10^{-5} \text{ (MKSA)}$$

$$\log T \leq \frac{2}{3} \log \rho + cst.$$

Dégénérescence relativiste:

$$\rho \geq \frac{8\pi m_u \mu_e (m_e c)^3}{3h^3} = 9.74 \times 10^8 \mu_e\, kg/m^3$$



Equation d'état

Gaz non dégénéré : $P = \frac{k\rho T}{\mu m_u} + \frac{1}{3} a T^4$

Gaz dégénéré : $\frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} \geq 2.385 \times 10^{-5}$

$\rho > 1 \text{ tonne}/cm^3$

$P_e \approx K \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$

Dégénérescence non relativiste

$P_e \approx K^* \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$

Dégénérescence relativiste

Opacité

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\,\boxed{\kappa}\,\rho\, L}{16\pi\, a c\, r^2 T^3}$$

Opacité moyenne de Rosseland

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT}\, d\nu$$

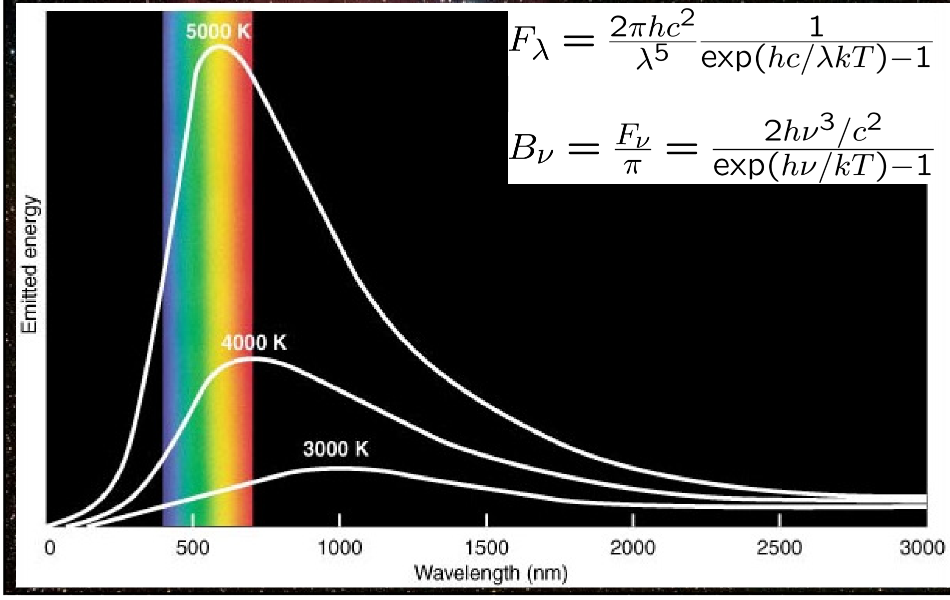
$\kappa_\nu = f(\nu, T, \rho, X_i)$ $\kappa = \kappa(T, \rho, X_i)$

Dépend de la fréquence

Régions du spectre qui ont le plus de poids dans la moyenne :

- Pic de la distribution de Planck : $\nu \approx kT/h$
- Régions les moins opaques (moyenne harmonique)

Fonction de Planck (Corps Noir)



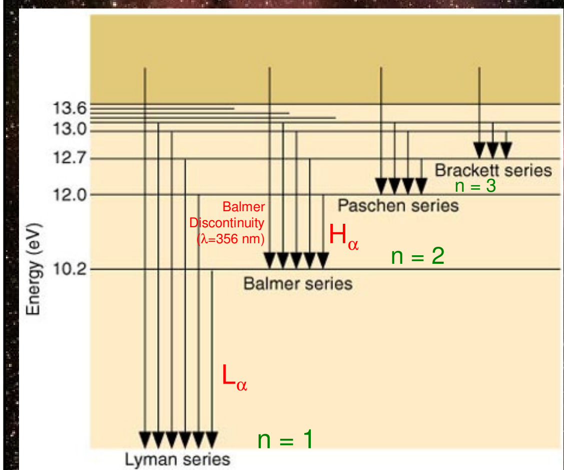
$$F_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}$$

$$B_\nu = \frac{F_\nu}{\pi} = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

Schéma de niveaux de l'atome de H

$\boxed{E_n \simeq - 1/n^2\ (m_e e^4/2\hbar^2) = -(1/n^2)\ h\ c\ R_\infty}$

Constante de Rydberg



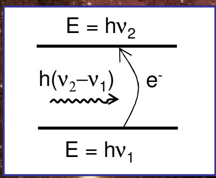
$\boxed{\lambda^{-1} = R_\infty(1/k^2 - 1/n^2)}$

k = 1 : Série de Lyman (L_α, L_β, ...)

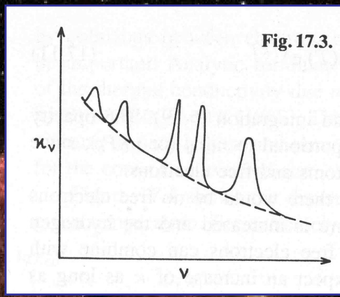
k = 2 : série de Balmer (H_α, H_β , ...)

Opacité

Transitions lié-lié



Absorption pour
$\nu \approx \nu_2-\nu_1 = (E_2-E_1)/h$

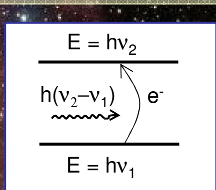


Sources d'élargissement des raies:

- Naturel : $\sigma(\nu) \propto \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2+1/(2\pi\tau)^2}$ → Temps de vie de l'état
- Thermique : Effet Doppler dû à l'agitation thermique $\delta\nu/\nu \propto \sqrt{T}$
- Collisions (effet Stark) : Perturbation du potentiel dû à un ion voisin

Opacité

Transitions lié-lié



Calcul de l'opacité :

Nbr / m³ Section efficace

Notion de section efficace : $1/\ell_\nu = \kappa_\nu \rho = \sum_{i,j} n_i \, \sigma_{\nu\, i,j}$

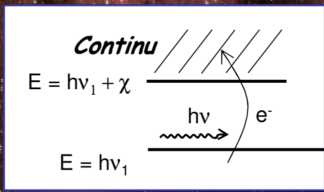
- Calcul des sections efficaces de toutes les transitions ! …
- Calcul de l'occupation de tous les niveaux électroniques

Contribution des transitions lié-lié à l'opacité totale :

$T < 10^6$ K ⟶ jusqu'à 50%
$T \approx 10^7$ K ⟶ moins de 10%

Opacité

Transitions lié-libre



Absorption $\forall\, \nu \geq \chi/h$, $E_{cin}(e^-) = h\nu - \chi$

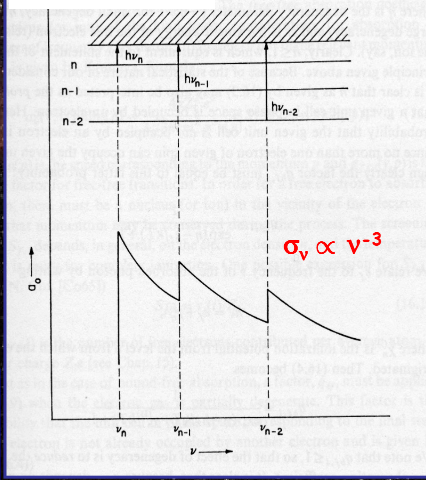
Pour une transition donnée :

$\sigma_{\nu,i} \propto \nu^{-3}$

Nouvelle transition possible ($\nu \geq \chi_i/h$)

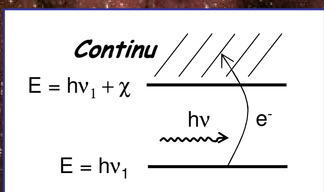
$\longrightarrow$ discontinuité

Section efficace



Opacité

Transitions lié-libre



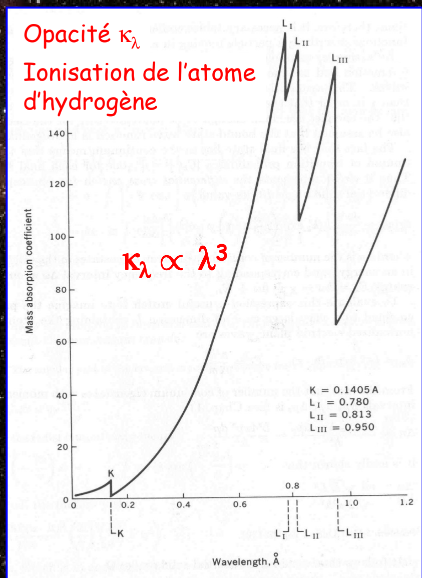
Absorption $\forall\, \nu \geq \chi/h$, $E_{cin}(e^-) = h\nu - \chi$

Pour une transition donnée :

$\sigma_{\nu,i} \propto \lambda^{3}$

Nouvelle transition possible ($\lambda \leq hc/\chi_i$)

$\longrightarrow$ discontinuité



Opacité

Transitions lié-libre

Absorption $\forall\, \nu \geq \chi/h$, $E_{cin}(e^-) = h\nu - \chi$

Calcul de l'opacité :

- Calcul des sections efficaces de toutes les ionisations possibles …
- Calcul de l'occupation des niveaux: nbr. d'électrons libres, états d'ionisation (éq. de Saha) et d'excitation (formule de Boltzmann)

En gros … A une température donnée : $h\nu \sim kT$

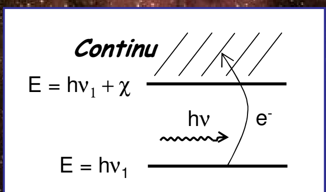
Les transitions tq. $\chi_i \gg kT$ sont inaccessibles car pas assez de photons ayant l'énergie suffisante

Les transitions tq. $\chi_i \ll kT$ sont inaccessibles car tous les niveaux d'ionisation de départ sont dépeuplés (éq. de Saha)

Les transitions tq. $\chi_i \simeq kT$ jouent le plus

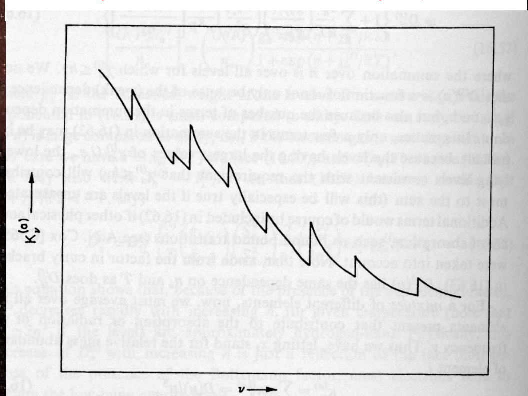
Opacité

Transitions lié-libre



Absorption $\forall\, \nu \geq \chi/h$

Opacité totale : compliqué !



Opacité

Transitions lié-libre

Pour une transition donnée : $\sigma_{\nu,i} \propto \nu^{-3}$

Dépendance vis-à-vis de la température :

En gros … $\kappa_\nu \propto \nu^{-3}$, $h\nu \sim kT$ → $\kappa \propto T^{-3}$

Loi de Kramers (approximatif !) :

$$\kappa_{bf} \cong 4.34 \times 10^{24} \boxed{Z} (1+X)\, \rho\, T^{-3.5} \ \mathrm{m^2/kg}$$

Z = fraction en masse des éléments lourds

Eléments lourds principaux contributeurs car grand potentiel d'ionisation des niveaux fondamentaux

Il reste des absorbants potentiels dans les couches profondes

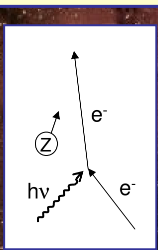
Opacité

Absorptions libre-libre

Bremsstrahlung inverse

$E_{\text{cin, fin}}(e^-) = E_{\text{cin, init}}(e^-) + h\nu$

Présence nécessaire d'un ion pour assurer la conservation de l'impulsion



$$n_e \simeq \frac{\rho}{m_u} \frac{1+X}{2}$$

Loi de Kramers (approx.)

$$\kappa_{ff} \cong 3.68\, 10^{21}\, (X+Y) \boxed{(1+X)}\, \rho\, T^{-3.5} \ \mathrm{m^2/kg}$$

$\sigma_\lambda \propto \lambda^3/v$

Vitesse initiale de l'électron

$\lambda \sim hc/(kT)$

$v \sim (3kT/m_e)^{1/2}$

$\kappa \propto T^{-3.5}$

Limitation: Gaz dégénéré

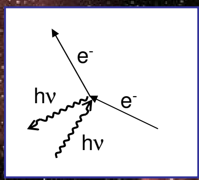
Grand nombre de transitions impossibles (cases occupées)

Opacité plus petite

Opacité

Diffusion électronique

Collision élastique
électron – photon



$$\sigma_T = 0.665 \times 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$$
$$\kappa_{es} = 0.04 / \mu_e \quad \mathrm{m^2/kg}$$
$$\cong 0.02\,(1+X)$$

Indépendant de T et ν !

