CONSEJO DE INVESTIGACION CIENTIFICA

SOLUCIONES CASI PERIODICAS DE ECUACIONES DE FISICA MATEMATICA

Dr. Ing. ANTONIO CAMURRI RIGHI
PROFESOR DE LAS CATEDRAS DE ANALISIS MATEMATICO
Y DE MECANICA RACIONAL

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

1 9 5 2

CONSEJO DE INVESTIGACION CIENTIFICA

SOLUCIONES CASI PERIODICAS DE ECUACIONES DE FISICA MATEMATICA

Dr. Ing. ANTONIO CAMURRI RIGHI
PROFESOR DE LAS CATEDRAS DE ANALISIS MATEMATICO
Y DE MECANICA RACIONAL

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

1 9 5 2

ESCUELA TIPOGRAFICA SALESIANA — CONCEPCION

INDICE

Pág.

Sumario en Inglés ... I
Sumario en Francés ... II
Sumario ... III

CAPITULO I

FUNCIONES CASI PERIODICAS

1 Definición ... 1
2 Propiedades inmediatas ... 1
3 Teorema de la Media ... 2
4 Serie de Fourier de una Función Casi-Periódica ... 3
5 Definición de Función Casi-Periódica de más de una Variable ... 5

CAPITULO II

ECUACION DE LAPLACE EN EL PLANO

1 Propiedades de las Funciones Armónicas Casi-Periódicas ... 6
2 Desarrollo en Serie de Fourier de una Función Armónica Casi-Periódica ... 7
3 Desarrollo en Serie de Fourier de las Derivadas Parciales Primeras de una Función Armónica Casi-Periódica ... 11

CAPITULO III

ECUACION DE PROPAGACION DEL CALOR

1 Nociones Preliminares ... 13
2 Desarrollo en Serie de Fourier de una Función u(x, y) Casi-Periódica y Solución de la Ecuación de propagación del calor ... 16
3 Desarrollo en Serie de Fourier de las Derivadas Parciales Primeras de una Función Casi-Periódica u(x, y) Solución de la Ecuación de Propagación del Calor ... 20

CAPITULO IV

ECUACION DIFERENCIAL A LAS DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN COMPLETA Y LINEAL

1 Determinación de Soluciones Casi-Periódicas ... 23
2 Desarrollo en Serie de Fourier de las Soluciones Casi-Periódicas 23

SUMMARY

In the first chapter, the author gives the definition and properties of almost periodical functions, without the corresponding demostrantions, because these are already know.

In the second chapter, he shows the possibility of how to determine the harmonic and almost periodical functions and these are developed in series of Fourier.

In the third and fourth chapter, wich represents the original part of the work, the author gives almost periodicals solutions of the equation of heat propagation and of the lineal and complete equation of second order; besides, basing himself on the process of development in series of Fourier, of an harmonic and almost periodical function, he determines the development of the mentioned solutions, in series of Fourier.

RESUMÉ

Dans le chapitre premier l'auteur donne la définition et expose les propriétés des fonctions quasi périodiques mais sans développer les démonstrations correspondantes, étant donné que ces démonstrations sont déjà connues.

Dans le deuxième chapitre se démontre la possibilité de déterminner les fonctions harmoniques quasi périodiques et se développe en série de Fourier les dites fonctions.

Dans les troisième et quatriième chapitres qui représentent la partie originale du mémoire l'auteur détermine les solutions quasi périodiques de l'équation de propagation de la chaleur et d'une équation du deuxième ordre linéaire et complète; se basant sur le procédé de développement en série de Fourier d'une fonction harmonique quasi périodique il effectue le développpment en série de Fourier des solutions mentionnées.

SUMARIO

En el primer capítulo el autor expone la definición y las propiedades de las funciones casi-periódicas sin desarrollar las demostraciones correspondientes, porque éstas son ya conocidas.

En el segundo capítulo se demuestra la posibilidad de determinar funciones armónicas casi periódicas y se desarrollan en serie de Fourier dichas funciones.

En el tercer y cuarto capítulo, que representan la parte original del trabajo, el autor determina soluciones casi periódicas de la ecuación de propagación del calor y de una ecuación del segundo orden lineal y completa; además basándose sobre el procedimiento de desarrollo en serie de Fourier de una función armónica casi periódica, determina el desarrollo en serie de Fourier de las soluciones mencionadas.

SOLUCIONES CASI-PERIODICAS DE ECUACIONES DE FISICA-MATEMATICA

CAPITULO I

FUNCIONES CASI-PERIODICAS

Antes de entrar directamente al tema de este trabajo es necesario hacer algunas consideraciones preliminares sobre la definición y las propiedads de las funciones casi-periódicas.

1. Definición.

Una función f(x), real o compleja de una variable real x

$$f(x) = u(x) + i\, v(x)$$

definida y continua en todo el intervalo $-\infty < x < \infty$ se llama casi-periódica, cuando elegido un número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiere, se puede encontrar un número $l(f, \varepsilon)$ tal que cada intervalo de longitud l contiene por lo menos un número τ llamado casi-periodo de f(x) en correspondencia del cual se tiene para cada valor de la x la desigualdad:

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

Es útil observar que las funciones casi-periódicas en base a esta definición contienen como caso particular las funciones periódicas continuas.

2. Propiedades Inmediatas.

Nos limitamos solamente a enunciar estas propiedades puesto que las demostraciones son ya conocidas (1).

(1) Favard "Leçons sur les fonctions presque périodique". Gauthier Villars, Imprimeur Editeurs (1936) Paris.

1.°—Cada función casi-periódica f(x) es limitada para cualquier valor de x, es decir indicando con M un número finito positivo se tendrá para cada valor de x la desigualdad siguiente:

$$| f(x) | \leqslant M \tag{2}$$

2.°—La suma de dos funciones casi-periódicas y por consiguiente la suma de un número finito cualquiera de funciones casi-periódicas es también una función casi-periódica.

En particular la suma de un número finito de funciones periódicas, que tienen o no el mismo período, es una función casi-periódica. En base a esta observación es fácil hacer ejemplos de funciones casi-periódicas; p. e. cada polimonio exponencial de la forma:

$$\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$$

donde a_n y λ_n son constantes, las últimas reales, es una función casi-periódica.

Eligiendo para las constantes λ_n valores que no son todos múltiples de un mismo número obtenemos una fuición casi-periódica y no periódica.

3.°—Una sucesión de funciones casi-periódicas que converja uniformemente hacia una función límite f(x) tiene como límite una función casi-periódica.

