Ποσοτικές μέθοδοι στα Χρηματοοικονομικά

Τόκοι – ράντες - δάνεια

Γιαννούλα Φλώρου

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr
HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΦΛΩΡΟΥ ΓΙΑΝΝΟΥΛΑ
Καθηγήτρια ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

Ποσοτικές μέθοδοι στα χρηματοοικονομικά

Τόκοι, ράντες, δάνεια

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Ποσοτικές μέθοδοι στα χρηματοοικονομικά

Συγγραφή

Φλώρου Γιαννούλα

Κριτικός αναγνώστης

Σοφία Αναστασιάδου

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Ελένη Νίκα

ISBN: 978-960-603-163-2

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Στον πατέρα μου

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια

K0 ή PV	Αρχικό κεφάλαιο
Kn FV	Τελικό κεφάλαιο
I	Τόκος
i ή r	Επιτόκιο
ΚΠΑ	Καθαρή παρούσα αξία
n	Χρόνος
R	Δόση Ράντας
V	Αξία Ράντας
αn|i	παρούσα αξία άμεσης μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i
sn|i	τελική αξία μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i
λ|αn|i	παρούσα αξία μέλλουσας μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας
|λαn|i	παρούσα αξία αρξάμενης μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας
an|i	παρούσα αξία μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας με επιτόκιο i
ςn|i	τελική αξία προκαταβλητέας ράντας με επιτόκιο i
λ|an|i	παρούσα αξία μέλλουσας μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας
|λan|i	παρούσα αξία αρξάμενης μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας
αn|i	παρούσα αξία άμεσης μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i
sn|i	τελική αξία μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i
IRR	εσωτερικός βαθμός απόδοσης επένδυσης Internal rate of return
Pn|t	Συντελεστής χρεολυσίου

Πίνακας ελληνικών και ξένων επιστημονικών όρων

Χρήμα	Money
Τόκος	Interest
Επιτόκιο	Interest Rate
Κεφάλαιο	Fund
Ράντα	Rent, Annuity
Πληθωρισμός	Inflation
Δόση ή όρος ράντας	Rent
Προακαταβλητέα ράντα	Annuity Due
Απόσβεση	Depreciation
Δάνειο	Loan
Κεφάλαιο Χρεολυσίας	Sinking fund
Ομολογιακό Δάνειο	Bond
Απόσβεση	Depreciation

Πρόλογος

Στην καθημερινή μας ζωή, πολλές φορές, χωρίς να το συνειδητοποιούμε πάντα, κάνουμε χρήση μεθόδων από τα μαθηματικά. Αυτό γίνεται κυρίως στις οικονομικές πράξεις, που είναι πράξεις με ανταλλαγή χρημάτων, και αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας.

Στο παρόν βιβλίο, γίνεται προσπάθεια απλοποίησης εννοιών που χρησιμοποιούμε στις οικονομικές συναλλαγές, κυρίως με τις τράπεζες. Βέβαια, στην τραπεζική πρακτική, κάποιοι από τους υπολογισμούς που παρουσιάζονται στο παρόν σύγγραμμα, γίνονται αυτόματα μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στόχος μας δεν είναι η εκμάθηση αυτών των υπολογισμών αλλά η γνώση του μηχανισμού λειτουργίας τους. Η κατανόηση του μηχανισμού αυτού παρέχει στον αναγνώστη και μελετητή των οικονομικών πράξεων ικανοποίηση, αυτοπεποίθηση και σιγουριά. Παρέχει ακόμη τη δυνατότητα εύρεσης νέων καινοτόμων τεχνικών και στη συνέχεια προαγωγής της επιστήμης με την εύρεση νέας γνώσης.

Ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη για την εκπόνηση του βιβλίου θα ήθελα να εκφράσω σε όλους τους συντελεστές που συνεργάστηκαν για την κριτική ανάγνωση, τη γλωσσική επιμέλεια, την τεχνική επεξεργασία και τη μετατροπή του σε ηλεκτρονικό σύγγραμμα. Ιδιαίτερα αξίζει να ευχαριστήσω τους συντελεστές του προγράμματος «Κάλλιπος» για την ευκαιρία συγγραφής του βιβλίου αλλά και για την υλοποίησή του.

Οποιοδήποτε τυχόν λάθος βρεθεί στο περιεχόμενο του συγγράμματος δεν οφείλεται σε πρόθεση, και ευχαριστώ εκ των προτέρων όποιον έχει την καλή διάθεση να το επισημάνει ώστε να διορθωθεί μελλοντικά.

Καβάλα, Οκτώβριος 2015

Γιαννούλα Φλώρου

Εισαγωγή

Σύνοψη
Εισαγωγικά στοιχεία για το χρήμα και τη χρήση του.

1 Εισαγωγικά

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές οικονομικών, που επιθυμούν να εξοικειωθούν με βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών, όπως τόκος, ανατοκισμός, ράντα, δάνεια. Δυστυχώς, για τους περισσότερους φοιτητές, οι λέξεις αυτές ακούγονται τρομακτικές. Αυτό οφείλεται στη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο τα διδάχθηκαν. Γενικά, σήμερα είναι παραδεκτό ότι υπάρχουν άνθρωποι που εμφανίζουν κλίση στα μαθηματικά, και άλλοι άνθρωποι που αποστρέφονται τα μαθηματικά. Το βιβλίο αυτό δεν απευθύνεται μόνο στους πρώτους, αλλά φιλοδοξεί να αλλάξει προς το καλύτερο τη σχέση των δεύτερων με τα μαθηματικά, και ταυτόχρονα να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για αυτούς.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανόηση της ύλης δεν απαιτεί προηγούμενες γνώσεις μαθηματικών, παρά μόνο την κατανόηση και εφαρμογή της έννοιας του ποσοστού και της ικανότητας επίλυσης μιας απλής εξίσωσης. Για κάθε θέμα που παρουσιάζεται στο βιβλίο δίνεται και το αντίστοιχο παράδειγμα-άσκηση, μαζί με τη λύση. Επειδή τα θέματα που πραγματεύεται το βιβλίο αφορούν σε πράξεις με χρήματα, σχεδόν σε όλα τα παραδείγματα και στις ασκήσεις χρησιμοποιείται το ευρώ ως μονάδα μέτρησης των χρημάτων και καταβλήθηκε προσπάθεια, ώστε τα παραδείγματα να βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα. Η λύση των ασκήσεων που προτείνονται απαιτεί απλές πράξεις με ακρίβεια υπολογισμών μέχρι 4 δεκαδικών ψηφίων, κυρίως όταν οι πράξεις αφορούν μεγάλα χρηματικά ποσά. Έτσι, η χρησιμοποίηση αριθμομηχανής κρίνεται αναγκαία και επιβάλλεται η χρήση της από τον αναγνώστη που θέλει να λύσει μόνος του τα παραδείγματα ή τις ασκήσεις του βιβλίου. Σε κάποιες από τις ασκήσεις δίνεται και η λύση. Συνιστάται όμως στον αναγνώστη να προσπαθήσει μόνος του την επίλυση της άσκησης και κατόπιν να συμβουλευθεί τη λύση που παρέχεται από το σύγγραμμα αυτό. Με τον τρόπο αυτό θα είναι σίγουρος ότι κατανόησε τα κύρια σημεία και μπορεί να εφαρμόσει τις γνώσεις του σε παρόμοια προβλήματα μαθηματικών.

Η δομή της ύλης έχει ως εξής:

Αρχικά παρουσιάζεται μια ιστορική ανασκόπηση του χρήματος και δίνονται οι ορισμοί που θα χρειαστούν στη συνέχεια.

Κατόπιν παρουσιάζεται η έννοια του τόκου, ο τρόπος υπολογισμού του και η προεξόφληση βραχυπρόθεσμων οικονομικών τίτλων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία του ανατοκισμού, ο τρόπος υπολογισμού του και η προεξόφληση μακροπρόθεσμων οικονομικών τίτλων. Επίσης αναφέρεται η έννοια της παρούσας αξίας και εφαρμογές της στην αξιολόγηση επενδύσεων.

Το επόμενο κεφάλαιο περιγράφει τη δημιουργία κεφαλαίου μέσω περιοδικών καταβολών (ράντα), τον υπολογισμό της αξίας της οποιαδήποτε χρονική στιγμή καθώς και τις εφαρμογές της.

Τα τελευταία κεφάλαια περιγράφουν τα διάφορα είδη δάνειων και τους τρόπους εξόφλησής τους.

Στην αρχή κάθε κεφαλαίου υπάρχουν οι στόχοι αφομοίωσης της ύλης, με σκοπό να βοηθήσουν τον αναγνώστη να επικεντρωθεί στη μελέτη τους αλλά και να βοηθήσουν όποιον θέλει να χρησιμοποιήσει το βιβλίο σαν οδηγό αναφοράς.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει σύντομη ανασκόπηση των κυριοτέρων σημείων με την ένδειξη «Πρέπει να θυμάμαι».

Ας δούμε όμως εν συντομία την ιστορία του χρήματος. Στα προϊστορικά χρόνια της ζωής του ανθρώπου επάνω στη γη, κάθε κοινωνία ζούσε, χωρίς να χρησιμοποιεί χρήματα, αφού οι άνθρωποι ήταν τροφοσυλλέκτες, η τροφή άφθονη και δεν είχαν άλλες δαπανηρές ανάγκες.

Αργότερα, όταν η τροφή δεν έφθανε, για να ζήσουν, αναγκάστηκαν να καλλιεργήσουν τη γη ή να διεκδικήσουν την τροφή σε άλλα μέρη. Στη διάρκεια των ιστορικών χρόνων αναγκάστηκαν να ανταλλάξουν αγαθά μεταξύ τους και να εφεύρουν έτσι το χρήμα ως μέσο ανταλλαγής των αγαθών. Σήμερα το χρήμα έχει δύο μορφές, την υλική (κέρματα και χαρτονομίσματα) και την άυλη μορφή (καταθέσεις και τραπεζογραμμάτια).

Οι πράξεις που γίνονται με ανταλλαγή χρήματος ονομάζονται «οικονομικές πράξεις». Διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμες, μεσοπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες.

Βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια το πολύ ενός έτους. Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια μεγαλύτερη των πέντε ετών. Μεσοπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια ενός έως πέντε ετών.

Η αξία του ίδιου ποσού χρημάτων αλλάζει διαχρονικά εξαιτίας του πληθωρισμού (αύξηση τιμών αγαθών). Τα αγαθά που μπορούμε να τα αγοράσουμε σήμερα με 100 ευρώ, πιθανώς να μην μπορούμε να τα αγοράσουμε μετά από πέντε χρόνια με το ίδιο ποσό, αλλά να χρειαστούμε τότε 107 ευρώ. Προκειμένου να υπολογίζουμε και διαχρονικά την αξία του χρήματος, έχει αναπτυχθεί ένας ολόκληρος επιστημονικός κλάδος που ονομάζεται «χρηματοοικονομικά».

Χρηματοοικονομικά ονομάζονται τα οικονομικά του χρήματος, δηλαδή, ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε το χρήμα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, ο τόκος που αυτό μας αποδίδει, ή ο τόκος που πρέπει να πληρώσουμε, για να το χρησιμοποιήσουμε. Χρησιμοποιούμε τα χρηματοοικονομικά σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας και κυρίως σε τράπεζες, χρηματιστήρια, προεξόφληση, αντικατάσταση Γραμματίων, δάνεια, ομόλογα, Αμοιβαία Κεφάλαια.

Σήμερα στις οικονομικές ειδήσεις όλο και συχνότερα χρησιμοποιούνται όροι, όπως «βασικό επιτόκιο», «προεξοφλητικό επιτόκιο», «έκδοση υπέρ του άρτιου», «δεδουλευμένος τόκος», «εσωτερικός βαθμός απόδοσης», «ομόλογα», «ονομαστική αξία», «παρούσα αξία», «ομολογιακό δάνειο». Τη χρήση των όρων αυτών θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε στη συνέχεια του βιβλίου.

Παρακάτω δίνουμε κάποιους ορισμούς που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση των επομένων ενοτήτων.

«**Χρήμα**» είναι το ανταλλακτικό μέσο και μέτρο αξίας αγαθών και υπηρεσιών. Το ονομάζουμε «ανταλλακτικό μέσο», γιατί το χρησιμοποιούμε, προκειμένου να πάρουμε στην κατοχή μας διάφορα αγαθά ή να εξασφαλίσουμε παρεχόμενες υπηρεσίες. Το ονομάζουμε «μέτρο αξίας», γιατί μετράμε την αξία κάθε αγαθού ή υπηρεσίας, με το ποσό χρημάτων που πρέπει να δώσουμε, για να πάρουμε το αγαθό ή την υπηρεσία. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το ευρώ ως μέτρο του χρήματος. Το ευρώ σήμερα χρησιμοποιείται σε 19 χώρες (338,6 εκατομμύρια άνθρωποι) της Ευρώπης μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα.

«**Κεφάλαιο**» είναι το χρήμα που έχει παραγωγική αξία, όταν δανειστεί ή αποταμιευτεί. «Παραγωγική αξία» σημαίνει τη δυνατότητα του χρήματος να παράγει νέο κεφάλαιο, είτε γιατί παράγει νέα αγαθά ή νέα τεχνολογία ή νέα γνώση, τα οποία μπορούν να παράγουν νέα αγαθά. Κεφάλαιο, δηλαδή, ονομάζεται κάθε οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων και έχει την ικανότητα να αυξάνεται. Κατά συνέπεια, τα χρηματικά ποσά που διατηρούμε στο σπίτι μας για τις τρέχουσες ανάγκες μας δεν είναι κεφάλαια, από οικονομικής απόψεως. Για τον ίδιο λόγο το χρήμα που «κρύβεται» σε συρτάρι ή μπαούλο για «ώρα ανάγκης» δεν είναι κεφάλαιο, αφού δεν έχει παραγωγική αξία αλλά έχει μόνο ανταλλακτική αξία.

«**Τόκος**» ονομάζεται το ποσό που παράγει ένα κεφάλαιο σε ορισμένο χρόνο. Είναι, δηλαδή η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στο δανειστή, για το δικαίωμα της εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του.

«**Επιτόκιο**» είναι ο τόκος μιας μονάδας χρήματος στη μονάδα χρόνου (σε ποσοστό).

«**Χρόνος**» είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα. Συμβολίζεται με n, όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα, με μ, όταν εκφράζεται σε μήνες, και με ν, όταν εκφράζεται σε ημέρες.

Οικονομική ισοδυναμία μπορεί να εκφραστεί με τη φράση «*Ο χρόνος είναι χρήμα*».

Άνισα χρηματικά ποσά μπορεί να είναι οικονομικά ισοδύναμα. Αρκεί τα δύο ποσά να μη μετριούνται την ίδια χρονική στιγμή, αλλά να αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Εφόσον το χρήμα στη διάρκεια του χρόνου προσθέτει παραγωγική αξία, ένα ορισμένο χρηματικό ποσό σήμερα είναι οικονομικά ισοδύναμο με μεγαλύτερο χρηματικό ποσό στο μέλλον. Η διαφορά των δύο αυτών ποσών αντιστοιχεί στο ποσό του τόκου.

«**Κεφαλαιοποίηση του τόκου**», ονομάζεται η πράξη ενσωμάτωσης του τόκου στο κεφάλαιο. Αυτή μπορεί να γίνει είτε μόνο μια φορά, στο τέλος του χρονικού διαστήματος, είτε πολλές φορές, σε μικρότερα χρονικά διαστήματα, είτε συνεχώς, στην ιδανική περίπτωση, με άμεση ενσωμάτωση των τόκων.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα κείμενο σχετικό με τη φιλοσοφική προσέγγιση του χρήματος. (Ιερόθεος, 2008).

Ειδικά για την αξία του χρήματος ο Max Weber αναφέρεται στις οδηγίες που δίνει ο Benzamin Franklin, τις οποίες συναντούμε στα βιβλία του «Αναγκαίες νύξεις σε κείνους που θα ήθελαν να γίνουν πλούσιοι» και «Συμβουλή σε έναν νέο έμπορο». Στα βιβλία αυτά ο Franklin συμβουλεύει:

«*Να θυμάσαι ότι ο χρόνος είναι χρήμα… Να θυμάσαι ότι η πίστωση είναι χρήμα… Να θυμάσαι ότι το χρήμα έχει αναπαραγωγική και καρποφόρα φύση. Το χρήμα μπορεί να παράγει χρήμα και τα γεννήματά του μπορούν να παράγουν περισσότερα… Να θυμάσαι ότι –κατά το ρητό– ο καλός πληρωτής είναι ο κύριος του πορτοφολιού του άλλου. Όποιος είναι γνωστός ότι πληρώνει ακριβώς στον χρόνο που υποσχέθηκε, μπορεί οποιαδήποτε στιγμή να σηκώσει όλο το χρήμα που οι φίλοι του μπορούν να αποταμιεύσουν*».

Αυτή είναι η βασική αρχή της χρηματοπιστωτικής αγοράς, που σήμερα διέρχεται κρίση.

Ο Max Weber σχολιάζει ότι «ο άνθρωπος κυριαρχείται από τη δίψα για απόκτηση χρήματος, απόκτηση που εκφράζεται σαν τελικός σκοπός της ζωής του». Και ρωτώντας ο Max Weber «γιατί πρέπει να βγαίνουν λεφτά από τους ανθρώπους;», σχολιάζει τη συμβουλή που έδωσε στον Benzamin Franklin ο αυστηρός καλβινιστής πατέρας του, χρησιμοποιώντας το χωρίο από τις Παροιμίες «είδες άνθρωπον επιτήδειον εις τα έργα αυτού; αυτός θέλει εμφανισθεί ενώπιον βασιλέων» (Παροιμ. κβ', 29): «Η απόκτηση χρήματος μέσα στην σύγχρονη οικονομική τάξη είναι –εφόσον γίνεται νόμιμα– το αποτέλεσμα και η έκφραση της αρετής και προκοπής σ' ένα επάγγελμα και η αρετή και η προκοπή αυτή είναι, όπως είναι εύκολο να αντιληφθούμε, το πραγματικό άλφα και το ωμέγα της ηθικής του Franklin».

Η καθηγήτρια στο Λουθηρανικό Πανεπιστήμιο της Τακόμα Brenda Ihssen έγραψε δύο κείμενα στα οποία αναλύει αυτό το θέμα.

Το πρώτο έχει τίτλο: «Η τοκογλυφία, η ελληνική Πατρολογία και η καθολική Κοινωνική διδασκαλία», στο οποίο θίγει θέματα όπως: «τι λένε οι πατερικοί συγγραφείς για την κοινωνική ηθική», «ποιοί είναι οι τοκογλύφοι», «ποιές είναι οι σημαντικές ερωτήσεις που πρέπει να τεθούν και τις οποίες πρέπει να γνωρίζει ο ερευνητής όταν προσεγγίζει ένα πατερικό κοινωνικό-ηθικό κείμενο», «υπό ποιές προϋποθέσεις ή μέχρι ποιο όριο μπορούν οι πατερικές πηγές να θεωρηθούν ότι συνεισφέρουν στην δημιουργία της Καθολικής Κοινωνικής διδασκαλίας». Μέσα στα κεντρικά αυτά κεφάλαια ανευρίσκουμε πολλές υποδιαιρέσεις, όπως «η απαγόρευση της τοκογλυφίας στη Γραφή», «ο τοκογλύφος ως απειλή για την κοινότητα (κακός, άγριο θηρίο, ψεύτης, ακόμη και φονιάς)», «η πνευματική πτωχεία του τοκογλύφου», οι τοκογλύφοι ως «μέλη της κοινότητας», «αν υπάρχουν εξαιρέσεις στον δανεισμό». Επίσης, απαντά σε τρία βασικά ερωτήματα όπως: «έχουν σχέση με την πραγματικότητα τα κείμενα των Ελλήνων Πατέρων;». «Τους ενδιαφέρει να έχουν σχέση με την πραγματικότητα;», «αν η παρουσία των ελληνορωμαϊκών θεμάτων είναι αναμφισβήτητη».

Το δεύτερο κείμενό της έχει τίτλο: «Τα κηρύγματα του Βασιλείου και του Γρηγορίου (Νύσσης) για την τοκογλυφία». Σε αυτό εξετάζει τα κίνητρά τους, να ασχοληθούν με το θέμα της τοκογλυφίας, οι επιρροές που δέχθηκαν από φιλοσόφους, η χρησιμοποίηση της Αγίας Γραφής με αναφορά στους τόκους, η τοκογλυφία ως κλοπή, η ταραχή που δημιουργεί η τοκογλυφία, οι εικόνες που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον τοκογλύφο και την τοκογλυφία, και για τον ουράνιο τόκο. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να παρουσιάσω την εισαγωγή της Brenda Ihssen, το συμπέρασμα της πρώτης μελέτης της, και ένα βασικό απόσπασμα από το κεντρικό θέμα. Και το θεωρώ αυτό καλό, γιατί είναι γεννημένη, μεγαλωμένη και διδάσκει σε Πανεπιστήμιο στην Αμερική όπου η εκμετάλλευση του χρήματος είναι μια ολόκληρη επιστήμη. Θυμηθείτε όλη την ιστορία των ομολόγων και μάλιστα των δομημένων ομολόγων.

Στην εισαγωγή της γράφει: «Αποτελεί αναμφισβήτητη διαπίστωση ότι η συζήτηση για τις ηθικές επιπτώσεις του τόκου ή της τοκογλυφίας δεν προκαλεί πια το ενδιαφέρον του μέσου πολίτη. Ο τόκος θεωρείται όχι πρόβλημα αλλά κανονικό στοιχείο της ζωής. «Είμαστε ευτυχείς να πληρώνουμε 4% αρκεί να μπορούμε να αγοράσουμε τα μαξιλάρια των διακοπών τα οποία μας λένε οι ειδικοί του μάρκετινγκ ότι τα έχουμε ανάγκη». «Δυστυχώς, εκατομμύρια άνθρωποι στον πλανήτη υποφέρουν στα χέρια άλλων που ευχαρίστως τους διατηρούν στη φτώχεια μέσω υπερβολικών και εξοντωτικών επιτοκίων».

Στην τάξη μου, οι φοιτητές αναρωτιούνται ποιο είναι το πρόβλημα αν κάποιοι δανείζονται και αποπληρώνουν με τόκο, εφόσον είναι ενήλικες και γνωρίζουν τι κάνουν. Πιστεύω ότι το πρόβλημα είναι ότι στον 21ο αιώνα υπάρχει θλιβερή φτώχεια, πείνα, άστεγοι και θάνατοι για τους οφειλέτες και τις οικογένειές τους. Επίσης το πρόβλημα είναι η σωτηρία του τοκογλύφου, του οποίου οι πράξεις τον αποκόβουν από τη θέα του Θεού.

Στην αρχαιότητα ο τόκος σε δάνεια καταδικαζόταν στην εβραϊκή κοινωνία, ενώ ήταν κανονικό μέρος των συναλλαγών στο ελληνικό και ρωμαϊκό σύστημα (αν και στο ελληνικό σύστημα δεν είχε γίνει καθολικά αποδεκτός). Έτσι, παρ' ό,τι καταδικαζόταν από τον Πλάτωνα (που τον θεωρούσε «χυδαίο») και τον Αριστοτέλη (που τον θεωρούσε «παρά φύση»), ο τόκος θεωρούταν δίκαιη αποζημίωση για το χρόνο και το ρίσκο που αναλάμβανε ο δανειστής. Καθώς ο δανειστής δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει τα χρήματα που έχει δανείσει, ο τόκος αποτελεί «ευγνωμοσύνη» για το χρόνο που χρειάζεται να επιστραφούν. Το ρίσκο σχετίζεται με το ότι ο δανειστής μπορεί να μη λάβει ποτέ πίσω τα χρήματά του, συνεπώς όσο μεγαλύτερος ήταν αυτός ο κίνδυνος τόσο μεγαλύτερο το επιτόκιο.

Ωστόσο για την ελληνική πατρολογία, ο χρόνος και το ρίσκο δε μετρούσαν. Οποιαδήποτε εγγύηση για χρήματα που δανείστηκαν ήταν ασυνείδητη, οποιοδήποτε ποσοστό πάνω από το κεφάλαιο δανεισμού αποτελούσε τοκογλυφία. Ακόμη και ένα τοις εκατό επιθυμία για κέρδος έβαζε σε κίνδυνο τη σωτηρία».