Interprétation classique : Onde électromag. ➡ oscillation de l'électron
➡ réémission dans une autre direction

Cas non-relativiste : diffusion Thomson

Cas relativiste : diffusion Compton

Opacité

Approximation ➡ Lois de Kramers

Transitions bound-bound

Transitions bound-free: $\kappa_{bf} \cong 4.34\,10^{24}\, Z\,(1+X)\,\rho\, T^{-3.5}$ m²/kg

Transitions free-free: $\kappa_{ff} \cong 3.68\,10^{21}\,(X+Y)\,(1+X)\,\rho\, T^{-3.5}$ m²/kg

Diffusion électronique: $\kappa_{es} \cong 0.02\,(1+X)$ m²/kg

Dans les 3 derniers cas : $\kappa \propto$ nbr. e⁻/m³ $\propto 1+X$

Conduction électronique

Si le gaz des électrons est

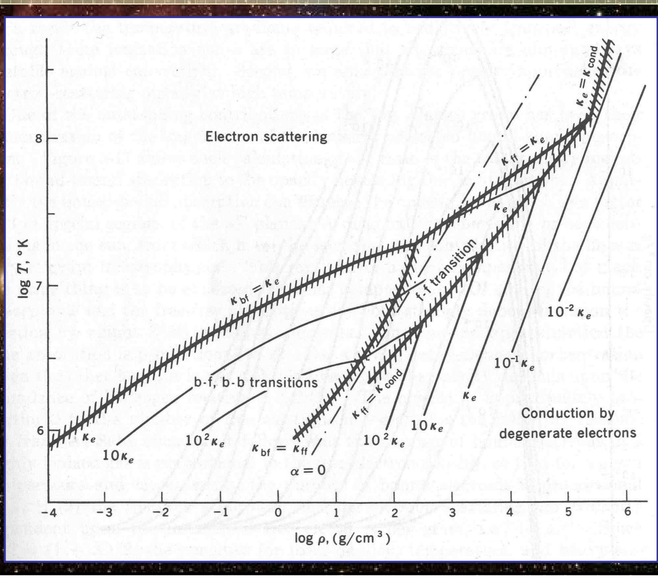
fortement dégénéré, voire relativiste (ρ↗, T↘)

Energie cinétique des électrons très élevée

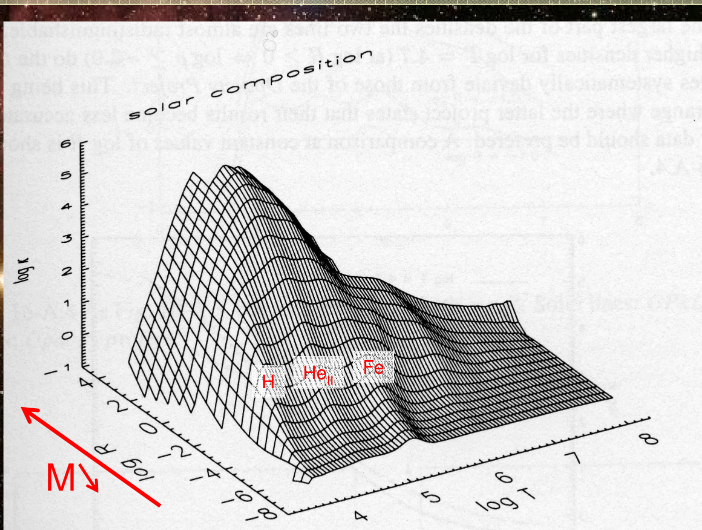
Ils transportent efficacement l'énergie par conduction

« Comme si l'opacité était encore plus faible »

Opacité



Opacité



log R = log ρ – 3 log T + 6 ~ constant du centre à la surface

Quelques modèles « stellaires » simples

Modèle à densité constante

$$P(r) = \int_r^R \frac{G m \rho}{r^2} dr = \frac{3 G M^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2) \qquad m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3} \qquad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$T(r) = \frac{P}{\rho}\frac{\mu m_u}{k} = \frac{G M}{R^3}\frac{\mu m_u}{2k}(R^2 - r^2)$$

$$\frac{T}{P} = \frac{1}{\rho}\frac{\mu m_u}{k} = cst. \rightarrow \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 \quad >> \; 2/5$$

Hyper instable vis-à-vis de la convection !

Un tel modèle n'est pas réaliste, la densité doit augmenter vers le centre pour que dlnT/dlnP $\simeq$ 1 - dlnρ/dln P soit suffisamment petit.

Quelques modèles « stellaires » simples

Résultats exercices

Exercice 1, homogène X = 0.7, Y = 0.3

μ = 0.61538

R = 327 500 km

Exercice 2, homogène Y = 1

μ = 4/3

R = 709 600 km

Exercice 3, cœur (10% de la masse): Y = 1 , enveloppe X = 0.7, Y = 0.3

R/R_1 = 2.737

R_1 = 191 000 km

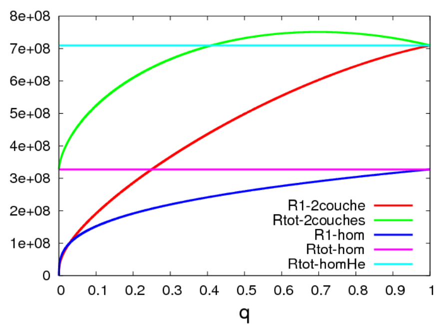
R_{tot} = 524 000 km

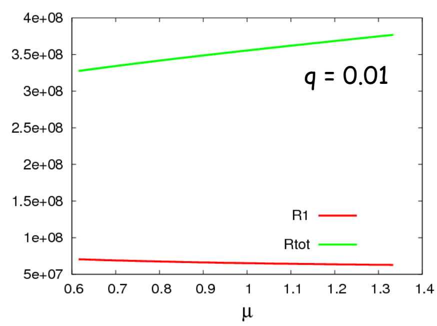
Quelques modèles « stellaires » simples

Résultats exercices

Exercice 3, cœur (10% de la masse): Y = 1 , enveloppe X = 0.7, Y = 0.3

R/R_1 = 2.737 R_1 = 191 000 km R_{tot} = 524 000 km





Modèles de polytropes

Gaz dégénéré non-relativiste : P = $K_1 \rho^{5/3}$

Gaz dégénéré relativiste : P = $K_1 \rho^{4/3}$

Polytrope quelconque : P = $K \rho^{\gamma} = K \rho^{1+1/n}$

$$\frac{d\phi}{dr} = -K\,\gamma\,\rho^{\gamma-2}\,\frac{d\rho}{dr} = -K\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr}$$

Equilibre hydrostatique

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho\,\frac{d\phi}{dr}$$

$$\phi = -K\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1} = -K(n+1)\rho^{1/n}$$

$$\rho = \left[\frac{-\phi}{K(n+1)}\right]^n$$

Equation de Poisson

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi\,G\,\rho = 4\pi\,G\left[\frac{-\phi}{K(n+1)}\right]^n$$

Modèles de polytropes

Poisson

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi\,G\,\rho = 4\pi\,G\left[\frac{-\phi}{K(n+1)}\right]^n$$

Changement de variables et adimensionalisation

$$z = Ar \quad , \quad w = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/n}$$

$$A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n}(-\phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K}\,\rho_c{}^{\frac{n-1}{n}}$$

Equation de Lane-Emden

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right) + w^n = 0$$

$$w(0) = 1 \quad , \quad w'(0) = 0$$

Modèles de polytropes

Equation de Lane-Emden

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right) + w^n = 0 \qquad w = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/n}$$

Cas avec solution analytique :

$$n = 0 \ (\rho\, cst.): \quad w(z) = 1 - z^2/6$$

$$n = 1 \ (\gamma = 2): \quad w(z) = \sin z / z$$

$$n = 5 \ (\gamma = 6/5): \quad w(z) = \left(1 + z^2/3\right)^{-1/2}$$

$n < 5$ ($\gamma > 6/5$) ➡ Rayon fini, $n \geq 5$ ➡ Rayon infini

Autres cas particuliers importants :

n = 3/2 (γ = 5/3, dégénéré non-relativiste)

n = 3 (γ = 4/3, dégénéré relativiste)

n = ∞ (γ = 1, sphère isotherme, rayon infini)

Modèles de polytropes

Hiérarchie des polytropes :

n = 0 : densité constante , dln T/dln P = 1 (convectivement instable)

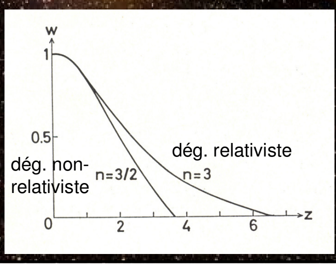
⬇ n = 3/2 (γ = 5/3) : dégénéré non-relativiste ou zone convective

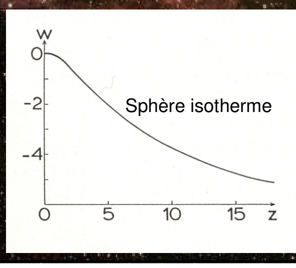
|∇ρ|↗ n = 3 (γ = 4/3) : dégénéré relativiste ou pression de radiation ↗

|∇T|↘ n = 3.25 : ~ enveloppe radiative

⬇ n = 5 (γ = 6/5) : Limite rayon fini ⟷ infini

n = ∞ (γ = 1) : sphère isotherme, rayon infini





Un modèle simple d'enveloppe radiative

$$L = -\frac{16\pi r^2 a c T^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r}$$

Hypothèses:

- Enveloppe radiative : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} = \frac{3\,\kappa\,L}{64\pi\sigma G\,T^3 m}$
- Opacités : $\kappa = \kappa_0\,P^a\,T^b$ Kramers : a = 1 , b = -4.5
- L, m constants (ε = 0, ρ petit)

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} \propto T^{b-3}\,P^a\frac{L}{m} \qquad \frac{\mathrm{d}\left(T^{4-b}\right)}{\mathrm{d}\left(P^{a+1}\right)} \propto \frac{L}{M} = cste.$$

$$T^{4-b} = B\frac{L}{M}\left(P^{a+1} + C\right)$$

$$T^{8.5} = B\frac{L}{M}\left(P^2 + C\right) \simeq B\,P^2\,L/M \propto \rho^2\,T^2\,L/M$$

$$T^{3.25} \simeq C_0\sqrt{L/M}\,\rho \qquad P \simeq C_1\,(L/M)^{\frac{1}{6.5}}\,\rho^{1+\frac{1}{3.25}}$$

Polytrope
n = 3.25

Modèles de polytropes

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^n = w^n$$

Masse

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2\rho dr = 4\pi\,\frac{r^3}{z^3}\,\rho_c\int_0^z w^n\,z^2\,dz = -4\pi\,r^3\,\rho_c\,\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}$$

$$R = \frac{z_n}{A} = z_n\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2}\rho_c^{\frac{1-n}{2n}}$$

$$A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)K}\,\rho_c^{\frac{n-1}{n}}$$

$$M = -4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2} z_n^2\,\frac{dw}{dz}(z_n)\,\rho_c^{\frac{3-n}{2n}}$$

$$R \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

Relation masse-rayon
pour les polytropes

Polytropes : gaz dégénéré, naines blanches

Relation Rayon - Masse des polytropes (K fixé !)

$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

$0 \leq n < 1$: M ↗ ➡ R ↗

$1 < n < 3$: M ↗ ➡ R ↘

J'augmente la masse d'un facteur constant q en gardant le même rayon

m(r) ⟶ m'(r) = q m(r)

ρ(r) ⟶ ρ'(r) = q ρ(r)

P(r) ⟶ P'(r) = K (ρ')$^{1+1/n}$ = q$^{1+1/n}$ P(r)

Poids(r) = $\int_r^R G m \rho / r^2 \, dr$ ⟶ Poids'(r) = q^2 Poids(r)

n < 1 ⟶ P'(r) > Poid'(r)

La pression augmente plus que le poids ⟶ dilatation

n > 1 ⟶ P'(r) < Poid'(r)

La pression augmente moins que le poids ⟶ contraction

Polytropes : gaz dégénéré, naines blanches

Relation Rayon - Masse des polytropes (K fixé)

$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

Gaz dégénéré non-relativiste, n = 3/2 :

$$R \propto M^{-1/3}$$

Quand la dégénérescence devient complète non-relativiste:

R ~ constant : Refroidissement à rayon constant des naines blanches

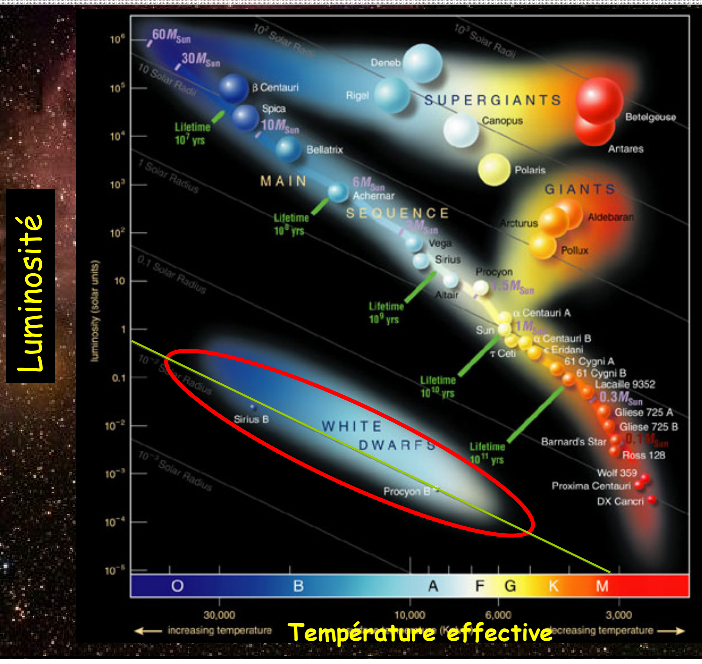
Gaz dégénéré relativiste, n = 3 : M = Constante !

$$\begin{aligned} M &= -4\pi \left[\frac{K}{\pi G}\right]^{3/2} z_3^2 \frac{dw}{dz}(z_3) \\ &= \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.459 \, M_\odot \end{aligned}$$

$$K = \frac{1.2435 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \quad (cgs)$$

Masse limite de Chandrasekhar

Refroidissement à rayon constant des naines blanches



Polytropes : gaz dégénéré relativiste

Masse limite de Chandrasekhar

$$M_{ch} = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.459\, M_\odot$$

$$R \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \propto \rho_c^{-1/3}$$
$$M \propto \rho_c R^3 = cste.$$

M est fixe, R vaut ce qu'on veut !