En particular la suma de cada serie uniformemente convergente en todo el intervalo $-\infty < x < \infty$ y de la forma.

$$\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x} \tag{3}$$

donde a_n y λ_n son constantes, las últimas reales es un afunción casi-periódica.

4.°—El producto de dos funciones casi-periódicas y por consiguiente el producto de un número finito cualquiera de funciones casi-periódicas es otra función casi-periódica.

3. **Teorema de la Media.**

Cuando una función f(x) es casi-periódica se demuestra, lo que no vamos a demostrar pues el resultado ya es conocido, que la expresión

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x)\, dx$$

tiende hacia un valor finito que nosotros llamamos valor medio de la función $f(x)$, y que indicamos con el símbolo $M\left\{ f(x) \right\}$ es decir:

$$M\left\{ f(x) \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x)\, dx$$

Como el producto de dos funciones casi-periódicas es, como lo habíamos visto anteriormente, una función casi-periódica, la función $f(x)\ e^{-i\lambda x}$ donde λ es una constante real, tiene por lo tanto un valor medio

$$M\left\{ f(x)\ e^{-i\lambda x} \right\},$$

que depende de λ y que indicamos con a (λ), es decir:

$$M\left\{ f(x)\ e^{-i\lambda x} \right\} = a\ (\lambda) \qquad (4)$$

4. **Serie de Fourier de una Función Casi-Periódica.**

Con respecto a la cantidad $a(\lambda)$ se demuestra el teorema siguiente.

"Para cada función periódica $f(x)$ existe a lo sumo una sucesión de valores que se pueden asignar a λ, para los cuales la cantidad $a(\lambda)$ no es cero".

Los valores mencionados asignados a λ, que podemos indicar con λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ se llaman exponentes de Fourier de la función $f(x)$. Las constantes $a(\lambda)$ correspondientes que podemos indicar con A_1, A_2, A_3 se llaman los coeficientes de la serie de Fourier de $f(x)$. Mediante las cantidades mencionadas vamos a formar la serie siguiente:

$$\sum_1^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x} \qquad (5)$$

Esta serie se llama serie de Fourier de la función $f(x)$ y siguiendo una notación debida a Hurwitz, podemos escribir:

$$f(x) \backsim \sum_1^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x} \qquad (6)$$

El nombre de serie de Fourier dado a la serie anterior $\sum_1^\infty A_n e^{i\lambda_n x}$ se justifica observando que si la función f(x) es periódica, las cantidades $A_n(\lambda_n)$ coinciden con los coeficientes de la serie llamada normalmente serie de Fourier de la función f(x).

Efectivamente si p es el período de una función periódica f(x), indicando con k la cantidad $\frac{2\pi}{p}$ y con n un número entero cualquiera, se tiene:

$$A_n(\lambda_n) = A_n(n\,k) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mp}\int_0^{mp} f(x)\, e^{-inkx}\, dx \qquad (7)$$

Siendo la función f(x) periódica por hipótesis se deduce de la (7)

$$A_n(n\,k) = \frac{1}{p}\int_0^{p} f(x)\, e^{-inkx}\, dx = a_n$$

donde a_n indica un coeficiente general de la serie de Fourier de la función f(x) en el sentido habitual.

Vamos a hacer además la consideración siguiente:

Hemos observado en el párrafo 3. fórmula (3) que cada serie uniformente convergente para cada valor de x, de la forma $\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$ tiene por suma una función casi-periódica f(x).

Se determina la serie de Fourier de esta función. En virtud de la convergencia uniforme tenemos:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-i\lambda x}\left(\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}\right) dx =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{a_n}{x}\int_0^x e^{i(\lambda_n - \lambda)x}\, dx \qquad (8)$$

De la fórmula (8) haciendo crecer x indefinidamente se deduce:

$$a(\lambda) = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad \lambda = \lambda_n \\ \\ o & \text{si} \quad \lambda \neq \lambda_n \end{cases}$$

De aquí se ve que la serie de Fourier de la función f(x) es idéntica a serie dada $\sum_{1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$

5. **Definición de Función Casi-Periódica de más de una Variable.**

Se dice que una función de dos variables u(x, y) es casi-periódica con respecto a la variable x en una faja limitada por las dos rectas $y = y_1$ e $y = y_2$ cuando dando a y un valor constante k ($y_1 \leqslant k \leqslant y_2$), la función u(x, k) = f(x) se reduce a una función casi-periódica según la definición dada en el párrafo 1 de este capítulo.

Una definición análoga vale también para las funciones periódicas de más de dos variables.

CAPITULO II

ECUACION DE LAPLACE EN EL PLANO

Después de haber expuesto las consideraciones anteriores sobre las funciones casi-periódicas, podemos entrar ahora directamente en el tema de este trabajo.

Consideremos la ecuación Laplace en el plano.

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o \qquad O \qquad \Delta u = o \tag{1}$$

donde el símbolo Δ indica el operador de Laplace.

Se sabe que dicha ecuación tiene como integral general una función u(x, y) de la forma siguiente:

$$u(x, y) = f(x + iy) + \varphi\,(x - iy)$$

siendo f y φ símbolos de funciones arbitrarias de las variables complejas (x + i y) e (x − i y).

Por la arbitrariedad de las funciones f(x + i y) e φ (x − i y) es posible determinar fácilmente funciones que satisfagan a la ecuación de Laplace y que simultáneamente sean también casi-periódicas.

Como es sabido las funciones que satisfacen a la ecuación de Laplace se conocen comúnmente con el nombre de funciones armónicas.

Establecida la existencia de funciones armónicas y casi-periódicas, vamos ahora a enunciar algunas propiedades de las funciones armónicas para determinar en seguida el desarrollo en serie de Fourier de una función armónica casi-periódica.

1. Propiedades de las Funciones Armónicas Casi-Periódicas.

1.°—Si una función armónica en una faja del plano x y, limitada por ejemplo por las dos rectas $y = y_1$ e $y = y_2$, se reduce a una función casi-periódica de x cuando $y = y_1$ e $y = y_2$, ella es casi periódica en toda la faja.

Este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Lindelöf válido para las funciones analíticas.

2.°—La suma de un número finito cualquiera de funciones armónicas casi-periódicas en una faja (y_1, y_2) es una función armónica casi-periódica.

Por ejemplo cada polimonio de la forma:

$$u(x, y) = ky + 1 + \sum_1^N \left[\left(\overset{+}{a}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{a}_n e^{-\lambda_n y} \right) \cos \lambda_n x + \right.$$

$$\left. + \left(\overset{+}{b}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{b}_n e^{-\lambda_n y} \right) \operatorname{sen} \lambda_n x \right]$$

donde k, l, a_n y b_n son constantes y los λ_n son positivos, representa una función armónica casi-periódica.