Σε ένα σημείο του κειμένου της κάνει λόγο για το κατά πόσον η διδασκαλία των Πατέρων της Εκκλησίας εναντίον της τοκογλυφίας έχει σχέση με την πραγματικότητα. Γράφει: «Τα αποσπάσματα που δείχνουν ότι οι θεολόγοι μας απευθύνονται σε γνωστούς ανθρώπους της κοινότητάς τους μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι αναφέρονται σε ένα πρόβλημα το οποίο έχει μεγάλη σχέση με την πραγματικότητα γύρω τους. Σε ό,τι αφορά στην εποχή μας, ομολογώ ότι πιστεύω πως εξακολουθούν να έχουν σχέση με την πραγματικότητα για τον εξής λόγο: κάθε κοινότητα εξακολουθεί να περιλαμβάνει ανθρώπους που είναι διατεθειμένοι να κερδίσουν σε βάρος άλλων. Επομένως πιστεύω ότι μπορούμε να μάθουμε από αυτούς τους συγγραφείς τι είχαν να πουν για τα αποτελέσματα της απληστίας σε μια κοινότητα. Τα γραπτά τους επίσης αποτελούν αντανάκλαση του ασκητικού ιδεώδους των θεολόγων για τους οποίους η κύρια σπουδαιότητα του κειμένου ήταν η εξαγωγή ηθικού νοήματος για εφαρμογή στις τρέχουσες καταστάσεις.

Τελικά όλοι αυτοί οι θεολόγοι πιστεύουν ότι το χρήμα –είτε κάποιος το έχει είτε δεν το έχει, είτε το δανείζει είτε το χαρίζει– αποτελεί εμπόδιο για μια αποτελεσματική σχέση με το Θεό». Στο συμπέρασμα γράφει: «Η αρετή της προσφοράς είναι μια διαρκής πορεία που ποτέ δεν τελειούται. Σύμφωνα με τους θεολόγους μας, αυτός που δίνει, αντί να δανείζει, απομακρύνει εμπόδια που δημιούργησε η αμαρτία, εμπόδια τα οποία δεν αφήνουν τους ανθρώπους να έχουν υγιείς και διατηρήσιμες σχέσεις μεταξύ τους. Η αληθινή αγάπη επιθυμεί να μοιράζεται το δικό της, ενώ η αληθινή απληστία επιθυμεί μόνο το συμφέρον της. Η τοκογλυφία αντιπροσωπεύει το ακριβώς αντίθετο της αγάπης, και μάλιστα με αγαθό προσωπείο. Ο συμφεροντολόγος χριστιανός μπορεί να ισχυρισθεί ότι έχει δικαίωμα να δανείζει με τόκο –ακόμη και με υπερβολικό επιτόκιο– πρώτον διότι είναι νόμιμο και δεύτερον διότι ο Χριστιανός έχει ελευθερωθεί από το νόμο. Την ίδια λογική συνάντησε ο Απ. Παύλος στην Κόρινθο και η απάντησή του ήταν ότι «όλα είναι νόμιμα για μένα, αλλά δεν είναι όλα ωφέλιμα».

Συνοψίζοντας, οι Έλληνες Πατέρες θεωρούσαν ότι η τοκογλυφία δεν είναι ηθική, δεν μπορεί να δικαιολογηθεί και δεν είναι ωφέλιμη. Οι σύγχρονοι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι το ζήτημα της τοκογλυφίας είναι νεκρό στην εποχή μας, καθώς όλοι δανείζουν και δανείζονται με τόκο χωρίς να το σκέφτονται. Ελπίζω ότι κάνουν λάθος. Η παγκόσμια φτώχεια είναι τόση που το θέμα της τοκογλυφίας είναι σημαντικό για όσους στοχάζονται για τις σύγχρονες οικονομικές καταστροφές τις οποίες επιφέρουν άδικες πρακτικές δανεισμού. Ο καπιταλισμός έχει υποτάξει για πάρα πολύ καιρό την ανθρώπινη υγεία και αξιοπρέπεια σε οικονομικούς σκοπούς. Ως θέμα η τοκογλυφία δεν προκαλεί συζητήσεις, αλλά η φτώχεια προκαλεί. Θα πρέπει να προβληματιζόμαστε βαθιά για το κακό που επιφέρει ο τόκος των δανείων σε άτομα, σε οικογένειες, σε κοινότητες, σε χώρες και –αν οι θεολόγοι μας έχουν δίκαιο– ακόμη και στη σωτηρία του καθενός μας».

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Ιερόθεος, Βλ. (2008). Τόκοι, τοκογλυφία, καπιταλισμός. Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου 2015 από http://www.oodegr.co/oode/koinwnia/oikonomika/kapital_tokoi1.htm

Απλός τόκος

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Αρχικό κεφάλαιο ή παρούσα αξία (συμβολισμός Κο ή PV)

- Τελικό κεφάλαιο ή μελλοντική αξία (συμβολισμός Κn ή FV)

- Επιτόκιο (συμβολισμός i ή r)

- Χρόνος (συμβολισμός n Ακέραιες περιόδους, μ/ρ κλάσμα χρονικών περιόδων)

ΣΤΟΧΟΙ

- Κατανόηση και χρησιμοποίηση του τύπου υπολογισμού τελικού κεφαλαίου με απλό τόκο.

- Διάκριση της χρονικής περιόδου και εφαρμογή του τύπου.

- Μεταβολή επιτοκίου ή χρόνου, ώστε να μπορεί να εφαρμοσθεί ο τύπος υπολογισμού, όταν το επιτόκιο ή ο χρόνος εκφράζονται σε διαφορετική χρονική περίοδο από την περίοδο του επιτοκίου.

- Εύρεση παρούσας αξίας, όταν γνωρίζουμε τη μελλοντική αξία κεφαλαίου.

- Εύρεση χρόνου ή επιτοκίου, για να φθάσουμε στο τελικό κεφάλαιο που επιθυμούμε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Διαθέτουμε κεφάλαιο 2.000 ευρώ και θέλουμε να αγοράσουμε ένα μηχάνημα αξίας 3.000 ευρώ. Θα πρέπει να δανειστούμε 1.000 ευρώ με επιτόκιο 6% ή να καταθέσουμε το κεφάλαιο μας σε αποταμιευτικό λογαριασμό με επιτόκιο 4% και να αγοράσουμε το μηχάνημα σε ένα χρόνο, όταν η τιμή του θα είναι 2.500 ευρώ;

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την αξία χρήματος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές;

1 Ιστορία τόκου

Οι πρώτες καταγραφές πιστώσεων χρονολογούνται πίσω στο 3.000 π.Χ., στον πολιτισμό των Σουμέριων, ενώ και σε άλλους πολιτισμούς είναι φανερή η ύπαρξη δανείων, πριν τη δημιουργία νομίσματος. Συγκεκριμένα αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι οι συναλλαγές γίνονταν με ανταλλαγές αγαθών ή με πολύτιμα μέταλλα. (Σόρμας & Σαριαννίδης, 2014).

Στην Παλαιά Διαθήκη, στο Δευτερονόμιο κεφάλαιο 23, στίχους 20 και 21, διαβάζουμε τα ακόλουθα «Οὐκ ἐκτοκιεῖς τῷ ἀδελφῷ σου τόκον ἀργυρίου καὶ τόκον βρωμάτων καὶ τόκον παντὸς πράγματος, οὗ ἐὰν ἐκδανείσῃς. τῷ ἀλλοτρίῳ ἐκτοκιεῖς, τῷ δὲ ἀδελφῷ σου οὐκ ἐκτοκιεῖς, ἵνα εὐλογήσῃ σε Κύριος ὁ Θεός σου ἐν πᾶσι τοῖς ἔργοις σου ἐπὶ τῆς γῆς, εἰς ἣν εἰσπορεύῃ ἐκεῖ κληρονομῆσαι αὐτήν.» (http://www.myriobiblos.gr/bible/ot/chapter.asp?book=5&page=23).

Ο τόκος, κατά τον Μεσαίωνα, θεωρούνταν από τη Χριστιανική Εκκλησία ως κάτι γενικά και συνολικά ανήθικο, ανεπίτρεπτο και αμαρτωλό. Ο Εβραϊκός νόμος επίσης απαγόρευε τη χορήγηση δανείων με τόκο, αλλά αυτό μπορούσε να ερμηνευτεί ως απαγόρευση τόκου σε δάνεια προς τους ομοεθνείς, και δεν απαγόρευε τον τόκο σε δάνεια προς χριστιανούς. Ωστόσο, με το πέρασμα του χρόνου, οι πεποιθήσεις αυτές ατόνησαν και σήμερα ο δανεισμός αποτελεί συνήθη πρακτική σε πολιτισμούς με χριστιανισμό ή ιουδαϊσμό. Ωστόσο στα ισλαμικά Κράτη, ακόμα και σήμερα, η τοκοφορία των κεφαλαίων αντίκειται στους Νόμους και τη Θρησκεία, οδηγώντας σε ένα ειδικό καθεστώς λειτουργίας των τραπεζών. (Τόκος Wiki, 2015).

Ο ίδιος ο Χριστός στην γνωστή παραβολή των ταλάντων αναφέρεται στον τόκο, χωρίς να φαίνεται ότι τον καταδικάζει. Σε άλλη ομιλία του αναφέρει: «Καί ἐὰν δανείζητε παρ' ών ελπίζετε απολαβεῖν, ποία ὑμῖν χάρις ἐστί; καί γάρ οί ἁμαρτωλοί ἁμαρτωλοῖς δανείζουσιν ίνα άπολάβωσι τά ίσα.».

2 Ορισμοί – έννοιες

Ας δούμε, στη συνέχεια, πώς ορίζουμε τις έννοιες που εμπλέκονται στον υπολογισμό του τόκου.

2.1 Χρήμα

Το χρήμα έχει δύο ερμηνείες. Αρχικά ορίζεται ως ανταλλακτικό μέσο και μέτρο αξίας αγαθών και υπηρεσιών. Το ονομάζουμε «ανταλλακτικό μέσο», γιατί το χρησιμοποιούμε, προκειμένου να πάρουμε στην κατοχή μας διάφορα αγαθά ή να εξασφαλίσουμε υπηρεσίες. Το ονομάζουμε «μέτρο αξίας», γιατί μετράμε την αξία κάθε αγαθού ή υπηρεσίας ανάλογα με το ποσό χρημάτων που πρέπει να δώσουμε, για να πάρουμε το αγαθό ή την υπηρεσία.

Υπάρχει και μια ακόμη λειτουργία του χρήματος. Αποτελεί μέσο διαφύλαξης αγοραστικής δύναμης. Οποιαδήποτε στιγμή το χρειαστούμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα το χρήμα, αφού είναι άμεσα ρευστοποιήσιμο. Το μειονέκτημά του είναι ότι σε περιόδους πληθωρισμού χάνει την αξία του, δηλαδή όταν οι τιμές των αγαθών ανεβαίνουν, μπορούμε να αγοράσουμε λιγότερα αγαθά. (Χατζηνικολάου, 2011)

Θα πρέπει να σημειωθεί πως έχει ασκηθεί κριτική στις μέρες σχετικά με την επιδίωξη του χρήματος. Συγκεκριμένα αναφέρεται ότι:

«Το χρήμα δεν αντιμετωπίζεται από τους κερδοσκόπους ως μέσο παραγωγής αγαθών ή προσφοράς υπηρεσιών, άλλα θεωρείται ως αγαθό καθεαυτό. Γίνεται, δηλαδή, αυτοσκοπός, και συσσωρεύεται, χωρίς καν να εισάγεται στην πραγματική οικονομία. Δεδομένου μάλιστα ότι αυτό «πλαστικοποιείται» και «εξαϋλώνεται» μπορεί να συνάγεται ευκολότερα και να μετακινείται απεριόριστα. Το νεκρό αυτό χρήμα παράγει χρήματα, όπως η εργασία, και μάλιστα πολύ γρηγορότερα, πολύ ευκολότερα και πολύ περισσότερα από αυτήν. Έτσι διαμορφώνεται μια τερατώδης άκαρπη οικονομία, που φαλκιδεύει την πραγματική οικονομία, δημιουργεί στρεβλώσεις, παραμορφώνει την φυσική της πορεία και την κατευθύνει σε αδιέξοδο, ενώ ταυτόχρονα υποβαθμίζει την εργασία και ευτελίζει τους εργαζόμενους.» (Μαντζαρίδης, 2014)

Περισσότερα για θεολογική θεώρηση του χρήματος και τόκου στο κείμενο σε παράθεση της εισαγωγής. (http://www.oodegr.co/oode/koinwnia/oikonomika/kapital_tokoi1.htm)

2.2 Κεφάλαιο

Το χρήμα που έχει παραγωγική αξία, όταν δανειστεί ή αποταμιευτεί, ονομάζεται «κεφάλαιο».

«Παραγωγική αξία» σημαίνει δυνατότητα να παράγει νέο κεφάλαιο, είτε γιατί παράγει νέα αγαθά ή νέα τεχνολογία ή νέα γνώση, τα οποία μπορούν να παράγουν νέα αγαθά. Κεφάλαιο, δηλαδή, ονομάζεται κάθε οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων και έχει την ικανότητα να αυξάνεται. Κατά συνέπεια, τα χρηματικά ποσά που διατηρούμε στο σπίτι μας για τις τρέχουσες ανάγκες μας δεν είναι κεφάλαια από οικονομικής απόψεως. Για τον ίδιο λόγο χρήμα που «κρύβεται» σε συρτάρι ή μπαούλο για «ώρα ανάγκης» δεν είναι κεφάλαιο, αφού δεν έχει παραγωγική αξία, αλλά έχει μόνο ανταλλακτική αξία.

2.3 Τόκος (Interest)

Ονομάζεται το ποσό που παράγει ένα κεφάλαιο σε ορισμένο χρόνο. Με άλλη ερμηνεία, τόκος είναι η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στο δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποίησης εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του.

2.4 Επιτόκιο (Interest Rate)

Ο τόκος μιας μονάδας χρήματος στη μονάδα χρόνου. Εκφράζεται σε ποσοστό. Το επιτόκιο μάς βοηθάει στον υπολογισμό του τόκου αλλά και στη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών προσφορών τόκου από τις τράπεζες. Συμβολίζεται με i ή με r. Πρέπει να προσέχουμε πολύ σε ποια μονάδα χρόνου αναφέρεται. Συνήθως αναφέρεται ως ο τόκος μιας μονάδας χρήματος σε ένα έτος, αλλά κάποιες φορές μπορεί να έχουμε μηνιαίο ή εξαμηνιαίο επιτόκιο.

2.5 Χρόνος

Στα οικονομικά χρόνος σημαίνει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα. Συμβολίζεται με n, όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα, με μ, όταν εκφράζεται σε μήνες και με ν, όταν εκφράζεται σε ημέρες.

Βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια το πολύ ένα έτος.

Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια μεγαλύτερη από πέντε έτη.

Μεσοπρόθεσμες πράξεις ονομάζονται οι οικονομικές πράξεις με χρονική διάρκεια από 1 έως 5 έτη.

Η αρχή οικονομικής ισοδυναμίας έχει ως εξής:

«Άνισα χρηματικά ποσά, μπορεί να είναι οικονομικά ισοδύναμα».

Αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αλλά οικονομικά είναι το ίδιο ισοδύναμο ποσό, αφού κατά τη διάρκεια του χρόνου, οποιοδήποτε κεφάλαιο αυξάνει με τον τόκο του. Είναι η γνωστή σε όλους μας ρήση: «Ο χρόνος είναι χρήμα».

Κεφαλαιοποίηση του τόκου, ονομάζεται η πράξη ενσωμάτωσης του τόκου στο κεφάλαιο.

Αυτή μπορεί να γίνει είτε μόνο μια φορά στο τέλος του χρονικού διαστήματος, είτε πολλές φορές σε μικρότερα χρονικά διαστήματα είτε συνεχώς στην ιδανική περίπτωση με άμεση ενσωμάτωση τόκων.

3 Διακρίσεις τόκου

Ο τόκος διακρίνεται σε απλό τόκο και σύνθετο τόκο, ανάλογα με το αν τον εισπράττουμε μόλις σχηματισθεί ή όχι.

3.1 Απλός τόκος

Το αρχικό κεφάλαιο παραμένει ίδιο και έχουμε κεφαλαιοποίηση του τόκου μία φορά στο τέλος της περιόδου τοκισμού.

3.2 Σύνθετος τόκος

Το αρχικό κεφάλαιο μεταβάλλεται αυξανόμενο με τον τόκο κάθε χρονικής περιόδου. Ο τόκος , δηλαδή, ενσωματώνεται στο κεφάλαιο και επανατοκίζεται. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται κεφαλαιοποίηση, και συμβαίνει πολλές φορές σε μικρά χρονικά διαστήματα.

4 Υπολογισμός απλού τόκου

4.1 Συμβολισμοί

Το αρχικό κεφάλαιο στα επόμενα το συμβολίζουμε με Ko ή PV.

Το τελικό κεφάλαιο στα επόμενα το συμβολίζουμε με Kn ή FV.

Ο τόκος συμβολίζεται με I.

Το επιτόκιο συμβολίζεται με i ή r.

Ο χρόνος συμβολίζεται με -n, όταν πρόκειται να συμβολίζουμε ακέραιες χρονικές περιόδους, ενώ για κλάσμα χρονικών περιόδων συμβολίζουμε τους μήνες με –μ και τις μέρες με –ν.

Ο απλός τόκος εξαρτάται από το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο. Η εξάρτηση αυτή είναι ανάλογη και έτσι ο τύπος για τον υπολογισμό απλού τόκου είναι:

$I=Ko*n*i$

Όπου I είναι ο τόκος του κεφαλαίου Ko και n είναι οι ακέραιες χρονικές περίοδοι (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα κλπ.) και i το επιτόκιο για μία χρονική περίοδο αντίστοιχα με την μέτρηση του χρόνου.

4.2 Σημεία προσοχής

Η περίοδος μέτρησης του επιτοκίου θα πρέπει να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου. Με n συμβολίζονται οι ακέραιες χρονικές περίοδοι και το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε μία από τις n χρονικές περιόδους (έτος, ή εξάμηνο ή μήνας…), γράφεται σε δεκαδική μορφή (όχι σε %). Δηλαδή, αν ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο με επιτόκιο εξαμήνου 2%, αν έχουμε 3 έτη, θα πρέπει στον τύπο να γράψουμε το επιτόκιο 0,02 και ο χρόνος θα είναι 6 εξάμηνα (3 έτη με 2 εξάμηνα ανά έτος).

4.3 Μέτρηση της χρονικής περιόδου

Έστω i το ετήσιο επιτόκιο. Πολλές φορές ο χρόνος δεν είναι ακέραιος αριθμός ετών, αλλά περιλαμβάνει και μήνες ή και μέρες. Στην περίπτωση αυτή μετατρέπουμε όλο το χρόνο σε μήνες, ή όλα τα έτη και τους μήνες σε μέρες.

Αν το κεφάλαιο τοκίζεται για μ μήνες, ο τύπος του τόκου θα είναι:

I=Ko*μ*i /12

Αν το κεφάλαιο τοκίζεται για ν ημέρες, ο τύπος του τόκου θα είναι

I=Ko*ν*i /365 για πολιτικό έτος:

και

I=Ko*ν*i /360 για μεικτό ή εμπορικό έτος

Σε όλους τους παραπάνω τύπους το επιτόκιο αντιστοιχεί σε έτος. Αν αντιστοιχεί σε εξάμηνο, θα πρέπει οι παρανομαστές να αλλάξουν σε 6, για τους μήνες, και σε 180, για τις μέρες.

4.4 Υπολογισμός τοκοφόρων ημερών

Για να υπολογίσουμε τους τελευταίους τύπους, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες. Για τον υπολογισμό τους ισχύουν τα εξής:

α) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 για κάθε μήνα και 28 ή 29 για το Φεβρουάριο) και το έτος με 365 (ή 366 για δίσεκτο έτος) ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το πολιτικό έτος.

Χρησιμοποιείται από τις τράπεζες και τα ταμιευτήρια.

β) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 για κάθε μήνα και 28 ή 29 για το Φεβρουάριο) και το έτος με 360 ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το μεικτό έτος.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και το έτος 360 ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το εμπορικό έτος.

Βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις

Στο ταχυδρομικό ταμιευτήριο και στα ταμιευτήρια των τραπεζών για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών ισχύουν τα εξής:

α) τα χρήματα που καταθέτουν οι πελάτες φέρνουν τόκο από την επόμενη ημέρα και η ημέρα της αναλήψεως δεν θεωρείται τοκοφόρος,

β) τα χρήματα που δανείζονται οι διάφοροι πιστωτικοί οργανισμοί παράγουν τόκο από την ημέρα που χορηγούνται τα χρήματα στους πελάτες.

4.5 Τελικό κεφάλαιο ή τελική αξία ενός κεφαλαίου (Kn)

Τελικό κεφάλαιο ή τελική αξία ενός κεφαλαίου (συμβολίζεται με Kn) είναι το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου (K_0) συν τον τόκο (Ι) που παράχθηκε στο τέλος της χρονικής περιόδου, αν το κεφάλαιο τοκίζεται για χρόνο n.

Η τελική αξία K_n του κεφαλαίου K_0, αντικαθιστώντας με τον τύπο του τόκου I=Ko*n*i, δίνεται από τον τύπο:

$K_n = K_0 + I = K_0 + K_0\, n\, i$

$K_n = K_0\, (1+n\, i)$

4.6 Άσκηση-παράδειγμα

Πόσος θα είναι ο τόκος κεφαλαίου 10.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%;

Λύση
Το αρχικό κεφάλαιο είναι Κο=10.000
Το επιτόκιο γράφεται i=3%=0.03
Ο χρόνος είναι n=5 έτη
Ο τόκος θα υπολογισθεί με τον τύπο: I=Ko*n*i =10.000* 5*0,03=1.500 ευρώ

4.7 Άσκηση-παράδειγμα

Πόσος θα είναι ο τόκος κεφαλαίου 10.000 ευρώ το οποίο τοκίζεται για 5 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%;

Λύση
Το αρχικό κεφάλαιο είναι Κο=10.000
Το επιτόκιο γράφεται i=3%=0,03
Ο χρόνος είναι n=5 έτη =10 εξάμηνα
Ο τόκος θα υπολογισθεί με τον τύπο: I=Ko*n*i =10.000*10*0,03=3.000 ευρώ.

Παρατηρούμε ότι στην άσκηση αυτή για εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% ο τόκος που προκύπτει είναι διπλάσιος από τον τόκο που προέκυψε στην προηγούμενη άσκηση, όπου το επιτόκιο ήταν 3% το έτος.

4.8 Ερώτηση

Μετά από δύο έτη, ο τόκος 100 ευρώ κάθε εξάμηνο θα είναι συμφερότερος από τον τόκο κάθε έτος;

Υποθέστε ότι το επιτόκιο είναι 2,5% κάθε εξάμηνο και 5% κάθε έτος.

Απάντηση

Τα δύο έτη αντιστοιχούν σε 4 εξάμηνα και ο συνολικός τόκος θα είναι Ιεξαμηνα =100*4*0,025=10

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε έτη αντί για εξάμηνα θα έχουμε Ιέτη= 100*2*0,05=10

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει διαφορά στο απλό τόκο σε έτος ή σε πιο σύντομες χρονικές περιόδους, αν το επιτόκιο είναι ανάλογο με την χρονική περίοδο.

4.9 Άσκηση-παράδειγμα

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 3.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με επιτόκιο 4% το τρίμηνο για 3 έτη και 6 μήνες. Ποια είναι η τελική αξία του κεφαλαίου;

Λύση

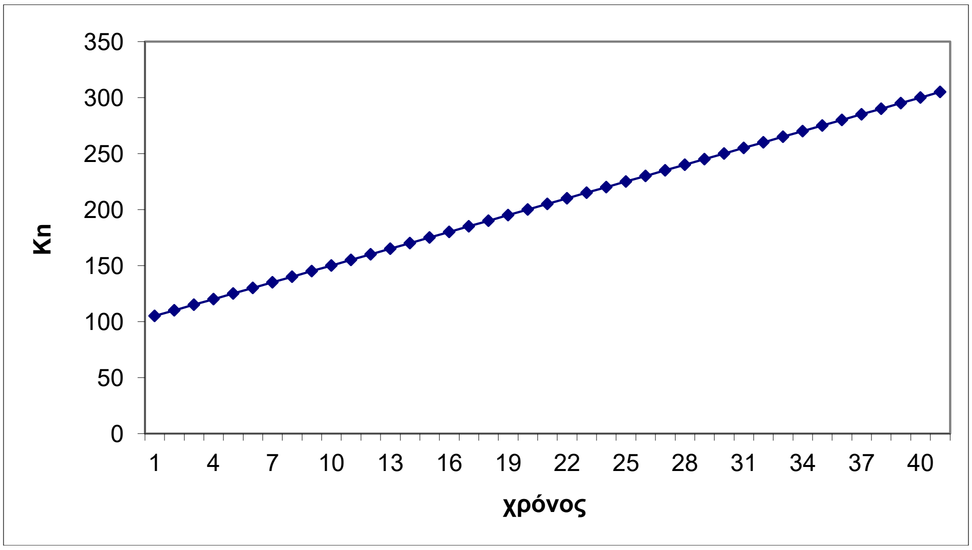
Αφού το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα. Τα 3 έτη και 6 μήνες είναι 3*4+2= 14 τρίμηνα.