Je multiplie par un facteur x constant la distance au centre de chaque couche :

r(m) → r'(m) = x r(m)

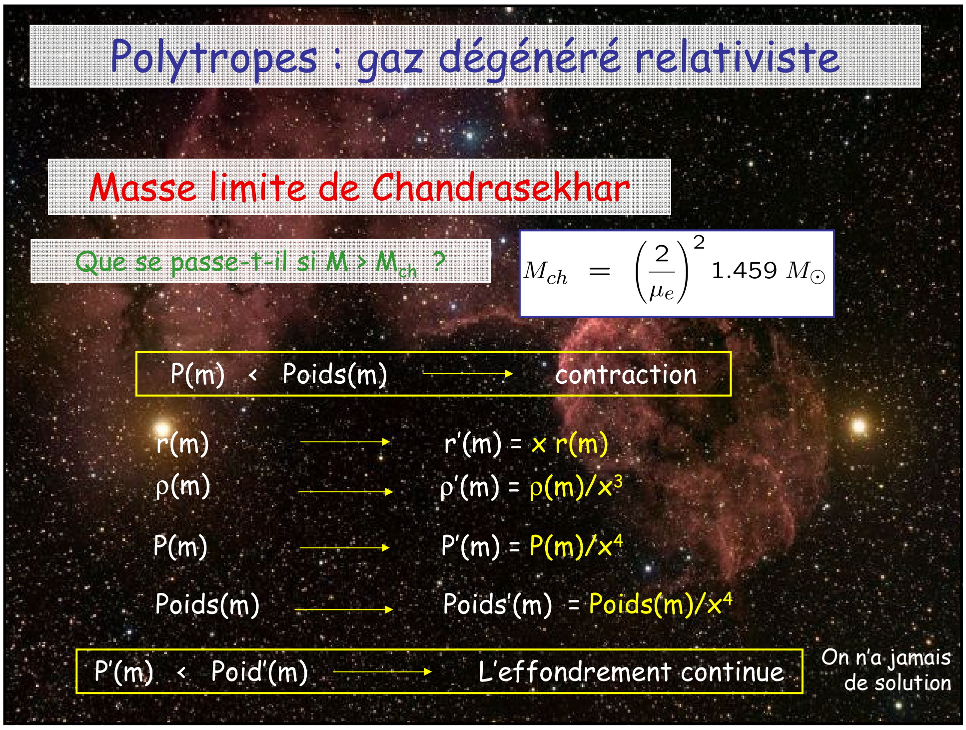
ρ(m) → ρ'(m) = ρ(m)/x^3

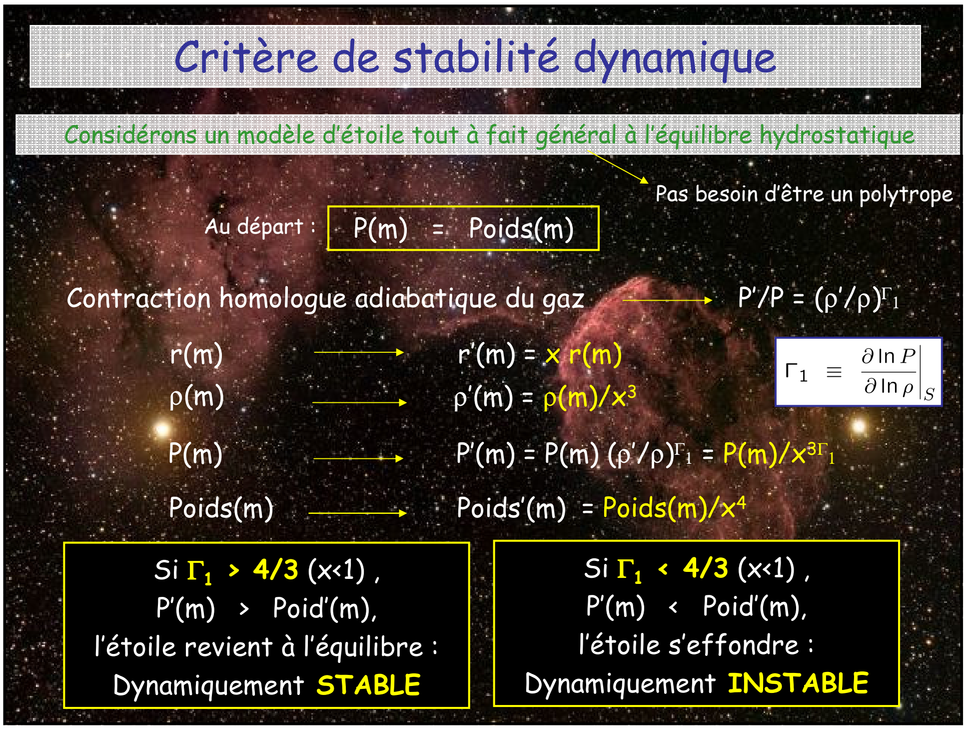
P(m) → P'(m) = K (ρ')$^{4/3}$ = K ρ$^{4/3}$/x^4 = P(m)/x^4

Poids(m) → Poids'(m) = Poids(m)/x^4

P(m) = Poids(m) → P'(m) = Poid'(m)

On garde une solution quel que soit le facteur de dilatation x


Polytropes : gaz dégénéré relativiste
Masse limite de Chandrasekhar
Que se passe-t-il si $M > M_{ch}$?
$M_{ch} = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.459\ M_\odot$
P(m) < Poids(m) → contraction
r(m) → r'(m) = x r(m)
ρ(m) → ρ'(m) = ρ(m)/x^3
P(m) → P'(m) = P(m)/x^4
Poids(m) → Poids'(m) = Poids(m)/x^4
P'(m) < Poid'(m) → L'effondrement continue
On n'a jamais de solution


Critère de stabilité dynamique
Considérons un modèle d'étoile tout à fait général à l'équilibre hydrostatique
Pas besoin d'être un polytrope
Au départ : P(m) = Poids(m)
Contraction homologue adiabatique du gaz → $P'/P = (\rho'/\rho)^{\Gamma_1}$
$\Gamma_1 \equiv \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_S$
r(m) → r'(m) = x r(m)
ρ(m) → ρ'(m) = ρ(m)/x^3
P(m) → P'(m) = P(m) $(\rho'/\rho)^{\Gamma_1}$ = P(m)/$x^{3\Gamma_1}$
Poids(m) → Poids'(m) = Poids(m)/x^4
Si Γ_1 > 4/3 (x<1) ,
P'(m) > Poid'(m),
l'étoile revient à l'équilibre :
Dynamiquement STABLE
Si Γ_1 < 4/3 (x<1) ,
P'(m) < Poid'(m),
l'étoile s'effondre :
Dynamiquement INSTABLE

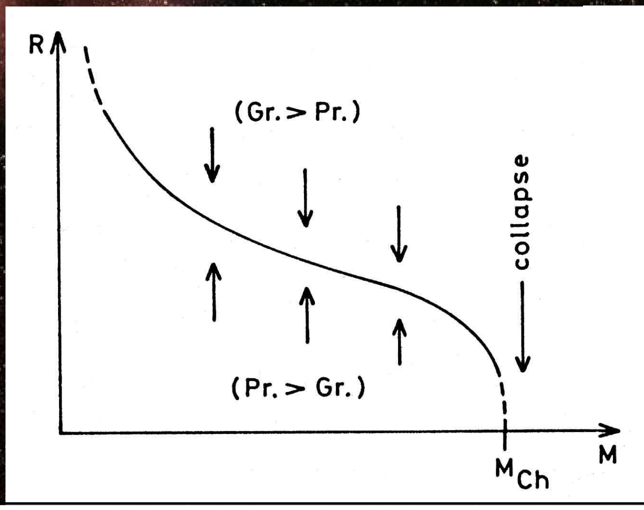
Polytropes : gaz dégénéré relativiste

Masse limite de Chandrasekhar

$$M_{ch} = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.459\ M_\odot$$

La loi

Masse - Rayon



Que se passe-t-il quand la masse de Chandrasekhar est atteinte ?

1er scénario (le plus fréquent): Une naine blanche de C-O dans un système binaire accrète lentement de la matière de son compagnon géante rouge

2e scénario : Pendant les combustions d'H et He en couche, le coeur de C-O croît en masse

Le coeur de C-O atteint la masse de Chandrasekhar !

L'étoile se contracte jusqu'à des densités extrèmes

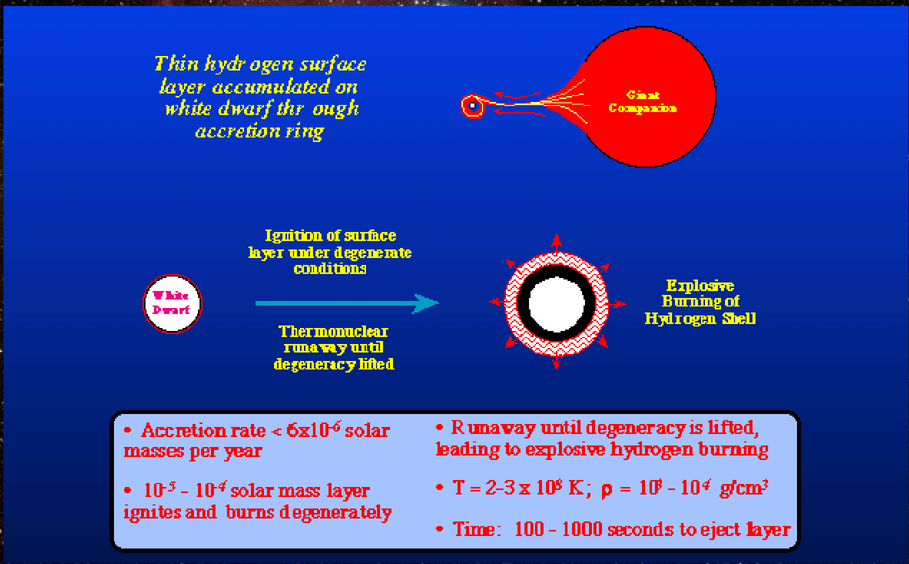
Réactions nucléaires dans milieu dégénéré → emballement thermique

→ l'étoile entière s'embrase en quelques secondes

↓

L'étoile explose ! **Supernova de type Ia** $L \sim 10^{11}\ L_\odot$

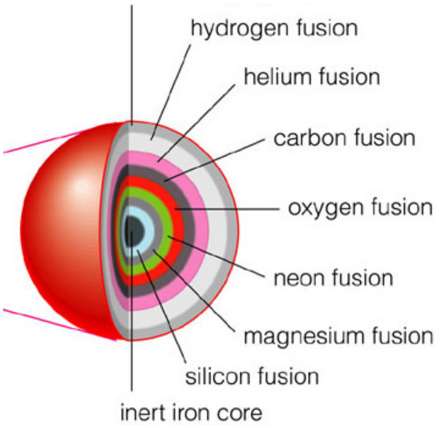
Le Phénomène de Nova



Que se passe-t-il quand la masse de Chandrasekhar est atteinte ?

Etoiles très massives

Structure en pelure d'oignon



Scénario principal :

Fusion centrale du Si, contraction,

fusion du Si en couche, contraction, …

$\Rightarrow$ Le coeur de Fe se contracte, dégénère et croit en masse.

Quand $M_{Fe} \simeq$ masse de Chandrasekhar

$\Rightarrow$ collapse jusqu'à ce que les noyaux se touchent $\Rightarrow$ rebond, onde de choc

$\Rightarrow$ Explosion, Supernova de type II

Les réactions nucléaires

Rôle

Principale source d'énergie au cours de la vie d'une étoile

↓

Calcul du taux de production d'énergie nucléaire ε / u. de masse et de temps

Nucléosynthèse stellaire : Création des différents éléments chimiques de l'univers :

↓

Calcul de l'évolution temporelle des abondances au cours de la vie des étoiles

Les réactions nucléaires

$$A_{Z_A}^{A_A} + a_{Z_a}^{A_a} \rightarrow B_{Z_B}^{A_B} + b_{Z_b}^{A_b} + \ldots$$

Lois de conservation

- Conservation du nombre de nucléons $\quad A_A + A_a = A_B + A_b + \ldots$
- Conservation des charges $\quad Z_A + Z_a = Z_B + Z_b + \ldots$
- Quantité de mouvement

(Problème à 2 corps, non-relativiste)

Masse réduite

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - V) &= -m_2(v_2 - V) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = \boxed{m_\mu} v \end{aligned}$$

Eq. de mouvement de la "particule relative" dans un potentiel fixe :

Classique (Newton): $\boxed{m_\mu} \dfrac{dv}{dt} = -\nabla V(r) \quad (r = r_1 - r_2)$

Quantique (Schroedinger) : $i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2 \boxed{m_\mu}} \nabla^2 \psi + V\psi$

Les réactions nucléaires

Lois de conservation

- Moment cinétique total

$J = \sum L + \sum S = Cst.$

Moments ang. orb. — Spins

- Nombre leptonique

- Energie

$$A_{Z_A}^{A_A} + a_{Z_a}^{A_a} \rightarrow B_{Z_B}^{A_B}$$

Chaleur fournie par la réaction

$$Q = (M_A + M_a - M_B)c^2$$

Excès de "masse" = - énergie de liaison

$$\Delta\mathcal{M}_a = (M_a - A_a m_u)c^2 = 931.478\,(M_a/m_u - A_a)\ Mev$$

Energie de liaison par nucléon

$$f_a = -\Delta\mathcal{M}_a\,/\,A_a$$

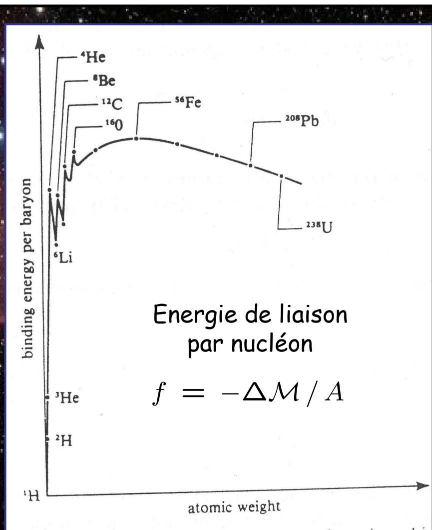
$$Q = \Delta\mathcal{M}_A + \Delta\mathcal{M}_a - \Delta\mathcal{M}_B = A_B\left[f_B - \left(\frac{A_A}{A_B}f_A + \frac{A_a}{A_B}f_a\right)\right]$$

- Energie

$$A_{Z_A}^{A_A} + a_{Z_a}^{A_a} \rightarrow B_{Z_B}^{A_B}$$

Chaleur fournie par la réaction:

$$Q = (M_A + M_a - M_B)c^2$$



Energie de liaison par nucléon

$$f = -\Delta\mathcal{M}\,/\,A$$

$$Q = \Delta\mathcal{M}_A + \Delta\mathcal{M}_a - \Delta\mathcal{M}_B = A_B\left[f_B - \left(\frac{A_A}{A_B}f_A + \frac{A_a}{A_B}f_a\right)\right]$$

Les réactions nucléaires

$$A^{n_A}_{Z_A} + a^{n_a}_{Z_a} \rightarrow B^{n_B}_{Z_B} + b^{n_b}_{Z_b} + \ldots$$

$$\boxed{r_v} = \boxed{\sigma(v)}\,\boxed{v}\,\boxed{N_A\,N_a}$$

Taux de réaction
= nbre de réactions
/ u. de temps
et de volume

Section efficace

Vitesse relative

Nbre de couples de particules / u. de volume²

Distribution de vitesses ⟶ $r = <\sigma(v)\,v>\ N_A\,N_a$

Taux de production d'énergie
ε = énergie produite
/ u. de temps et de masse

$$\epsilon_k = \frac{Q_k}{M_A\,M_a}\,\rho\,X_A\,X_a\ <\sigma v>_k$$

Sommer sur toutes les réactions

Les réactions nucléaires

$$r = <\sigma(v)\,v>\ N_A\,N_a$$

$$<\sigma(v)\,v> = \int_0^\infty \sigma(\boxed{E})v(E)\boxed{f(E)}dE$$

Energie cinétique totale dans le repère du centre de masse :

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_A m_a}{m_A + m_a}v^2 = \frac{1}{2}m_\mu v^2$$

Distribution statistique des énergies cinétiques E : (Boltzmann, Fermi-Dirac, ...)