3.°—El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones armónicas casi-periódicas en una faja (y_1, y_2) es una función armónica casi-periódica.

En particular cada serie uniformemente convergente de la forma:

$$u(x, y) = ky + 1 + \sum_1^\infty \left[\left(\overset{+}{a}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{a}_n e^{-\lambda_n y} \right) \cos \lambda_n x + \right.$$

$$\left. + \left(\overset{+}{b}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{b}_n e^{-\lambda_n y} \right) \operatorname{sen} \lambda_n x \right] \tag{2}$$

representa una función armónica casi-periódica.

Según la consideración hecha al final del párrafo (4) capítulo I, podemos decir también que la serie de Fourier de la función casi-periódica u(x, y) suma de la serie (2), coincide con la misma serie (2).

4.°—Las derivadas parciales de una función armónica casi periódica en una faja (y_1, y_2) serán también funciones armónicas casi-periódicas en esta faja.

Nos limitamos solamente a enunciar las propiedades anteriores sin dar las demostraciones, pues estas ya son conocidas (1).

2. Desarrollo en Serie de Fourier de una Función Armónica Casi-Periódica.

Vamos a demostrar ahora que a cada función casi-periódica y armónica $u(x, y)$ se puede asociar un desarrollo en serie de Fourier de la forma (2).

A pesar que este teorema haya sido ya demostrado, vamos a repetir integramente todo el desarrollo, porque nos servirá como punto de partida para determinar soluciones casi-periódicas de otras ecuaciones diferenciales que encontraremos más adelante.

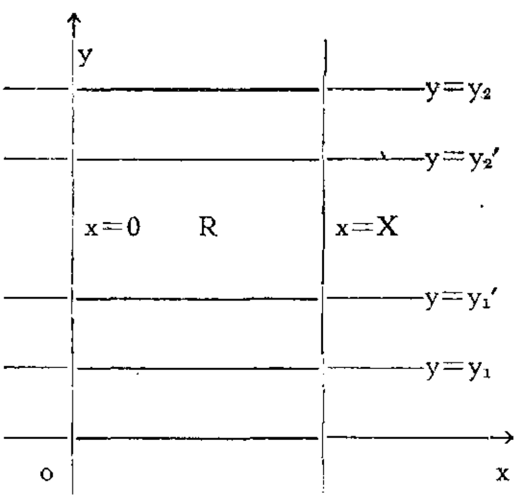
Vamos a demostrar ante todo que las cantidades

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\} \quad \text{y} \quad M_x\left\{u(x, y)\right\}$$

son finitas en cada faja $[y_1, y_2]$ del plano x y donde una función armónica es casi-periódica.

Supongamos que en la faja (y_1, y_2) donde por hipótesis la función $u(x, y)$ es armónica y casi-periódica se tenga:

$$|u| \leqslant M \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant M' \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant M'$$



Consideremos dos rectas $y = y_1'$ e $y = y_2'$ dentro de la faja (y_1, y_2) e indiquemos con R el rectángulo limitado por estas dos rectas y por las otras dos $x = 0$; $x = X$.

Como consecuencia de la fórmula de Green aplicada a lo largo del contorno de este rectángulo, se deduce:

$$\int_{FR} \frac{du}{dn}\, ds = O \qquad (3)$$

(1) Favard "Leçons sur les fonctions presque périodique". Gauthier Villars. Imprimeur Editeurs (1936) París.

donde $\frac{du}{dn}$ simboliza la derivada normal, ds el elemento de arco y FR el contorno del rectángulo R.

Descomponiendo la integral (3) en 4 integrales parciales extendidas sobre cada uno de los 4 lados del rectángulo R tenemos:

$$\int_{0\;(y=y_1')}^{X} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \int_{0\;(y=y_2')}^{X} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx = \int_{y_2'}^{y_1'} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(X, y)\right] dy$$

El segundo miembro de esta igualdad es inferior en valor absoluto a $2\,M'(y_2'-y_1')$ por la hipótesis hecha, luego se tiene:

$$\left|\frac{1}{x}\int_{0\;(y=y'_1)}^{X} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{1}{x}\int_{0\;(y=y_2')}^{X} \frac{\partial u}{\partial y}\, \partial x\right| \leqslant \frac{2\,M'\,(y_2'-y_1')}{X}$$

Haciendo crecer x indefinidamente se obtendrá:

$$\underset{(y\,=\,y_1')}{M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\}} = \underset{(y\,=\,y_2')}{M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\}}$$

y como las dos rectas $y = y_1'$ e $y = y_2'$ son cualquieras pero dentro de la faja $[y_1, y_2]$, concluimos que:

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = \text{constante} = k$$

Apliquemos ahora al contorno del rectángulo R la fórmula de Green, eligiendo como funciones armónicas las funciones y e u (x, y)

$$\iint_R (u\Delta y - y\Delta u)\, dx\, dy = \int_{FR} \left(u\frac{dy}{dn} - y\frac{du}{dn}\right) ds \qquad (4)$$

donde los símbolos tienen el significado dado anteriormente.

Descomponiendo la integral del segundo miembro de la (4) en 4 integrales parciales se obtiene:

$$\int_0^X \left(u - y\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \int_0^X \left(u - y\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = \int_{y_1'}^{y_2'} y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(X, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \right] dy \quad (5)$$
$$(y=y_1') \qquad\qquad (y=y_2')$$

El segundo miembro de la (5) es limitado en valor absoluto por $M'(y_2'^2 - y_1'^2)$ por lo tanto el primer miembro de la (5) admite a un valor medio nulo de donde se deduce:

$$M_x \left\{ u\,(x, y_1') \right\} - ky_1' = M_x \left\{ u(x, y_2') \right\} - ky_2'$$

Siendo las dos rectas $y = y_1'$ e $y = y_2'$ cualesquieras, concluimos que la cantidad $M_x \left\{ u(x, y) \right\} - ky$ es constante; indicándola con 1, podemos escribir la igualdad siguiente:

$$M_x \left\{ (u(x, y) \right\} = ky + 1 \quad (6)$$

Apliquemos otra vez la fórmula de Green a lo largo del mismo contorno del rectángulo R, eligiendo como funciones armónicas las funciones $u(x, y)$ y $e^{-\lambda y} \cos \lambda x$ $(\lambda > o)$ y obtenemos:

$$\int_0^Y \left(-\lambda u e^{-\lambda y} \cos \lambda x - e^{-\lambda y} \cos \lambda x \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx -$$
$$(y=y_1')$$

$$- \int_0^X \left(-\lambda u e^{-\lambda y} \cos \lambda x - e^{-\lambda y} \cos \lambda x \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx =$$
$$(y=y_2')$$

$$= \int_{y_1'}^{y_2'} \left(-\lambda u e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x \dot{-} e^{-\lambda y} \cos \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - \quad (7)$$
$$(x=0)$$

$$- \int_{y_1'}^{y_2'} \left(-\lambda u e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x - e^{-\lambda y} \cos \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$
$$(x=X)$$