Επομένως ο τόκος του κεφαλαίου 3.000 ευρώ θα είναι
I=3.000*14*0,04=1.680 ευρώ.
Η τελική αξία του κεφαλαίου θα είναι 3.000+1.680=4.680 ευρώ.

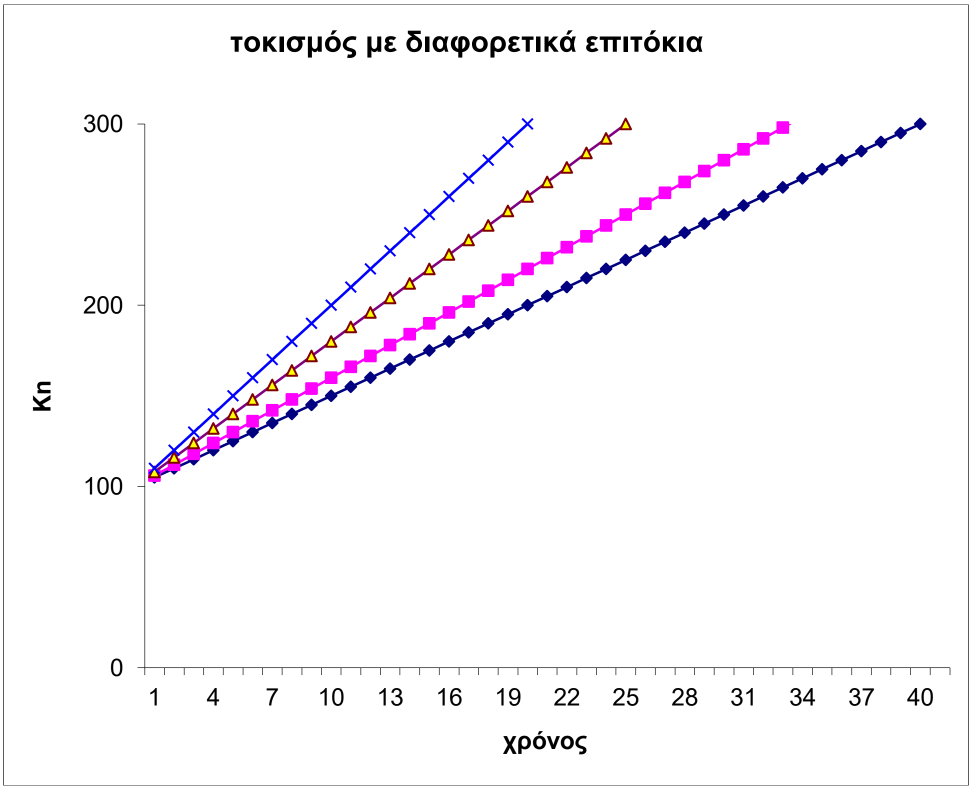
5. Γραφική παράσταση

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά τη μεταβολή του κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Όσο μετακινούμαστε δεξιά στη γραμμή του χρόνου, τόσο το κεφάλαιο αυξάνει προς τα επάνω στο σχήμα 2.1, με σταθερό ρυθμό. Ο ρυθμός αυτός αύξησης εξαρτάται από το επιτόκιο ανατοκισμού, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 2.2, όπου παρουσιάζεται η αύξηση του ίδιου κεφαλαίου, αλλά με διαφορετικό κάθε φορά επιτόκιο.



Σχήμα 2.1 *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο*



Σχήμα 2.2 *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο με διαφορετικά επιτόκια*

6 Εύρεση αρχικού κεφαλαίου, χρόνου, επιτοκίου

Κάποιες φορές γνωρίζουμε το τελικό κεφάλαιο που δημιουργείται με τοκισμό, και ζητάμε να υπολογίσουμε το αρχικό κεφάλαιο που απαιτείται, ώστε να δημιουργηθεί το συγκεκριμένο τελικό κεφάλαιο. Άλλες φορές πάλι έχουμε ένα αρχικό κεφάλαιο, θέλουμε να δημιουργηθεί συγκεκριμένο τελικό κεφάλαιο και επιθυμούμε να βρούμε το χρόνο ή το επιτόκιο που χρειάζεται, για να γίνει αυτό. Σε τέτοιου είδους προβλήματα χρησιμοποιούμε τον τύπο του απλού τόκου, δημιουργούμε μια εξίσωση ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος και λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο που ζητάμε.

6.1 Εύρεση αρχικού κεφαλαίου

Όπως είδαμε νωρίτερα, το τελικό κεφάλαιο Kn προκύπτει από το αρχικό κεφάλαιο K_0 με χρήση του τύπου

$Kn = K_0 (1+n\, i)$

Αν δεν γνωρίζουμε το αρχικό κεφάλαιο, αλλά γνωρίζουμε το τελικό κεφάλαιο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο αυτό τύπο ως εξής:

$Kn = K_0 (1+n\, i) \Leftrightarrow K_0 = Kn/(1+n\, i)$

6.2 Εύρεση χρόνου, επιτοκίου

Αν δεν γνωρίζουμε το χρόνο ή το επιτόκιο, αλλά γνωρίζουμε το αρχικό και τελικό κεφάλαιο, ο ίδιος τύπος μπορεί να γραφεί, λύνοντας ως προς n i ως εξής:

$n\, i = Kn / K_0 - 1$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα που γνωρίζουμε στον παραπάνω τύπο, λύνουμε την εξίσωση που δημιουργείται και βρίσκουμε αντίστοιχα τον άγνωστο χρόνο ή το άγνωστο επιτόκιο. Ο τελευταίος αυτός τύπος χρησιμοποιείται ιδιαίτερα σε προβλήματα όπως: σε πόσο χρόνο αρχικό κεφάλαιο K_0 θα γίνει ίσο με τελικό κεφάλαιο Kn. Παρόμοια σε προβλήματα όπως: με ποιο επιτόκιο θα πρέπει να τοκίσουμε αρχικό κεφάλαιο K_0, ώστε σε χρόνο n να έχουμε τελικό κεφάλαιο Kn.

6.3 Άσκηση παράδειγμα

Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο τοκίζεται κεφάλαιο 3.000 ευρώ, ώστε σε 6 μήνες να γίνει 3.600 ευρώ.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $K_0 = Kn/(1+n\, i)$, ο οποίος μετασχηματίζεται ως εξής: $n\, i = Kn / K_0 - 1$. Αντικαθιστώντας έχουμε $6^* i = 3.600 / 3.000 - 1 \Leftrightarrow 6^* i = 1{,}2 - 1 \Leftrightarrow 6^* i = 0{,}2 \Leftrightarrow i = 0{,}2/6 = 0{,}033$

Επομένως το ζητούμενο επιτόκιο είναι 0,0333=3,33% και αντιστοιχεί σε μηνιαίο επιτόκιο, αφού ο χρόνος μετρήθηκε σε μήνες.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε εφαρμόζω τον τύπο του τόκου.
- Πώς αλλάζει ο τύπος, αν ο χρόνος μετριέται σε μήνες ή σε μέρες.
- Τον τρόπο μέτρησης του χρόνου και εφαρμογής του τύπου στην περίπτωση κλασματικού αριθμού χρονικών περιόδων.
- Πώς βρίσκω το αρχικό κεφάλαιο, όταν γνωρίζω το τελικό κεφάλαιο.
- Πώς βρίσκω το χρόνο ή το επιτόκιο, όταν γνωρίζω αρχικό και τελικό κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Μαντζαρίδης, Γ. (2014). Ο τόκος κατά τους Πατέρες της Εκκλησίας. *Σύναξη 120*, 29-40.

Σόρμας, Αστ. & Σαριαννίδης, Ν. (2014). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Αυτοέκδοση.

Τόκος Wiki (χ.χ.). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από το Wiki: http://wikipedia.org/wiki/Τόκος

Χατζηνικολάου, Δ. (2011). *Εισαγωγή στη Μακροοικονομική*. Ιωάννινα.

Ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 5.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται με απλό τόκο για 3 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.

Kn =K0 + K0*n*i =5.000+5.000*3*0,04= 5.000+600 = 5.600 ευρώ

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 5.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται για 3 έτη με επιτόκιο τριμήνου 1%.

Απάντηση/Λύση

Αφού το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα. Τα 3 έτη είναι 3*4= 12 τρίμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχικό αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.

Kn =K0 + K0*n*i =5.000+5.000*12*0,01= 5.000+600 = 5.600 ευρώ

Άσκηση 3

Κεφάλαιο 4.500 ευρώ τοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από 4 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
γ) Αν το εξαμηνιαίο επιτόκιο ήταν 2,5%, πόση θα ήταν η διαφορά στο κεφάλαιο μετά τα 6 έτη;

Απάντηση/Λύση

α) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 4 έτη είναι 4*2=8 εξάμηνα..
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.

Kn =K0 + K0*n*i =4.500+4.500*8*0,02= 4.500+720 = 5.220 ευρώ

β) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 6 έτη είναι 6*2=12 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.

Kn =K0 + K0*n*i =4.500+4.500*12*0,02= 4.500+1080 = 5.580 ευρώ

γ) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 6 έτη είναι 6*2=12 εξάμηνα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0*n*i =4.500+4.500*12*0,025= 4.500+1350 = 5.850 ευρώ
Η διαφορά από το κεφάλαιο που σχηματίστηκε στο ερώτημα β είναι 5.850-5.580=270 ευρώ

Άσκηση 4

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο σήμερα, πληρώνοντας 13.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2% και να αγοράσουμε το αυτοκίνητο σε δύο χρόνια, όταν θα στοιχίζει 14.000 ευρώ; (υπολογίστε την τελική αξία του κεφαλαίου μετά τα δύο έτη και συγκρίνετε με τις 14.000 ευρώ).

Απάντηση/Λύση

Υπολογίζουμε την τελική αξία του κεφαλαίου μετά τα δύο έτη. Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 2 έτη είναι 2*2=4 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0*n* i =13.000+13.000*4*0,02= 13.000+1040 = 14.040 ευρώ.
Μετά τα δύο χρόνια, θα μπορέσουμε να αγοράσουμε το αυτοκίνητο το οποίο θα στοιχίζει 14.000 ευρώ, και θα μας περισσέψουν και 40 ευρώ για καύσιμα!

Άσκηση 5

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο τοκίζεται για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%, αν ο τόκος υπολογίζεται κάθε τρίμηνο.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε τρίμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το ετήσιο επιτόκιο σε τριμηνιαίο επιτόκιο. Τα 8 έτη είναι 8*4= 32 τρίμηνα. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%:4=1,5%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχικό αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0* n* i =3.000+3.000*32*0,015= 3.000+1.440 = 4.440 ευρώ
Σημείωση: Εεπειδή πρόκειται για απλό τόκο και όχι για ανατοκισμό, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο με ετήσιο επιτόκιο και μέτρηση του χρόνου σε έτη, θα βρούμε ακριβώς το ίδιο τελικό κεφάλαιο, αφού:
Kn =K0 + K0 n i =3.000+3.000*8*0,06= 3.000+1.440 = 4.440 ευρώ.

Άσκηση 6

Κεφάλαιο 15.000 ευρώ κατατίθεται σε τράπεζα και τοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Κατόπιν το επιτόκιο αλλάζει σε 2,5% το εξάμηνο και η κατάθεση διαρκεί ακόμη 5 έτη με τοκισμό ανά εξάμηνο.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 11 έτη;
γ) Αν το ίδιο κεφάλαιο κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο τοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για 11 έτη, πόσο θα γίνει το τελικό κεφάλαιο;

Απάντηση/Λύση

α) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 6 έτη είναι 6*2=12 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0* n* i =15.000+15.000*12*0,02= 15.000+3600 =18.600 ευρώ

β) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 5 έτη είναι 5*2=10 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία (μετά τα 6 έτη είναι 18.600) προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.

Kn =K0 + K0 n i =18.600+18.600*10*0,025= 18.600+4.650 = 23.250 ευρώ

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0 n i =15.000+15.000*11*0,03= 15.000+4.950 = 19.950 ευρώ
Η διαφορά από το κεφάλαιο που σχηματίστηκε στο ερώτημα β είναι 23.250-19.950=3.300 ευρώ

Άσκηση 7

Υπάλληλος δανείστηκε στις 1-2-2005 από το ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων ποσό 7000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 4%. Ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει στις 1-2-2014;

Απάντηση/Λύση

Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο. Από 1-2-2005 μέχρι 1-2-2014 μεσολαβούν 9 έτη και είναι 9*2=18 εξάμηνα.. Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 4%:2=2%
Για να βρούμε το ποσό του δανείου που πρέπει να επιστραφεί μαζί με τους τόκους, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία, προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0* n*i =7.000+7.000*18*0,02= 7.000+2.520 =9.520 ευρώ

Άσκηση 8

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα οικόπεδο σήμερα, πληρώνοντας 40.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% και να αγοράσουμε το οικόπεδο σε τρία χρόνια, που θα στοιχίζει 45.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Υπολογίζουμε την τελική αξία του διαθέσιμου κεφαλαίου 40.000 μετά τα τρία έτη. Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 3 έτη είναι 3*2=6 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0*n* i =40.000+40.000*6*0,03= 40.000+7.200 = 47.200 ευρώ.
Μετά τα τρία χρόνια, θα μπορέσουμε να αγοράσουμε το οικόπεδο το οποίο θα στοιχίζει 45.000 ευρώ και θα μας περισσέψουν και 2.200 ευρώ.

Άσκηση 9

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται κάθε έτος με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση

Μετατρέπουμε το χρόνο σε μήνες. Τα 5 έτη και 9 μήνες είναι 5*12=60 μήνες και 9=69 μήνες.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0 * i* μ /12=6.000+6.000*0,04*69/12= 6.000+1.380 =7.380 ευρώ

Άσκηση 10

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο. Τα 5 έτη και 9 μήνες είναι 5*2=10 εξάμηνα και οι 9 μήνες =1,5 εξάμηνα. Συνολικά ο χρόνος είναι 11,5 εξάμηνα. Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 4%:2=2%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0 *i*n=6.000+6.000*0,02*11,5= 6.000+1.380 =7.380 ευρώ

Άσκηση 11
Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη, 9 μήνες και 14 μέρες.

Απάντηση/Λύση
Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο. Τα 5 έτη και 9 μήνες είναι 5*2=10 εξάμηνα και οι 9 μήνες =1,5 εξάμηνα. Συνολικά ο χρόνος είναι 11,5 εξάμηνα. Επειδή όμως ο χρόνος περιλαμβάνει και 14 μέρες, μετατρέπουμε όλα τα εξάμηνα σε μέρες. 11,5 *180=2.070 μέρες. Άρα συνολικά έχουμε 2.070+14=2.084 μέρες.
Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 4%:2=2%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0 * i* n=6.000+6.000*0,02*2.084/180= 6.000+1.389,33 =7.389,33 ευρώ

Άσκηση 12
Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 5.000 ευρώ, το οποίο τοκίζεται κάθε έτος, την 1-1-2018 αν το καταθέσουμε σήμερα (27-3-2015) σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση
Υπολογίζουμε τις μέρες μεταξύ 27-3-2015 και 1-1-2018 και χρησιμοποιούμε τον τύπο του τόκου για πολιτικό έτος (365 μέρες). Οι μέρες από 1-1-15 μέχρι 1-1-18 που αντιστοιχούν σε τρία έτη είναι 3*365=1.095 μέρες. Δεν πρέπει όμως να μετρήσουμε τις 31 μέρες του Ιανουαρίου 2015, τις 28 μέρες Φεβρουαρίου 2015 και τις 27 μέρες Μαρτίου 2015 που είναι συνολικά 86 μέρες. Επομένως οι μέρες κατάθεσης είναι 1.095-86=1.009 μέρες.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K0 + K0 *i* ν/365=5.000+5.000*0,04*1009/365= 5.000+552,88 =5.552,88 ευρώ.

Προεξόφληση γραμματίων – συναλλαγματικών με απλό τόκο

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Γραμμάτιο

-Συναλλαγματική

-Μελλοντική πληρωμή

-Παρούσα αξία

-Προεξόφληση

-Εσωτερικό και εξωτερικό προεξόφλημα

-Αντικατάσταση γραμματίων

ΣΤΟΧΟΙ

-Κατανόηση και χρησιμοποίηση των γραμματίων και συναλλαγματικών.

-Διάκριση της χρονικής περιόδου λήξης υποσχετικού εγγράφου και παρούσας αξίας του.

-Εύρεση παρούσας αξίας, όταν γνωρίζουμε την ονομαστική αξία γραμματίου.

-Υπολογισμός εσωτερικού και εξωτερικού προεξοφλήματος.

-Εφαρμογή της οικονομικής ισοδυναμίας στην αντικατάσταση κεφαλαίων.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Διαθέτουμε κεφάλαιο 2.000 ευρώ και θέλουμε να αγοράσουμε ένα μηχάνημα αξίας 3.000 ευρώ. Συμφωνούμε με τον πωλητή να υπογράψουμε συναλλαγματική για το υπόλοιπο ποσό, το οποίο υπολογίζουμε να διαθέτουμε σε 6 μήνες. Τι ποσό θα πρέπει να αναγραφεί ως αξία της συναλλαγματικής, ώστε να έχουμε μια δίκαιη αγοροπωλησία;

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την ισοδύναμη αξία χρήματος σε μελλοντική χρονική στιγμή;

1 Εισαγωγή - Ορισμοί

Κάποιες φορές οι εμπορικές συναλλαγές απαιτούν πληρωμές που δεν μπορούν να γίνουν αμέσως, είτε λόγω έλλειψης ρευστού χρήματος, είτε για άλλους λόγους. Στην περίπτωση αυτή, ο αγοραστής (οφειλέτης) υπόσχεται στον πωλητή (πιστωτή) να πληρώσει την οφειλή του σε ορισμένο χρόνο στο μέλλον. Αν ο πιστωτής γνωρίζει τον οφειλέτη και του έχει εμπιστοσύνη, δέχεται την υπόσχεσή του και η αγοροπωλησία πραγματοποιείται. Όταν όμως το ποσό της συναλλαγής είναι μεγάλο, ή όταν ο πωλητής δεν γνωρίζει καλά τον αγοραστή, δεν μπορεί να στηριχθεί μόνο στην υπόσχεσή του για την πληρωμή. Από την άλλη πλευρά, αν δεν δεχθεί να πουλήσει με τον τρόπο αυτό, πιθανώς να μη βρει κανένα αγοραστή, κυρίως σε συνθήκες έλλειψης ρευστότητας στην αγορά.

Για να βοηθηθούν οι εμπορικές συναλλαγές, ο νόμος προέβλεψε νομικά έγγραφα (γραμμάτια και συναλλαγματικές) για την υπόσχεση μελλοντικής πληρωμής. Τα νομικά αυτά έγγραφα κατοχυρώνουν τον πιστωτή έναντι της αθέτησης υπόσχεσης από τον οφειλέτη. Χρησιμοποιούνται πάρα πολύ, κυρίως, σε περιόδους οικονομικής κρίσης, όπου η εύρεση «ρευστού» χρήματος είναι πολύ δύσκολη. Αποτελούν μορφή «άυλου» χρήματος. Είναι πολύ χρήσιμα γιατί:

- Δίνουν το απαραίτητο χρονικό περιθώριο στον οφειλέτη, να πληρώσει τις οφειλές του.
- Βοηθούν τον πιστωτή, ώστε να έχει εμπιστοσύνη στην πραγματοποίηση των μελλοντικών πληρωμών.
- Μέσω του τραπεζικού συστήματος, με την προεξόφλησή τους, δίνουν το απαραίτητο «ρευστό» χρήμα στον κάτοχό τους.

1.1 Γραμμάτιο

Γραμμάτιο είναι το χρεόγραφο με το οποίο ο εκδότης του αναγνωρίζει το χρέος προς το δανειστή και εγγυάται την πληρωμή του σε συγκεκριμένη ημερομηνία. (Γραμμάτιο Wiki, 2015)

Το γραμμάτιο είναι χρεόγραφο ή πιστωτικός τίτλος. Εκδίδεται από τον αγοραστή και περιέχει την υπόσχεσή του, να πληρώσει στον πωλητή ένα συγκεκριμένο ποσό (ονομαστική αξία του γραμματίου) στο τέλος προκαθορισμένης χρονικής περιόδου (ημερομηνία λήξης του γραμματίου).

Στην όψη του γραμματίου αναγράφονται, επίσης, η ημερομηνία έκδοσης και το όνομα του πωλητή, και τίθεται η υπογραφή του αγοραστή (εκδότη). (Γραμμάτιο euretirio, 2010)

Παράδειγμα εντύπου γραμματίου βλέπουμε στο σχήμα 3.1. Θα πρέπει να αναγράφεται η αξία του γραμματίου, η ημερομηνία στην οποία λήγει , δηλαδή στην ημερομηνία στην οποία πρέπει να πληρωθεί, ο τόπος πληρωμής και ο εκδότης.


Λήξη την .... 20...... *Γραμμάτιο σε διαταγή ΕΥΡΩ*
(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ)
Την .... 20...... *υπογεγραμμέν.... υπόσχομαι να πληρώσω με το παρόν μόνο γραμμάτιο σε διαταγή στ* ....
.... *ή σε διαταγή τ* .... *και στο Κατάστημα της* ....
.... *στην πόλη* ....
(ΤΙΤΛΟΣ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ)
το ποσό των ΕΥΡΩ
(ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ)
.... (ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ Ή ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΕΚΔΟΤΗ)
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΤΗ
Όνομα πατέρα ή συζύγου ....
Οδός .... *αριθ* ....
Ταχ. Κωδ .... *Πόλη* ....
Α.Φ.Μ. .... (ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΕΧΟΥΝ Α.Φ.Μ.) *Αρ. Ταυτ* .... (ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ Α.Φ.Μ.)
(Η ΚΑΤΩΤΕΡΩ ΛΕΥΚΗ ΛΩΡΙΔΑ ΝΑ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΚΑΘΑΡΗ ΓΙΑ ΤΗ ΜΗΧΑΝΟΓΡΑΦΗΣΗ)
.... 20...... (ΤΟΠΟΣ–ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ)
Ο εκδότης
.... (ΥΠΟΓΡΑΦΗ–ΣΦΡΑΓΙΔΑ)
Τριτεγγυώμαι υπέρ τ ....
.... (ΥΠΟΓΡΑΦΗ)
.... (ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ–ΕΠΩΝΥΜΙΑ)

Σχήμα 3.1 *Μορφή γραμματίου*

1.2 Συναλλαγματική

Συναλλαγματική είναι η έγγραφη εντολή που συντάσσεται με ορισμένο τύπο, κατά την οποία ένα πρόσωπο, ο εκδότης, διατάσσει ένα άλλο πρόσωπο, τον αποδέκτη, ο οποίος εντέλλεται να πληρώσει σε ορισμένο τόπο και χρόνο ένα ορισμένο χρηματικό ποσό σε ένα τρίτο πρόσωπο, τον κομιστή της συναλλαγματικής. Χρησιμοποιείται κυρίως ως μέσο για παροχή πίστωσης. (Συναλλαγματική Wiki, 2010)

Παράδειγμα εντύπου συναλλαγματικής βλέπουμε στο σχήμα 3.2. Θα πρέπει να αναγράφεται η αξία της συναλλαγματικής, η ημερομηνία στην λήξης της, δηλαδή το πότε πρέπει να πληρωθεί, ο τόπος πληρωμής, ο αποδέκτης και ο εκδότης.

Πρότυπο για την εκτύπωση εγγράφων γραμματίων και συναλλαγματικών μπορούμε να βρούμε στο διαδίκτυο. (http://www.hba.gr/2Tomeis/2TomeisDetails.asp?Id=58&Mpage=9)


Λήξη την .... 20...... Συναλλαγματική ΕΥΡΩ
(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ)
Την .... 20...... πληρώστε με την παρούσα μόνη συναλλαγματική σε διαταγή ....
και στο Κατάστημα .... (ΤΙΤΛΟΣ – ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΟΣ) της .... (ΤΙΤΛΟΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ)
.... το ποσό των ΕΥΡΩ
(ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ)
Προς ....
.... (ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ Ή ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΑΠΟΔΕΚΤΗ)
Όνομα πατέρα ή συζύγου ....
Οδός .... αριθ........
Ταχ. Κωδ........ Πόλη........
Α.Φ.Μ. .... (ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΕΧΟΥΝ Α.Φ.Μ.) Αρ. Ταυτ........ (ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ Α.Φ.Μ.)
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΚΤΗ
(Η ΚΑΤΩΤΕΡΩ ΛΕΥΚΗ ΛΩΡΙΔΑ ΝΑ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΚΑΘΑΡΗ ΓΙΑ ΤΗ ΜΗΧΑΝΟΓΡΑΦΗΣΗ)
Δεκτή........ 20..... (ΤΟΠΟΣ–ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ)
.... (ΥΠΟΓΡΑΦΗ–ΣΦΡΑΓΙΔΑ)
.... 20..... (ΤΟΠΟΣ–ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ)
Ο εκδότης
.... (ΥΠΟΓΡΑΦΗ–ΣΦΡΑΓΙΔΑ)
Τριτεγγυώμαι υπέρ τ........
.... (ΥΠΟΓΡΑΦΗ)
.... (ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ–ΕΠΩΝΥΜΙΑ)

Σχήμα 3.2 *Μορφή συναλλαγματικής*

Την ώρα που η αγορά έχει ξεμείνει από ρευστό και οι ιδιώτες-επιχειρηματίες από μπλοκ επιταγών, η επιστροφή στη δεκαετία του '70, όταν κυριαρχούσαν τα γραμμάτια και οι συναλλαγματικές, είναι ήδη πραγματικότητα.