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}}e^{-E/kT}$$

Toute la difficulté du problème se ramène au calcul de la section efficace σ(E)

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace $\sigma(E)$

Différents facteurs interviennent

1) Facteur géométrique P_λ

Extension quantique du noyau :

$P_\lambda = \lambda^2 /(4\pi) = (h/(m_\mu v))^2/(4\pi) \sim 1/E$

De Broglie

C'est la section efficace maximale, ds l'exp. de diffusion quantique, moment cin. orb. nul (l=0)

2) Facteur de Gamov P_G

Franchissement de la barrière coulombienne

Les réactions nucléaires

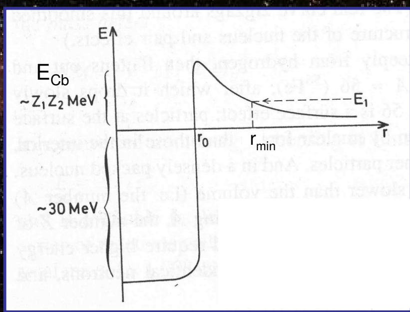
Détermination de la section efficace $\sigma(E)$

2) Facteur de Gamov P_G

La barrière coulombienne

$$E_{Cb} = \frac{Z_A Z_a e^2}{r_0} \simeq Z_A Z_a \, Mev$$

r_0 : rayon nucléaire



$$< E_{Cin} > = \frac{3}{2} kT \simeq 1 kev$$

pour T ~ 10^7 K

⟶ Plus de 1000 × trop petit

⟶ Facteur e^{-1000} dans Max-Boltz. !

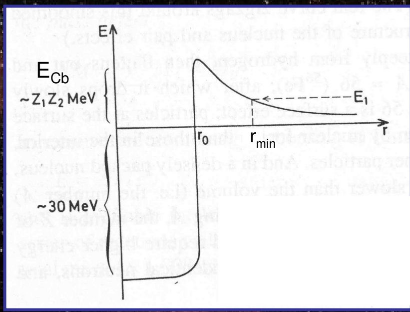
⟶ Tout à fait impossible

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

2) Facteur de Gamov P_G

La barrière coulombienne



Heureusement …

Des noyaux peuvent franchir la barrière de potentiel par **l'Effet tunnel**

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

2) Facteur de Gamov P_G — L'Effet tunnel

Barrière carrée

Eq. Schroedinger : $\frac{\hbar^2}{2\, m_\mu} \frac{d^2\psi}{dr^2} + (E - V)\,\psi = 0$

Fonction d'onde: $\psi(r) \propto \exp(-kr) \qquad k = (1/\hbar)\sqrt{2m_\mu(V-E)}$

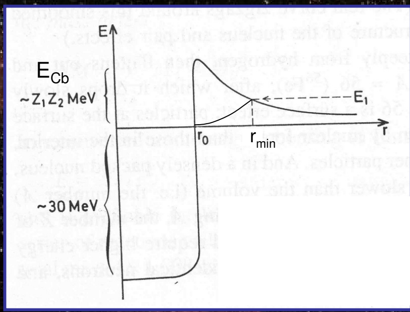
Probabilité de franchissement de la barrière : $= \exp(-2k\Delta r)$

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

2) Facteur de Gamov P_G

L'Effet tunnel



Potentiel coulombien

Probabilité de franchissement de la barrière (approximation WKB) :

$$P_G \simeq \exp(-2\int_{r_0}^{r_{min}} k\, dr)$$
$$\simeq \exp(-(\pi/\hbar)\sqrt{2m_\mu E}\, r_{min})$$
$$= \exp(-2\pi^2 r_{min}/\lambda)$$

$$\lambda = h/(m_\mu v)$$

$$k(r) = (1/\hbar)\sqrt{2m_\mu(E_{Cb}(r_0/r) - E)}$$
$$E << E_{Cb}$$

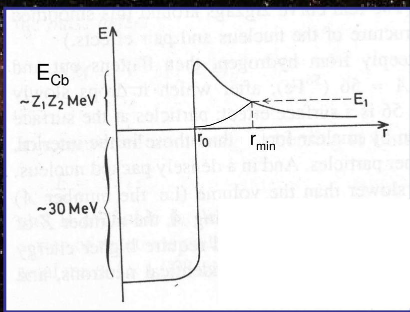
$$E = \frac{1}{2}m_\mu v^2 = \frac{h^2}{2m_\mu \lambda^2}$$

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

2) Facteur de Gamov P_G

L'Effet tunnel



Probabilité de franchissement de la barrière :

$$P_G \simeq \exp(-2\pi^2 r_{min}/\lambda)$$
$$\lambda = h/(m_\mu v)$$

$$\frac{Z_A Z_a e^2}{r_{min}} = \frac{1}{2}m_\mu v^2 \Rightarrow r_{min} = \frac{2Z_A Z_a e^2}{m_\mu v^2}$$

$$A_\mu = \frac{A_A A_a}{A_A + A_a}$$

$$P_G \approx \exp(-2\pi Z_A Z_a e^2/(\hbar v))$$
$$= \exp(-b\, E^{-1/2})$$

$$b = 31.29\, Z_A Z_a A_\mu^{1/2} \quad (keV)^{1/2}$$

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

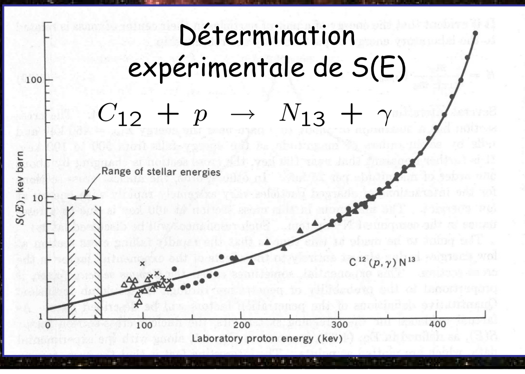
3) Facteur nucléaire S(E)

$$\sigma(E) \;=\; (1/E)\, P_G(E)\, S(E)$$

Propriétés nucléaires du noyau A + a ,
interaction forte
(et parfois faible)

S(E) varie
lentement avec E

Sauf tout près
d'une résonance



Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

$$\sigma(E) \;=\; (1/E)\, P_G\, S(E) \;=\; \frac{S(E)}{E}\, \exp(-b\, E^{-1/2})$$

$$\langle\sigma v\rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v(E) f(E)\, dE$$

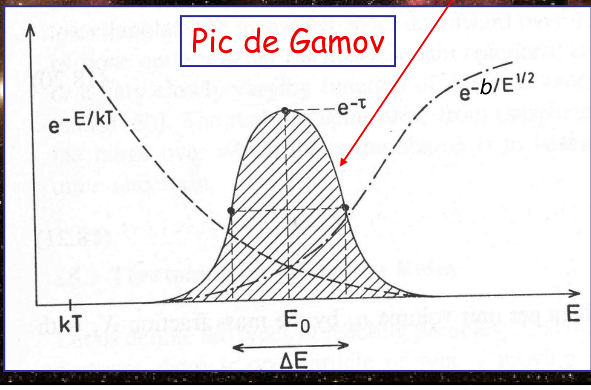
$$= \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} \exp\left(-bE^{-\frac{1}{2}}\right) \sqrt{\frac{2E}{m\mu}}\, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{(kTE)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{8}{m\mu\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-\frac{1}{2}}\right) dE$$

Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

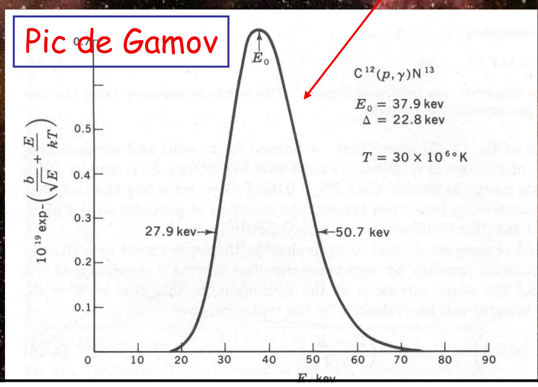
$$<\sigma v> = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-\frac{1}{2}}\right) dE$$



Les réactions nucléaires

Détermination de la section efficace σ(E)

$$<\sigma v> = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-\frac{1}{2}}\right) dE$$



Les réactions nucléaires

$$<\sigma v> = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{S_0}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) dE$$

Approx. par une gaussienne

$$exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) = exp(-f(E))$$

$$\approx exp(-f(E_0))\, exp\left(-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E/2}\right)^2\right)$$

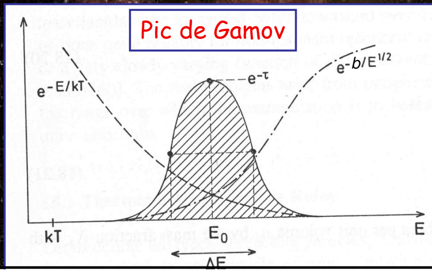
$$f'(E_0) = 0 \;\Rightarrow\; E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3}$$

$$\tau = f(E_0) = 3E_0/(kT) \propto T^{-1/3}$$

$$\Delta E = \sqrt{8/f''} = 4\sqrt{E_0 kT/3} \propto T^{5/6}$$

$$\begin{aligned} <\sigma v> &\propto T^{-3/2}\, \Delta E\, e^{-f(E_0)} \\ &\propto T^{-3/2}\, T^{5/6}\, e^{-\tau} \\ &\propto \tau^2 e^{-\tau} \end{aligned}$$

Pic de Gamov



Les réactions nucléaires

$$<\sigma v> \propto \tau^2 e^{-\tau}$$

$T_7 = T\,(\mathrm{K}) / 10^7$

$$W = Z_j^2 Z_k^2 A = Z_j^2 Z_k^2 \frac{A_j A_k}{A_j + A_k},$$

$$\tau = 19.721 W^{1/3} T_7^{-1/3},$$

$$E_0 = 5.665\ \mathrm{keV} \cdot W^{1/3} T_7^{2/3},$$

$$\frac{E_0}{kT} = \frac{\tau}{3} = 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3},$$

$$\Delta E = 4.249\ \mathrm{keV} \cdot W^{1/6} T_7^{5/6},$$

$$\nu = \frac{\partial \ln <\sigma v>}{\partial \ln T} = \frac{\tau}{3} - \cancel{\frac{2}{3}}$$

$$\simeq 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3}$$

Noyaux légers :
ν ~ 6 (< σ v > ∝ T^6)

Noyaux plus lourds :
ν ~ 20-30 !! (< σ v > ∝ T^{30})

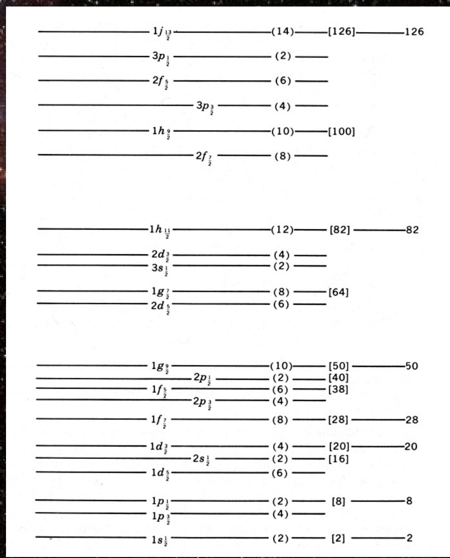
Extrêmement sensible
à la température !!

Les réactions nucléaires

Réactions résonantes

Les noyaux ont des niveaux discrets d'énergie ~ atomes

Approx. en couches (shell-model) : Chaque nucléon est plongé dans le potentiel fixe créé par les autres



Les réactions nucléaires

Réactions résonantes

Les noyaux ont des niveaux discrets d'énergie ~ atomes

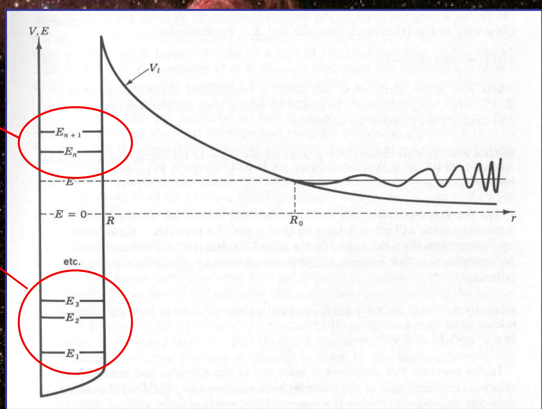
Niveaux quasi-stationnaires

Niveaux stationnaires

Si E proche de E_n

⬇

Réaction résonnante



Les réactions nucléaires

$\Gamma = \hbar/\tau$

Réactions résonantes

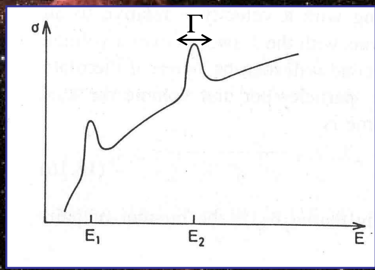
S(E) non-constant ⟶ Ne pas le sortir de l'intégrale

$$< \sigma v > \propto \; e^{-E_{res}/(kT)}$$

Encore plus sensible à la température
ex : réaction 3α : $\varepsilon \sim T^{40}$!!!

