DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Was sind Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen für eine Funktion $f(x)$, in denen Ableitungen von $f(x)$ wie $f'(x)$, $f''(x)$, usw. vorkommen.

Beispiel: $f'(x) = 2 \cdot f(x)$

Im Gegensatz zu den uns bekannten Gleichungen in Variablen kristallisieren sich signifikante Unterschiede heraus.

- Die Lösungen von Differentialgleichungen sind **Funktionen**, wenn die Differentialgleichung fertig gelöst ist, sollte am Schluss: $f(x) = \ldots,$ also eine Funktion von x stehen.
- Es gibt für die Lösung von Differentialgleichungen keine mit den Äquivalenzumformungen vergleichbaren Lösungsstrategien.
- Nicht alle Differentialgleichungen sind explizit (also ohne Probieren) lösbar.
- Für spezielle Fälle von Differentialgleichungen gibt es Rezepte, wie man bei der Lösung vorgehen kann.

B1. Gegeben ist die Differentialgleichung $f'(x) = 2 \cdot f(x)$. Welche Funktion erfüllt diese Differentialgleichung?

$$f'(x) = 2 \cdot f(x)$$

PROBIERE:

$$f(x) = e^{k \cdot x}$$
$$f'(x) = k \cdot e^{k \cdot x}$$

EINSETZEN:

$$f'(x) = 2 \cdot f(x)$$
$$k \cdot \cancel{e^{kx}} = 2 \cdot \cancel{e^{kx}} \quad | : e^{kx}$$
$$k = 2$$

LÖSUNG:

$$f(x) = e^{2x}$$

Für die Lösung von Differentialgleichungen spielen, wie schon im ersten Beispiel demonstriert, Exponentialfunktionen, aber auch Winkelfunktionen eine besonders große Rolle, weil sie bei der Ableitung (nicht wie Polynomfunktionen langsam verschwinden, sondern) in geringfügig veränderter Form auch in ihrer eigenen Ableitung wieder vorkommen.

Versuche dich an einem Beispiel mit einer Winkelfunktion

B2. Gegeben ist die Differentialgleichung $f''(x) = -4 \cdot f(x)$

Differentialgleichungen für Wachstumsaufgaben

Im Podcast für Differenzengleichungen wurden vier unterschiedliche Wachstumsmodelle mit Differenzengleichungen besprochen.

Wenn man diese Modelle, analog zum Übergang vom Differenzenquotienten auf den Differentialquotienten in momentane Änderungsraten annähert, erhält man die zu den vier Wachstumsmodellen analogen Differentialgleichungen.

$P_{n+1} - P_n$ entspricht dem Differenzquotienten bei Schrittweise Δn

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{\Delta n} = \frac{P_{n+1} - P_n}{1} = P_{n+1} - P_n$$

Bei Differenzengleichungen (und den zugehörigen Wachstumsaufgaben) haben sich allerdings andere Variablenbezeichnungen durchgesetzt, anstatt P_n wird wieder die normale Funktionsbezeichnung $N(t)$ verwendet.

Und anstatt $\lim\limits_{\Delta n \to 0} \frac{P_{n+1} - P_n}{\Delta n}$ schreibt man dann einfach $N'(t)$

Aus den Differenzengleichungen

Kontinuierliches, lineares Wachstum
Anwachsen um jeweils denselben Betrag k.

$$P_{n+1} - P_n = k$$

$$N'(t) = k$$

Unbeschränktes, exponentielles Wachstum
Anwachsen um jeweils denselben Anteil a der Vorjahrespopulation P_n.

$$P_{n+1} - P_n = a \cdot P_n$$

$$N'(t) = k \cdot N(t)$$

Beschränktes, exponentielles Wachstum
Das Wachstum orientiert sich am Produkt aus der noch verbliebenen Kapazität.

Anwachsen um jeweils denselben Anteil a der verbleibenden Kapazität $G - P_n$.

$$P_{n+1} - P_n = a \cdot \left(G - P_n\right)$$

$$N'(t) = k \cdot (G - N(t))$$

Logistisches Wachstum
Das Wachstum orientiert sich am Produkt aus der noch verbliebenen Kapazität und der Vorjahrespopulation.

Schrittweises Anwachsen um jeweils denselben Anteil a des Produktes aus verbleibender Kapazität $G - P_n$ und Vorjahrespopulation P_n.

$$P_{n+1} - P_n = a \cdot \left(G - P_n\right) \cdot P_n$$

$$N'(t) = k \cdot (G - N(t)) \cdot N(t)$$

Die Wachstumsfunktionen

Durch Lösen dieser oben erwähnten Differentialgleichungen erhält man letztlich die bekannten Wachstumsfunktionen.

Kontinuierliches, lineares Wachstum

B3. Finde $N(t)$ für die Differentialgleichung $N'(t) = 1.16$ für das lineare Wachstum. Für die konkrete Lösung setze voraus, dass die Anfangsbedingung $N(0) = 0$ lautet.

$$N'(t) = 1{,}16$$

INTEGRATIONSKONSTANTE

$$\int N'(t)\,dt = 1{,}16t + t_0 = N_{allg.}(t)$$

ANFANGSBEDINGUNG $N(0) = 0$

EINSETZEN IN NALLG.

$$0 = 1{,}16 \cdot 0 + t_0$$

$$0 = t_0$$

$$N(t) = 1{,}16t$$

Das bedeutet die zugehörige Wachstumsfunktion lautet
$N'(t) = k$ … $N(t) = k \cdot t + N_0$

Unbeschränktes, exponentielles Wachstum

B4. Finde $N(t)$ für die Differentialgleichung $N'(t) = 0.4 \cdot N(t)$ für das unbeschränkte exponentielle Wachstum. Für die konkrete Lösung setze voraus, dass die Anfangsbedingung $N(0) = 2000$ lautet.

Das bedeutet die zugehörige Wachstumsfunktion lautet
$N'(t) = k \cdot N(t) \ldots N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$

Die Lösungen der komplizierteren Differentialgleichungen der beiden Wachstumsmodelle sind viel schwerer zu finden.

Dennoch lässt sich endlich erklären, woher die unverständlichen Funktionen kommen, wenn man Lust hat, kann man durch Berechnen der Ableitung und Einsetzen in die Differentialgleichungen die Richtigkeit der Funktionsterme beweisen.

Beschränktes, exponentielles Wachstum

$N'(t) = k \cdot (G - N(t))$ führt zur Funktion
$N(t) = G - \left((G - N_0) \cdot e^{-k \cdot t} \right)$

Logistisches Wachstum

$N'(t) = k \cdot (G - N(t)) \cdot N(t)$ führt zur Funktion
$$N(t) = \frac{G \cdot N_0}{N_0 + (G - N_0) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}}$$