Και αυτό πια δεν αποτελεί μια γενική αίσθηση που προκύπτει από τις καθημερινές συναλλαγές, αλλά το επιβεβαιώνουν -με τον πιο κατηγορηματικό τρόπο- οι «ειδικοί»: Αυτοί που τις... τυπώνουν και τις στέλνουν στο εμπόριο (καταστήματα με χαρτικά και είδη λογιστηρίου) λένε ότι τυπώνουν και πωλούν 30% περισσότερα γραμμάτια και συναλλαγματικές σε σχέση με τα προηγούμενα χρόνια.

Σύμφωνα με τα στοιχεία της Τράπεζας της Ελλάδος, τα δάνεια προς τους ιδιώτες είναι «κολλημένα» από τις αρχές του έτους (υπόλοιπο 119,5 δισ. ευρώ), καθώς επίσης και προς τις επιχειρήσεις (περί τα 130 δισ. ευρώ). Η μαύρη λίστα του Τειρεσία στην οποία μπήκαν εκατοντάδες χιλιάδες ιδιώτες τα προηγούμενα χρόνια, σε συνάρτηση με το κλείσιμο της στρόφιγγας στον τραπεζικό δανεισμό, εξαναγκάζει εμπόρους, επιχειρηματίες και καταναλωτές να αναζητήσουν μορφές πίστωσης που παραπέμπουν στις δεκαετίες του εβδομήντα και του ογδόντα.

Για παράδειγμα, αρκετές μάντρες που πωλούν μεταχειρισμένα αυτοκίνητα -αγορά που έχει χτυπηθεί σφόδρα από την οικονομική κρίση- πωλούν με γραμμάτια: Οι τράπεζες δεν βγάζουν χρηματοδοτικά προγράμματα για τις ίδιες και τους υποψήφιους πελάτες τους, οπότε από τη στιγμή που δεν γίνεται τζίρος λόγω έλλειψης ρευστού, το γραμμάτιο αποτελεί τη λύση.

Η εταιρεία «Τυποτράστ» είναι μία από τις πιο μεγάλες στο χώρο των εκτυπώσεων ειδών λογιστηρίου, που προμηθεύει εκατοντάδες βιβλιοπωλεία και καταστήματα με χαρτικά και είδη λογιστηρίου. Ο ιδιοκτήτης της Ι. Αντωνίου αναφέρει ότι υπάρχει μια αύξηση στη ζήτηση για γραμμάτια και συναλλαγματικές, η οποία φτάνει στο 30%. Υποστηρίζει ότι η αύξηση οφείλεται στους δύο προαναφερόμενους λόγους, δηλαδή στο «πάγωμα» των δανείων και στο φρένο που έχουν βάλει οι τράπεζες στην έκδοση μπλοκ επιταγών.

Επικρατούν οι συναλλαγματικές

Η συναλλαγματική σήμερα είναι κυρίως μέσο παροχής πιστώσεων, επειδή συνήθως δεν είναι πληρωτέα κατά την εμφάνισή της, αλλά περιέχει προθεσμία μεταξύ του χρόνου εκδόσεως και του χρόνου πληρωμής της.

Εάν δεν πληρωθεί τη στιγμή που έχει συμφωνηθεί, αυτός που δικαιούται χρήματα από μία συναλλαγματική μπορεί να διεκδικήσει τα χρήματά του είτε υποβάλλοντας αίτηση για έκδοση διαταγής προς πληρωμή είτε ασκώντας αγωγή αδικαιολόγητου πλουτισμού. Επίσης οι απλήρωτες συναλλαγματικές καταγράφονται στη «μαύρη λίστα» του Τειρεσία.

Η διαφορά μεταξύ του γραμματίου και της συναλλαγματικής είναι η εξής: τη συναλλαγματική την «εκδίδει» αυτός που είναι να λάβει τα χρήματα και αυτός που πρέπει να πληρώσει απλώς την αποδέχεται. Αντίθετα, στο γραμμάτιο «εκδότης» είναι αυτός που δέχεται την «εντολή για πληρωμή».

Για το λόγο αυτό, στην αγορά επικρατεί η συναλλαγματική, καθώς γραμμάτιο δεν κουβαλάει κάποιος επάνω του. Ενώ συναλλαγματικές, και μάλιστα σε μπλοκ, έχουν πάνω τους όσοι είναι να λάβουν λεφτά.» (Πολυχρονιάδης, 2010).

1.3 Τύποι εγγράφων για μελλοντική πληρωμή

Στις εμπορικές συναλλαγές, όταν η εξόφληση μιας οφειλής δεν γίνεται «τοις μετρητοίς», ο πωλητής (πιστωτής), για να εξασφαλίσει την απαίτησή του, υποχρεώνει τον αγοραστή (χρεώστη- οφειλέτη) να υπογράψει ειδικό νομικό έγγραφο, με το οποίο μπορεί στο μέλλον να εισπράξει το οφειλόμενο χρηματικό ποσό.

Ο νόμος 5325 του 1932 έχει καθιερώσει δύο τύπους τέτοιων εγγράφων:

-Το γραμμάτια εις διαταγή

-Τη συναλλαγματική

Θεωρούνται πιστωτικοί τίτλοι, και νομικά είναι όμοιοι. Είναι αυστηρά τυπικά έγγραφα. Στο γραμμάτιο ο οφειλέτης υπόσχεται στον πιστωτή ότι θα εξοφλήσει το αναγραφόμενο ποσό, ενώ με τη συναλλαγματική ο πιστωτής διατάσσει τον οφειλέτη να πληρώσει το αναγραφόμενο ποσό. Η διαφορά τους είναι τυπική, και στις εμπορικές συναλλαγές αναφέρονται συνήθως με κοινό όνομα: **Εμπορικά Γραμμάτια** ή απλώς Γραμμάτια. Από την πλευρά των μαθηματικών δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ τους, και στο εξής θα τα αντιμετωπίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Όσοι από εσάς είχατε σχέσεις με εμπόρους την δεκαετία του 70-80 θα θυμάστε το «θεσμό» της προείσπραξης γραμματίου. Εξηγώ για όσους δεν γνωρίζουν. Έστω ότι ήσουν έμπορος αυτοκινήτων. Είχες πουλήσει πολλά αυτοκίνητα, αλλά δεν είχες επαρκές ρευστό. Πήγαινες στην τράπεζα και έκανες προείσπραξη των γραμματίων, χάνοντας φυσικά ένα μέρος του τελικού ποσού που αναλογούσε σε έναν καλό τόκο για το κεφάλαιο, που σου δάνειζε ουσιαστικά η τράπεζα. Αργότερα, όταν οι τράπεζες περιόρισαν τη δυνατότητα, «έσπαγαν» τα γραμμάτια σε ιδιώτες, δίνοντας υψηλές αποδόσεις στους δανειστές τους.

Σχεδόν μαζί εμφανίστηκε το φαινόμενο των μεταχρονολογημένων επιταγών. Εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η κυρίαρχη ιδέα είναι η προεξόφληση του μελλοντικού εισοδήματος. Αργότερα μέσα στο Ευρώ με το χαμηλό επιτοκιακό περιβάλλον ζήσαμε την γενίκευση της εύκολα παρεχόμενης πίστωσης, που και αυτή στηριζόταν στην ίδια λογική προεξόφλησης. Δανειστής (τράπεζα) και δανειζόμενος (πελάτης) προεξοφλούσαν το μελλοντικό εισόδημα του δεύτερου.

Είτε αθεράπευτα αισιόδοξοι, είτε αθεράπευτα κακομαθημένοι θεωρούσαμε περίπου αδύνατον να μη δούμε να πραγματώνεται το προσδοκώμενο εισόδημα. («Από την προείσπραξη γραμματίου στην προεξόφληση της επιχορήγησης και το τέλος της βεβαιότητας», 2011).

2 Εξόφληση-προεξόφληση

Ο επιχειρηματίας που κατέχει μια ή περισσότερες συναλλαγματικής (ή γραμμάτια) έχει τις εξής επιλογές:

-Να την **κρατήσει** μέχρι την ημερομηνία λήξης και να εισπράξει το αναγραφόμενο ποσό από τον οφειλέτη.

-Να την **μεταβιβάσει** σε κάποιον άλλο, οπισθογραφώντας την.

-Να **αναθέσει** σε μια τράπεζα την είσπραξη, πληρώνοντας και κάποια προμήθεια.

-Να την **προεξοφλήσει (ρευστοποιήσει)** στην τράπεζά του, πληρώνοντας διάφορα έξοδα και τους τόκους από την ημέρα προεξόφλησης έως την ημέρα λήξης.

2.1 Προεξόφληση (discounting)

Προεξόφληση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία, χρησιμοποιώντας μελλοντικές αξίες (future value), υπολογίζονται οι παρούσες αξίες (present values) επενδύσεων ή κεφαλαίων. (Προεξόφληση euretirio).

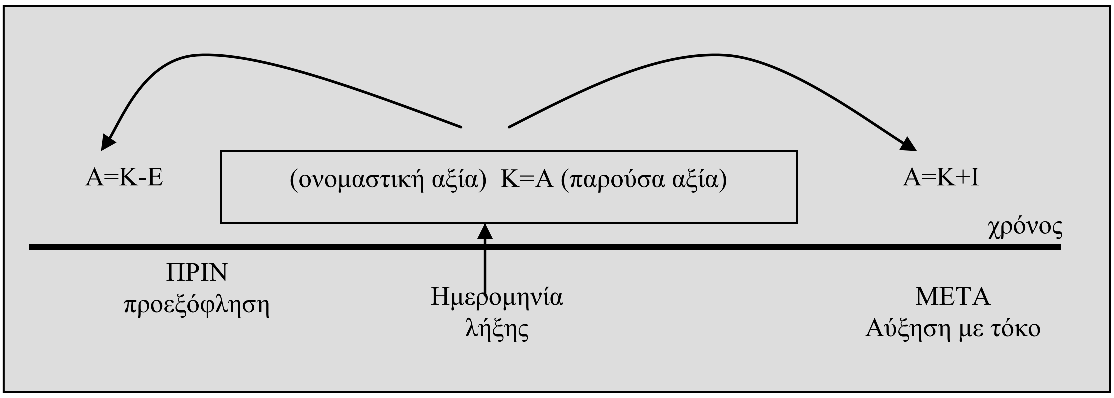
Μια συναλλαγματική (γραμμάτιο) έχει δύο αξίες κάθε χρονική στιγμή:

Την **ονομαστική αξία** και την **παρούσα αξία**. Η ονομαστική αξία, η οποία αναγράφεται στο γραμμάτιο ή τη συναλλαγματική, δεν αλλάζει με το χρόνο, ενώ η παρούσα αξία μεταβάλλεται ανάλογα με τη χρονική στιγμή στην οποία υπολογίζεται.

Το χρηματικό ποσό που είναι γραμμένο στα γραμμάτια ονομάζεται ονομαστική αξία, (συμβολίζεται Κ) του γραμματίου και η ημέρα, κατά την οποία πρέπει αυτό να πληρωθεί, ονομάζεται λήξη του γραμματίου.

Παρούσα ή πραγματική αξία (συμβολίζεται με Α ή Α1) ενός γραμματίου είναι το χρηματικό ποσό που τη χρονική στιγμή υπολογισμού είναι οικονομικά ισοδύναμο με την ονομαστική αξία τη χρονική στιγμή της λήξης.

Σε χρόνο πριν τη χρονική στιγμή της λήξης η παρούσα αξία είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία, ενώ σε χρονική στιγμή μετά τη λήξη η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία. Η διαφοροποίηση βασίζεται στην αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας, η οποία αναπαρίσταται γραφικά στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3. *Παράδειγμα γραφικής αναπαράστασης οικονομικής ισοδυναμίας*

2.2 Αρχή οικονομικής ισοδυναμίας

Η παρούσα αξία σήμερα είναι οικονομικά ισοδύναμη με τη μελλοντική ονομαστική αξία.

Σήμερα η παρούσα αξία, στην οποία προστίθεται ο αντίστοιχος τόκος για το ενδιάμεσο χρονικό διάστημα, είναι ίση με τη μελλοντική ονομαστική αξία.

Προεξόφλημα είναι το ποσό που «πληρώνει» ο κάτοχος ενός γραμματίου, όταν το προεξοφλεί πριν τη λήξη του, ώστε να εισπράξει τα χρήματα του νωρίτερα από τη λήξη. Το προεξόφλημα κρατείται από την τράπεζα, όταν αυτή παίρνει το γραμμάτιο, προκειμένου να το εισπράξει στην ημερομηνία λήξη του, και πληρώνει νωρίτερα τον κάτοχο του γραμματίου, δίνοντάς του ποσό ίσο με την παρούσα αξία. Το προεξόφλημα υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται και ο τόκος, αφού και αυτό αντιστοιχεί σε τόκο.

Μετά τη λήξη, η ονομαστική αξία μεγαλώνει, αφού αποφέρει και τόκο. Πριν τη λήξη, η παρούσα αξία είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία. Η διαφορά τους είναι το ποσό του τόκου που υποθετικά θα απέδιδε η παρούσα αξία, αν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Ο υποθετικός αυτός τόκος ονομάζεται **προεξόφλημα**, και συμβολίζεται με Ε ή Ε1.

Εξωτερικό προεξόφλημα (Ε) είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας ενός γραμματίου.

Εσωτερικό προεξόφλημα (Ε1) είναι ο τόκος της παρούσας αξίας ενός γραμματίου.

Γενικά, ισχύει η ισότητα $A+E=K \Leftrightarrow A=K-E$ για την εξωτερική προεξόφληση και η έννοια της εσωτερικής προεξόφλησης αποδίδεται με την ισότητα $A1+E1=K$.

Το επιτόκιο, με το οποίο γίνεται η προεξόφληση των γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες, ονομάζεται προεξοφλητικό επιτόκιο.

Οι τοκοφόρες ημέρες υπολογίζονται ως εξής: Η ημέρα κατά την οποία γίνεται η προεξόφληση συν την ημέρα της λήξης, συν τις παρεμβαλλόμενες ημέρες, συν 2 εργάσιμες ημέρες.

2.3 Τύπος προεξοφλήματος

Ο τύπος υπολογισμού του προεξοφλήματος είναι ο ίδιος με τον τύπο υπολογισμού του τόκου.

Το εξωτερικό προεξόφλημα δίνεται από τον τύπο $E=K*n*i$, όπου K η ονομαστική αξία, n χρονικές περίοδοι (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα κλπ.), i επιτόκιο για μία χρονική περίοδο

Το εσωτερικό προεξόφλημα δίνεται από τον τύπο $E1=A1*n*i$

Ισχύει

$A1+E1=K \Leftrightarrow E1/n*i +E1=K \Leftrightarrow$

$E1(1/n*i +1)=K \Leftrightarrow E1=K*n*i /(1+n*i)$

2.4 Ερώτηση

Μεγαλύτερο είναι το εξωτερικό ή το εσωτερικό προεξόφλημα; Με ποιο από τα δύο μας συμφέρει να υπολογίζουμε την προεξόφληση;

Απάντηση

Από τους δύο τύπους με τους οποίους προκύπτει το εξωτερικό και εσωτερικό προεξόφλημα. Προκύπτει ότι το εσωτερικό προεξόφλημα διαιρείται με την όρο (1+n*i) ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 1, και έτσι μικραίνει η τιμή του εσωτερικού προεξοφλήματος σε σχέση με το εξωτερικό προεξόφλημα. Επομένως το εσωτερικό προεξόφλημα είναι πάντα μικρότερο από το εξωτερικό προεξόφλημα.

2.5 Τύπος προεξοφλήματος όταν ο χρόνος μετριέται με μήνες ή μέρες

Όπως και στον υπολογισμό του τόκου, οι χρονικές περίοδοι μέτρησης χρόνου πρέπει να αντιστοιχούν στις χρονικές περιόδους μέτρησης του επιτοκίου.

Αν ο χρόνος μετριέται σε εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες κλπ και το επιτόκιο αντιστοιχεί σε εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες κλπ, τότε χρησιμοποιείται ο τύπος E=K*n*i για το εξωτερικό προεξόφλημα ή ο τύπος E1=K*n*i/(1+n*i) για το εσωτερικό προεξόφλημα. Δηλαδή με n συμβολίζουμε το πλήθος χρονικών περιόδων (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες κλπ) και με i συμβολίζουμε το επιτόκιο που αντιστοιχεί στην ανάλογη χρονική περίοδο (ετήσιο, εξαμηνιαίο, τριμηνιαίο, μηνιαίο κλπ).

Τύπος εξωτερικού προεξοφλήματος για ετήσιο επιτόκιο.

Ο τύπος του εξωτερικού προεξοφλήματος, αν το επιτόκιο εκφράζεται ετήσιο και ο χρόνος μετριέται σε έτη, μήνες, μέρες, είναι αντίστοιχα:

E=K*n*i για έτη

E=K*μ*i /12 για μήνες

E=K*ν*i /365για μέρες
(για πολιτικό έτος)
E=K*ν*i /360 για μέρες
(για μεικτό ή εμπορικό έτος)

Τύπος εσωτερικού προεξοφλήματος για ετήσιο επιτόκιο.

Ο τύπος του εσωτερικού προεξοφλήματος, αν το επιτόκιο εκφράζεται ετήσιο και ο χρόνος μετριέται σε έτη, μήνες, μέρες, είναι αντίστοιχα:

E1=K*n*i /(1+n*i) για έτη

E1=K*μ*i /(12+μ*i) για μήνες

E1=K*ν*i /(365+ν*i) για μέρες
(για πολιτικό έτος)

E1=K*ν*i /(360+ν*i) για μέρες
(για μεικτό ή εμπορικό έτος)
(Για τον ορισμό του πολιτικού, μεικτού ή εμπορικού έτους βλέπε αναφορά στο κεφάλαιο του τόκου).

2.6 Άσκηση παράδειγμα

Γραμμάτιο αξίας 1.500 ευρώ, λήγει στις 15 Ιουνίου και προεξοφλείται σήμερα 26 Φεβρουαρίου με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το εσωτερικό και εξωτερικό προεξόφλημα. (Έτος πολιτικό).

Λύση

Η ονομαστική αξία είναι Κ=1.500.

Το επιτόκιο, εφόσον δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, αντιστοιχεί σε ετήσιο επιτόκιο i=3%=0,03.

Ο χρόνος θα υπολογισθεί σε μέρες ως εξής: αφού χρησιμοποιούμε το πολιτικό έτος και επομένως κάθε μήνας αντιστοιχεί στις πραγματικές του μέρες: 3 υπόλοιπες μέρες έως τέλος Φεβρουαρίου μαζί με την ημέρα υπολογισμού + μέρες Μαρτίου +μέρες Απριλίου + μέρες Μαΐου + 15 μέρες Ιουνίου +2 εργάσιμες μέρες, ν=3+31+30+31+15+2 =112 μέρες.

Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των ημερών ως εξής:

E=K*ν*i /365=1500*112*0,03/365= 13,80 ευρώ

Το εσωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των ημερών ως εξής:

E1=K*ν*i /(365+ν*i) =1500*112*0.03/(365+112*0,03)= 13,68 ευρώ

2.7 Έξοδα προεξόφλησης

Στη συνήθη περίπτωση στην οποία η προεξόφληση γίνεται σε μια τράπεζα, αυτή χρεώνει και με διάφορα έξοδα την προεξόφληση, όπως εισπρακτικά έξοδα, προμήθεια, έξοδα πληροφοριών και φόρου. Τα έξοδα αυτά υπολογίζονται, άλλα σαν ποσοστό της ονομαστικής αξίας, άλλα σαν ποσοστό του προεξοφλήματος και άλλα είναι ένα ελάχιστο σταθερό ποσό κατ' αποκοπήν.

Στην περίπτωση προεξόφλησης γραμματίων ή συναλλαγματικών από εμπορική τράπεζα, η προεξόφληση επιβαρύνεται και με διάφορα έξοδα. (Καραπιστόλης, 2012). Τα έξοδα αυτά μπορεί να είναι:

α) προμήθεια, η οποία υπολογίζεται ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας, ανάλογα με τους μήνες προεξόφλησης.

β) εισπρακτικά έξοδα, τα οποία υπολογίζονται ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας, αλλά, όταν είναι μικρή η ονομαστική αξία υπάρχει ένα ελάχιστο ποσό εξόδων.

γ) έξοδα πληροφοριών, που αντιστοιχούν σε σταθερό ποσό και αφορούν στα έξοδα της τράπεζας που χρειάζονται, για να ειδοποιήσει τον οφειλέτη.

δ) έξοδα φόρων (εισφορά στο κράτος) για το ποσό των τόκων και των διαφόρων εξόδων.

Αν τα παραπάνω έξοδα προστεθούν στο ποσό των παρακρατούμενων τόκων από την τράπεζα, έχουμε το πραγματικό προεξόφλημα. Ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε και το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης που αντιστοιχεί στο πραγματικό πρεοξόφλημα, και που σχεδόν πάντα είναι μεγαλύτερο από το «ονομαστικό» επιτόκιο προεξόφλησης, αφού το ποσό που πραγματικά απομένει λόγω των διαφόρων εξόδων είναι μικρότερο από το ποσό που υπολογίζεται με το «ονομαστικό» επιτόκιο προεξόφλησης.

3 Αντικατάσταση γραμματίων (γραμμάτια εις διαταγή και συναλλαγματικές)

Στην πραγματική οικονομία, μερικές φορές τα πραγματικά γεγονότα διαφέρουν από τις προβλέψεις που είχαν γίνει για αυτά. Έτσι επιχειρηματίες ή και απλοί πολίτες που είχαν υποσχεθεί να πληρώσουν ένα γραμμάτιο ή μια συναλλαγματική σε ορισμένο χρόνο, αναγκάζονται λόγω έλλειψης ρευστού, να ζητήσουν νέα χρονική παράταση για την εξόφληση. Αν ο οφειλέτης δεν δεχθεί την παράταση, και επειδή ο δανειζόμενος δεν έχει χρήματα να πληρώσει, ο δανειστής θα πρέπει να διεκδικήσει νομικά την πληρωμή του μέσω δικαστηρίου. Η πράξη αυτή ονομάζεται «διαμαρτυρία του γραμματίου» και έχει αρνητικές συνέπειες για τον δανειζόμενο. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει χρονική καθυστέρηση μέχρι την έκδοση της τελικής απόφασης, με κόστος για το δανειστή. Σε πολλές περιπτώσεις εμπορικών συναλλαγών προτιμάει να δώσει ο ίδιος απευθείας την παράταση στο δανειζόμενο, ελπίζοντας ότι έτσι θα πάρει τα χρήματά του γρηγορότερα. Η νέα αυτή παράταση στις οικονομικές συναλλαγές δίνεται, αφού απαιτηθεί επιπλέον τόκος για την καθυστέρηση και συνήθως συμφωνείται το «σχίσιμο» του παλαιού γραμματίου και η έκδοση νέου γραμματίου με λήξη την συμφωνηθείσα ημερομηνία και μεγαλύτερη ονομαστική αξία.

Άλλες φορές ο ίδιος ο οφειλέτης, υπολογίζοντας ότι θα βρεθεί εκτεθειμένος την ημερομηνία λήξης του γραμματίου του, πριν να έρθει η λήξη αυτή, ζητάει από το δανειστή του την αντικατάσταση ενός, δύο ή περισσοτέρων γραμματίων με ένα νέο **ενιαίο** γραμμάτιο, το οποίο είναι οικονομικώς ισοδύναμο με το προηγούμενο ή τα προηγούμενα. Άλλες φορές πάλι μπορεί να ζητήσει την αντικατάσταση ενός γραμματίου με μεγάλο χρηματικό ποσό, με περισσότερα γραμμάτια, μικρότερων χρηματικών ποσών που λήγουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και τα οποία είναι οικονομικώς ισοδύναμα με το αρχικό γραμμάτιο. Στη συνέχεια ορίζουμε την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας στην αντικατάσταση γραμματίων.