Autour de la résonance :

$$\sigma(E) \;\propto\; \frac{1}{(E - E_{res})^2 + (\Gamma/2)^2}$$



σ non-négligeable pour les particules arrivant avec moment cinétique non-nul

➡ Ajouter le potentiel "centrifuge" : $V(r) \;=\; \frac{Z_A\, Z_a\, e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2 m_\mu r^2}$

Pour $E \sim E_{res}$, $\sigma \sim \sigma_{max} = (2l+1)\, \lambda^2 \,/(4\pi) = (2l+1)\, \pi\, (\hbar/(m_\mu\, v))^2$

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton (T > 10⁷ K)

PPI

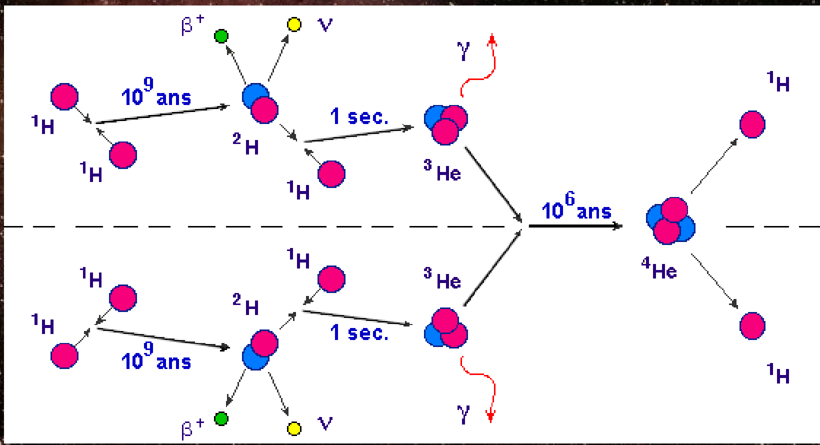
$${}^1_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + {}^0_1e + \nu_e$$

$${}^1_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + \gamma$$

$${}^3_2He + {}^3_2He \rightarrow {}^4_2He + 2\,{}^1_1H$$

$$\begin{aligned} Q_{glob} &= 4\Delta\mathcal{M}_H - \Delta\mathcal{M}_{He^4} \\ &= 26.73\; Mev \end{aligned}$$

Chaîne proton-proton



Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton (T > 10⁷ K)

$$^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu$$
$$^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma$$

$$^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2\,{}^1H$$

(*pp*1)

$$^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma \qquad (18.62)$$

$$^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu$$
$$^7Li + {}^1H \rightarrow {}^4He + {}^4He$$

(*pp*2)

$$^7Be + {}^1H \rightarrow {}^8B + \gamma$$
$$^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu$$
$$^8Be \rightarrow {}^4He + {}^4He$$

(*pp*3)

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton ($T > 10^7$ K)

PPI

$${}^1_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + {}^0_1e + \nu_e$$

$${}^1_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + \gamma$$

$${}^3_2He + {}^3_2He \rightarrow {}^4_2He + 2\,{}^1_1H$$

$$\begin{aligned} Q_{glob} &= 4\Delta\mathcal{M}_H - \Delta\mathcal{M}_{He^4} \\ &= 26.73\ Mev \end{aligned}$$

Mais :
- Pertes par les neutrinos !
- Hors équilibre !

$$\epsilon \neq \frac{Q_{glob}}{m_u^2}\,\rho X^2 < \sigma v >_{pp}$$

Energie du neutrino

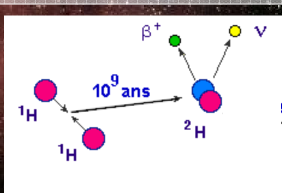
$$\epsilon = \sum_k \frac{Q_k - Q_{\nu,k}}{M_{1,k}\,M_{2,k}}\,\rho X_{1,k} X_{2,k} < \sigma v >_k$$

Somme sur les réactions

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton ($T > 10^7$ K)

Réaction p-p



$${}^1_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + {}^0_1e + \nu_e$$

Franchissement de la barrière coulombienne suivi immédiatement de
$p \longrightarrow n + e^+ + \nu$ (interaction faible)

Changement de spin du proton transformé en neutron $\longrightarrow$ Transition faible de Gamow-Teller

Probabilité très faible car mauvais recouvrement des fonctions d'onde ($\int \psi_f^* \psi_i \, dV \searrow$) $\longrightarrow$ Temps de réaction très long : $\tau_H \sim 10^9$ ans

$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma$

$E_{neutrino} \simeq 0.262$ Mev perdue $\longrightarrow$

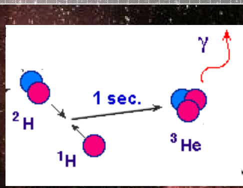
$$\begin{aligned} Q &= 2\Delta\mathcal{M}_H - \Delta\mathcal{M}_D - E_{neutrino} \\ &= 1.442 - 0.262 = 1.180\ Mev \end{aligned}$$

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton ($T > 10^7$ K)

Combustion du deuterium

$${}^1_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + \gamma$$



Temps de réaction très court : $\tau_D \sim 1$ sec.

$$0 \simeq \frac{dD}{dt} = <\sigma v>_{pp} \frac{H^2}{2} - <\sigma v>_{pd} HD$$

$$\rightarrow \left(\frac{D}{H}\right)_{eq} = \frac{<\sigma v>_{pp}}{2 <\sigma v>_{pd}} = \frac{\tau_D}{2\tau_H} \approx 10^{-17}$$

Sur terre : $D/H = 1.5 \times 10^{-4}$ (spallation)

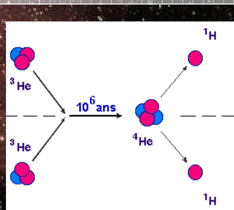
Première phase de combustion du Deuterium initial, puis équilibre.

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton ($T > 10^7$ K)

Combustion $He_3 + He_3$

$${}^3_2He + {}^3_2He \rightarrow {}^4_2He + 2\,{}^1_1H$$



Deuterium à l'équilibre

$$\frac{dHe^3}{dt} = <\sigma v>_{pp} \frac{H^2}{2} - <\sigma v>_{33} \boxed{(He^3)^2}$$

Au début, réaction très lente !!

$$\left(\frac{He^3}{H}\right)_{eq} = \sqrt{\frac{<\sigma v>_{pp}}{2 <\sigma v>_{33}}}$$

Décroit quand T ↗

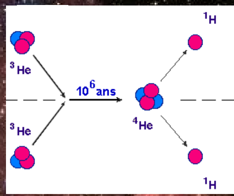
Pour T trop petit, He^3 n'a jamais le temps d'atteindre sa valeur d'équilibre, donc bosse

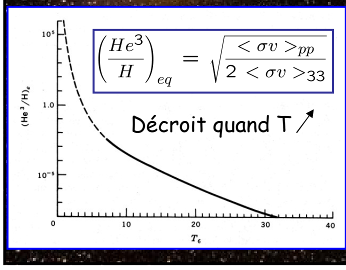
Evolution de la composition chimique

1. Chaîne proton-proton

Combustion $He_3 + He_3$

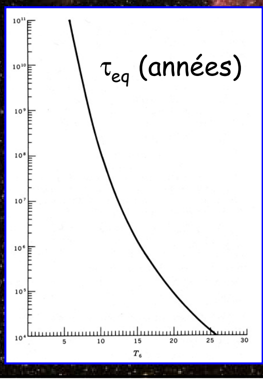
$${}^3_2He + {}^3_2He \to {}^4_2He + 2\,{}^1_1H$$

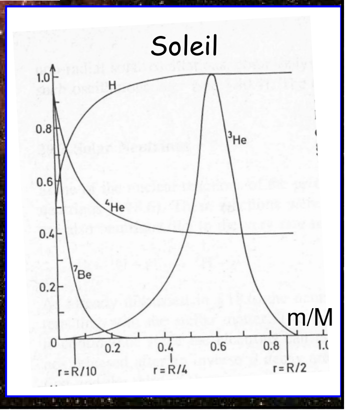




$$\left(\frac{He^3}{H}\right)_{eq} = \sqrt{\frac{<\sigma v>_{pp}}{2 <\sigma v>_{33}}}$$

Décroit quand T ↗





Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton (T > 10^7 K)

Chaînes PPII et PPIII

$${}^3_2He + {}^4_2He \to {}^7_4Be + \gamma$$

PPII

$${}^7_4Be + {}^0_{-1}e \to {}^7_3Li + {}^0_0\nu$$

$${}^7_3Li + {}^1_1H \to {}^8_4Be + \gamma$$

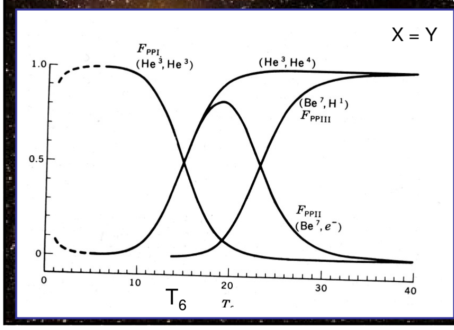
$${}^8_4Be \to {}^4_2He + {}^4_2He$$

PPIII

$${}^7_4Be + {}^1_1H \to {}^8_5B + \gamma$$

$${}^8_5B \to {}^8_4Be + {}^0_1e + \nu_e$$

$${}^8_4Be \to 2\,{}^4_2He$$



Evolution de la composition chimique

1. Chaîne proton-proton

Problème du Lithium

PPII $^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{8}_{4}Be + \gamma$

$T_{Li} \sim 2\ 10^6$ K

L'abondance de Lithium à la surface du Soleil est 140 * plus petite que sa valeur initiale

L'étude d'amas jeunes (Hyades, …) montre que l'abondance en surface diminue au cours du temps

⬇

Mécanismes hydrodynamiques non-standards de transport des régions profondes vers la surface : diffusion, circulation méridienne, ondes internes, …

Combustion de l'hydrogène

1. Chaîne proton-proton (T > 10^7 K)

Différentes énergies perdues par les neutrinos :

PPI $^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{2}_{1}H + ^{0}_{1}e + \nu_e$

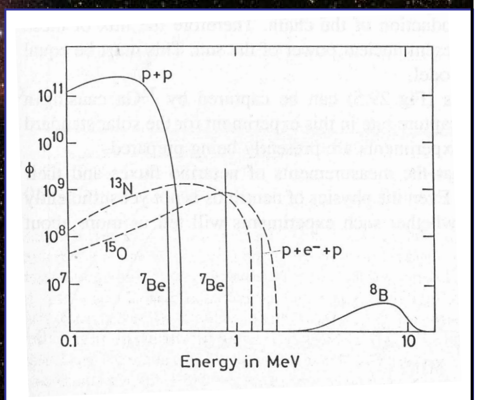
E_ν = 0.263 Mev Perte : $\frac{2 \times 0.263}{26.73}$ = 2 %

PPII $^{7}_{4}Be + ^{0}_{-1}e \rightarrow ^{7}_{3}Li + ^{0}_{0}\nu$

E_ν = 0.8 Mev Perte : $\frac{0.263 + 0.8}{26.73}$ = 4 %

PPIII $^{8}_{5}B \rightarrow ^{8}_{4}Be + ^{0}_{1}e + \nu_e$

E_ν = 7.2 Mev Perte : $\frac{0.263 + 7.2}{26.73}$ = 27.9 %

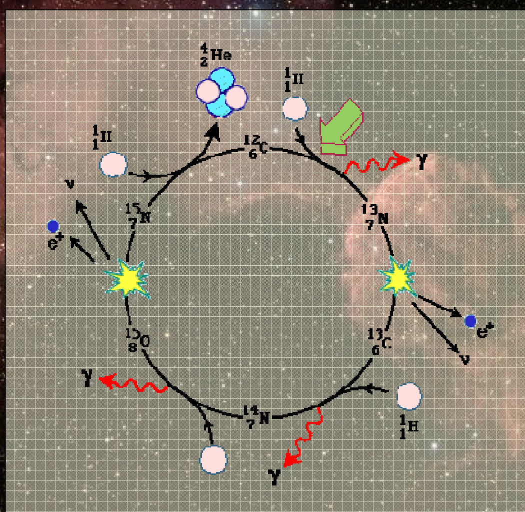


Combustion de l'hydrogène

2. Cycle CNO T > 17 x 10^6 K

$$^{12}C + {}^1H \rightarrow {}^{13}N + \gamma$$
$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu$$
$$^{13}C + {}^1H \rightarrow {}^{14}N + \gamma$$
$$^{14}N + {}^1H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu$$
$$^{15}N + {}^1H \rightarrow {}^{12}C + {}^4He$$
$$\rightarrow {}^{16}O + \gamma$$
$$^{16}O + {}^1H \rightarrow {}^{17}F + \gamma$$
$$^{17}F \rightarrow {}^{17}O + e^+ + \nu$$
$$^{17}O + {}^1H \rightarrow {}^{14}N + {}^4He$$

Cycle CNO



Combustion de l'hydrogène

2. Cycle CNO T > 17 x 10^6 K

Boucle principale :

Réaction la plus lente : $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{15}_{8}O + \gamma$

A l'équilibre, il ne reste presque que N^{14} (goulot)

$$\begin{bmatrix} C^{12} \\ C^{13} \\ N^{14} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 0.0122 \\ 0.00305 \\ 0.985 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma \\
^{13}\mathrm{N} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{C} + e^{+} + \nu \\
^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma \\
^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{O} + \gamma \\
^{15}\mathrm{O} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{N} + e^{+} + \nu \\
^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \\
&\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma \\
^{16}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{17}\mathrm{F} + \gamma \\
^{17}\mathrm{F} &\rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + e^{+} + \nu \\
^{17}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He}
\end{aligned}$$

Boucle secondaire:

Rapport de branchement très bas : ~ 4×10^{-4}

Rôle principal: conversion $O^{16} \longrightarrow N^{14}$

Evolution de la composition chimique

2. Cycle CNO T > 15 10^6 K

1. $C_{12} \longrightarrow N_{14}$
   $O^{16} \longrightarrow N^{14}$ (beaucoup plus lent)

   Au départ :
   $C^{12} : N^{14} : O^{16} = 5.5 : 1 : 9.5$

   A l'équilibre (typiquement) :
   $C^{12} : N^{14} : O^{16} = 0.15 : 15 : 0.3$

2. Evolution complexe car :

- Présence d'un coeur convectif qui homogénise et dont la taille change
- Certains constituants n'atteignent jamais la valeur d'équilibre

$$\begin{aligned}
^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma \\
^{13}\mathrm{N} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{C} + e^{+} + \nu \\
^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma \\
^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{O} + \gamma \\
^{15}\mathrm{O} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{N} + e^{+} + \nu \\
^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \\
&\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma \\
^{16}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{17}\mathrm{F} + \gamma \\
^{17}\mathrm{F} &\rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + e^{+} + \nu \\
^{17}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He}
\end{aligned}$$

