Ejercicios de geometría convexa y politopos

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

17 de agosto de 2016

Conjuntos convexos

1) Digamos que dos subconjuntos X y Y de $\mathbb{R}^1$ son **diferentes** si uno no se trasforma en otro por una homotecia de razón positiva (una aplicación $x \mapsto \lambda\, x$ con $\lambda > 0$). ¿Cuáles son los subconjuntos convexos diferentes de $\mathbb{R}^1$?

2) Demuestre que si $K \subset \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, entonces $K \times L \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es también convexo.

3) Sea $\{K_\alpha\}$ una familia de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ (indexada por algún parámetro real α). Entonces su intersección $\bigcap_\alpha K_\alpha$ es también convexa.

4) La unión de conjuntos convexos $\bigcup_\alpha K_\alpha$ casi nunca es convexa. Sin embargo, si la familia $\{K_\alpha\}_\alpha$ satisface $\alpha \le \beta \Leftrightarrow K_\alpha \subseteq K_\beta$, entonces su unión es también convexa.

5) Para dos subconjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ su **suma de Minkowski** es el subconjunto

$$X + Y := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in Y\}.$$

Demuestre que si X y Y son convexos, entonces $X + Y$ es también convexo.

6) Demuestre que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces su clausura topológica $\overline{K}$ es también convexa.

7) Demuestre que si X es un conjunto abierto, entonces $\operatorname{conv} X$ es también abierto. (Indicación: $\operatorname{conv} X$ es convexo, de donde $\operatorname{int}\operatorname{conv} X$ es también convexo.) Encuentre algún ejemplo de un conjunto cerrado X tal que $\operatorname{conv} X$ no es cerrado.

8) Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, entonces para cualquier subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tenemos $f(\operatorname{conv} X) = \operatorname{conv} f(X)$ (utilice el hecho que la imagen y la imagen inversa de un conjunto convexo, respecto a una aplicación afín, es también convexa).

9) Tenemos la siguiente descripción de la envolvente convexa de $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{conv} X := \bigcap_{\substack{K \supseteq X \\ K \text{ convexo}}} K = \{\sum_{1 \le i \le k} \lambda_i\, \mathbf{x}_i \mid \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X,\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

(denotemos el conjunto a la derecha por K; note que $K \subseteq \operatorname{conv} X$ y $X \subset K$, por lo que es suficiente de demostrar que K es convexo).

10) Si K_1 y K_2 son dos subconjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2) = \bigcup_{\substack{\mathbf{x}_1 \in K_1 \\ \mathbf{x}_2 \in K_2}} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2].$$

11) Si C_1 y C_2 son dos conos convexos, entonces su suma de Minkowski $C_1 + C_2$ coincide con la envolvente convexa $\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$.

12) Sea $B(\mathbf{0}, r)$ la bola cerrada centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de radio r. Entonces el conjunto polar correspondiente es $B(\mathbf{0}, r)^\circ = B(\mathbf{0}, 1/r)$.

13) Sea X el cuadrado con vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$. Calcule el conjunto polar X°.

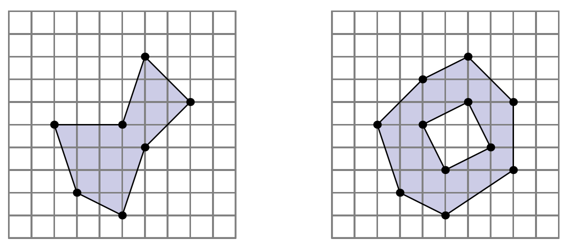
14) Para cualquier $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto polar X° es convexo, cerrado, y $X^\circ \ni \mathbf{0}$.

Polinomios de Ehrhart

15) Completa la demostración del teorema de Pick.