3.1 Αρχή οικονομικής ισοδυναμίας γραμματίων

Το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων ισούται με την παρούσα αξία του νέου γραμματίου σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο.

Εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας
Παρούσα αξία νέου γραμματίου = άθροισμα παρουσών αξιών αντικαθισταμένων γραμματίων

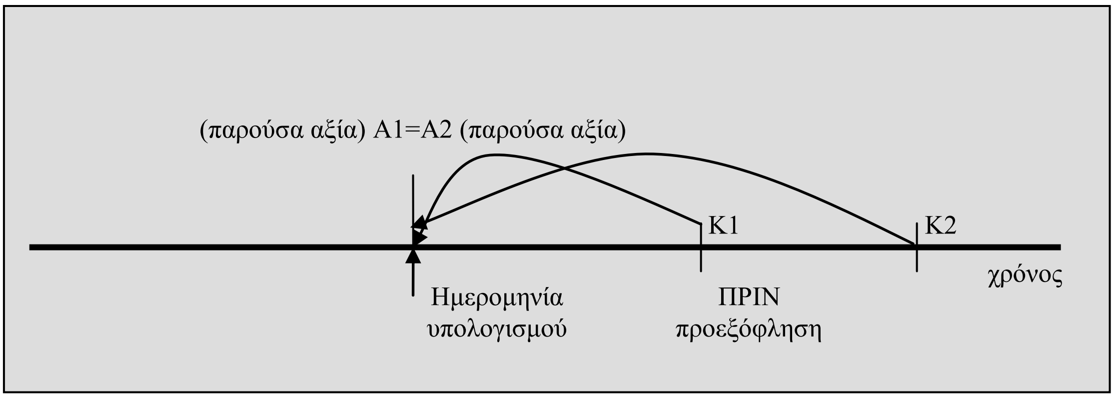
Σημεία προσοχής
Εποχή ισοδυναμίας είναι η χρονική στιγμή που υπολογίζουμε την οικονομική ισοδυναμία. Αυτή η στιγμή μπορεί να διαφοροποιείται στο χρόνο, αλλά πάντα είναι η ίδια και στα δύο, ή περισσότερα, γραμμάτια.

Η περίοδος μέτρησης του επιτοκίου θα πρέπει να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου (έτος, εξάμηνο, τρίμηνο κλπ). Το πλήθος των χρονικών περιόδων (συμβολίζεται με n) αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό. Το επιτόκιο αντιστοιχεί σε μία από τις n χρονικές περιόδους (έτος, ή εξάμηνο ή μήνας…) και γράφεται σε δεκαδική μορφή (όχι σε %) στους τύπους υπολογισμού.

3.2 Γραφική παράσταση οικονομικής ισοδυναμίας

Η οικονομική ισοδυναμία συνήθως παριστάνεται με ένα διάγραμμα, όπως στο σχήμα 3.4. Ο χρόνος αντιστοιχεί σε μια ευθεία γραμμή, πάνω στην οποία σημειώνονται οι ημερομηνίες λήξης, οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων (ή συναλλαγματικών) που αντικαθίστανται, η ημερομηνία (ή ημερομηνίες) των νέων γραμματίων καθώς και η ημερομηνία υπολογισμού της οικονομικής ισοδυναμίας. Με μια καμπύλη, συνήθως, που καταλήγει σε βέλος, διακρίνονται οι μέρες που μεσολαβούν μεταξύ της ημέρας υπολογισμού και της λήξης κάθε γραμματίου.

Η ημερομηνία της ισοδυναμίας, συνήθως, αντιστοιχεί στο παρόν, αλλά μπορεί να αντιστοιχεί και στην μελλοντική ημέρα λήξης νέου γραμματίου, ή σε οποιαδήποτε άλλη ημερομηνία. Επιλέγεται έτσι, ώστε να μας διευκολύνει στους υπολογισμούς ή στην κατανόηση της αντικατάστασης.

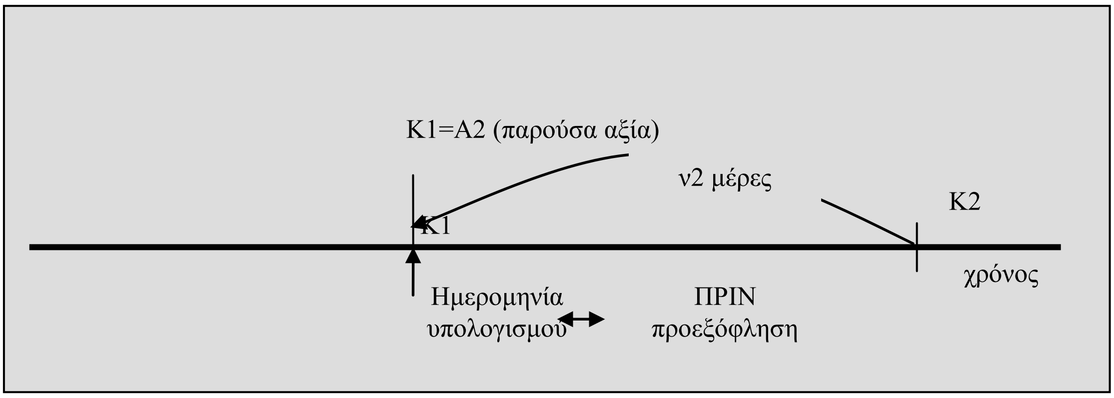


Σχήμα 3.4. *Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού*

3.3 Αντικατάσταση ενός γραμματίου με ένα άλλο

Έστω Κ1, Κ2 οι ονομαστικές αξίες πρώτου και δευτέρου γραμματίου αντίστοιχα.

Έστω το δεύτερο γραμμάτιο λήγει σε ν2 μέρες μετά τη λήξη του πρώτου γραμματίου.



Σχήμα 3.5. *Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του πρώτου γραμματίου*

3.3.3.1 Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του πρώτου γραμματίου

Στη λήξη του πρώτου γραμματίου, η παρούσα αξία του ισούται με την ονομαστική αξία του (σχήμα 3.5).

Η παρούσα αξία του δευτέρου γραμματίου θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία μειωμένη κατά το προεξόφλημα (εξωτερικό ή εσωτερικό), και ο χρόνος προεξόφλησης θα είναι ν2 μέρες.

Οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες οπότε θα έχουμε ανάλογα τις εξισώσεις:

K1=A2

K1=K2-K2 *i*ν2/365 στην περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης με πολιτικό έτος

K1=K2-K2 *i*ν2/360 στην περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης με εμπορικό έτος

K1=K2-A2 *i*ν2/365= K2-K2 *i*ν2/(365+ i*ν2) στην περίπτωση εσωτερικής προεξόφλησης με πολιτικό έτος

K1=K2-A2 *i*ν2/360 = K2-K2 *i*ν2/(360+ i*ν2) στην περίπτωση εσωτερικής προεξόφλησης με εμπορικό έτος.

3.3.3.2 Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του δευτέρου γραμματίου

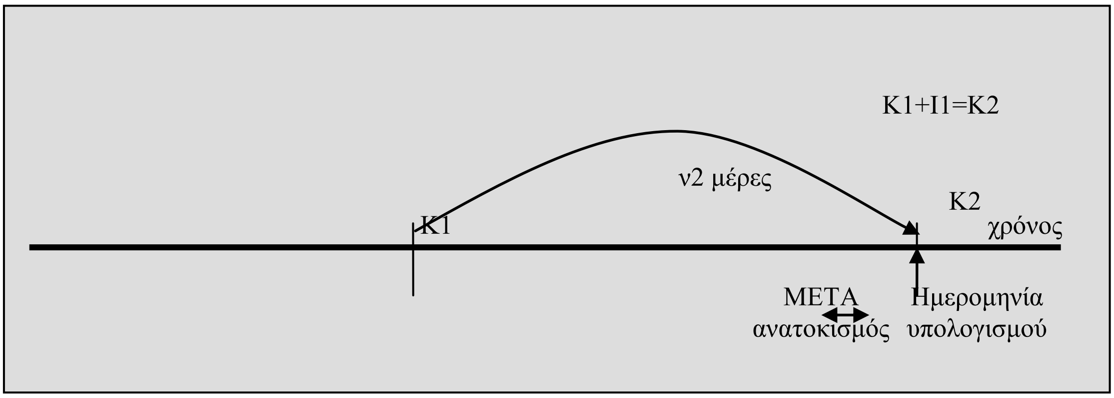
Στη λήξη του δευτέρου γραμματίου, η παρούσα αξία του ισούται με την ονομαστική αξία του (σχήμα 3.6).

Η παρούσα αξία του πρώτου γραμματίου θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία αυξημένη με τους τόκους. Ο χρόνος τοκισμού είναι ν2 μέρες.

Οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες οπότε θα έχουμε ανάλογα τις εξισώσεις:

K1+ K1 *i*ν2/365 =K2 με πολιτικό έτος ή

K1+ K1 *i*ν2/360 =K2 με εμπορικό έτος



Σχήμα 3.6. *Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του δευτέρου γραμματίου*

3.3.3.3 Εποχή ισοδυναμίας μια οποιαδήποτε ημερομηνία

Αν χρησιμοποιήσουμε μια οποιαδήποτε ημερομηνία, για να υπολογίσουμε τις παρούσες αξίες των δύο γραμματίων, θα πρέπει να ελέγξουμε πότε λήγουν τα γραμμάτια.

Αν αυτά λήγουν μετά την επιλεγμένη ημερομηνία, υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες, αφαιρώντας τα αντίστοιχα προεξοφλήματα.

Αν αυτά λήγουν πριν την επιλεγμένη ημερομηνία, υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες, προσθέτοντας τους αντίστοιχους τόκους.

Αν το ένα λήγει πριν την επιλεγμένη ημερομηνία και το άλλο μετά την επιλεγμένη ημερομηνία, η παρούσα αξία του πρώτου υπολογίζεται με πρόσθεση των τόκων, ενώ η παρούσα αξία του δευτέρου υπολογίζεται με αφαίρεση του προεξοφλήματος από την ονομαστική του αξία.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δώσουμε στον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών στην περίπτωση αυτή.

Ο γενικός κανόνας για τον υπολογισμό παρούσας αξίας είναι:

-Αν η λήξη του γραμματίου έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία συν τον τόκο, για τις ημέρες που πέρασαν από τη λήξη του γραμματίου μέχρι την ημερομηνία υπολογισμού.

-Αν η λήξη του γραμματίου δεν έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία μείον το προεξόφλημα τις ημέρες που απομένουν μέχρι τη λήξη του γραμματίου από την ημερομηνία υπολογισμού.

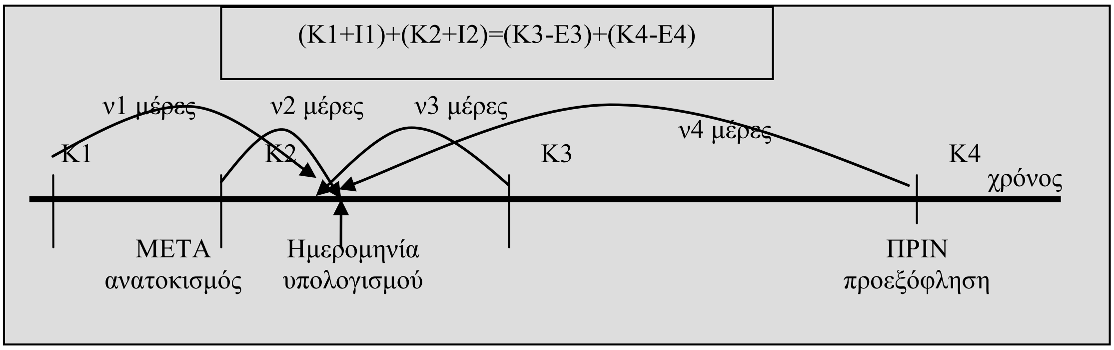
Για τους υπολογισμούς πάντα χρησιμοποιούμε την εξίσωση που σχηματίζεται από το γεγονός:

Οι δύο παρούσες αξίες πρέπει να είναι ίσες.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωση αυτή τους γνωστούς όρους και επιλύουμε ως προς τον άγνωστο όρο, με μαθηματικές τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.

3.3.4 Αντικατάσταση ενός ή περισσότερων γραμματίων με ένα ή πολλά

Στην περίπτωση που έχουμε αντικατάσταση πολλών γραμματίων με άλλο συμβολίζουμε K1, K2, K3, K4,.. τις ονομαστικές αξίες πρώτου, δευτέρου, τρίτου,… γραμματίου αντίστοιχα (σχήμα 3.7).



Σχήμα 3.7. *Αντικατάσταση πολλών γραμματίων*

Έστω ν1, ν2, ν3, ν4,… οι μέρες από την ημερομηνία υπολογισμού μέχρι τη λήξη κάθε γραμματίου αντίστοιχα.

Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας διαμορφώνεται ως εξής:

Παρούσα αξία νέου (ή νέων) γραμματίου = άθροισμα όλων των παρουσών αξιών των γραμματίων που αντικαθίστανται.

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην εξίσωση αυτή τους γνωστούς όρους και επιλύουμε, ως προς τον άγνωστο όρο, με μαθηματικές τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.

Η παρούσα αξία κάθε γραμματίου στην ημερομηνία υπολογισμού, υπολογίζεται με τις παρακάτω βασικές αρχές.

-Αν γραμμάτιο λήγει μετά την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, υπολογίζουμε την παρούσα αξία του, αφαιρώντας το αντίστοιχο προεξόφλημα.

-Αν γραμμάτιο λήγει πριν την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, υπολογίζουμε την παρούσα αξία του, προσθέτοντας τον αντίστοιχο τόκο.

-Αν γραμμάτιο λήγει ακριβώς την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, η παρούσα αξία του είναι ίση με την ονομαστική του αξία.
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δώσουμε στον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών από την ημερομηνία λήξης κάθε γραμματίου μέχρι την ημερομηνία υπολογισμού.

Ο γενικός κανόνας για τον υπολογισμό παρούσας αξίας είναι:
Αν η λήξη του γραμματίου έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία συν τον τόκο για τις ημέρες που πέρασαν από τη λήξη του γραμματίου μέχρι την ημερομηνία υπολογισμού.
Αν η λήξη του γραμματίου δεν έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία μείον το προεξόφλημα για τις ημέρες που απομένουν μέχρι τη λήξη του γραμματίου από την ημερομηνία υπολογισμού.

4 Παραδείγματα

4.1. Γραμμάτιο 500 ευρώ το οποίο λήγει στις 13-Απριλίου, αντικαθίσταται με άλλο που λήγει στις 20-Ιουνίου. Ποια θα είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου αν το ισχύον επιτόκιο είναι 4%;

<u>Λύση</u>

Έστω ότι εποχή ισοδυναμίας είναι η $13^{η}$ Απριλίου. Η παρούσα αξία του πρώτου γραμματίου είναι K1=500 ευρώ. Η παρούσα αξία του δευτέρου γραμματίου είναι η ονομαστική του μειωμένη κατά το προεξόφλημα (έστω εξωτερικό). Οι μέρες προεξόφλησης είναι μέρες Απριλίου +μέρες Μαΐου+20 μέρες Ιουνίου+2 εργάσιμες μέρες=17+31+20+2=70 μέρες. Υποθέτοντας πολιτικό έτος, η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$K1=K2-K2^{*} i^{*}v2/365$ και αντικαθιστώντας $500=K2(1-0{,}04^{*}70/365) \Leftrightarrow K2=500/0{,}9923=503{,}87$

4.2. Γραμμάτιο 500 ευρώ το οποίο λήγει στις 13-Απριλίου, αντικατέστησε άλλο που έληγε στις 10 Ιανουαρίου. Ποια είναι η ονομαστική αξία του γραμματίου που αντικαταστάθηκε αν το ισχύον επιτόκιο είναι 4%;

<u>Λύση</u>

Έστω ότι εποχή ισοδυναμίας είναι η $13^{η}$ Απριλίου. Η παρούσα αξία του πρώτου γραμματίου, που έληγε 10 Ιανουαρίου, είναι αυξημένη με τον αντίστοιχο τόκο για τις μέρες που μεσολάβησαν έως 13 Απριλίου, δηλαδή $K1+K1^{*}i^{*}v2/365$. Η παρούσα αξία του δευτέρου γραμματίου είναι η ονομαστική του. Οι μέρες τοκισμού είναι μέρες Ιανουαρίου +μέρες Φεβρουαρίου +μέρες Μαρτίου + 13 μέρες Απριλίου+2 εργάσιμες μέρες=21+28+31+13+2=95 μέρες. Υποθέτοντας πολιτικό έτος, η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$K1+K1^{*}i^{*}v2/365=K2 \Leftrightarrow K1(1+0{,}04^{*}95/365)=500 \Leftrightarrow K1=500/1{,}0104=494{,}85$

Επομένως η ονομαστική αξία του γραμματίου που αντικαταστάθηκε ήταν 494,85 ευρώ.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε χρησιμοποιούμε γραμμάτια ή συναλλαγματικές.
- Πώς βρίσκω την παρούσα αξία ενός γραμματίου.
- Πότε εφαρμόζω τον τύπο προεξόφλησης.
- Πώς βρίσκω το χρόνο ή την ονομαστική αξία σε περίπτωση αντικατάστασης γραμματίων.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Από την προείσπραξη γραμματίου στην προεξόφληση της επιχορήγησης και το τέλος της βεβαιότητας. (2011, 10 Ιουλίου). Ανακτήθηκε από http://maecenas.capitalblogs.gr/showarticle.asp?id=32487&blid=404

Γραμμάτιο Ευρετήριο (2010). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.euretirio.com/2010/06/grammatio.html#ixzz3UFK81ngh

Γραμμάτιο Wiki (χ.χ.). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από το Wiki: http://el.wiktionary.org/wiki/%CE%B3%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%AC%CF%84%CE%B9%CE%BF

Καραπιστόλης, Δ. (2012). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Θεσσαλονίκη: Αλτιντζή.

Πολυχρονιάδης, Μ. (2010, 7 Νοεμβρίου). Επιστρέψαμε στην εποχή του γραμματίου!. *Κυριακάτικη Ελευθεροτυπία*, σελ 14.

Προεξόφληση Ευρετήριο (2010). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.euretirio.com/2010/06/proexoflisi.html#ixzz3UFO0dFAx

Συναλλαγματική Wiki (χ.χ.). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από το Wiki: http://el.wiktionary.org/wiki/%CF%83%CF%85%CE%BD%CE%B1%CE%BB%CE%BB%CE%B1%CE%B3%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE

Ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί το εσωτερικό και εξωτερικό προεξόφλημα συναλλαγματικής αξίας 5.000 ευρώ η οποία προεξοφλήθηκε 3 μήνες πριν λήξει με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Η ονομαστική αξία είναι K=5.000
Το ετήσιο επιτόκιο i=4%=0.04
Ο χρόνος θα υπολογισθεί σε μήνες.

Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί, χρησιμοποιώντας τον τύπο των μηνών ως εξής:
E=K*μ*i /12=5.000*3*0.04/12= 50 ευρώ
Το εσωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί, χρησιμοποιώντας τον τύπο των μηνών ως εξής:
E1=K*μ*i /(12+μ*i) =5.000*3*0.04/(12+3*0.04)= 600/12,12 =49,5 ευρώ

Άσκηση 2

Να βρεθεί το εσωτερικό και εξωτερικό προεξόφλημα συναλλαγματικής αξίας 5.000 ευρώ η οποία προεξοφλήθηκε 100 μέρες πριν λήξει με ετήσιο επιτόκιο 4%. Έτος μεικτό.

Απάντηση/Λύση

Η ονομαστική αξία είναι K=5.000
Το ετήσιο επιτόκιο i=4%=0.04
Ο χρόνος θα υπολογισθεί σε μέρες

Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των ημερών ως εξής:

E=K*ν*i /360=5.000*100*0.04/360= 55,55 ευρώ
Το εσωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των ημερών ως εξής:
E1=K*ν*i /(360+ν*i) =5.000*100*0.04/(360+100*0.04)= 20.000/364 =54,95 ευρώ

Άσκηση 3

Γραμμάτιο 4500 ευρώ προεξοφλείτε 9 μήνες πριν τη λήξη του με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%.

α) Ποιο είναι το εξωτερικό προεξόφλημα;
β) Ποιο είναι το εσωτερικό προεξόφλημα;
γ) Πόσα χρήματα εισπράττουμε από την προεξόφλησή του;

Απάντηση/Λύση

Η ονομαστική αξία είναι K=4.5000
Το εξαμηνιαίο επιτόκιο i=2%=0.02
Ο χρόνος θα υπολογισθεί σε μήνες, αλλά, επειδή το επιτόκιο αντιστοιχεί σε εξάμηνο και όχι σε έτος, στους τύπους υπολογισμού του προεξοφλήματος, αντί για 12 στον παρανομαστή θα γράψουμε 6, στη θέση των μηνών. (Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε το επιτόκιο σε ετήσιο και να μην αλλάξουμε τους τύπους).

α) Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των μηνών ως εξής:
E=K*μ*i /6=4.500*9*0.02/6= 135 ευρώ
β) Το εσωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των μηνών ως εξής:
E1=K*μ*i /(6+μ*i) =4.500*9*0.02/(6+9*0.02)= 810/6,18 =131,07 ευρώ
γ) Τα χρήματα που θα εισπράξουμε είναι η ονομαστική αξία μείον το προεξόφλημα. Έτσι με εξωτερική προεξόφληση θα εισπράξουμε 4.500-135=4.365 ευρώ και με εσωτερική προεξόφληση θα εισπράξουμε 4.500-131,07=4.368,93 ευρώ.

Άσκηση 4

Διαθέτουμε συναλλαγματική αξίας 10.000 ευρώ η οποία λήγει σε 10 μήνες. Το επιτόκιο σήμερα είναι 4% και γνωρίζουμε ότι σε ένα μήνα το επιτόκιο θα γίνει 4,5%. Πόσα χρήματα θα εισπράξουμε, αν προεξοφλήσουμε την συναλλαγματική σήμερα, και πόσα χρήματα θα εισπράξουμε, αν την προεξοφλήσουμε σε ένα μήνα; (Υπολογίστε το εξωτερικό προεξόφλημα και συγκρίνετε τις δύο περιπτώσεις.)

Απάντηση/Λύση

Αν προεξοφλήσουμε την συναλλαγματική σήμερα, θα έχουμε K=10.000, i=4%=0.04, μ=10 μήνες. Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των μηνών ως εξής:
E=K*μ*i /12=10.000*10*0.04/12= 333,33 ευρώ και θα εισπράξουμε 10.000-333,33=9.666,67 ευρώ.

Αν προεξοφλήσουμε την συναλλαγματική σε ένα μήνα, θα έχουμε K=10.000, i=4,5%=0.045, μ=9 μήνες. Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί με τον τύπο των μηνών ως εξής:
E=K*μ*i /12=10.000*9*0.045/12= 337,5 ευρώ και θα εισπράξουμε 10.000-337,5=9.662,5 ευρώ.
Παρατηρούμε ότι παρόλο που θα περιμένουμε ένα μήνα, να την προεξοφλήσουμε, θα εισπράξουμε λιγότερα χρήματα, περίπου 4 ευρώ λιγότερα, απ' ό,τι αν την προεξοφλήσουμε σήμερα. Αυτό συμβαίνει, διότι αυξήθηκε το επιτόκιο προεξόφλησης.

Άσκηση 5

Συναλλαγματική που έληγε σε 40 μέρες από σήμερα, προεξοφλήθηκε σήμερα με ετήσιο επιτόκιο 9% και έδωσε παρούσα αξία 4.500 ευρώ. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της. Έτος εμπορικό.

Απάντηση/Λύση

Το εξωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται με τον τύπο των ημερών ως εξής:

E=K*ν*i /360. Η παρούσα αξία Α είναι ίση με ονομαστική αξία Κ μείον προεξόφλημα Ε, δηλαδή Α=Κ-Ε αντικαθιστώντας έχουμε:
4.500=Κ- Κ*40*0,09 /360 Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο Κ και έχουμε:
4.500=Κ(1-40*0,09 /360) ⇔ 4.500=0,99Κ ⇔ Κ=4.500/0,99 ⇔ Κ=4.545,45 ευρώ

Άσκηση 6

Να βρεθεί το εξωτερικό προεξόφλημα και η ονομαστική αξία γραμματίου, το οποίο προεξοφλήθηκε με επιτόκιο 7%, 50 μέρες πριν τη λήξη του και έδωσε παρούσα αξία 15.500 ευρώ. Έτος εμπορικό.