Combustion de l'hydrogène

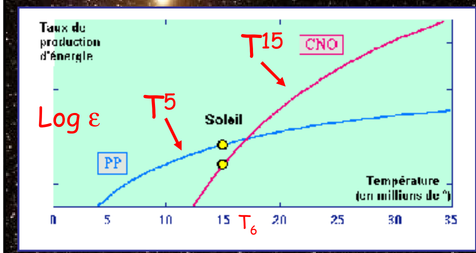
Cycle CNO versus chaîne P-P

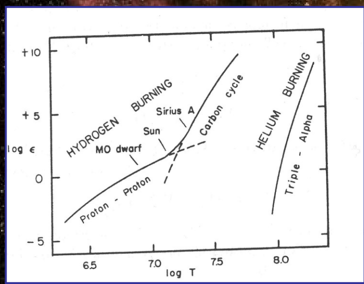
$\varepsilon_{pp} \propto T^5$ $\varepsilon_{CNO} \propto T^{15}$

$$W = Z_j^2 Z_k^2 A = Z_j^2 Z_k^2 \frac{A_j A_k}{A_j + A_k}$$

$$\nu = \frac{\partial \ln <\sigma v>}{\partial \ln T} \simeq 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3}$$

Le cycle CNO domine
pour T > 17 × 10^6 K
⟶ Étoiles massives





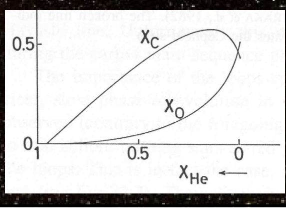
Combustion de l'helium: réaction 3α (T ~ 10^8 K)

$He_4 + He_4 \rightleftarrows Be_8^*$ Temps de vie ~ 10^{-16} s (Be_8^*/He_4) ~ 10^{-9}

$He_4 + Be_8^* \rightarrow C_{12} + \gamma$ $C_{12} + He_4 \rightarrow O_{16} + \gamma$ $O_{16} + He_4 \rightarrow Ne_{20}$ (Négligeable)

Réaction résonnante → très sensible à T $\epsilon \propto \rho^2 T_8^{-3} e^{-44/T_8} \propto \rho^2 T^{40}$ $(T = 10^8 K)$

$E_{3\alpha} = 3\,\Delta M_{He4} - \Delta M_{C12}$
= 7.375 Mev
<< 26.7 Mev (pp)

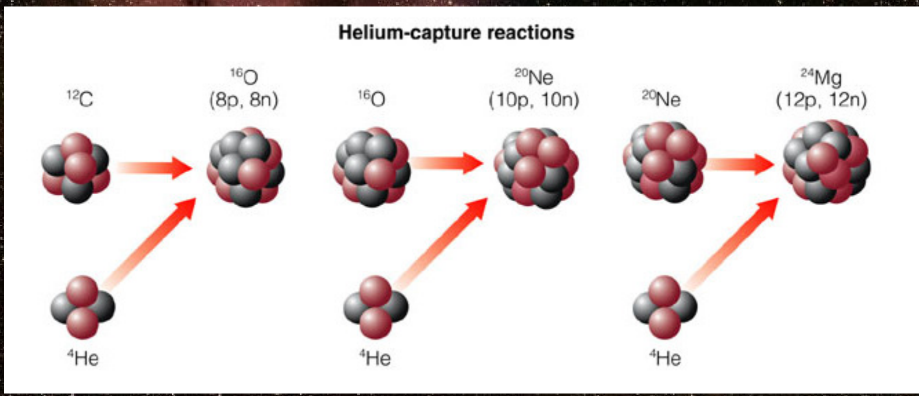


1) $He_4 + Be_8^* \rightarrow C_{12}$ ↗ $C_{12} + He_4 \rightarrow O_{16}$ négligeable

2) $C_{12} + He_4 \rightarrow O_{16}$ ↗ ⟶ C_{12} ↘

Finalement : $C_{12} \approx O_{16}$

Captures α



Combustion de l'hélium

3. Processus trois alphas (T > 100 10^6 K)

$$ {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He \Leftrightarrow {}^{8}_{4}Be $$
$$ {}^{8}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + \gamma $$
$$ {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{16}_{8}O + \gamma $$
$$ {}^{16}_{8}O + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{20}_{10}Ne + \gamma $$
$$ {}^{20}_{10}Ne + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{24}_{12}Mg + \gamma $$

$$ {}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{18}_{8}O + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu $$
$$ {}^{18}_{8}O + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{22}_{10}Ne + \gamma $$

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Combustion du carbone (T ~ (0.5-1) x 10^9 K)

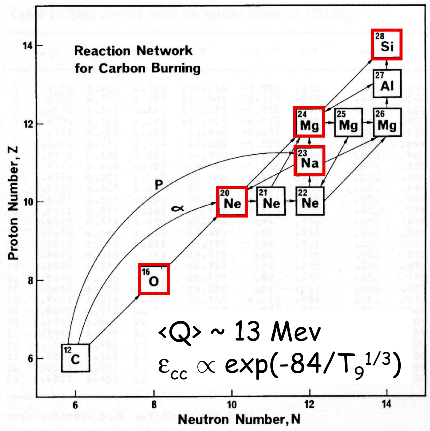
$$
\begin{array}{lll}
 & & Q\ \text{(Mev)} \\
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} \rightarrow {}^{24}\mathrm{Mg} + \gamma & , & 13.931 \\
\rightarrow {}^{23}\mathrm{Mg} + n & , & -2.605 \\
\rightarrow {}^{23}\mathrm{Na} + \boxed{p} & , & 2.238 \\
\rightarrow {}^{20}\mathrm{Ne} + \alpha & , & 4.616 \\
\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + 2\alpha & , & -0.114
\end{array}
$$

$^{12}C + \boxed{{}^{1}H} \rightarrow {}^{13}N + \gamma$

$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu$

$^{13}C + {}^{4}He \rightarrow {}^{16}O + \boxed{{}^{1}n}$

Source de neutrons



$\langle Q \rangle$ ~ 13 Mev

$\varepsilon_{cc} \propto \exp(-84/T_9^{1/3})$

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Photo-désintégration du néon (T ~ 1.5 x 10^9 K)

$^{20}_{10}Ne + \gamma \rightarrow \mathrm{Ne}^* \rightarrow {}^{16}_{8}O + {}^{4}_{2}He$ Quand kT ~ Q = 4.73 Mev

Equilibre « thermodynamique » $^{16}_{8}O + {}^{4}_{2}He \rightleftarrows {}^{10}_{20}Ne$

$$\left(\frac{n_1 n_2}{n_{12}}\right)_e = \frac{(2\pi\mu kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\frac{G_1 G_2}{G_{12}} \exp - \frac{Q}{kT}$$ ~ Saha

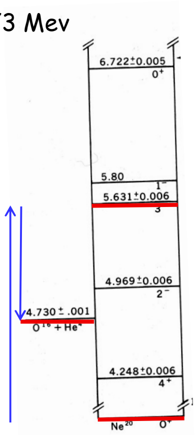
T ↗ ⇒ équilibre vers + de photo-dissociations

Autant de réactions dans chaque sens → taux de réaction :

$$\lambda_\gamma = \frac{(2\pi\mu kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\frac{G_1 G_2}{G_{12}} \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)\lambda_{12} \qquad \log \lambda_\gamma(s^{-1}) = 12.7 - \frac{28.4}{T_9}$$

Les noyaux α libérés sont directement capturés :

$$^{20}_{10}Ne + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{24}_{12}Mg \Rightarrow 2\ {}^{20}_{10}Ne \rightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{24}_{12}Mg + 4.58\ \mathrm{Mev}$$



Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

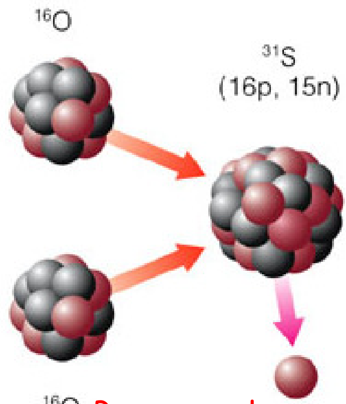
Combustion de l'oxygène (T ~ 2 x 10^9 K)

Q (Mev)

$$
\begin{aligned}
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{32}S + \gamma, & 16.541\\
&\boxed{\rightarrow {}^{31}P + p}, & 7.677\\
&\rightarrow {}^{31}S + n, & 1.453\\
&\boxed{\rightarrow {}^{28}Si + \alpha}, & 9.593\\
&\rightarrow {}^{24}Mg + 2\alpha, & -0.393
\end{aligned}
$$

<Q> ~ 16 Mev

Produit final :
Surtout ^{28}Si (puis ^{32}S, ^{24}Mg)



Par exemple …

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

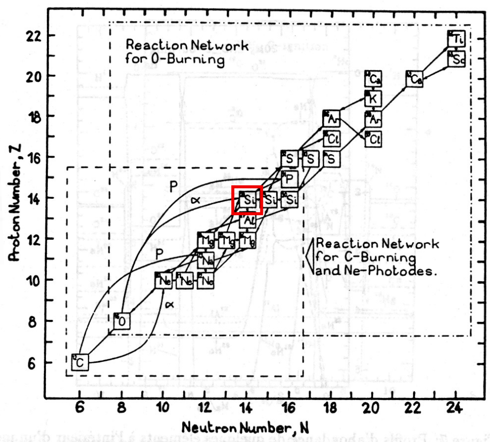
Combustion de l'oxygène (T ~ 2 x 10^9 K)

Q (Mev)

$$
\begin{aligned}
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{32}S + \gamma, & 16.541\\
&\boxed{\rightarrow {}^{31}P + p}, & 7.677\\
&\rightarrow {}^{31}S + n, & 1.453\\
&\boxed{\rightarrow {}^{28}Si + \alpha}, & 9.593\\
&\rightarrow {}^{24}Mg + 2\alpha, & -0.393
\end{aligned}
$$

<Q> ~ 16 Mev

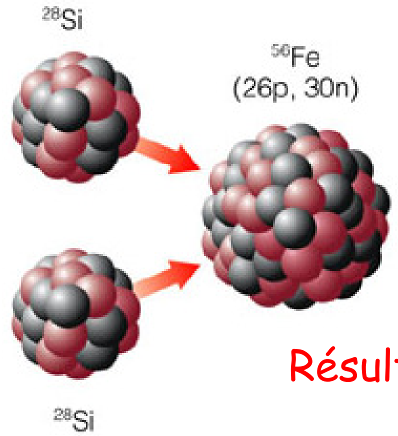
Produit final :
Surtout ^{28}Si (puis ^{32}S, ^{24}Mg)



Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Combustion du Silicium (T ~ 3 x 10^9 K)



Résultat global …

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Combustion du Silicium (T ~ 3 x 10^9 K)

kT $\gtrsim$ Q pour les noyaux faiblement liés

$\Rightarrow$ photodésintégrations et recapture des α par des noyaux mieux liés

$\Rightarrow$ réarrangement : Fe, Ni $\nearrow$, …

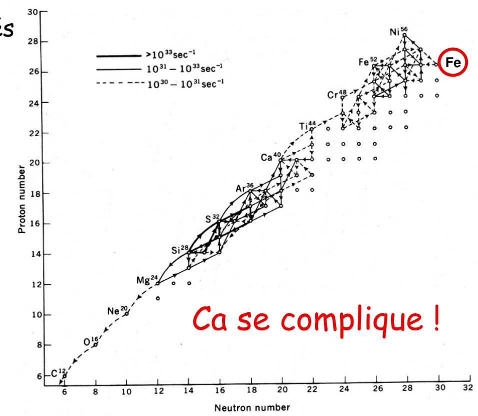
Captures α :

$$^{28}_{14}Si + ^{4}_{2}He \Leftrightarrow ^{32}_{16}S + \gamma$$

$$^{32}_{16}S + ^{4}_{2}He \Leftrightarrow ^{36}_{18}Ar + \gamma$$

$$^{36}_{18}Ar + ^{4}_{2}He \Leftrightarrow ^{40}_{20}Ca + \gamma$$

$$\vdots$$



Ca se complique !

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Equilibre thermodynamique nucléaire (T ~ 7 x 10⁹ K)

kT $\gtrsim$ Q pour la plupart des réactions ⇒ équilibre thermodynamique nucléaire

⇒ taux de réactions directes et inverses égaux

⇒ rapports d'abondances donnés par les « équations de Saha » :

$$\frac{n_n\, N_{A-1,Z}}{N_{A,Z}} \propto T^{3/2}\ \mathrm{exp}\left(-\frac{Q_n}{kT}\right)$$

$$N_{A,Z} = G_{A,Z} A^{3/2}\, \frac{n_p^Z\, n_n^{A-Z}}{2^A} \left(\frac{(2\pi M_{A,Z} kT)^{3/2}}{h^3}\right)^{1-A} \mathrm{exp}\left(\frac{Q_{A,Z}}{kT}\right)$$

$$Q_{A,Z} = c^2 [Z\, M_H + (A-Z)\, M_n - M(A,Z)]$$

On a tout si on connaît n_p et n_n ⇒ 2 autres contraintes requises :

$$\rho = m_u \sum_i \mu_i N_i \qquad\qquad \frac{\bar{Z}}{\bar{N}} = \frac{\sum Z\, N_{A,Z} + n_p}{\sum (A-Z)\, N_{A,Z} + n_n}$$

Fixé car équilibre bien avant les désintégrations β

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

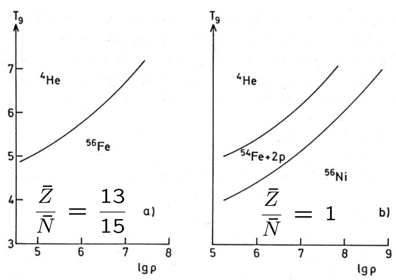
Equilibre thermodynamique nucléaire (T ~ 7 x 10⁹ K)

$$N_{A,Z} = G_{A,Z} A^{3/2}\, \frac{n_p^Z\, n_n^{A-Z}}{2^A} \left(\frac{(2\pi M_{A,Z} kT)^{3/2}}{h^3}\right)^{1-A} \mathrm{exp}\left(\frac{Q_{A,Z}}{kT}\right)$$

1) kT « pas trop grand » ⇒ éléments les plus abondants : maximum de $f_{A,Z} = Q_{A,Z} / A$ ⇒ principalement Ni, puis Fe

2) S'il y a le temps, désintégrations beta ⇒ Z/N ↘ ($dN_i = - N_i\, dt/\tau_i$) ⇒ principalement ^{56}Fe