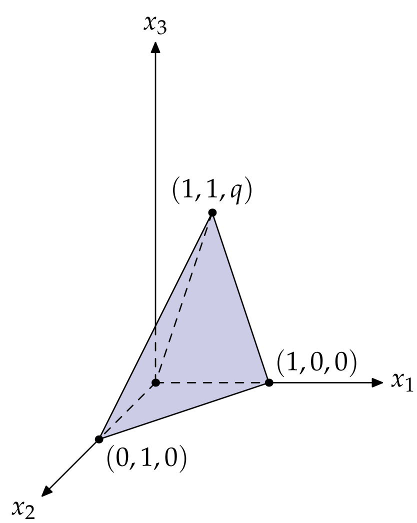
16) Supongamos que el polígono es

   a) simplemente conexo (no tiene agujeros), pero no necesariamente convexo,
   b) no simplemente conexo.



¿Se cumple todavía la identidad de Pick $A = I + \frac{1}{2}B - 1$? Si no, ¿es posible corregirla?

17) Para $q = 1, 2, 3, \ldots$ sea T_q el símplice con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,q)$.



Demuestre que para cada q tenemos $\#(T_q \cap \mathbb{Z}^3) = 4$ (los únicos puntos enteros en T_q son sus vértices) y $\operatorname{vol} T_q \to \infty$ para $q \to \infty$. Además, calcule el polinomio de Ehrhart

$$\ell_{T_q}(m) = \frac{q}{6}\, m^3 + m^2 + \left(2 - \frac{q}{6}\right)\, m + 1.$$

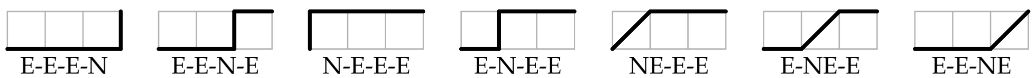
18) La fórmula de Pick para $P \subset \mathbb{R}^2$ puede ser escrita como

$$A = \frac{1}{2}(\ell_P(1) + \ell_{\mathring{P}}(1) - 2).$$

Demuestre que la fórmula análoga en $\mathbb{R}^3$ es

$$\operatorname{vol} P = \frac{1}{6}(\ell_P(2) - 3\,\ell_P(1) - \ell_{\mathring{P}}(1) + 3).$$

19) Por la definición, el número de Delannoy $D(p,q)$ es el número de caminos desde el punto $(0,0)$ al punto (p,q), donde cada paso es en la dirección norte ($(i,j) \to (i,j+1)$), este ($(i,j) \to (i+1,j)$), o noreste ($(i,j) \to (i+1,j+1)$). Por ejemplo, $D(3,1) = 7$:



a) Demuestre que estos números satisfacen la relación de recurrencia

$$D(p,q) = D(p-1,q) + D(p-1,q-1) + D(p,q-1) \quad \text{para } p > 0, q > 0.$$

Así que esta formula junto con los valores triviales $D(p,0) = D(0,q) = 1$ nos permite calcular $D(p,q)$ desde una especie de "triángulo de Pascal" (en nuestro caso, cada elemento es la suma de los *tres* elementos que están arriba):

$$\begin{array}{c}
D(0,0) \\
D(1,0)\ \ D(0,1) \\
D(2,0)\ \ D(1,1)\ \ D(0,2) \\
D(3,0)\ \ D(2,1)\ \ D(1,2)\ \ D(0,3) \\
D(4,0)\ \ D(3,1)\ \ D(2,2)\ \ D(1,3)\ \ D(0,4) \\
D(5,0)\ \ D(4,1)\ \ D(3,2)\ \ D(2,3)\ \ D(1,4)\ \ D(0,5) \\
D(6,0)\ \ D(5,1)\ \ D(4,2)\ \ D(3,3)\ \ D(2,4)\ \ D(1,5)\ \ D(0,6)
\end{array}$$

b) Demuestre que $D(3,m) = \ell_P(m)$ donde P es el octaedro de vértices $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$.

20) Sean A y B dos cuadrados mágicos. Demuestre que la suma $A+B$ (calculada elemento por elemento) y el producto $A \cdot B$ (calculado como el producto habitual de matrices) son también mágicos. ¿Qué es la suma mágica correspondiente en estos casos?