Si indicamos con L el límite superior de $e^{-\lambda y}$ en la faja en la cual operamos, el segundo miembro de la igualdad (7) queda en valor absoluto limitado por:

$$2\,L \,|\, \lambda\, M + M' \,|\,|\, y_2' - y_1' \,|$$

Por lo tanto el primer miembro de la (7) tiene un valor medio nulo de lo cual se deduce que la cantidad $M_x \left\{ e^{-\lambda y} \cos \lambda\, x\, (\lambda\, u + \frac{\partial u}{\partial y}) \right\}$ es independiente de la variable y, y depende solamente de λ. Indicando con $\lambda \overset{+}{A}$ la cantidad mencionada, podemos escribir la igualdad siguiente:

$$M_x \left\{ \cos \lambda\, x\, (\lambda\, u + \frac{\partial u}{\partial y}) \right\} = \lambda \overset{+}{A} e^{\lambda y} \tag{8}$$

Operando con las dos funciones $u(x, y)$ y $e^{\lambda y} \cos \lambda\, x$, y aplicando nuevamente la fórmula de Green a lo largo del contorno del rectángulo R, se obtiene:

$$M_x \left\{ \cos \lambda\, x\, (\lambda\, u - \frac{\partial u}{\partial y}) \right\} = \lambda \overset{-}{A} e^{-\lambda y} \tag{9}$$

donde $\overset{-}{A}$, como se ha visto para $\overset{+}{A}$, representa una función de λ.

Sumando miembro a miembro las (8) y (9) y dividiendo después por $2\,\lambda$ $(\lambda \neq 0)$ se obtiene:

$$M_x \left\{ u \cos \lambda\, x \right\} = \tfrac{1}{2}(\overset{+}{A} e^{\lambda y} + \overset{-}{A} e^{-\lambda y}) \tag{10}$$

Con un procedimiento totalmente análogo aplicado a las funciones $u(x, y)$ y $e^{-\lambda y}$ sen $\lambda\, x$ se encuentra:

$$M_x \left\{ u \operatorname{sen} \lambda\, x \right\} = \tfrac{1}{2}(\overset{+}{B} e^{\lambda y} + \overset{-}{B} e^{-\lambda y}) \tag{11}$$

Las cantidades A y B según lo que expusimos anteriormente, son funciones de λ.

En base al teorema enunciado en el párrafo (4) capítulo I, los valores asignados a λ que no anulan los segundos miembros de las igualdades (10) y (11) forman una sucesión y los desarrollos en serie de Fourier sobre una recta cualquiera paralela al eje 0 x, y perteneciente a la faja $[y_1, y_2]$ provienen todos de un mismo desarrollo de la forma:

$$u(x, y) \sim ky + 1 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left[\left(\overset{+}{A}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{A}_n e^{-\lambda_n y}\right)\cos\lambda_n x + \right.$$

$$\left. + \left(\overset{+}{B}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{B}_n e^{-\lambda_n y}\right)\operatorname{sen}\lambda_n x\right] \qquad (12)$$

La fórmula (12) se deduce usando los coeficientes de Fourier de la función u(x, y) obtenidos anteriormente y dados por las fórmulas (6), (10) y (11).

Con el desarrollo (12 hemos demostrado el teorema.

3. Desarrollo en serie de Fourier de las Derivadas Parciales primeras de una Función Armónica Casi-periódica.

Vamos a demostrar ahora que dada una función armónica u(x, y) casi-periódica y de la cual se considera su desarrollo en serie de Fourier, podemos obtener los desarrollos de las derivadas parciales en series de Fourier, derivando formalmente el desarrollo (12) de la función u(x, y) casi-periódica.

Teniendo presente las fórmulas (8) y (9) del párrafo anterior y restándola miembro a miembro se obtiene para la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cos\lambda x\right\} = \frac{\lambda}{2}\left(\overset{+}{A}e^{\lambda y} - \overset{-}{A}e^{-\lambda y}\right) \qquad (13)$$

Procediendo de un modo análogo se obtiene también,

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\lambda x\right\} = \frac{\lambda}{2}\left(\overset{+}{B}e^{\lambda y} - \overset{-}{B}e^{-\lambda y}\right) \qquad (14)$$

Con las fórmulas (13 y (14) junto con la igualdad $M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = k$ demostrada en el párrafo 2 del capítulo presente, podemos escribir para la $\frac{\partial u}{\partial y}$ el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y(x, y) \sim k + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\lambda_n\left[\left(\overset{+}{A}_n e^{\lambda_n y} - \overset{-}{A}_n e^{-\lambda_n y}\right)\cos\lambda_n x + \right.$$

$$\left. \left(\overset{+}{B}_n e^{\lambda_n y} - \overset{-}{B}_n e^{-\lambda_n y}\right)\operatorname{sen}\lambda_n x\right] \qquad (15)$$

Se puede constatar inmediatamente que este desarrollo se obtiene derivando formalmente el desarrollo (12) del párrafo anterior. Para la derivada $\frac{\partial u}{\partial y}$ podemos llegar a la misma conclusión a la cual llegamos para la derivada $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Efectivamente tenemos:

$$M_x\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \Big[u(x, y) - u(o, y) \Big] = 0 \tag{16}$$

pues hemos supuesto que la función $u(x, y)$ es limitada en toda la faja $[y_1, y_2]$

Integramos ahora por parte la función $u \cos \lambda x$:

$$\frac{1}{x} \int_0^x u \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{x}\Big[\frac{1}{\lambda} u \operatorname{sen} \lambda x \Big] - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x \, dx \tag{17}$$

Considerando el límite para $x \to \infty$ de ambos miembros de la igualdad anterior (17) tenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x u \cos \lambda x \, dx = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\Big[\frac{1}{\lambda} u \operatorname{sen} \lambda x \Big] - \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$

de donde se obtiene:

$$M_x\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x \right\} = -\lambda M_x\left\{ u \cos \lambda x \right\} \tag{18}$$

Integrando por parte la función $u \operatorname{sen} \lambda x$ y pasando al límite para $x \to \infty$ encontramos con un procedimiento análogo al anterior:

$$M_x\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x \right\} = \lambda M_x\left\{ u \operatorname{sen} \lambda x \right\} \tag{19}$$

Las igualdades anteriores (16), (18) y (19) permiten escribir para la función $\frac{\partial u}{\partial x}$ el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x (x, y) \infty \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \lambda_n \left[\left(\overset{+}{B}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{B}_n e^{-\lambda_n y} \right) \cos \lambda_n x - \left(\overset{+}{A}_n e^{\lambda_n y} + \overset{-}{A}_n e^{-\lambda_n y} \right) \operatorname{sen} \lambda_n x \right]$$

Se puede constatar que el desarrollo (20) resulta también de la derivación formal del desarrollo (12) de la función armónica y casi-periódica $u(x, y)$.