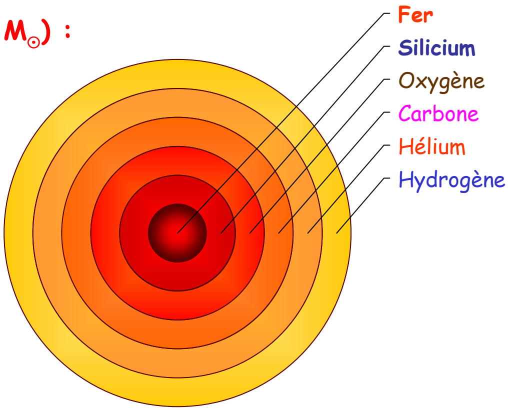
3) kT > Q ⇒ photodésintégrations ⇒ ^4He, … ↗



Cœur d'une étoile massive

Durée des phases ultimes (15 $M_{\odot}$) :

Fusion du
- Carbone : ~ 6000 ans
- Néon : ~ 7 ans
- Oxygène : ~ 2 ans
- Silicium : ~ 6 jours

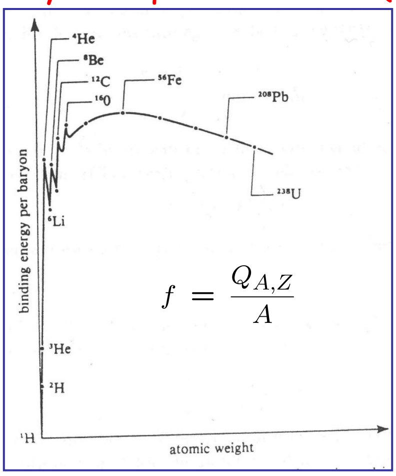


Structure en pelure d'oignon

Evolution masses élevées

Les dernières phases de combustion nucléaire

Equilibre thermodynamique nucléaire (T ~ 7 x 10^9 K)



Equations de structure

Conservation de la masse
$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}$$

Equilibre hydrostatique
$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Transfert d'énergie

Radiation
$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3\kappa L}{64\pi^2 ac r^4 T^3}$$

Convection
$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\nabla_{\mathrm{ad}} \frac{Gm}{4\pi r^4}\frac{T}{P}$$

Conservation de l'énergie
$$\frac{\partial L}{\partial m} = \varepsilon$$

$\rho = \rho(P, T, X_i)$
$\kappa = \kappa(P, T, X_i)$
$\varepsilon = \varepsilon(P, T, X_i)$

+ 4 conditions aux limites

Méthode de résolution numérique

Calcul d'un modèle statique: composition chimique fixée en chaque couche

Posons: $\bar{Y} = (r, P, T, L)$

Non-linéaire !

Système à résoudre: $d\bar{Y}/dm = \bar{f}(\bar{Y})$ (+ 4 conditions aux limites)

Méthode des différences finies $\Rightarrow$ N couches: i=1, … N

$$\frac{\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{i+1} + \bar{Y}_i}{2}\right)$$

Algorithme de Newton-Raphson

$\Rightarrow$ Linéarisation du système autour de l'estimation à l'étape k:

Jacobienne

$$\frac{\delta\bar{Y}_{i+1} - \delta\bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} - J_{\bar{f}}(\delta\bar{Y}_{i+1} + \delta\bar{Y}_i)/2 = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{k,i+1} + \bar{Y}_{k,i}}{2}\right) - \frac{\bar{Y}_{k,i+1} - \bar{Y}_{k,i}}{m_{i+1} - m_i}$$

$$\bar{Y}_{k+1,i} \leftarrow \bar{Y}_{k,i} + \delta\bar{Y}_i$$

Système de 4N-2 équations linéaires

Méthode de résolution numérique

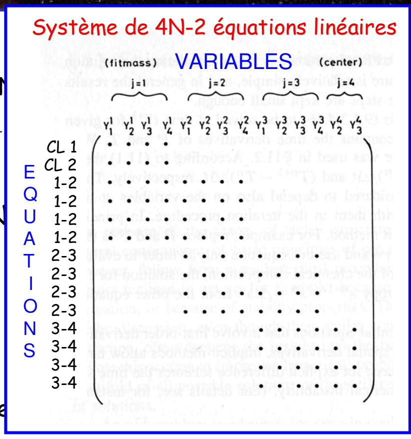
Calcul d'un modèle statique: composition

Posons: $\bar{Y} = (r, P, T, L)$

Système à résoudre: $d\bar{Y}/dm = \bar{f}(\bar{Y}$ N

Méthode des différences finies $\Rightarrow$ N

$$\frac{\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{i+1} + \bar{Y}_i}{2}\right)$$



Algorithme de Newton-Raphson

$\Rightarrow$ Linéarisation du système autour de l'e

Jacobienne

$$\frac{\delta\bar{Y}_{i+1} - \delta\bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} - J_{\bar{f}}(\delta\bar{Y}_{i+1} + \delta\bar{Y}_i)/2 = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{k,i+1} + \bar{Y}_{k,i}}{2}\right) - \frac{\bar{Y}_{k,i+1} - \bar{Y}_{k,i}}{m_{i+1} - m_i}$$

$$\bar{Y}_{k+1,i} \leftarrow \bar{Y}_{k,i} + \delta\bar{Y}_i$$

Méthode de résolution numérique

Calcul de l'évolution temporelle d'un modèle

L'évolution temporelle découle essentiellement de la variation de composition chimique due aux réactions nucléaires, phénomènes de transport (diffusion, …)

$\Rightarrow$ μ change $\Rightarrow$ équation d'état change $\Rightarrow$ structure change

Modèle au temps t_k $\rightarrow$ Modèle au temps $t_{k+1} = t_k + \delta t$

1) Calcul de la nouvelle composition: $X_i\,(m, t_k) \rightarrow X_i\,(m, t_{k+1}) = X_i(m, t_k) + \delta X_i$

Cinétique des réactions nucléaires:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho}\left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik}\right) \simeq \frac{\delta X_i}{\delta t}$$

Attention aux échelles de temps !
Certaines réactions sont très rapides (combustion du deuterium, …)
$\Rightarrow$ forcer la mise à l'équilibre,
ou utiliser une méthode implicite

$$A + B \rightarrow C$$

$$r_{ac} = <\sigma v>_{abc}\ X_A\, X_B$$

2) Avec la nouvelle composition chimique, le modèle en t_k n'est plus solution des équations
$\Rightarrow$ on itère (méthode de Newton-Raphson) jusqu'à la convergence
On obtient ainsi le modèle en t_{k+1}

Méthode de résolution numérique

Calcul de l'évolution temporelle d'un modèle

L'évolution temporelle découle essentiellement de la variation de composition chimique due aux réactions nucléaires, phénomènes de transport (diffusion, …)

$\Rightarrow$ μ change $\Rightarrow$ équation d'état change $\Rightarrow$ structure change

Modèle au temps t_k $\rightarrow$ Modèle au temps $t_{k+1} = t_k + \delta t$

1) Calcul de la nouvelle composition: $X_i\ (m, t_k)$ $\rightarrow$ $X_i\ (m, t_{k+1}) = X_i(m, t_k) + \delta X_i$

Cinétique des réactions nucléaires:

Attention aux échelles de temps !
Certaines réactions sont très rapides (combustion du deuterium, …)
$\Rightarrow$ forcer la mise à l'équilibre,
ou utiliser une méthode implicite

Exemple du deuterium

$pp:\ {}^1_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + {}^0_1e + \nu_e \qquad pd:\ {}^1_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + \gamma$

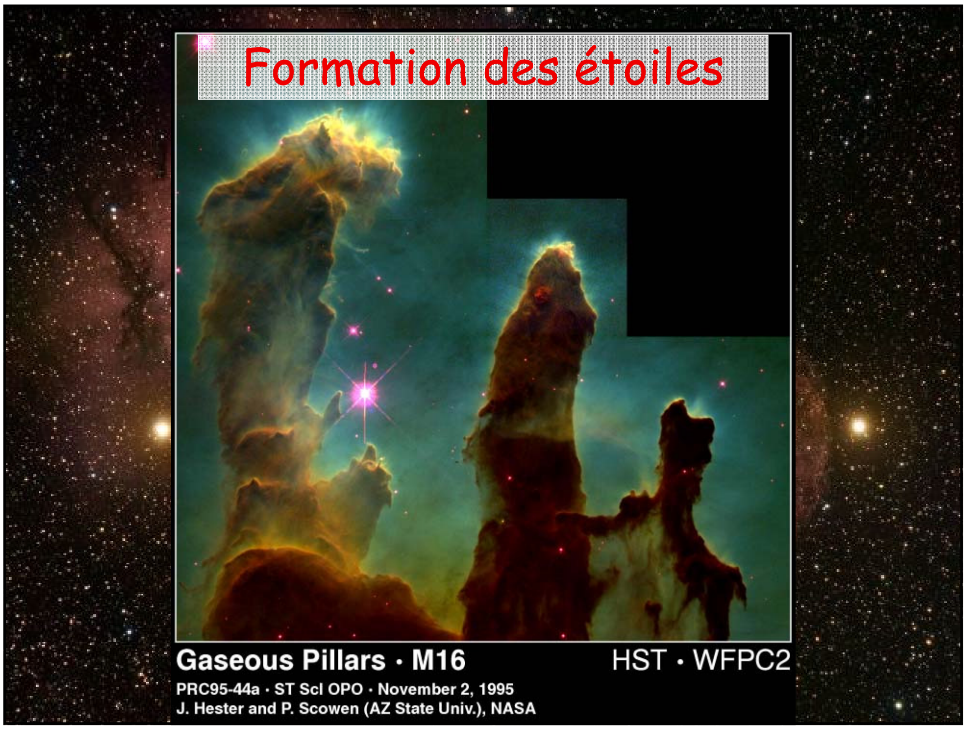
$$\frac{dD}{dt} = <\sigma v>_{pp} \frac{H^2}{2} - <\sigma v>_{pd} HD$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{D}{H}\right)_{eq} = \frac{<\sigma v>_{pp}}{2 <\sigma v>_{pd}} \approx 10^{-17}$$

2) Avec la nouvelle composition chimique, le modèle en t_k n'est plus solution des équations
$\Rightarrow$ on itère (méthode de Newton-Raphson) jusqu'à la convergence
On obtient ainsi le modèle en t_{k+1}

Contraction gravifique

Formation des étoiles



Contraction gravifique

Instabilité du nuage proto-stellaire (H_2)

Critère de Jeans : le nuage est instable si

Longueur d'onde de la perturbation

$$\lambda \geq \lambda_J = \left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2} v_s \approx \tau_{ff} \boxed{v_s}$$

Vitesse du son isotherme

$v_s^2 = P/\rho = \Re\, T/\mu$

Si $\tau_{ff}\, v_s < \lambda$, le milieu n'a pas le temps de contrebalancer la perturbation sur l'échelle de temps de chute libre τ_{ff} $\longrightarrow$ effondrement

$$M \geq M_J = \left(\frac{\pi\Re}{G\mu}\right)^{3/2} T^{3/2} \rho^{-1/2}$$

$\rho \sim 10^{-24}$ g/cm^3, T ~ 10 K , μ=2 $\longrightarrow$ $M_J \sim 1000\, M_\odot$

Contraction gravifique

Etape 1 : Effondrement gravifique ~ isotherme

Temps de chute libre ~ $(G\rho)^{-1/2}$ ~ 10^8 ans >> temps d'ajustement thermique ~ λ/c (milieu optiquement mince)

⬇

Contraction isotherme

⬇

$M_J \sim \rho^{-1/2} \searrow$

⬇

Fragmentations

Contraction gravifique

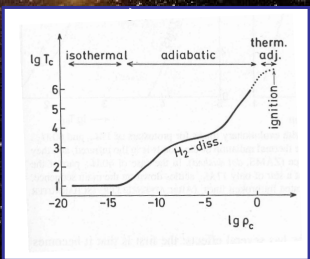
Etape 1 : Effondrement gravifique ~ isotherme

Fragmentations car $M_J \searrow$

Etape 2 : Effondrement gravifique ~ adiabatique

Quand M ~ 1 $M_\odot$, temps de chute libre ~ temps d'ajustement thermique :

Contraction adiabatique $\longrightarrow$ T_c, $P_c \nearrow$



- Apparition d'un 1er front d'onde de choc

  $H_2 \longrightarrow H + H$ (T_c ~ 2000 K)

- Apparition d'un 2er front d'onde de choc
- Equilibre hydrostatique

Etape 3 : Contraction gravifique tout en maintenant l'équilibre hydrostatique

Théorème du Viriel

Equilibre hydrostatique $\boxed{\frac{\partial P}{\partial m}} = -\frac{G\,m}{4\pi\, r^4}$

Masse $\boxed{\frac{\partial r}{\partial m}} = \frac{1}{4\pi\, r^2 \rho}$

Intégration par partie

$$\int_0^M 4\pi r^3 \boxed{\frac{\partial P}{\partial m}}\, dm = \left[4\pi r^3 P\right]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \boxed{\frac{\partial r}{\partial m}}\, P\, dm \quad ,$$

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\, dm = 3\int_0^M \frac{P}{\varrho}\, dm$$

Gaz parfait ionisé dégénéré ou non, non-relativiste

$$\frac{P}{\varrho} = \frac{2}{3}\,u$$

$$E_g := -\int_0^M \frac{Gm}{r}\, dm$$

Energie potentielle gravifique totale

$$E_g = -\,2\, E_i$$

$E_i = \int_0^M u\, dm$

Etape 3 : Contraction gravifique tout en maintenant l'équilibre hydrostatique

Théorème du Viriel

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\, dm = 3\int_0^M \frac{P}{\varrho}\, dm$$

$E_g = -\,2\, E_i$ (Gaz parfait)

Energie totale : $E_{tot} = E_i + E_g$

Conservation de l'énergie globale sans production interne

Pas de réactions nucléaires !

$$L = -\,dE_{tot}/dt = -\,d\,E_i/dt - dE_g/dt$$
$$= dE_i/dt = -(1/2)\, dE_g/dt$$

Si réactions nucléaires, remplacer L par $L - \int \varepsilon\, dm$

La moitié de l'énergie potentielle gravifique libérée lors de la contraction de l'étoile conduit à une augmentation de son énergie interne, l'autre moitié est rayonnée.

Temps d'Helmoltz - Kelvin : $\tau_{HK} = GM^2 / (2\, R\, L)$

Naissance ou non des réactions nucléaires ?