Απάντηση/Λύση

Το εξωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται με τον τύπο των ημερών ως εξής:
Ε=Κ*ν*i /360. Η παρούσα αξία Α είναι ίση με ονομαστική αξία Κ μείον προεξόφλημα Ε, δηλαδή Α=Κ-Ε αντικαθιστώντας έχουμε
15.500=Κ- Κ*50*0,07 /360 Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο Κ και έχουμε:
15.500=Κ*(1-50*0,07 /360) ⇔ 15.500=0,9903Κ ⇔ Κ=15.500/0,9903 ⇔ Κ=15.652,17 ευρώ
Το εξωτερικό προεξόφλημα θα είναι Ε=Κ*ν*i /360=15.652,17 *50*0,07 /360=152,17 ευρώ.
Θα μπορούσαμε να βρούμε το εξωτερικό προεξόφλημα και με τη σχέση Ε=Κ-Α=15.652,17-15.500=152,17 ευρώ.

Άσκηση 7

Ένας έμπορος οφείλει 20.000 ευρώ και υπογράφει την ίδια μέρα γραμμάτιο που λήγει σε 120 μέρες με ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθεί η ονομαστική αξία αν η προεξόφληση είναι εξωτερική και το έτος εμπορικό.

Απάντηση/Λύση

Η οφειλή των 20.000 ευρώ αντιστοιχεί στη στιγμή της υπογραφής του γραμματίου που λήγει σε 120 μέρες. Επομένως η ονομαστική αξία του γραμματίου θα είναι μεγαλύτερη, αφού μεσολαβούν 120 μέρες μέχρι την πληρωμή του. Η παρούσα αξία Α είναι ίση με 20.000 ευρώ.
Το εξωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται με τον τύπο των ημερών ως εξής:
Ε=Κ*ν*i /360.
Η παρούσα αξία Α είναι ίση με ονομαστική αξία Κ μείον προεξόφλημα Ε, δηλαδή Α=Κ-Ε αντικαθιστώντας έχουμε:
20.000=Κ- Κ*120*0,08 /360
Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο Κ και έχουμε:
20.000=Κ*(1- 120*0,08 /360) ⇔ 20.000=0,9733Κ ⇔ Κ=20.000/0,9733 ⇔ Κ=20.548,65 ευρώ
Επομένως η ονομαστική αξία του γραμματίου που θα υπογραφεί θα είναι 20.548,65 ευρώ

Άσκηση 8

Ο έμπορος Ε δεν μπορεί να πληρώσει γραμμάτιο 6.000 ευρώ το οποίο λήγει την 31η Μαΐου. Γι' αυτό υπογράφει τα εξής γραμμάτια:
α) 2.000 ευρώ, λήξεως 11 Απριλίου
β) 1.000 ευρώ, λήξεως 21 Μαΐου
γ) 1.000 ευρώ, λήξεως 10 Ιουνίου και
δ) γραμμάτιο που λήγει στις 9 Αυγούστου.
Να βρεθεί η ονομαστική αξία του τελευταίου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 7% και έτος πολιτικό. (Εποχή ισοδυναμίας η 21η Μαΐου).

Απάντηση/Λύση

Θέλουμε να αντικαταστήσουμε ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ=6.000 με τέσσερα νέα γραμμάτια. Γνωρίζουμε τις ονομαστικές αξίες του πρώτου γραμματίου Κ και των τριών νέων (Κ1,Κ2,Κ3) εκτός του ενός (Κ4) του οποίου ζητούμε την ονομαστική αξία. Για να μπορέσουμε να την υπολογίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας με ημερομηνία υπολογισμού της ισοδυναμίας την

21η Μαίου. Στην ημερομηνία αυτή το πρώτο από τα νέα γραμμάτια έχει ήδη λήξει και επομένως η αξία του αυξάνει μαζί με τον αντίστοιχο τόκο του. Όλα τα υπόλοιπα γραμμάτια λήγουμε μετά την 21η Μαίου, οπότε η αξία τους υπολογίζεται με αφαίρεση του αντίστοιχου προεξοφλήματος.

Οι μέρες που αντιστοιχούν σε κάθε γραμμάτιο μέχρι την ημερομηνία ισοδυναμίας υπολογίζονται ως εξής:
Για το ενιαίο γραμμάτιο που λήγει στις 31 Μαίου, δηλαδή 10 μέρες μετά, οι μέρες προεξόφλησης είναι 10+2=12 μέρες. Στην προεξόφληση οι τράπεζες υπολογίζουν τις τοκοφόρες μέρες +2 μέρες επιπλέον.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ1 που έληγε 11 Απριλίου, οι τοκοφόρες μέρες έως 21 Μαίου είναι 19+21=40 μέρες.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ2 που λήγει 21 Μαίου δεν έχουμε ούτε τοκοφόρες μέρες ούτε μέρες προεξόφλησης.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ3 που λήγει 10 Ιουνίου, οι μέρες προεξόφλησης είναι 20+2=22 μέρες.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ4 που λήγει 9 Αυγούστου, οι μέρες προεξόφλησης είναι 10+30+31+9+2=82 μέρες.

Η οικονομική ισοδυναμία γράφεται
Κ-Ε=Κ1+Ι1+Κ2+Κ3-Ε3+Κ4-Ε4
και, αντικαθιστώντας με τον τύπο του τόκου και του εξωτερικού προεξοφλήματος, έχουμε:
6000-6000*0,07*12/365=2000+2000*0,07*40/365+1000+1000-1000*0,07*22/365+Κ4-Κ4*0,07*82/365
Στη συνέχεια λύνουμε την παραπάνω εξίσωση με άγνωστο το Κ4, κάνοντας τις πράξεις και χωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους.
2000-(5040+5600-1540)/365=Κ4(1-0,016) ⇔ 1975 =0,984 Κ4⇔ Κ4=2007,11 €.

Άσκηση 9

Οφείλει κάποιος τα εξής: γραμμάτιο 700 ευρώ που λήγει την 10η Ιανουαρίου, άλλο γραμμάτιο 600 ευρώ που λήγει την 20η Απριλίου και 500 ευρώ μετρητά. Για να εξοφλήσει το χρέος του, υπογράφει στις 5 Ιανουαρίου δύο γραμμάτια:
α) 800 ευρώ, το οποίο λήγει την 31η Μαρτίου και
β) 1200 ευρώ.
Πότε πρέπει να λήγει το 2ο γραμμάτιο για να εξοφληθεί το χρέος; (Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 6% και έτος μεικτό).

Απάντηση/Λύση

Θέλουμε να αντικαταστήσουμε ένα χρέος που αποτελείται από δύο γραμμάτια ονομαστικής αξίας Κ1,Κ2 και ποσό Κ3=500 με δύο νέα γραμμάτια ονομαστικής αξίας Κ4, Κ5. Γνωρίζουμε τις ονομαστικές αξίες όλων των γραμματίων, και δεν γνωρίζουμε την ημερομηνία λήξης του Κ5. Για να μπορέσουμε να την υπολογίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας με ημερομηνία υπολογισμού της ισοδυναμίας την 5η Ιανουαρίου. Στην ημερομηνία αυτή όλα τα υπόλοιπα γραμμάτια λήγουμε μετά, οπότε η αξία τους υπολογίζεται με αφαίρεση του αντίστοιχου προεξοφλήματος.
Οι μέρες που αντιστοιχούν σε κάθε ποσό μέχρι την ημερομηνία ισοδυναμίας υπολογίζονται ως εξής:
Για το πρώτο γραμμάτιο Κ1 που λήγει στις 10 Ιανουαρίου, δηλαδή 5 μέρες μετά, οι μέρες προεξόφλησης είναι 5+2=7 μέρες. Στην προεξόφληση οι τράπεζες υπολογίζουν τις τοκοφόρες μέρες +2 μέρες επιπλέον.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ2 που λήγει 20 Απριλίου οι μέρες προεξόφλησης είναι 26+28+31+20+2=107 μέρες.
Για το ποσό μετρητών Κ3 που έπρεπε να πληρωθεί 5 Ιανουαρίου δεν υπάρχει ούτε τόκος ούτε προεξόφληση.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ4 που λήγει 31 Μαρτίου, οι μέρες προεξόφλησης είναι 26+28+31+2=87 μέρες.
Για το γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ5 που δεν γνωρίζουμε την ημερομηνία λήξης του, οι μέρες συμβολίζονται με ν μέρες.

Η οικονομική ισοδυναμία γράφεται Κ1-Ε1+Κ2-Ε2+Κ3=Κ4-Ε4+Κ5-Ε5 και, αντικαθιστώντας με τον τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος, έχουμε:
700-700*0,06*7/360+600-600 *0,06*107/360+500=800-800*0,06*87/360+1200-1200*0,06*ν/360

Στη συνέχεια λύνουμε την παραπάνω εξίσωση με άγνωστο το ν, κάνοντας τις πράξεις και χωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους.

-200-(294+3852-4176)/360=-72 ν/360 ⇔ -200,083 =-0,2 ν⇔ ν=1000,4 μέρες.

Επομένως η ζητούμενη ημερομηνία λήξης θα είναι 1000 μέρες (σχεδόν τρία έτη) μέρες μετά την 5η Ιανουαρίου του έτους υπολογισμού.

Άσκηση 10

Ένας έμπορος αγόρασε σήμερα εμπορεύματα συνολικής αξίας 25.000 ευρώ και έδωσε μια συναλλαγματική αξίας 17.000 ευρώ, η οποία λήγει σε 60 μέρες. (προεξοφλήθηκε με εσωτερική προεξόφληση και επιτόκιο 6%). Να βρεθεί πόσα χρήματα σε μετρητά οφείλει ο έμπορος, ώστε να εξοφλήσει την αξία των αγορών του.

Απάντηση/Λύση

Η αξία της συναλλαγματικής μετά την εσωτερική προεξόφληση θα είναι 17.000-Ε1, όπου Ε1 το εσωτερικό προεξόφλημα το οποίο υπολογίζεται με τον τύπο:

Ε1=Κ*i*ν/(360+i*ν)=17.000*0,06*60/(360+0,06*60)=61200/363,6=168,3€.

Αφού τα εμπορεύματα άξιζαν 25.000 και η αξία της συναλλαγματικής ήταν 17.000-168.3=16.831,7. Τα χρήματα που οφείλει ακόμη ο έμπορος είναι 25.000-16.831,7=8.168,3 €

Άσκηση 11

Έχουμε συναλλαγματική αξίας 2.500 ευρώ η οποία λήγει σε 100 μέρες. Σε 40 μέρες από σήμερα αγοράζουμε εμπόρευμα αξίας 3.000 ευρώ και πληρώνουμε με τη συναλλαγματική που έχουμε και, επιπλέον, υπογράφουμε μια νέα συναλλαγματική αξίας 600 ευρώ. Αν το επιτόκιο είναι 7%, πότε πρέπει να λήγει η δεύτερη συναλλαγματική;

Απάντηση/Λύση

για πρόβλημα αντικατάστασης του ποσού των 3.000 ευρώ με δύο συναλλαγματικές ονομαστικής αξίας Κ1=2.500 και Κ2=600 με ημερομηνία υπολογισμού την ημερομηνία αγοράς των εμπορευμάτων. Οι δύο συναλλαγματικές, που λήγουν σε επόμενη ημερομηνία, προεξοφλούνται.

Την ημερομηνία αυτή η πρώτη συναλλαγματική προεξοφλείται 100-40=60 μέρες πριν τη λήξη της και η δεύτερη συναλλαγματική λήγει σε ν μέρες, τις οποίες πρέπει να προσδιορίσουμε.

Η οικονομική ισοδυναμία γράφεται ως εξής:

Κ=Κ1-Κ1* i*ν1/360+ Κ2-Κ2* i*ν/360 ⇔

3000=2500 -2500*0,07*60/360 + 600-600*0,07*ν/360 ⇔

-100+10500/360=-42ν/360 ⇔ 70,84=0,117ν ⇔ν=70,84/0,117⇔ν=605,5 μέρες

Επομένως η δεύτερη συναλλαγματική θα πρέπει να λήγει 605 μέρες (σχεδόν 2 χρόνια) μετά την ημερομηνία υπολογισμού.

Άσκηση 12

Υπάλληλος δανείζεται σήμερα 7.000 ευρώ, τα οποία πρέπει να πληρώσει σε ένα χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 4%. Σκοπεύει να εξοφλήσει το χρέος του με δύο ισόποσες πληρωμές σε 5 και 10 μήνες από σήμερα. Αν ως εποχή ισοδυναμίας πάρουμε το ένα έτος από σήμερα, πόσο θα είναι το ποσό που πρέπει να πληρώσει στις δύο πληρωμές;

Απάντηση/Λύση

Η αξία του ποσού των 7.000 θα πρέπει να είναι οικονομικά ισοδύναμη με δύο ίσα ποσά (έστω Κ), από τα οποία το πρώτο θα πληρωθεί σε 5 μήνες και το δεύτερο σε 10 μήνες.

Θα πρέπει όμως να υπολογίσουμε την οικονομική ισοδυναμία σε ένα έτος από σήμερα, αφού έτσι ζητάει η άσκηση.

Κατά την ημερομηνία αυτή, όλα τα ποσά αυξάνουν την αξία τους με τον αντίστοιχο τόκο, αφού έχει περάσει η ημερομηνία οφειλής τους.
Για το συνολικό ποσό των 7000 έχουν περάσει μ=12 μήνες.
Για το ποσό που θα πληρωθεί σε 5 μήνες από σήμερα θα έχουν περάσει μ1=12-5=7 μήνες και για το ποσό που θα πληρωθεί σε 10 μήνες από σήμερα θα έχουν περάσει μ2=12-10=2 μήνες.

Επομένως η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας θα γράφεται
7000+7000*i*μ/12=K+K* i*μ1/12+ K+K* i*μ2/12 ⇔
7000+7000*0,04*12/12=K(1+0,04*7/12+1+0,04*2/12) ⇔
7280=2,3K ⇔ K=3165,2€

Άσκηση 13

Πότε πρέπει να λήγει ένα γραμμάτιο αξίας 2.000 ευρώ το οποίο στις 5/3 αντικαθιστά τρία γραμμάτια. Το πρώτο αξίας 700 ευρώ που λήγει 30/4. Το δεύτερο αξίας 800 ευρώ και λήγει 15/5. Το τρίτο 500 ευρώ που λήγει 5/6. Το επιτόκιο είναι 8% και το έτος μεικτό.

Απάντηση/Λύση

Η αξία του ποσού των K=2.000 θα πρέπει να είναι οικονομικά ισοδύναμη με τα τρία ποσά (έστω K1=700, K2=800, K3=500), από τα οποία το πρώτο θα πληρωθεί σε ν1 μέρες, το δεύτερο σε ν2 μέρες, το τρίτο σε ν3 μέρες.
Θα υπολογίσουμε την οικονομική ισοδυναμία στις 5 Μαρτίου και θα μετρήσουμε τις αντίστοιχες μέρες για κάθε γραμμάτιο, προσθέτοντας τις μέρες κάθε μήνα που μεσολαβεί συν δύο επιπλέον μέρες για την προεξόφληση. ν1=26+30+2=58 μέρες. ν2= 26+30+15+2=73 μέρες. ν3= 26+30+31+15+2=104 μέρες. Οι μέρες λήξης του ποσού K=2.000 έστω ότι είναι ν μετά την $5^{η}$ Μαρτίου.
Κατά την ημερομηνία αυτή, όλα τα ποσά προεξοφλούνται, αφού δεν έχει περάσει η ημερομηνία λήξης τους.
Επομένως η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας θα γραφεί

K-K*i*ν/360=K1-K1* i*ν1/360+ K2-K2* i*ν2/360+ K3-K3* i*ν3/360 ⇔
2.000-2.000*0,08*ν/360=700-700* 0,08* 58/360+ 800-800* 0,08*73/360+ 500-500* 0,08*104/360 ⇔ 2.000-700- 800-500+700* 0,08* 58/360+800* 0,08*73/360+500* 0,08*104/360 =2.000*0,08*ν/360 ⇔ απλοποιώντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (απαλοιφή 0,08/360 από όλους τους όρους) έχουμε:

700* 58+800*73+500*104 =2.000*ν ⇔151.000 =2.000*ν ⇔ ν=75,5 μέρες.

Το γραμμάτιο αξίας 2.000 ευρώ πρέπει να λήγει 76 μέρες μετά τη $5^{η}$ Μαρτίου, δηλαδή στις 20 Μαΐου.

Άσκηση 14

Δύο γραμμάτια αξίας 500 ευρώ το καθένα, λήγουν μετά από 40 και 160 μέρες αντίστοιχα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 1.000 ευρώ, το οποίο αντικαθιστά τα δύο γραμμάτια;

Απάντηση/Λύση

Χρησιμοποιούμε σαν ημερομηνία ισοδυναμίας τη σημερινή ημερομηνία. Έστω K=1.000 ευρώ και ν οι μέρες από σήμερα μέχρι τη λήξη του. Συμβολίζουμε K1=500 ευρώ, ν1=40 μέρες, K2=500 ευρώ, ν2=160 μέρες για το πρώτο και δεύτερο γραμμάτιο αντίστοιχα. Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας θα γραφεί
K-K*i*ν/360=K1-K1* i*ν1/360+ K2-K2* i*ν2/360 ⇔
1.000-1.000*i*ν/360=500-500* i*40/360+ 500-500* i*160/360 ⇔
1.000-500-500+500*i*40/360+500*i*160/360 =1.000*i*ν/360 απλοποιώντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (απαλοιφή i /360 από όλους τους όρους) έχουμε:

500*40+500*160 =1.000*ν ⇔100.000=1.000*ν ⇔ ν =100 μέρες.

Το γραμμάτιο αξίας 1.000 ευρώ πρέπει να λήγει σε 100 μέρες μετά τη σημερινή ημερομηνία.

Ανατοκισμός

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Αρχικό κεφάλαιο ή παρούσα αξία (συμβολισμός K_o ή PV)

-Τελικό κεφάλαιο ή μελλοντική αξία (συμβολισμός K_n ή FV)

-Επιτόκιο (συμβολισμός i ή r)

-Χρόνος (συμβολισμός n Ακέραιες περιόδους, μ/ρ κλάσμα χρονικών περιόδων)

-Συντελεστής ανατοκισμού ή κεφαλαιοποίησης

-Συντελεστής προεξόφλησης

-Εύρεση τιμών με παρεμβολή

ΣΤΟΧΟΙ

-Κατανόηση και χρησιμοποίηση του τύπου υπολογισμού τελικού κεφαλαίου με ανατοκισμό.

-Διάκριση της χρονικής περιόδου ανατοκισμού και εφαρμογή του τύπου.

-Μεταβολή επιτοκίου ή χρόνου, ώστε να μπορεί να εφαρμοσθεί ο τύπος υπολογισμού, όταν το επιτόκιο ή ο χρόνος εκφράζονται σε διαφορετική χρονική περίοδο από την περίοδο του ανατοκισμού.

-Εύρεση παρούσας αξίας, όταν γνωρίζουμε τη μελλοντική αξία κεφαλαίου.

-Εύρεση χρόνου ή επιτοκίου, για να φθάσουμε στο τελικό κεφάλαιο που επιθυμούμε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Διαθέτουμε κεφάλαιο 2.000 ευρώ και θέλουμε να αγοράσουμε ένα μηχάνημα αξίας 3.000 ευρώ. Θα πρέπει να δανειστούμε 1.000 ευρώ με επιτόκιο 6% ή να καταθέσουμε το κεφάλαιο μας σε αποταμιευτικό λογαριασμό με επιτόκιο 4%, και να αγοράσουμε το μηχάνημα σε δύο χρόνια, όταν η τιμή του θα είναι 2.800 ευρώ;

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την αξία χρήματος με ανατοκισμό;

1 Εισαγωγή – παραγωγική αξία κεφαλαίου

Το κεφάλαιο (χρηματικό απόθεμα) έχει παραγωγική αξία, όταν χρησιμοποιείται στην Οικονομία. Στην περίπτωση που το κεφάλαιο επενδύεται σε κάποια παραγωγική διαδικασία, τότε η παραγωγική του αξία εκφράζεται με την απόδοση της επένδυσης. Συχνά το κεφάλαιο που έχει κάποιος στη διάθεσή του, δεν θέλει να το επενδύσει και να του αποφέρει απόδοση, είτε γιατί δεν ξέρει που να το επενδύσει είτε γιατί θέλει να το έχει διαθέσιμο άμεσα, όποτε το χρειαστεί. Αν όμως κρατάει το κεφάλαιο κρυμμένο, και δεν το χρησιμοποιεί στην οικονομία, αυτό δεν έχει παραγωγική αξία, αφού δεν χρησιμοποιείται.

Αν υποθετικά όλα τα μέλη μιας Οικονομίας κρατούσαν το διαθέσιμο κεφάλαιό του στα συρτάρια τους, οι παραγωγοί δεν θα μπορούσαν να βρουν διαθέσιμα κεφάλαια, ώστε να τα επενδύσουν στην παραγωγή αγαθών. Η Οικονομία αυτή δεν θα μπορούσε να παράγει και να πουλήσει αγαθά, δεν θα μπορούσαν να γίνουν ανταλλαγές αγαθών στην Οικονομία και, επομένως, δεν θα μπορούσε να λειτουργήσει.

Από πολύ νωρίς, οι άνθρωποι σκέφτηκαν ότι θα έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος , ώστε, από τη μια μεριά, να χρησιμοποιούνται τα χρηματικά τους αποθεματικά στην παραγωγική διαδικασία και, από την άλλη, να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν, μόλις τα χρειαστούν.

Ο ευκολότερος τρόπος, να γίνει αυτό, είναι μέσω των αποταμιευτικών λογαριασμών στις τράπεζες. Αποταμιεύονται χρήματα στην Τράπεζα, η τράπεζα τα δανείζει σε όσους θέλουν να τα επενδύσουν και, παράλληλα, έχει χρήματα διαθέσιμα, ώστε να τα επιστρέψει, μόλις κάποιος τα χρειαστεί. Η τράπεζα λοιπόν αγοράζει και πουλάει χρήματα, σαν να ήταν ένα οικονομικό αγαθό. Η αγοροπωλησία αυτή αποφέρει κέρδος στην Τράπεζα, αλλά και στους αποταμιευτές, που παραχωρούν τα χρήματά τους σ' αυτή.

Όσοι λοιπόν αποταμιεύουν τα χρήματά τους, απολαμβάνουν ένα επιπλέον ποσό για κάθε χρηματική μονάδα, το οποίο ονομάστηκε «τόκος». Η λέξη αυτή προέρχεται από το ρήμα «τίκτω» που σημαίνει γεννάω.

Όσοι δανείζονται χρήματα από την Τράπεζα θα πρέπει να πληρώσουν επιπλέον ποσό για κάθε χρηματική μονάδα, το οποίο ονομάζεται «τόκος για το δανεισμό».

Φυσικά το ποσό που πληρώνεται ως τόκος δανεισμού είναι μεγαλύτερο από το ποσό που παίρνει ο αποταμιευτής ως τόκο αποταμίευσης, και η διαφορά των δύο τόκων είναι το όφελος της Τράπεζας.

Ο τόκος είναι ανάλογος του ποσού των χρημάτων και, επιπλέον, ανάλογος του χρόνου κατά τον οποίο τα χρήματα χρησιμοποιούνται.

2 Απλός και σύνθετος τόκος

Για τον υπολογισμό του τόκου χρησιμοποιείται το «επιτόκιο». Επιτόκιο είναι ο τόκος μιας χρηματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο, συνήθως σε ένα έτος. Το επιτόκιο, συνήθως, εκφράζεται σε ποσοστό, και εκφράζει με τον τόκο 100 χρηματικών μονάδων σε ένα έτος.

Έτσι έχουμε εκφράσεις όπως: επιτόκιο καταθέσεων 4%, ή επιτόκιο δανεισμού 9% ή επιτόκιο πίστωσης 2% το μήνα, κλπ.

Αν το αρχικό κεφάλαιο που κατατίθεται δεν αλλάζει, αλλά παραμένει το ίδιο σ' όλη τη χρονική περίοδο, ο τόκος εισπράττεται κάθε φορά από τον καταθέτη, και ονομάζεται απλός τόκος.

Αν το αρχικό κεφάλαιο που κατατίθεται αλλάζει σε τακτά χρονικά διαστήματα, όταν ο τόκος δεν εισπράττεται κάθε φορά από τον καταθέτη, αλλά ενσωματώνεται στο κεφάλαιο και επανα-τοκίζεται, ονομάζεται σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός.

Στην περίπτωση του ανατοκισμού ένα κεφάλαιο όσο περισσότερο χρονικό διάστημα τοκισθεί, τόσο περισσότερο αυξάνει, και, επειδή και ο τόκος του κεφαλαιοποιείται και ανατοκίζεται, μπορεί να μεγαλώσει γρήγορα.