CAPITULO III

ECUACION DE PROPAGACION DEL CALOR

Nociones Preliminares

1. Antes de iniciar el estudio de las soluciones casi-periódicas de la ecuación de propagación del calor, daremos algunas nociones preliminares sobre dicha ecuación y sobre algunas propiedades que tiene una solución cualquiera de la ecuación mencionada.

Se conoce bajo el nombre de ecuación de propagación del calor una ecuación diferencial de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

El nombre de ecuación de propagación del calor dado a la (1) es justificado por el significado físico que tiene una función $u(x, y)$ que satisface a la (1).

Precisamente si se tiene una barra rectilínea muy delgada aislada, homogénea, indefinida en los dos sentidos y si se indica con x la abscisa de una sección cualquiera de la barra a partir de un origen prefijado y con y la variable tiempo, la función $u(x, y)$ que satisface la ecuación (1) representa, mediante una elección conveniente de las unidades de medida, la temperatura de una sección cualquiera de la barra de abscisa x en un instante cualquiera y.

Indicando con f (ζ) el valor de la función u(x, y) que satisface la (1) cuando y = o, se encuentra que para un valor cualquiera de y, la función u(x, y) queda representada por la fórmula siguiente:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\, e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}}\, d\zeta \qquad (2)$$

Vamos ahora a demostrar que es suficiente suponer que la función f(ζ) es limitada, para que también la u(x, y) se mantenga limitada para todos los valores de y superiores al valor y = o.

El porqué es intuitivo pensando en el significado físico de la función u(x, y), sin embargo demostraremos la propiedad mencionada desde el punto de vista matemático.

Suponiendo que la función f(ζ) sea limitada como dijimos, existe un número M para el cual se tiene:

$$| f(\zeta) | \leqslant M$$

Aplicando el teorema de la media a la integral anterior (2) se obtiene:

$$| u(x, y) | = \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\, e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\, e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}}\, d\xi \leqslant M \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}}\, d\zeta = M \qquad (3)$$

porque la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}}\, d\zeta$$

se reduce con transformaciones sencillas de la variable de integración a una integral de Gauss, cuyo valor es $2\sqrt{\pi y}$

Demostraremos ahora que con la condición que f(ζ) es limitada, también la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ se mantiene limitada para todos lo valores de y superiores a $y = \varepsilon$ siendo ε un número positivo tan pequeño como se quiera.

Efectivamente tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[-\frac{x-\xi}{2y} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}} \right] d\xi$$

Aplicando el teorema de la media se obtiene:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi y}} \left| \int_{-\infty}^{x} -\frac{x-\zeta}{2y} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} -\frac{x-\xi}{2y} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}} d\xi \right|,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi y}} \left| \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[-e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \right] d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}} \right] d\xi \right|$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi y}} \left\{ \left| \left[-e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4y}} \right]_{-\infty}^{x} \right| + \left| \left[-e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \right]_{x}^{\infty} \right| \right\} =$$

$$= \frac{M}{2\sqrt{\pi y}} \left| 1 + 1 \right| = \frac{M}{\sqrt{\pi y}} \qquad (4)$$

2. Desarrollo en Serie de Fourier de una Función u(x, y) Casi-Periódica y Solución de la Ecuación de Propagación del Calor.

Establecidas las propiedades anteriores sobre la función u(x, y), vamos a considerar una serie uniformemente convergente de la forma:

$$\sum_{1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x) \tag{5}$$

Según lo dicho en el párrafo (2) del capitulo I (ver fórmula 3), una serie de la forma (5) tiene por suma una función casi-periódica. Ahora si ponemos

$a_n = \alpha_n e^{-\lambda_n y}$; $b_n = \beta_n e^{-\lambda_n y}$ la serie (5) se reduce a la siguiente:

$$\sum_{1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n x + \beta_n \operatorname{sen} \lambda_n x)\, e^{-\lambda_n y} \tag{6}$$

Hagamos ahora la hipótesis que la serie (6) se mantenga uniformemente convergente junta con sus derivadas parciales primeras y segundas cuando la y varía entre dos valores prefijados y_1 e y_2. Con esta hipótesis podemos constatar inmediatamente que dicha serie tiene por suma una función u(x, y) que satisface a la ecuación del calor (1). Vamos a demostrar que a todas las soluciones casi-periódicas u(x, y), soluciones de la ecuación (1), se puede asociar un desarrollo en serie de Fourier de la forma (6).

Para demostrar este teorema consideremos la ecuación "conjugada" a la (1), es decir:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = o \tag{7}$$

Consideremos, como hicimos para las funciones armónicas, un dominio rectangular R limitado por las rectas $y = y_1$; $y = y_2$ $x = 0$ y $x = X$ pero con la condición que los valores y_1 e y_2, a pesar de ser arbitrarios sean superiores a un número ε positivo tan pequeño como se quiera.

Apliquemos el teorema de Green a las dos funciones u(x, y) y v(x, y), considerando como dominio el rectángulo R:

$$\iint_R \left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_R \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy + \iint_R \frac{\partial}{\partial y}(u.v)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{FR} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy + \int_{FR} u\, v\, dx \qquad (8)$$

Como las funciones $x(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen respectivamente las ecuaciones del calor (1) y a la conjugada (7), se deduce de la (8) la igualdad siguiente:

$$\int_{y_1}^{y_2} [u\,(X, y)\, v_x\,(X, y) - v\,(X, y)\, u_x\,(X, y)]\, dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} [u\,(o, y)\, v_x\,(o, y) - v\,(o, y)\, u_x\,(o, y)]\, dy +$$

$$+ \left[\int_0^X u\,(x, y_1)\, v\,(x, y_1)\, dx - \int_0^X u\,(x, y_2)\, v\,(x, y_2)\, dx\right] = O \qquad (9)$$

Indiquemos ahora la función $v(x, y)$ que satisface a la ecuación "conjugada" en la siguiente forma:

$$v\,(x, y) = e^{\lambda^2 y} \begin{cases} \cos \lambda\, x \\ \operatorname{sen} \lambda\, x \end{cases}$$