Rôle de la dégénérescence

Question : lors de la contraction gravifique, T_c augmente-t-elle toujours ?

Theorème du Viriel $\Rightarrow$ P/ρ augmente
Pour un gaz parfait : $P/\rho \propto T \longrightarrow$ oui pour un gaz parfait non-dégénéré

Mais ... ce n'est plus le cas pour un gaz dégénéré.

Contraction homologue

$r \longrightarrow r' = x\,r = r + dr = (1+dr/r)\,r \qquad dr/r = x-1 = cst$

$\rho \longrightarrow \rho' = \rho/x^3 \longrightarrow d\rho/\rho = \rho'(m)/\rho(m) - 1$
$= 1/(1+dr/r)^3 - 1 = -\,3\,dr/r$

$P=\text{Poids} \longrightarrow P' = \text{Poids}' = P/x^4 \longrightarrow dP/P = P'(m)/P(m) - 1$
$= 1/(1+dr/r)^4 - 1 = -\,4\,dr/r$

Naissance ou non des réactions nucléaires ?

Rôle de la dégénérescence

Contraction homologue

$r \longrightarrow r' = x\,r = r + dr = (1+dr/r)\,r \qquad dr/r = x-1 = cst$

$\rho \longrightarrow \rho' = \rho/x^3 \longrightarrow d\rho/\rho = \rho'(m)/\rho(m) - 1$
$= 1/(1+dr/r)^3 - 1 = -\,3\,dr/r$

$P \longrightarrow P' = P/x^4 \longrightarrow dP/P = P'(m)/P(m) - 1$
$= 1/(1+dr/r)^4 - 1 = -\,4\,dr/r$

$\longrightarrow dP/P = (4/3)\,d\rho/\rho$

Equation d'état générale : $d\rho/\rho = \alpha\,dP/P - \delta\,dT/T$

$\longrightarrow dT/T = (\alpha/\delta)\,dP/P - (1/\delta)\,d\rho/\rho$
$= (4\alpha-3)/(3\delta)\,d\rho/\rho$

Naissance ou non des réactions nucléaires ?

Rôle de la dégénérescence

$d\rho/\rho = \alpha\, dP/P - \delta\, dT/T$

$\boxed{dT/T = (4\alpha-3)/(3\delta)\, d\rho/\rho}$

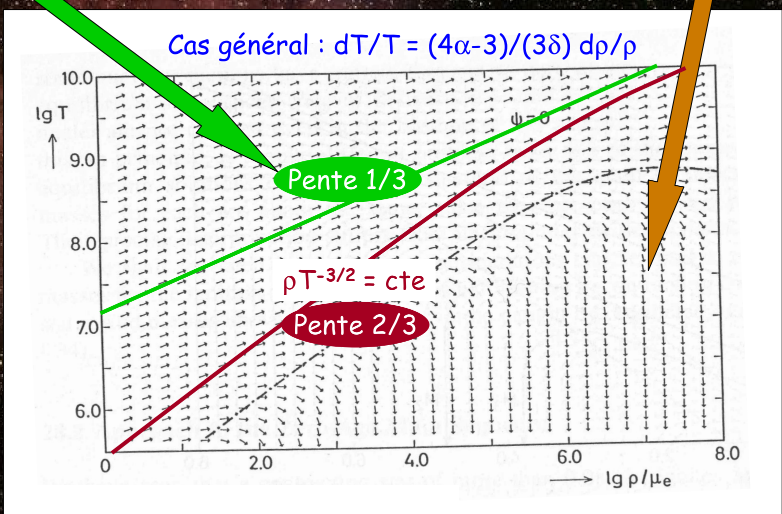
Pour un gaz parfait : $\alpha = 1$, $\delta = 1$ → $dT/T = (1/3)\, d\rho/\rho$
non-dégénéré
T ↗

Pour un gaz dégénéré : $\alpha = 3/5$, $\delta = 0$ → $dT/T = -\infty\, d\rho/\rho$
non-relativiste
T ↘

L'énergie gravifique libérée lors de la contraction n'est pas suffisante pour accélérer les électrons dégénérés (énergie de Fermi ↗↗).
L'énergie manquante est puisée dans l'énergie cinétique des ions non-dégénérés de sorte que la température diminue.

Pour un gaz parfait :
$dT/T = (1/3)\, d\rho/\rho$

Pour un gaz dégénéré : $dT/T = -\infty\, d\rho/\rho$
non-relativiste



ψ : paramètre de dégénérescence

Naissance ou non des réactions nucléaires ?

Dilatation homologue avec changement de masse

$r \longrightarrow r' = x\, r = r + dr = (1+dr/r)\, r$

$m(r) \longrightarrow m'(r') = q\, m(r) = (1+dm/m)\, m(r)$

$\rho = dm/(4\pi r^2 dr) \longrightarrow \rho' = dm'/dr'/(4\pi r'^2) = (q/x) dm/dr\, /(4\pi x^2 r^2) = (q/x^3)\, \rho$

$\Rightarrow d\rho/\rho = (1+dm/m)/(1+dr/r)^3 - 1 = dm/m - 3\, dr/r$

$P = \int_m^M Gm/(4\pi r^4) dm \longrightarrow P' = \int_m^M Gm'/(4\pi r'^4) dm' = (q^2/x^4)\, P$

$\Rightarrow dP/P = (1+dm/m)^2/(1+dr/r)^4 - 1 = 2\, dm/m - 4\, dr/r$

A densité fixée : $d\rho/\rho = 0 \Rightarrow dr/r = 1/3\, dm/m \Rightarrow dP/P = 2/3\, dm/m$

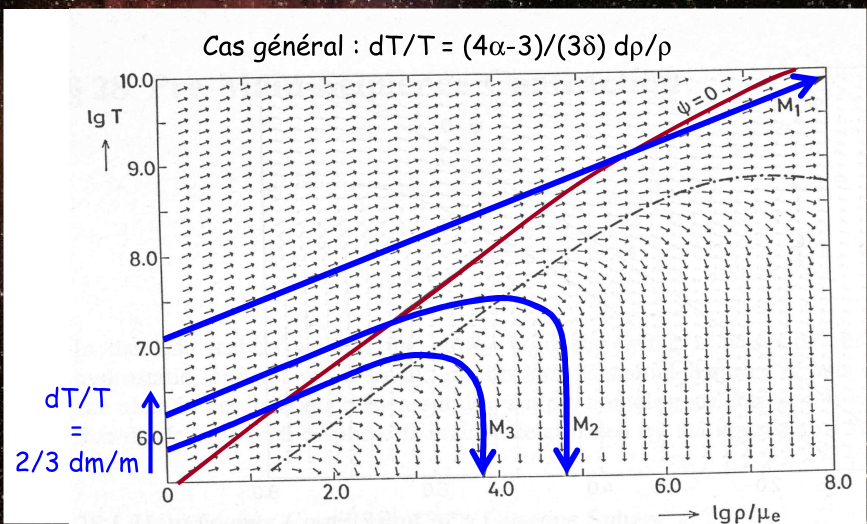
Pour un gaz parfait: $dT/T = dP/P - d\rho/\rho = dP/P = 2/3\, dm/m$

Plus la masse est élevée, plus la température centrale est élevée (à densité fixée)

Evolution de T_c en fonction de ρ_c

Pour un gaz parfait : $dT/T = (1/3)\, d\rho/\rho$

Pour un gaz dégénéré : $dT/T = -\infty\, d\rho/\rho$ non-relativiste



Naissance ou non des réactions nucléaires ?

Effet de la masse sur la trajectoire (ρ_c, T_c)

Température requise pour la combustion de l'hydrogène :

$$T_c \sim 10^7 \text{ K}$$

Masse critique : $M = 0.08\ M_\odot$

Si $M < 0.08\ M_\odot$, l'étoile n'atteint jamais la température requise pour initier la combustion de l'hydrogène (à cause de la dégénérescence)

⟶ Naine brune

Refroidissement des naines brunes et blanches

Théorème du Viriel

$$\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm = 3\int_0^M \frac{P}{\varrho}\,dm$$

$$P_e = \frac{8\pi}{15h^3}\frac{p_F{}^5}{m_e}$$

$$E_g := -\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm$$

Energie potentielle gravifique totale

$$u_e = \frac{1}{\rho}\int_0^{p_F} E(p)\frac{8\pi p^2}{h^3}dp = \frac{1}{\rho}\frac{8\pi p_F^5}{10h^3 m_e} = \frac{3}{2}\frac{P_e}{\rho}$$

$E_{i,\,tot} = \int_0^M u\,dm = 3/2 \int_0^M (P/\rho)\,dm$

Energie interne totale

$$E_g = -\,2\,E_{i,\,tot}$$

$$-1/2\ dE_g/dt = L = dE_i/dt$$

L'énergie interne totale augmente lors de la contraction d'un gaz dégénéré (naine blanche) aussi !!

Les naines blanche : refroidissement

Théorème du Viriel

$-1/2\ \delta E_g = \delta E_{i,tot}$

$E_{i,\,tot}$: Energie interne totale (ions + électrons)

E_g : Energie potentielle gravifique

E_e : Energie interne des électrons

$$E_e = \frac{3}{2}\int_0^M \frac{P_e}{\rho}\,dm = \frac{3}{2}K\int_0^M \rho^{2/3}\,dm$$

δρ/ρ = cst. = - 3 δr/r → $\frac{\delta E_e}{E_e} = \frac{2}{3}\frac{\delta\rho}{\rho}$

$$E_g := -\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm \rightarrow \frac{\delta E_g}{E_g} = -\frac{\delta r}{r} = \frac{1}{3}\frac{\delta\rho}{\rho} \rightarrow \frac{\delta E_e}{E_e} = 2\frac{\delta E_g}{E_g}$$

$$E_g = -2E_{i,\,tot} \rightarrow \delta E_e = -\frac{E_e}{E_{i,tot}}\delta E_g \simeq -\delta E_g \leftarrow E_{ions} \ll E_e$$

Toute l'énergie gravifique libérée augmente l'énergie cinétique des électrons

Les naines blanches : refroidissement

$$dE_e/dt \simeq -dE_g/dt$$

Toute l'énergie gravifique libérée augmente l'énergie cinétique des électrons

$$L = -dE_{tot}/dt = -d\,E_{ions}/dt - d\,E_e/dt - d\,E_g/dt$$
$$= -d\,E_{ions}/dt$$

Toute l'énergie rayonnée est puisée dans l'énergie cinétique des ions → La température diminue

Découplage

Hydrostatique, gravité : Gaz d'électrons

Thermique : Gaz d'ions

Les naines blanches : refroidissement

Toute l'énergie rayonnée est puisée dans l'énergie cinétique des ions

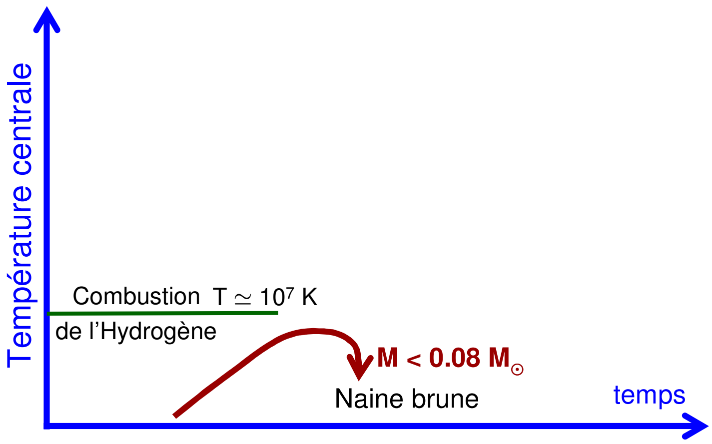
Cœur quasi isotherme (conduction électronique très efficace)

$$E_{ions} = \int_0^M u_{ions}\, dm = c_v\, T_0\, M$$

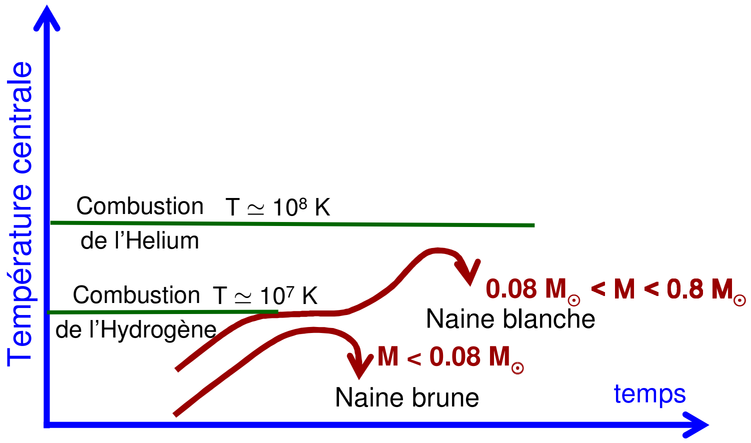
$$L = - d\, E_{ions}/dt = - c_v\, M\, dT_0/dt$$

→ La température diminue lentement

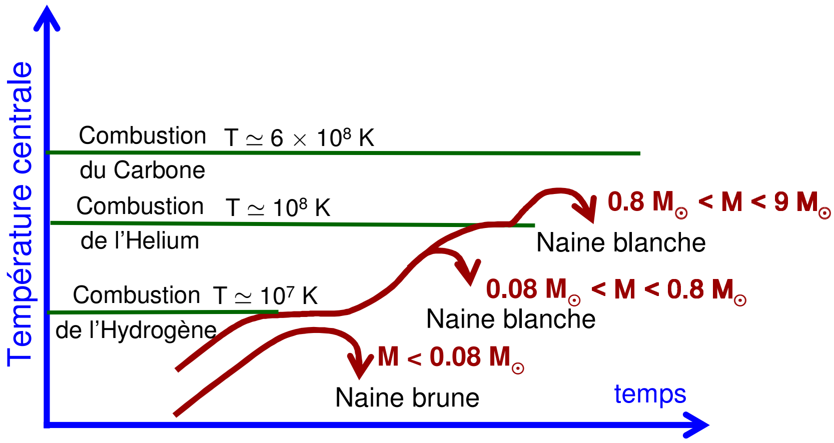
Panorama des scénarios possibles d'évolution des étoiles



Panorama des scénarios possibles d'évolution des étoiles



Panorama des scénarios possibles d'évolution des étoiles



Panorama des scénarios possibles d'évolution des étoiles