3 Ορισμοί εννοιών

Αρχικό κεφάλαιο συμβολίζεται με K_o ή PV και είναι το κεφάλαιο στην αρχή μέτρησης των χρονικών περιόδων.

Τελικό κεφάλαιο συμβολίζεται με K_n ή FV και είναι το κεφάλαιο στο τέλος των χρονικών περιόδων του ανατοκισμού.

Επιτόκιο συμβολίζεται με i ή r και εκφράζει τον τόκο που αποφέρει κεφάλαιο μιας χρηματικής μονάδας (ή 100 μονάδων όταν εκφράζεται με ποσοστό), σε μια χρονική περίοδο.

Τόκος συμβολίζεται με I και εκφράζει τον τόκο που αποφέρει το συνολικό κεφάλαιο σε όλη τη μελετώμενη χρονική περίοδο.

Ισχύει η εξίσωση $K_n= K_o+I$

Χρόνος συμβολίζεται με n για ακέραιες χρονικές περιόδους ή με μ/ρ για κλάσμα χρονικών περιόδων και εκφράζει το χρονικό διάστημα για το οποίο ένα κεφάλαιο αποφέρει τόκο.

4 Υπολογισμός του τελικού κεφαλαίου στον ανατοκισμό

Ας υποθέσουμε ότι ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 τοκίζεται για n ακέραιες χρονικές περιόδους με επιτόκιο i.

Στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_1, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_0*i*1.

Ισχύει $K_1=K_0+K_0*i =K_0 (1+i)$

Στο τέλος της δεύτερης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_2, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_1*i*1.

Ισχύει $K_2=K_1+K_1*i = K_1 (1+i)$

και, αντικαθιστώντας το K_1 έχουμε $K_2=K_0 (1+i)* (1+i)$.

Στο τέλος της τρίτης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_3, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_2*i*1.

Ισχύει $K_3=K_2+K_2*i = K_2 (1+i) = K_0 (1+i)*(1+i)*((1+i)$

Και, συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο τον υπολογισμό του τόκου και αντικαθιστώντας,

το τελικό κεφάλαιο K_n στο τέλος των n χρονικών περιόδων θα είναι

$K_n=K_{n-1}+K_{n-1}*i*1=\ldots\ldots= K_0 (1+i)^n$

$$\boxed{K_n= K_0 (1+i)^n}$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος είναι ο γενικός τύπος του ανατοκισμού. Εκφράζει την ισοδυναμία μεταξύ του αρχικού ποσού κεφαλαίου και του τελικού ποσού μετά από n χρονικές περιόδους.

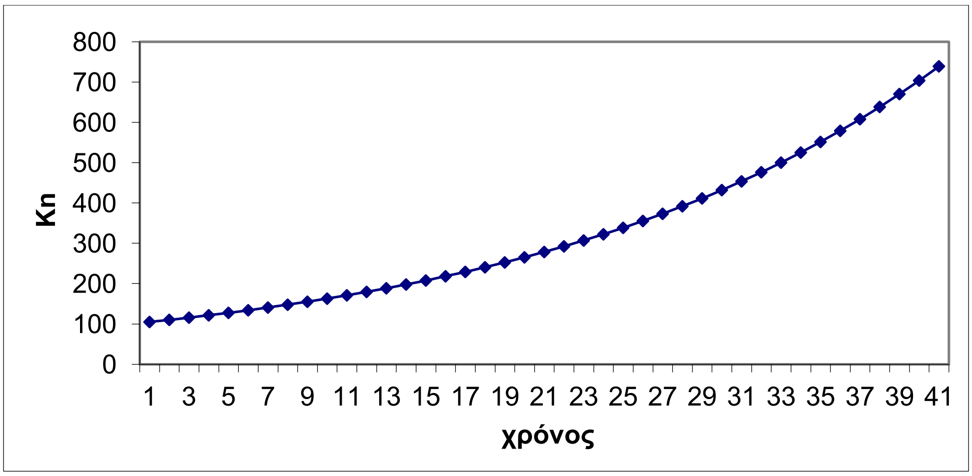
Θυμίζουμε τον τύπο τελικού κεφαλαίου με απλό τόκο που είναι $K_n= K_0 (1+i*n)$. Στον ανατοκισμό, επειδή ο χρόνος είναι στον εκθέτη το τελικό κεφάλαιο αυξάνει πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι στον απλό τόκο.

4.1 Σημεία προσοχής

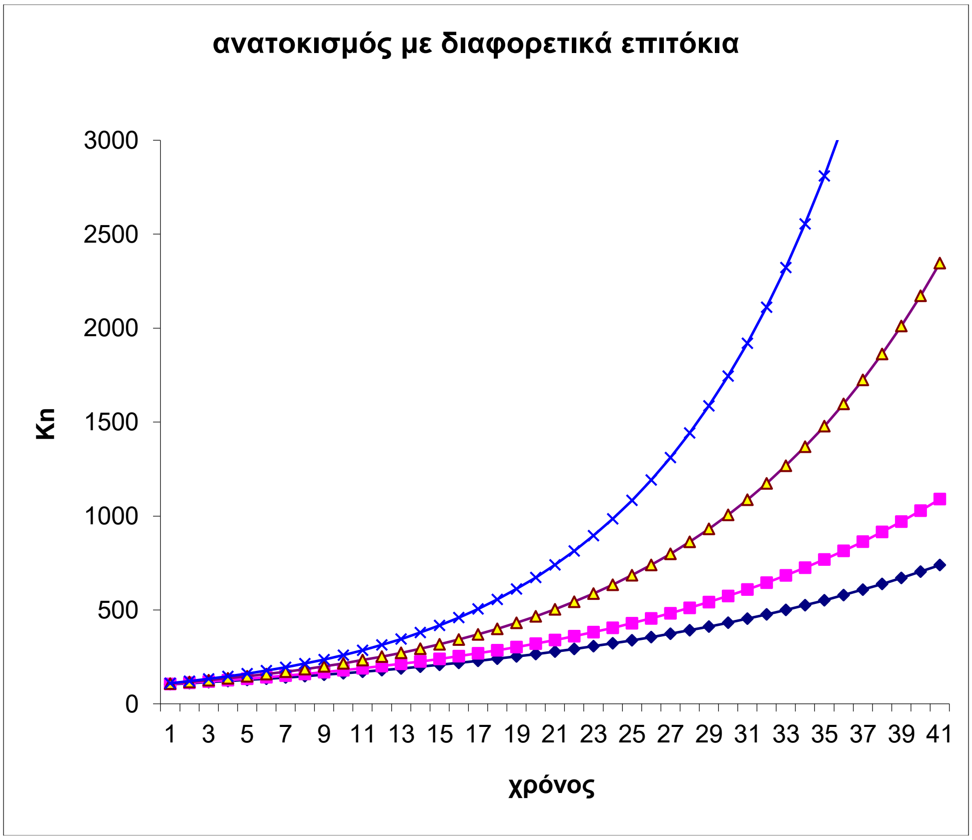
Συνήθως το n εκφράζεται σε έτη και το επιτόκιο είναι ετήσιο και γράφεται σε δεκαδική μορφή (όχι σε %). Αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος κλπ., θα πρέπει το επιτόκιο να εκφράζεται σε εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα αντίστοιχα και οι χρονικές περίοδοι σε εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες αντίστοιχα. Γενικά θα πρέπει η περίοδος υπολογισμού του ανατοκισμού να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου και με την περίοδο μέτρησης του επιτοκίου.

5. Γραφική παράσταση

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά την μεταβολή του κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 4.1. (Αλεξανδρόπουλος κ.α., 2004).



Σχήμα 4.1 *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο*



Σχήμα 4.2. *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο με διαφορετικά επιτόκια*

Όσο μετακινούμαστε δεξιά στη γραμμή του χρόνου, τόσο το κεφάλαιο αυξάνει προς τα επάνω στο σχήμα, με γρήγορο ρυθμό. Ο ρυθμός αυτός αύξησης εξαρτάται από το επιτόκιο ανατοκισμού, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 4.2, όπου παρουσιάζεται η αύξηση του ίδιου κεφαλαίου, αλλά με διαφορετικό κάθε φορά επιτόκιο.

6 Συντελεστής ανατοκισμού

Ο συντελεστής $(1+i)^n$ του τύπου του ανατοκισμού, ονομάζεται συντελεστής ανατοκισμού και εκφράζει το ισοδύναμο ποσό μιας χρηματικής μονάδας μετά από n χρονικές περιόδους. Επειδή ο συντελεστής αυτός χρησιμοποιείται σε πολλούς υπολογισμούς, για την ακρίβεια των υπολογισμών, θα πρέπει να χρησιμοποιείται με πολλά δεκαδικά ψηφία και να μη στρογγυλοποιείται. Για λόγους ευκολίας, υπάρχει πίνακας υπολογισμού (βλέπε αρχείο excel) με τις διάφορες τιμές του συντελεστή για διαφορετικές τιμές του χρόνου n και του επιτοκίου i.

Έτσι, προκειμένου να υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο, πολλαπλασιάζουμε το αρχικό κεφάλαιο με την τιμή του συντελεστή ανατοκισμού που προκύπτει από τον πίνακα για επιτόκιο i και ακέραια χρονική περίοδο n.

7 Παραδείγματα εφαρμογής τύπου ανατοκισμού

Παράδειγμα 4.7.1.

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%;

<u>Λύση</u>

Τα δεδομένα μας είναι:

K_o=10.000

i=3%=0,03

n=5 έτη

Το ζητούμενο είναι το K_n, το οποίο θα υπολογισθεί από τον τύπο:

$K_n = K_o\ (1+i)^n = 10.000*\ (1+0{,}03)^5 = =10.000*1{,}15927 = 11.592{,}7$

Παράδειγμα 4.7.2.

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%;

Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:

$K_o = 10.000$

$i = 3\% = 0{,}03$

n=5 έτη =10 εξάμηνα

(μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα, για να συμπίπτει με το χρόνο ανατοκισμού)

Το ζητούμενο είναι το K_n, το οποίο θα υπολογισθεί από τον τύπο:

$K_n = K_o\ (1+i)^n = 10.000*\ (1+0{,}03)^{10} = 10.000*1{,}343916 = 13.439{,}16$

8 Χρονική περίοδος και ανατοκισμός

Ερώτηση: Μετά από δύο έτη, ο ανατοκισμός 100 ευρώ κάθε εξάμηνο θα είναι προτιμότερος από τον ανατοκισμό κάθε έτος; Υποθέστε ότι το επιτόκιο είναι 2,5% κάθε εξάμηνο και 5% κάθε έτος.

Το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά εξάμηνο, εφόσον τα δύο έτη αντιστοιχούν σε τέσσερα εξάμηνα, θα είναι:

$K_{\text{εξαμηνα}} = 100(1+0{,}025)^4 = 110{,}38$

Το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά έτος θα είναι:

$K_{\text{έτη}} = 100(1+0{,}05)^2 = 110{,}25$

Παρατηρούμε ότι υπερέχει λίγο (0,13 ευρώ) το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά εξάμηνο από ό,τι με τον ανατοκισμό ανά έτος. Αν όμως αντί για 100 ευρώ το κεφάλαιο μας ήταν 100.000 ευρώ, θα υπήρχε μια διαφορά 130 ευρώ.

Επομένως θα πρέπει να θυμόμαστε ότι:

Ο ανατοκισμός που γίνεται σε πιο σύντομες χρονικές περιόδους, αποφέρει μεγαλύτερο τόκο, για το ίδιο κεφάλαιο στον ίδιο χρόνο με αντίστοιχο επιτόκιο.

Ως καταθέτες μας συμφέρει ο ανατοκισμός να γίνεται σε όσο το δυνατό μικρότερο χρονικό διάστημα. Ως δανειζόμενοι μας συμφέρει να γίνεται σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ώστε να μην αυξάνει υπέρμετρα το χρέος μας.

Έχει επικρατήσει στις Τράπεζες και τα Ταμιευτήρια, ο ανατοκισμός να γίνεται κάθε εξάμηνο.

9 Ανατοκισμός όταν ο χρόνος δεν αντιστοιχεί σε ακέραιες περιόδους

Στην πραγματική οικονομία, σπάνια ο χρόνος μετριέται σε ακέραιο αριθμό ετών ή εξαμήνων. Συνήθως μετριέται με αριθμό ετών, μηνών και ημερών.

Μέτρηση χρόνου σε:	**n**	**μ**	**ρ**
Έτη	έτη	μήνες	12
Έτη	έτη	μέρες	360 ή 365
Εξάμηνα	εξάμηνα	μήνες	6
Έτη	εξάμηνα	μέρες	180 ή 182,5
Τρίμηνα	τρίμηνα	μήνες	3
Τρίμηνα	τρίμηνα	μέρες	90
Έτη εξάμηνα τρίμηνα		Μήνες και μέρες => Μετατρέπουμε όλα σε μέρες	360 (έτη) ή 180 (εξάμηνα) ή 90 (τρίμηνα)

Πίνακας 4.1 *Χρονική έκφραση του κλάσματος του μ/ρ*

Έστω ότι ο χρόνος μετριέται με ακέραιο αριθμό n ετών και κλασματική χρονική περίοδο μ/ρ, όπου συνήθως μ είναι οι μήνες και ρ=12. Θα μπορούσε ακόμη, αν ο χρόνος μετριέται σε ημέρες, να είχαμε ν/ρ, όπου ν ο αριθμός ημερών και ρ=360.

Γενικά το κλάσμα μ/ρ μπορεί να μετράει μήνες έτους, μέρες έτους, μήνες εξαμήνου, μέρες εξαμήνου κλπ, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού του τελικού κεφαλαίου με ανατοκισμό. Ο εκθετικός τρόπος και ο μεικτός ανατοκισμός.

9.1 Εκθετικός τρόπος

Χρησιμοποιώντας τον εκθετικό τρόπο υπολογισμού, στον εκθέτη εκτός από τον ακέραιο αριθμό μέτρησης του χρόνου προσθέτουμε και τον κλασματικό αριθμό.

Ο υπολογισμός της δύναμης, με εκθέτη κλασματικό αριθμό, γίνεται με χρήση επιστημονικού υπολογιστή.

$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}$

9.2 Μεικτός ανατοκισμός

Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται το τελικό κεφάλαιο με ανατοκισμό για τον ακέραιο αριθμό περιόδων, ενώ για τον κλασματικό αριθμό περιόδων χρησιμοποιείται ο τύπος του απλού τόκου. Έτσι ο τύπος του τελικού κεφαλαίου θα είναι ο εξής:

$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)$

Ο μεικτός ανατοκισμός εφαρμόζεται σε Τράπεζες και Ταμιευτήριο, σε βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, δηλαδή, γίνεται ανατοκισμός του κεφαλαίου για τον ακέραιο χρόνο, και υπολογίζεται απλός τόκος για το υπόλοιπο κλασματικό μέρος του χρόνου, ο οποίος προστίθεται στο κεφάλαιο.

Ο απλός τόκος υπολογίζεται με τον τύπο $I=\ K_o*(1+i)^n*\mu/\rho*i$.

Προσθέτοντας με το κεφάλαιο του ακέραιου ανατοκισμού προκύπτει:

$K_n=K_o\ (1+i)^n + K_o*(1+i)^n*\mu/\rho*i = K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)$

Παράδειγμα 4.9.2.1

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 3%;

Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:

Ko=10.000

i=3%=0,03

n=5 έτη και 3 μήνες

Ο χρόνος γράφεται (5+3/12) έτη

Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους:

Εκθετικός ανατοκισμός

$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}$=10.000* (1+0,.03)$^{5+3/12}$= 10.000*1,1678=11.678 ευρώ

Μεικτός ανατοκισμός

$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)$ =10000* (1+0,03)^5*(1+3/12*0,03)= =10.000*1,15927*1,0075= 11.679,6 ευρώ

Παρατηρούμε ότι με το μεικτό ανατοκισμό, έχουμε ελαφρώς μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο από ό,τι με τον εκθετικό τρόπο υπολογισμού.

10. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου (παρούσας αξίας)

Πολλές φορές επιθυμούμε να υπολογίσουμε το κεφάλαιο που θα πρέπει να καταθέσουμε στο παρόν, ώστε με τον ανατοκισμό να σχηματισθεί δεδομένο μελλοντικό κεφάλαιο. Ξέρουμε, δηλαδή, το τελικό κεφάλαιο που θα σχηματισθεί, και μας ενδιαφέρει να βρούμε ποιο αρχικό κεφάλαιο θα πρέπει να καταθέσουμε στην Τράπεζα, ώστε, με δοσμένο επιτόκιο, για δεδομένο χρόνο, να σχηματισθεί το επιθυμητό μελλοντικό κεφάλαιο. Στην περίπτωση αυτή, το ζητούμενο αρχικό κεφάλαιο, επειδή είναι ισοδύναμο με το μελλοντικό κεφάλαιο, ονομάζεται και παρούσα αξία του μελλοντικού κεφαλαίου.

Παρούσα αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου ονομάζεται η οικονομική αξία που έχει την παρούσα στιγμή που γίνεται ο υπολογισμός. **Μελλοντική αξία** ονομάζεται η αξία που έχει στο μέλλον. Αρκετές φορές, κυρίως στις περιπτώσεις γραμματίων και συναλλαγματικών, γνωρίζουμε την αξία τους στο μέλλον και ζητάμε την παρούσα αξία τους. Στη συνέχεια ονομάζουμε την μελλοντική αξία **τελική αξία**, ενώ την παρούσα αξία την ονομάζουμε και **αρχική αξία**.

Αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, το επιτόκιο ανατοκισμού και το χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του Ko. Χρησιμοποιούμε το βασικό τύπο του ανατοκισμού. (Καραπιστόλης, 2012).

$Kn=Ko\ (1+i)^n$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο αυτό, διαιρώντας με τον όρο $(1+i)^n$ και έχουμε:

$K_0=Kn\ /\ (1+i)^n$

Συμβολίζοντας τον όρο $1/(1+i)^n$ με U^n ,ο τύπος γίνεται: $K_0=Kn\ U^n$

Ο αριθμός $1/(1+i)^n$, (ο αντίστροφος του συντελεστή ανατοκισμού) συμβολίζεται με U^n και ονομάζεται συντελεστής προεξόφλησης.

όπου

$$U^n = \frac{1}{(1+i)^n}$$

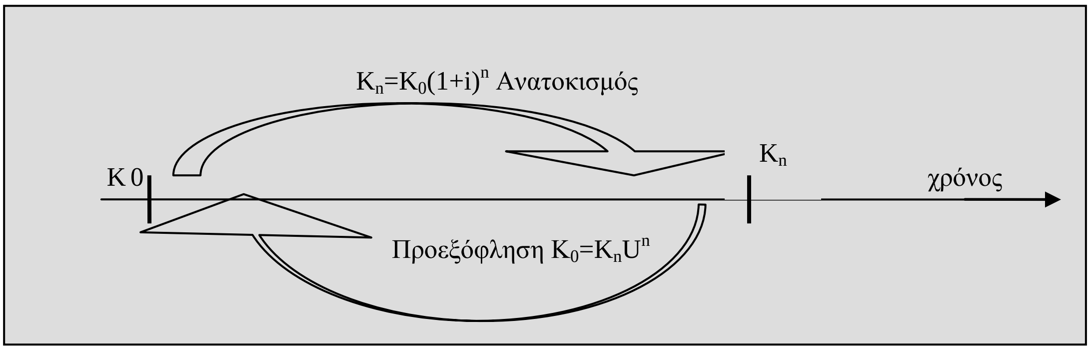
Ο συντελεστής προεξόφλησης U^n υπολογίζεται από πίνακες και μας δίνει την αρχική αξία ποσού που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, ώστε μετά από n χρονικές περιόδους να γίνει 1 νομισματική μονάδα, όταν το επιτόκιο είναι i. Πήρε το όνομά του από το γεγονός ότι προεξοφλούμε μελλοντική αξία κεφαλαίου, βρίσκοντας την τωρινή ισοδύναμή του αξία. Οι τιμές του συντελεστή προεξόφλησης είναι πάντα μικρότερες από τη μονάδα, αφού ο παρανομαστής του κλάσματος είναι πάντα μεγαλύτερος του 1. Από οικονομική ερμηνεία, η μελλοντική ισοδύναμη αξία κεφαλαίου είναι μεγαλύτερο μέγεθος από την παρούσα αξία. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη μελλοντική αξία με αριθμό μικρότερο της μονάδας.

Ο τύπος $K_0=K_n\ {*}U^n$ ονομάζεται και τύπος προεξόφλησης

Ο όρος $U^n=1/(1+i)^n$ ονομάζεται συντελεστής προεξόφλησης.

Υπάρχει πίνακας με τις διάφορες τιμές του συντελεστή προεξόφλησης ανάλογα με την τιμή του επιτοκίου και της χρονικής περιόδου n.

Επομένως η τιμής της παρούσας αξίας υπολογίζεται εύκολα, πολλαπλασιάζοντας την τελική αξία με την τιμή του συντελεστή προεξόφλησης. (σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3. *Ισοδυναμία κεφαλαίων K_0 και K_n στο χρόνο*

Στην περίπτωση που ο χρόνος μετριέται σε ακέραιες χρονικές περιόδους n και κλασματικές περιόδους μ/ρ, χρησιμοποιείται ο μεικτός ανατοκισμός.

Ο τύπος υπολογισμού της παρούσας αξίας (τύπος προεξόφλησης) είναι:

$K_0 = K_n * U^n / (1+\mu/\rho*i)$

10.1 Παράδειγμα εφαρμογής τύπου προεξόφλησης

Πόσο κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε σήμερα το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3% και γίνεται 15.000 ευρώ;

Λύση
Το τελικό κεφάλαιο είναι Kn=15.000
Το ετήσιο επιτόκιο είναι i=3%=0.03
Ο χρόνος ανατοκισμού είναι n=5 έτη
Ζητάμε την αρχική αξία του κεφαλαίου που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα.
Χρησιμοποιούμε τον τύπο
$K0=Kn/(1+i)^n=15000/ (1+0.03)^5= 15.000*0.8626=12.939$
Επομένως η παρούσα αξία είναι 12.939 ευρώ.

11. Εύρεση του επιτοκίου ανατοκισμού

Αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, την αρχική του αξία, το επιτόκιο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο που μεσολαβεί, χρησιμοποιούμε το βασικό τύπο του ανατοκισμού.

Τον ίδιο τύπο χρησιμοποιούμε και στην περίπτωση στην οποία ζητάμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο, αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, την αρχική του αξία, τον χρόνο ανατοκισμού.

Στην περίπτωση στην οποία γνωρίζουμε το αρχικό και τελικό κεφάλαιο, το χρόνο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο, μετατρέπουμε τον τύπο $K_n=K_o (1+i)^n$, ως εξής:

Ο τύπος αυτός μετασχηματίζεται, διαιρώντας με τον όρο K_0, και έχουμε:

$(1+i)^n= Kn/ K_0$

1ος τρόπος επίλυσης της εξίσωσης

Στην περίπτωση που άγνωστος είναι το n είτε το i, λύνουμε την παραπάνω εξίσωση, λογαριθμώντας και τα δύο μέλη, και έχουμε n log(1+i)=log Kn -log K0

Τη σχέση αυτή την επιλύουμε είτε ως προς n είτε ως προς i, και η εξίσωση παίρνει τις παρακάτω μορφές:

$i= (K_n / K_0)^{1/n} -1$

$$n = \frac{\log \mathrm{K_n} - \log \mathrm{K_0}}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\log(1+\mathrm{i}) = \frac{\log \mathrm{K_n} - \log \mathrm{K_0}}{n}$$

2ος τρόπος επίλυσης της εξίσωσης

Στην περίπτωση που άγνωστος είναι το n είτε το i, και δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να βρούμε τη λύση, χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τις τιμές του συντελεστή ανατοκισμού ή κεφαλαιοποίησης.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, μπορούμε να βρούμε σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος Kn / K_0, αν γνωρίζουμε το n.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, μπορούμε να βρούμε σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος Kn / K_0 αν γνωρίζουμε το i.

11.1 Παράδειγμα

Κεφάλαιο 10000 κατατίθεται σήμερα, ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο i και γίνεται 12.170 ευρώ. Πόσο είναι το επιτόκιο;

Λύση
K_0=10.000
K_n=12.170
n=5 έτη
$(1+i)^5$= =12170/10000=1,217

Εντοπίζουμε στον πίνακα ανατοκισμού–κεφαλαιοποίησης στη γραμμή n=5 την τιμή 1,217 οπότε το επιτόκιο είναι 4%

12. Εύρεση του χρόνου ανατοκισμού

Στην περίπτωση, στην οποία γνωρίζουμε το αρχικό και τελικό κεφάλαιο, το επιτόκιο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο ανατοκισμού, μετατρέπουμε τον τύπο $K_n=K_o (1+i)^n$, ως εξής:

$(1+i)^n= K_n / K_0$
Κατόπιν, για να υπολογίσουμε το χρόνο, έχουμε δύο επιλογές:

α) Να λογαριθμήσουμε και τα δύο μέλη του τύπου και να λύσουμε ως προς n.
$n=\log(K_n / K_0)/\log(1+i)$

β) Να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα με τον συντελεστή ανατοκισμού – κεφαλαιοποίησης. Στον πίνακα αυτό εντοπίζουμε, αφού γνωρίζουμε το επιτόκιο i, σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος K_n / K_0.