Considerando ante todo:

$$v\,(x, y) = e^{\lambda^2 y} \cos \lambda\, x$$

y sustituyendo esta en la igualdad (9), obtenemos:

$$\int_0^X u(x, y_2)\, v(x, y_2)\, dx - \int_0^X u(x, y_1)\, v(x, y_1)\, dx =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \left[-\lambda\, u(o, y)\, e^{\lambda^2 y} \operatorname{sen} \lambda x - v(o, y)\, u_x(o, y) \right] dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} \left[-\lambda\, u(X, y)\, e^{\lambda^2 y} \operatorname{sen} \lambda x - v(X, y)\, u_x(X, y) \right] dy \qquad (10)$$

En base a las propiedades ya demostradas de una función $u(x, y)$ solución de la ecuación de propagación del calor, podemos afirmar lo siguiente: es suficiente suponer la función $u(x, y)$ limitada para $y = o$ para que ella junta con su derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ se mantenga limitada en toda la faja del plano $x\ y$ que está sobre la recta de ecuación $y = \varepsilon$.

Indiquemos con M y con M' los límites superiores respectivos de las funciones $u(x, y)$ y de su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ es decir:

$$|u(x, y)| \leqslant M \quad ; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant M'$$

De estas limitaciones se deduce que el segundo miembro de la igualdad (10) está limitado en valor absoluto por la cantidad siguiente:

$$2\, L\, (\lambda M + M')\, (y_2 - y_1)$$

donde L indica el límite superior de la función $e^{\lambda^2 y}$, valor que es finito pues y_1 e y_2 son valores finitos por hipótesis.

El primer miembro de la igualdad (10) tiene por lo tanto valor medio nulo; de esto se deduce:

$$M_x \left\{ u(x, y_2)\, e^{\lambda^2 y_2} \cos \lambda x \right\} = M_x \left\{ (u(x, y_1)\, e^{\lambda^2 y_1} \cos \lambda x \right\} \qquad (11)$$

Siendo las dos rectas $y = y_1$ e $y = y_2$ arbitrarias cumpliendo solamente las condiciones mencionadas anteriormente, concluimos que la cantidad

$$M_x \left\{ u\ (x, y)\ e^{\lambda^2 y} \cos \lambda\, x \right\}$$

es independiente de la variable y, y depende solamente de λ. Por lo tanto podemos escribir la siguiente igualdad:

$$M_x \left\{ u\ (x, y) \cos \lambda\, x \right\} = A\ (\lambda)\ e^{-\lambda^2 y} \qquad (12)$$

donde se ha indicado con $A\ (\lambda)$ una función conveniente de λ.

Consideremos ahora como función $v(x, y)$ la función:

$$e^{\lambda^2 y} \operatorname{sen} \lambda\, x$$

Substituyendo en la igualdad (9) en el lugar de $v(x, y)$ la función $e^{\lambda^2 y} \operatorname{sen} \lambda\, x$, con un procedimiento análogo a aquello seguido para la función $e^{\lambda^2 y} \cos \lambda\, x$ obtenemos la igualdad siguiente:

$$M_x \left\{ u\ (x, y) \operatorname{sen} \lambda\, x \right\} = B\ (\lambda)\ e^{-\lambda^2 y} \qquad (13)$$

siendo $B(\lambda)$ una función conveniente de λ.

Los segundos miembros de las igualdades (12) y (13) son los coeficientes de la serie de Fourier de la función casi-periódica $u(x, y)$ (ver párrafo 4, capítulo I).

Habíamos enunciado en el mismo párrafo (4) del capítulo I que existe a lo sumo una sucesión de valores asignados a λ para los cuales la cantidad $a(\lambda)$ no es nula.

Indicando con λ_n un exponente cualquiera de la serie de Fourier de la función $u(x, y)$, con $A(\lambda_n)$ y $B(\lambda_n)$ los dos coeficientes correspondientes de la serie, podemos escribir para la función casi-periódica $u(x, y)$ el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$u(x, y) \backsim \sum_{1}^{\infty} \left[A\ (\lambda_n) \cos \lambda_n x + B\ (\lambda_n) \operatorname{sen} \lambda_n x \right] e^{-\lambda_n y} \qquad (14)$$

El desarrollo (14) tiene la forma del desarrollo (6) como queríamos demostrar.

3. Desarrollo en serie de Fourier de las Derivadas Parciales Primeras de una Función Casi-Periódica u(x, y) Solución de la Ecuación de Propagación del Calor.

Hemos demostrado en el párrafo anterior que a cada función casi-periódica $u(x, y)$ que es solución de la ecuación de propagación del calor se puede asociar un desarrollo en serie de Fourier de la forma (14).

Demostremos ahora, análogamente a lo que hicimos para las funciones armónicas casi-periódicas, que los desarrollos en serie de Fourier de las derivadas parciales primeras de una función casi-periódica $u(x, y)$ solución de la ecuación del calor, se obtienen derivando formalmente el desarrollo (14) de la función $u(x, y)$.

Por lo que se refiere a la derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$, observemos primero que se tiene:

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[u(x, y) - u(o, y)\right] = o \tag{15}$$

pues la función $u(x, y)$ es limitada según la hipótesis hecha en el párrafo 1 del presente capítulo fórmula (3).

Vamos ahora a integrar por parte la función $u \cos \lambda x$ de la manera siguiente:

$$\frac{1}{x}\int_0^x u \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\lambda} u \operatorname{sen} \lambda x\right] - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen}\lambda x \, dx$$

Pasando al límite para $x \to \infty$ se obtiene:

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x\right\} = -\lambda M_x\left\{u \cos \lambda x\right\} \tag{16}$$

Integrando por parte la función $u \operatorname{sen} \lambda x$, se obtiene con el mismo procedimiento anterior:

$$M_x\left\{\frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x\right\} = \lambda M_x\left\{u \operatorname{sen} \lambda x\right\} \tag{17}$$

Las igualdades anteriores (15), (16) y (17) nos permiten escribir para la función $\frac{\partial u}{\partial x}$ el siguiente desarrollo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x (x, y) \sim \sum_{1}^{\infty} [\lambda_n B (\lambda_n) \cos \lambda_n x -$$

$$-\lambda_n A (\lambda_n) \operatorname{sen} \lambda_n x] e^{-\lambda_n^2 y} \qquad (18)$$

Se puede constatar que este desarrollo es la derivada respecto a x del desarrollo (14) de la función $u(x, y)$.

Por lo que se refiere a la función $\frac{\partial u}{\partial y}$ observemos que es igual a la función $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, pues por hipótesis la función $u(x, y)$ satisface a la ecuación de propagación del calor (1). Integramos ahora por parte la función $\frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x$ de la manera siguiente:

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \lambda x \right] -$$

$$- \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Pasando al límite para $x \to \infty$ obtenemos:

$$M_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{sen} \lambda x \right\} = - \lambda M_x \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x \right\} \qquad (19)$$

pues la función $\frac{1}{x} [\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \lambda x]$ tiende por hipótesis hacia cero cuando $x \to \infty$ y para todos los valores de y indicados en el párrafo (1) de este capítulo.

Recordando a la fórmula (17), la igualdad (19) se reduce a la siguiente:

$$M_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{sen} \lambda x \right\} = - \lambda^2 M_x \left\{ u \operatorname{sen} \lambda x \right\} \qquad (20)$$

Integrando por parte la función $\frac{\partial u}{\partial x}$ sen λ x obtenemos con procedimiento análogo al anterior:

$$M_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \lambda x \right\} = \lambda \; M_x \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x \right\} \tag{21}$$

En base a la igualdad (16) de este párrafo, deducimos de la (21):

$$M_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \lambda x \right\} = - \lambda^2 M_x \left\{ u \cos \lambda x \right\} \tag{22}$$

Observemos además que se tiene:

$$M_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = M_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \; \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx =$$

$$= \lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=X} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \right] = 0 \tag{23}$$

pues vimos la derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ se mantiene limitada según la hipótesis hecha en el párrafo (1) de este capítulo.

Las igualdades anteriores (20), (22) y (23) nos permiten escribir para la función $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ o lo que es lo mismo, para la función $\frac{\partial u}{\partial y}$ el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y (x, y) \sim \sum_1^{\infty} - \lambda_n^2 \left[A(\lambda_n) \cos \lambda_n x + B(\lambda_n) \operatorname{sen} \lambda_n x \right] e^{-\lambda_n^2 y}$$

Se puede constatar inmediatamente que se obtiene este desarrollo derivando formalmente el desarrollo (14) de la función u(x, y), con respecto a la variable y.

CAPITULO IV

ECUACION DIFERENCIAL A LAS DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN COMPLETA Y LINEAL

1. Determinación de las soluciones casi-periódicas.

Consideremos la siguiente ecuación:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + p \,.\, u = O \qquad (1)$$

donde los coeficientes a, b, c, l, m, p se suponen constantes.

Antes de estudiar la ecuación (1) estimamos útil observar que la ecuación (1) contiene como caso particular la ecuación de Laplace en el plano, la ecuación de propagación del calor estudiadas anteriormente y la ecuación de propagación de ondas a lo largo de una dirección.

Durante el desarrollo del tema de este capítulo veremos que una solución de la forma:

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(y) \cos \lambda\, x \\ \varphi(y) \operatorname{sen} \lambda\, x \end{cases} \qquad (2)$$

siendo λ constante y $\varphi(y)$ una función conveniente de la variable y, satisface a la ecuación (1).

En base a las propiedades de las funciones casi-periódicas las soluciones (2) permiten fácilmente determinar una función u(x, y) casi-periódica y que satisface a la ecuación (1). Consideremos por lo tanto una función u(x, y) que tenga las características mencionadas y vamos a demostrar que es posible asociar a ella un desarrollo en serie de Fourier, análogamente a lo que hicimos anteriormente para la ecuación de Laplace y para aquella de propagación del calor.

2. Desarrollo en Serie de Fourier de las soluciones casi-periódicas.

Para desarrollar en serie de Fourier una función u(x, y) solución de la ecuación diferencial (1) vamo a aplicar un procedimiento análogo a aquello que nos permitió obtener los desarrollos de Fourier de las soluciones de la ecuación de Laplace y de aquella de propagación del calor. Precisamente aplicaremos la fórmula de Green que representa, como ya vimos, el punto fundamental de los teoremas que se refieren a los desarrollos mencionados.

Consideremos ante todo la ecuación "conjugada" de la (1) es decir:

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - l \frac{\partial v}{\partial x} - m \frac{\partial v}{\partial y} + p\, v = O \qquad (3)$$

Indiquemos por simplicidad de simbolismo con L(u) la ecuación (1) y con M(v) la ecuación (3) y observemos que se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\iint_R [u\, M(v) - L(u)]\, dxdy = \iint_R -\frac{\partial}{\partial x}\left[av\frac{\partial u}{\partial x} - au\frac{\partial v}{\partial x} + l\, u\, v - 2\, b\, u\frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy + \iint_R -\frac{\partial}{\partial y}\left[cv\frac{\partial u}{\partial y} - cu\frac{\partial v}{\partial y} + 2\, b\, v\frac{\partial u}{\partial x} + m\, u\, v\right] dxdy$$

donde R indica un dominio rectangular en el cual son definidas las funciones u(x, y) y v(x, y).

Aplicando la fórmula de Green, y en base a la igualdad anterior se obtiene:

$$O = \int_{FR} -\left[av\frac{\partial u}{\partial x} - au\frac{\partial v}{\partial x} + l\, u\, v - 2\, b\, u\frac{\partial v}{\partial y}\right] dy + \int_{FR}\left[c\, v\frac{\partial u}{\partial y} - c\, u\frac{\partial v}{\partial y} + 2\, b\, v\frac{\partial u}{\partial x} + m\, u\, v\right] dx \qquad (4)$$

Descomponiendo cada integral del segundo miembro en integrales parciales extendidas cada una a un lado del rectángulo R, obtenemos:

$$O = \int_{y_1}^{y_2} - [av(X, y)\, u_x(X, y) - au(X, y)\, v_x(X, y) + lu(X, y)\, v(X, y) - 2\, b\, u(X, y)\, v_y(X, y)]\, dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} - [av(O, y)\, u_x (O, y) - au(O, y)\, v_x (O, y) + lu(O, y)\, v (O, y) -$$

$$- 2\, bu(O, y)\, v_y (O, y)]\, dy + \int_0^X [cv(x, y_1)\, u_y (x, y_1) -$$

$$- cu(x, y_1)\, v_y (x, y_1) + 2bv(x, y_1)\, u_x (x, y_1) + mu(x, y_1)\, v (x, y_1)]\, dx -$$

$$- \int_0^X [cv(x, y_2)\, u_y (x, y_2) - cu(x, y_2)\, v_y (x, y_2) +$$

$$+ 2\, bv(x, y_2)\, u_x (x, y_2) + mu(x, y_2)\, v (x, y_2)]\, dx \qquad (5)$$

Vamos ahora a aplicar a la ecuación "conjugada" (3) un procedimiento de resolución que vale también para la ecuación diferencial (1) y que, como afirmamos anteriormente, demuestra la posibilidad de resolver la ecuación diferencial (1) mediante funciones casi-periódicas.

Precisamente impongamos a la ecuación conjugada (3) de quedar satisfecha por una función $v(x, y)$ de la forma:

$$v(x, y) = \varphi(y) \cos \lambda x$$

Encontramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\cos \lambda x \left[-a \lambda^2 \varphi(y) + c\varphi''(y) - m\varphi'(y) + p\, \varphi(y) \right] +$$
$$+ \operatorname{sen} \lambda x \left[- 2\, b\, \lambda\, \varphi'(y) + 1\, \lambda\, \varphi(y) \right] = O \qquad (6)$$

La ecuación diferencial (6) se satisface poniendo:

$$\begin{cases} c \,.\, \varphi''(y) - m\, \varphi'(y) + (p - a\, \lambda^2)\, \varphi(y) = O \\ 2\, b\, \varphi'(y) - 1\, \varphi(y) = O \end{cases} \qquad (7)$$

Simplifiquemos la resolución de las dos ecuaciones anteriores (7) suponiendo que las constantes b y 1 sean nulas. Resolviendo la primera ecuación de las (7) con el método de la ecuación característica se tiene:

$$c\, t^2 - m\, t + (p - \alpha\, \lambda^2) = O$$

$$t = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4c\, (p - \alpha\, \lambda^2)}}{2\, c} = \begin{cases} t_1 \\ t_2 \end{cases}$$

Tenemos como integral general la función siguiente:

$$\varphi(y) = K_1 e^{t_1 y} + K_2 e^{t_2 y} \tag{8}$$

Indiquemos con $\varphi_1(y)$ y $\varphi_2(y)$ respectivamente las dos integrales particulares. $K_1 e^{t_1 y}$ y $K_2 e^{t_2 y}$ y vamos a substituir en la fórmula (5) en lugar de la función $v(x, y)$ la función $\varphi_1(y) \cos \lambda x$.

Si se supone que la función $u(x, y)$ está limitada en todo el dominio R junta con su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ deducimos la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} - [a\, v\, (x, y)\, u_x\, (x, y) - a\, u\, (x, y)\, v_x\, (x, y)]\, dy \right| \leqslant M \tag{9}$$

donde se ha indicado con M el limite superior de una de las integrales de la igualdad (5), que tienen como variable de integración la y.
En base a la desigualdad (9), se obtiene de la (5):

$$\left| \frac{1}{x} \left\{ \int_0^X [cv\, (x, y_1)\, u_y\, (x, y_1) - cu(x, y_1)\, v_y\, (x, y_1) + \right.\right.$$

$$+ mu(x, y_1) v(x, y_1)] dx - \int_0^X [cv(x, y_2)\, u_y\, (x, y_2) - \tag{10}$$

$$\left.\left. cu(x, y_2)\, v_y\, (x, y_2) + mu(x, y_2) v\, (x, y_2)] dx \right\} \right| \leqslant \frac{2M}{x}$$

Pasando al limite cuando $x \to \infty$ se deduce que el valor medio:

$$M_x \left\{ c \cos \lambda\, x\, \varphi_1(y)\, u_y - c\, u \cos \lambda\, x\, \varphi'_1(y) + m\, u \cos \lambda\, x\, \varphi_1(y) \right\} \tag{11}$$

es independiente de la variable y porque las dos rectas $y = y_1$ e $y = y_2$ son arbitrarias, pero debiendo encontrarse en el dominio en el cual la función $u(x, y)$ es por hipótesis casi-periódica.

Indicando la expresión (11) en la forma $c(t_2 - t_1)\ A_1(\lambda)$ siendo $A_1(\lambda)$ una función conveniente de λ podemos escribir la igualdad siguiente deducida de la (11):

$$M_x \left\{ \cos \lambda x \left[c \, . \, u_y + u(m - c\, t_1) \right] \right\} = c(t_2 - t_1)\ A_1(\lambda)\varphi_1^{-1}(y) \qquad (12)$$

Si sustituimos ahora en la fórmula (5) en lugar de $v(x, y)$ la función $\varphi_2(y) \cos \lambda x$ se llega con un procedimiento análogo al anterior a la fórmula:

$$M_x \left\{ \cos \lambda x \left[c \, . \, u_y + u(m - c\, t_2) \right] \right\} = c(t_2 - t_1)\ A_2(\lambda)\varphi_2^{-1}(y) \qquad (13)$$

Restando la (13) de la (12) y dividiendo los dos miembros por $c(t_2 - t_1)$ se obtiene:

$$M_x \left\{ u \cos \lambda x \right\} = A_1(\lambda)\varphi_1^{-1}(y) - A_2(\lambda)\varphi_2^{-1}(y) \qquad (14)$$

Vamos a observar ahora que si $\varphi_1(y) \cos \lambda x$ y $\varphi_2(y) \cos \lambda x$ son dos integrales particulares de la ecuación "conjugada" (3) también $\varphi_1(y)$ sen λx y $\varphi_2(y)$ sen λx son dos integrales particulares de la misma ecuación (3).

Mediante estas dos integrales particulares de la ecuación (3) y con un procedimiento análogo a aquello aplicado para determinar $M_x \left\{ u \cos \lambda x \right\}$ se deduce la igualdad siguiente:

$$M_x \left\{ u \operatorname{sen} \lambda x \right\} = B_1(\lambda)\varphi_1^{-1}(y) + B_2(\lambda\varphi_2^{-1}(y) \qquad (15)$$

Las cantidades $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ que figuran en los segundos miembros de las igualdades (14) y (15) son funciones de λ.

En base al teorema enunciado en el párrafo 4 del capítulo I, los valores asignados a λ, que no anulan los segundos miembros de las igualdades

(14) y (15) forman una sucesión y los desarrollos en serie de Fourier de la función u(x, y) sobre cualquiera recta paralela al eje O x, y perteneciente al dominio R provienen todos de un mismo desarrollo de la forma siguiente:

$$u\,(x, y) \sim \sum_{1}^{\infty} \Big\{ \left[A_1(\lambda_n)\varphi_1^{-1}(y) - A_2(\lambda_n)\varphi_2^{-1}(y) \right] \cos \lambda_n x +$$

$$+ \left[B_1(\lambda_n)\varphi_1^{-1}(y) - B_2(\lambda_n)\varphi_2^{-1}(y) \right] \operatorname{sen} \lambda_n x \Big\} \quad (16)$$