13. Εύρεση του επιτοκίου ανατοκισμού ή του χρόνου με παρεμβολή

Πολλές φορές, όμως, δεν υπάρχει ακριβώς η ίδια τιμή του κλάσματος Kn / K_0 στον πίνακα κεφαλαιοποίησης. Σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε τις δύο κοντινότερες τιμές (μικρότερη και μεγαλύτερη) και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, δεν βρίσκουμε πάντα με ακρίβεια την τιμή κλάσματος K_n/K_0. Τότε εντοπίζουμε τις τιμές τις κοντινότερες στην τιμή του κλάσματος $y=K_n/K_0$, έστω y_1 και y_2, οι οποίες αντιστοιχούν σε επιτόκια ή σε χρόνο x_1 και x_2. Το ζητούμενο επιτόκιο ή ο χρόνος x υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή από τη σχέση:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

13.1 Παράδειγμα εύρεσης επιτοκίου

Κεφάλαιο 10000 κατατίθεται σήμερα, ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο i και γίνεται 12.000 ευρώ. Πόσο είναι το επιτόκιο;

Λύση
K_0=10000
K^n=12000
n=5 έτη
$(1+i)^5$= =12000/10000=1,2

Εντοπίζουμε στον πίνακα κεφαλαιοποίησης στη γραμμή n=5 την τιμή 1,2 αλλά δεν υπάρχει, οπότε εντοπίζουμε τις δύο κοντινότερες τιμές 1,188 και 1,217 που αντιστοιχούν σε επιτόκια 3,5% και 4%.

Το επιτόκιο που ψάχνουμε θα υπολογιστεί από τον τύπο παρεμβολής :

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1) =$$
$$= 0{,}035 + \frac{1{,}2 - 1{,}188}{1{,}217 - 1{,}188}(0{,}04 - 0{,}035) = 0{,}035 + \frac{0{,}012}{0{,}029}(0{,}005) = 0{,}035 + 0{,}0021 = 0{,}0371 = 3{,}71\%$$

Άρα το ζητούμενο επιτόκιο είναι 3,71%.

13.2 Παράδειγμα εύρεσης χρόνου με παρεμβολή

Κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%, γίνεται 14000 ευρώ. Πόσα έτη ανατοκιζόταν;

Λύση
K_o=10000
K_n=14000
i=3%=0,03
Χρησιμοποιούμε τη σχέση $(1+i)^n$= Kn / K0 =14000/10000=1,4

Προσπαθούμε να εντοπίσουμε στον πίνακα κεφαλαιοποίησης στη στήλη i=3% την τιμή 1,4 αλλά δεν υπάρχει. Επομένως οι κοντινότερες τιμές είναι 1,3842 για 11 έτη και 1,4258 για 12 έτη.

Ο χρόνος που ψάχνουμε θα υπολογιστεί από τον τύπο παρεμβολής :

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1) =$$
$$= 11 + \frac{1{,}4 - 1{,}3842}{1{,}4258 - 1{,}3842}(12 - 11) = 11 + \frac{0{,}0158}{0{,}0416} = 11 + 0{,}3798 = 11{,}3798$$

Άρα ο ζητούμενος χρόνος είναι 11,38 έτη, δηλαδή 11έτη και 38/100 του έτους.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε εφαρμόζω τον τύπο του ανατοκισμού.
- Τον τρόπο μέτρησης του χρόνου και εφαρμογής του τύπου στην περίπτωση κλασματικού αριθμού χρονικών περιόδων.
- Πώς βρίσκω το συντελεστή ανατοκισμού και το συντελεστή προεξόφλησης από πίνακα.
- Πότε εφαρμόζω τον τύπο προεξόφλησης.
- Πώς βρίσκω το χρόνο ή το επιτόκιο, όταν γνωρίζω αρχικό και τελικό κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Αλεξανδρόπουλος, Α., Παλιατσός, Α. & Σάσσαλος, Σ. (2004). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Καραπιστόλης, Δ. (2012). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Θεσσαλονίκη: Αλτιντζή.

Ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 3 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=3.000
i=4%=0,04
n=3 έτη
Το ζητούμενο είναι το τελικό κεφάλαιο Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 3.000*(1+0,04)^3 = 3.000*1,1249 = 3.374,7$ ευρώ

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 3 έτη με επιτόκιο τριμήνου 1%.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=3.000
i=1%=0,01 τριμηνιαίο
n=3 έτη, επειδή ο ανατοκισμός γίνεται με τριμηνιαίο επιτόκιο, τα έτη αντιστοιχούν σε 3*4=12 τρίμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 3.000*(1+0,01)^{12} = 3.000*1,1268 = 3.380,4$ ευρώ

Άσκηση 3

Κεφάλαιο 4.500 ευρώ ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από 4 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
γ) Αν το εξαμηνιαίο επιτόκιο ήταν 2,5% , πόση θα ήταν η διαφορά στο κεφάλαιο μετά τα 6 έτη;

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=4.500
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
α) n=4 έτη αντιστοιχούν σε 4*2=8 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 4.500*(1+0,02)^8 = 4.500*1,1717 = 5.272,65$ ευρώ
β) n=6 έτη αντιστοιχούν σε 6*2=12 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 4.500*(1+0,02)^{12} = 4.500*1,2682 = 5.706,9$ ευρώ

γ) n=6 έτη αντιστοιχούν σε 6*2=12 εξάμηνα
το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 2,5%= 0,025 και το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n$ =4.500*(1+0,025)^{12} =4.500*1,3449= 6.052,05 ευρώ
Η διαφορά στο κεφάλαιο σε σχέση με το β ερώτημα είναι
6.052,05-5.706,9=345,15 ευρώ

Άσκηση 4

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο σήμερα, πληρώνοντας 13.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 2% και να αγοράσουμε το αυτοκίνητο σε δύο χρόνια όταν θα στοιχίζει 14.000 ευρώ;
(Υπόδειξη: υπολογίστε την τελική αξία του κεφαλαίου μετά τα δύο έτη και συγκρίνετε με τις 14.000 ευρώ)

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=13.000
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
n=2 έτη = 4 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n$ =13.000*(1+0,02)^4 =13.000*1,0824= 14.071,2 ευρώ
Επειδή υπολογίζουμε ότι το αυτοκίνητο σε δύο χρόνια θα πωλείται 14.000, μας συμφέρει να βάλουμε τα χρήματα στην τράπεζα και να το αγοράσουμε μετά από δύο χρόνια κερδίζοντας 71,2 ευρώ.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο ανατοκισμός υπολογίζεται κάθε τρίμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το ετήσιο επιτόκιο σε τριμηνιαίο επιτόκιο. Τα 8 έτη είναι 8*4= 32 τρίμηνα. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%:4=1,5%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
Kn =$K_0\ (1+ i)^n$ =3.000*(1+0,015)^{32}=3.000*1,6102= 4.830,97 ευρώ.

Άσκηση 6

Κεφάλαιο 15.000 ευρώ κατατίθεται σε τράπεζα και ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Κατόπιν το επιτόκιο αλλάζει σε 2,5% το εξάμηνο και η κατάθεση διαρκεί ακόμη 5 έτη με ανατοκισμό ανά εξάμηνο.

α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 11 έτη;
γ) Αν το ίδιο κεφάλαιο κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για 11 έτη, πόσο θα γίνει το τελικό κεφάλαιο;

Απάντηση/Λύση

α) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 6 έτη είναι 6*2=12 εξάμηνα..
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι
Kn =$K_0\ (1+ i)^n$ =15.000 *(1+0,02)^{12}= 15.000*1,2682 =19.023,63 ευρώ
β) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 5 έτη είναι 5*2=10 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία (μετά τα 6 έτη είναι 19.023,63) προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =$K_0\ (1+ i)^n$ =19.023,63*(1+0,025)^{10}= 19.023,63*1,2801 =24.352,15 ευρώ

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 15.000 *(1+0,03)^{11} = 15.000*1,3842 = 20.763,51$ ευρώ.

Η διαφορά από το κεφάλαιο που σχηματίστηκε στο ερώτημα β είναι 24.352,15-20.763,51 =3.588,6 ευρώ

Άσκηση 7

Υπάλληλος δανείστηκε στις 1-2-2005 από το ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων ποσό 7.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 4%. Ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει στις 1-2-2014;

Απάντηση/Λύση

Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο. Από 1-2-2005 μέχρι 1-2-2014 μεσολαβούν 9 έτη και είναι 9*2=18 εξάμηνα. Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 4%:2=2%
Για να βρούμε το ποσό του δανείου, που πρέπει να επιστραφεί μαζί με τους τόκους, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου.
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 7.000 *(1+0,02)^{18} = 7.000*1,4282 = 9.997,72$ ευρώ

Άσκηση 8

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα οικόπεδο σήμερα, πληρώνοντας 40.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% και να αγοράσουμε το οικόπεδο σε τρία χρόνια που θα στοιχίζει 45.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Υπολογίζουμε την τελική αξία του διαθέσιμου κεφαλαίου 40.000 μετά τα τρία έτη. Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 3 έτη είναι 3*2=6 εξάμηνα..
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 40.000 *(1+0,03)^6 = 40.000*1,1940 = 47.762$ ευρώ.
Μετά τα τρία χρόνια, θα μπορέσουμε να αγοράσουμε το οικόπεδο το οποίο θα στοιχίζει 45.000 ευρώ και θα μας περισσέψουν και 2.762 ευρώ.

Άσκηση 19

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04
n=5 έτη και 9 μήνες
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12) έτη
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους, αφού έχουμε κλασματική περίοδο χρόνου:
Εκθετικός ανατοκισμός
$K_n = K_o (1+i)^{n+\mu/\rho} = 6.000* (1+0,04)^{5+9/12} = 6.000*1,2529 = 7.517,8$ ευρώ
Μεικτός ανατοκισμός
$K_n = K_o (1+i)^n *(1+\mu/\rho*i) = 6.000* (1+0,04)^5*(1+9/12*0,04) = 6.000*1,2167*1,03 = 7.519,2$ ευρώ

Άσκηση 10

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04 ετήσιο
n=5 έτη και 9 μήνες
ανατοκισμός ανά εξάμηνο με επιτόκιο 2%=0,02 εξαμηνιαίο
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12) έτη=10 εξάμηνα + 1 εξάμηνο + 3 μήνες=11,5 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους:
Εκθετικός ανατοκισμός
$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}=6.000*\ (1+0{,}02)^{11{,}5}=6.000*1{,}2557=7.534{,}5$ ευρώ
Μεικτός ανατοκισμός
$K_n=K_o\ (1+i)^n*(1+\mu/\rho*i)=6.000*\ (1+0{,}02)^{11}*(1+3/6*0{,}02)=6.000*1{,}2434*1{,}01=7.535{,}0$ ευρώ.
Στον τύπο για τον μεικτό ανατοκισμό βάλαμε 3/6 και όχι 3/12 για τους μήνες, επειδή υπολογίζουμε τον ανατοκισμό σε εξάμηνα και το εξάμηνο έχει 6 μήνες.

Άσκηση 1 1

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη, 9 μήνες και 14 μέρες.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04 ετήσιο
n=5 έτη και 9 μήνες και 14 μέρες
ανατοκισμός ανά εξάμηνο με επιτόκιο 2%=0,02 εξαμηνιαίο
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12+14/360) έτη=10 εξάμηνα + 1 εξάμηνο + 3 μήνες+14 μέρες=11 εξάμηνα και 3*30+14=104 μέρες.
Χρησιμοποιώντας τον μεικτό ανατοκισμό:
$K_n=K_o\ (1+i)^n*(1+\mu/\rho*i)=6.000*\ (1+0{,}02)^{11}*(1+104/180*0{,}02)=$
$=6.000*1{,}2434*1{,}0115=7.546{,}6$ ευρώ.
στο μεικτό ανατοκισμό βάλαμε 104/180 και όχι 104/365 για τις μέρες, επειδή υπολογίζουμε τον ανατοκισμό σε εξάμηνα και το εξάμηνο έχει 180 μέρες.

Άσκηση 12

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 5.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος την 1-1-2018, αν το καταθέσουμε σήμερα (27-3-2015) σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Υπολογίζουμε τις μέρες μεταξύ 27-3-2015 και 1-1-2018 και χρησιμοποιούμε τον τύπο του τόκου για πολιτικό έτος. Οι μέρες από 1-1-15 μέχρι 1-1-16 που αντιστοιχούν σε ένα έτος είναι 365 μέρες. Δεν πρέπει όμως να μετρήσουμε τις 31 μέρες του Ιανουαρίου 2015, τις 28 μέρες Φεβρουαρίου 2015 και τις 27 μέρες Μαρτίου 2015 που είναι συνολικά 86 μέρες. Επομένως οι μέρες κατάθεσης είναι 365-86=279 μέρες.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου με τον μεικτό ανατοκισμό για 2 έτη και 279 μέρες.
$K_n=K_o\ (1+i)^n*(1+\mu/\rho*i)=5.000*\ (1+0{,}04)^2*(1+279/365*0{,}04)=$
$=5.000*1{,}0816*1{,}0305=5.573{,}4$ ευρώ.

Άσκηση 13

Να βρεθεί η αρχική αξία κεφαλαίου το οποίο ανατοκίζεται για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το τελικό κεφάλαιο είναι 5.000 ευρώ.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο ανατοκισμός είναι τριμηνιαίος, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το επιτόκιο σε τριμηνιαίο. Τα 8 έτη είναι 8*4=32 τρίμηνα. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%:4=1,5%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου
K_0 = Kn U^n =5.000* 0,6210=3.104,96 ευρώ.

Άσκηση 14

Ποιο κεφάλαιο, αν ανατοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 4%, θα δώσει μετά από 5 έτη και 4 μήνες τελικό κεφάλαιο 9.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Επειδή ο χρόνος μετριέται σε έτη και μήνες, για τα έτη έχουμε ανατοκισμό ενώ για τους μήνες έχουμε απλό τόκο. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου αλλά για μεικτό ανατοκισμό, που είναι:
K_0=K_n *U^n / (1+μ/ρ*i)=9.000* 0,8219/(1+4/12*0,04)=7397,1 /1,013= 7.299,77 ευρώ.

Άσκηση 15

Κεφάλαιο κατατίθεται σήμερα σε τράπεζα και ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Κατόπιν το επιτόκιο αλλάζει σε 2,5% το εξάμηνο και η κατάθεση διαρκεί ακόμη 5 έτη με ανατοκισμό ανά εξάμηνο. Το κεφάλαιο τότε είναι 15.000 ευρώ.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο σήμερα;
γ) Αν το ίδιο αρχικό κεφάλαιο κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% , σε πόσα χρόνια θα γίνει 15.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

α) Καταρχάς κάνουμε υπολογισμούς για τη δεύτερη περίοδο ανατοκισμού, δηλαδή για το 5 έτη με 2,5% επιτόκιο. Τα δεδομένα μας είναι:
K_{11}=15.000
i=2,5%=0,025 εξαμηνιαίο
n=5 έτη =10 εξάμηνα
ανατοκισμός ανά εξάμηνο
Το ζητούμενο είναι το K_6, το οποίο θα αντιστοιχεί στην αρχική αξία της δεύτερης περιόδου. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου που είναι:
K_0=K_n *U^n ⇔ K_6=K_{11}* U^{10}= 15.000*0,7812=11.717,97 ευρώ.

β) Το ζητούμενο σημερινό κεφάλαιο αντιστοιχεί σε αρχικό κεφάλαιο για την περίοδο ανατοκισμού των 6 ετών στο τέλος των οποίων σχηματίζεται τελικό κεφάλαιο 11.717,97 ευρώ. Τα δεδομένα μας είναι:
K_6=11.717,97
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
n=6 έτη =12 εξάμηνα
ανατοκισμός ανά εξάμηνο
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου που είναι:
K_0=K_6 *U^n ⇔ K_0=K_6* U^{12}= 11.717,97 *0,7885=9.239,54 ευρώ.

γ) Αν το ίδιο αρχικό κεφάλαιο 9.239,54 κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% θα γίνει 15.000 ευρώ αλλά τώρα το ζητούμενο είναι ο χρόνος.

Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n$=Kn/K_0 με άγνωστο το n.
Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,03)^n$=15.000/9.239,54 ⇔ $(1+0,03)^n$=1,6234

1ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, υπολογίζουμε n=ln(1,6234)/ln(1,03) ⇔ n=16,39 έτη.

2^{ος} τρόπος: Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,03)^n=1,6234$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 3%. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,6234 για 16 έτη και για 17 έτη. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:

$n=16+(1,6234-1,6047)/(1,6528-1,6047) * (17-16)=16,388$ έτη.

Άσκηση 16

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να καταθέσουμε κεφάλαιο 3.000 ευρώ σήμερα σε μια τράπεζα με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, ώστε να πάρουμε 5.000 ευρώ σε 8 χρόνια;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι το εξαμηνιαίο επιτόκιο. Ο χρόνος είναι 8 έτη=16 εξάμηνα.
Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το i.
Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+i)^{16}=5.000/3.000 \Leftrightarrow (1+i)^{16}=1,67$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το i στην παραπάνω εξίσωση, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη γραμμή με χρόνο 16. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,67 για 3,5% και για 3%. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε επιτόκιο
$i =0,03+(1,67-1,6047)/(1,7340-1,6047) * (0,035-0,03)=0,0325=3,25\%$.

Άσκηση 17

Μετά από πόσα χρόνια κεφάλαιο 40.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% θα διπλασιασθεί;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι ο χρόνος ο οποίος υπολογίζεται σε εξάμηνα.
Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το n.
Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,03)^n=80.000/40.000 \Leftrightarrow (1+0,03)^n=2$
1^{ος} τρόπος: Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, υπολογίζουμε $n=\ln(2)/\ln(1,03) \Leftrightarrow n= 23,45$ εξάμηνα = 11,72 έτη.
2^{ος} τρόπος: Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,03)^n=2$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 3%. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 2 για 23 εξάμηνα και για 24 εξάμηνα.
Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:
$n=23+(2-1,9736)/(2,0328-1,9736) * (24-23)= 23,45$ εξάμηνα=11,7 έτη.

Άσκηση 18

Δάνειο 2.000 ευρώ ανατοκίζεται με 7% και γίνεται 3.800 ευρώ. Πόσος χρόνος μεσολάβησε;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι ο χρόνος.
Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το n.
Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,07)^n=3.800/2.000 \Leftrightarrow (1+0,03)^n=1,9 \Leftrightarrow n=\ln(1,9)/\ln(1,07) \Leftrightarrow n= 9,48$ έτη.
Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,07)^n=1,9$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 7%.
Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,9 για 9 έτη και για 10 έτη. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:
$n=9+(1,9-1,8385)/(1,9672- 1,8385) * (10-9)= 9,47785$ έτη.

Άσκηση 19

Να βρεθεί η παρούσα αξία κεφαλαίου 6.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος με ετήσιο επιτόκιο 4% και προεξοφλείται 5 έτη και 9 μήνες πριν τη λήξη του.

Απάντηση/Λύση
Επειδή ο χρόνος μετριέται σε έτη και μήνες, για τα έτη έχουμε ανατοκισμό, ενώ για τους μήνες έχουμε απλό τόκο. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου αλλά για μεικτό ανατοκισμό που είναι: $K_0=K_n *U^n / (1+μ/ρ*i)$=9.000* 0,8219/(1+9/12*0,04)=7397,1 /1,03= 7.181,65 ευρώ.

Άσκηση 20
Έμπορος προεξοφλεί γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 8.000 ευρώ το οποίο λήγει σε 3 έτη. Το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο προεξόφλησης είναι 6%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, ποια θα είναι η παρούσα αξία;

Απάντηση/Λύση
Η ονομαστική αξία αντιστοιχεί στο τελικό κεφάλαιο. Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα, 3έτη=3*4=12 τρίμηνα και το επιτόκιο σε τριμηνιαίο 6%:4=1,5%. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου
$K_0=K_n *U^n$ =8.000* U^{12} =8.000* 0,8364= 6.691 ευρώ.

Εφαρμογές Ανατοκισμού

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- *Μέσο επιτόκιο*

- *Ισοδύναμα επιτόκια*

- *Αντικατάσταση κεφαλαίων*

- *Ρυθμός πληθωρισμού*

ΣΤΟΧΟΙ

- *Εύρεση μέσου επιτοκίου, όταν γνωρίζουμε τα επιτόκια και τους χρόνους ανατοκισμού διαφόρων κεφαλαίων.*

- *Εύρεση ισοδυνάμου επιτοκίου, για διαφορετικές χρονικές περιόδους.*

- *Κατανόηση και χρησιμοποίηση του τύπου υπολογισμού παρούσας αξίας στην περίπτωση αντικατάστασης κεφαλαίων στον ανατοκισμό.*

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Διαθέτουμε δύο γραμμάτια ονομαστικής αξίας 2.000 ευρώ και 3.000 ευρώ, τα οποία λήγουν σε 2 έτη και 3 έτη, αντίστοιχα. Χρειαζόμαστε όμως χρήματα σήμερα και θέλουμε να προεξοφλήσουμε τα γραμμάτια αυτά.

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την παρούσα αξία του χρήματος;

1 Εισαγωγή

Ο τύπος του ανατοκισμού ισχύει για πολλές περιπτώσεις, και όχι μόνο για να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία κεφαλαίου με ανατοκισμό. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε κάποιες από τις περιπτώσεις εφαρμογών του ανατοκισμού.

2 Μέσο επιτόκιο

Κάποιες φορές ένα χρηματικό ποσό διαιρείται σε μικρότερα κεφάλαια και κατατίθεται με διαφορετικά επιτόκια για κάποιο χρόνο. Θέλοντας να αποτιμήσουμε τη συνολική απόδοση των κεφαλαίων, ζητάμε να βρούμε το **μέσο επιτόκιο**, δηλαδή το κοινό επιτόκιο εκείνο που θα έδινε την ίδια απόδοση των κεφαλαίων στον ίδιο χρόνο (Αποστολόπουλος, 2003).

Σε ένα σύνολο i1, i2, i3… επιτοκίων για αντίστοιχα κεφάλαια K01,K02, K03, … ονομάζουμε **μέσο επιτόκιο** i το επιτόκιο που δίνει την ίδια τελική αξία των κεφαλαίων για τον ίδιο χρόνο. (Αποστολόπουλος, 2003).

Το άθροισμα όλων των τελικών κεφαλαίων συμβολίζεται με

Kn1+ Kn2+ Kn3+…

Αν υποθέσουμε ότι τα κεφάλαια αυτά ανατοκίζονταν με το κοινό μέσο επιτόκιο I, το άθροισμα αυτό μπορεί να σημειωθεί ως εξής:

$K01\ (1+i)^n + K02\ (1+i)^n + K03\ (1+i)^n + \ldots = (K01 + K02 + K03 + \ldots)(1+i)^n$.

Το άθροισμα αυτό θα πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των κεφαλαίων που σχηματίζονται το καθένα με το δικό του επιτόκιο, και είναι ίσο με:

$K01\ (1+i1)^n + K02\ (1+i2)^n + K03\ (1+i3)^n + \ldots$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις και επιλύοντας την εξίσωση ως προς i, προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$(1+i)^n = \frac{K_{01}(1+i_1)^n + K_{02}(1+i_2)^n + K_{03}(1+i_3)^n + ...}{K_{01} + K_{02} + K_{03} + ...}$$

Με τον παραπάνω τύπο μπορούμε να βρούμε το μέσο επιτόκιο με τον πίνακα κεφαλαιοποίησης-ανατοκισμού είτε άμεσ αν υπάρχει στον πίνακα η τιμ είτε μέσω παρεμβολής, όπως αναφέραμε στο τέταρτο κεφάλαιο.

Άλλος τρόπος, για να προσδιορίσουμε το μέσο επιτόκιο, αν διαθέτουμε επιστημονικό κομπιουτεράκι, είναι ο μετασχηματισμός του παραπάνω τύπου όπως παρακάτω:

$$i = \left[\frac{K_{01}(1+i_1)^n + K_{02}(1+i_2)^n + K_{03}(1+i_3)^n + ...}{K_{01} + K_{02} + K_{03} + ...}\right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Σημειώνουμε ότι ο χρόνος ανατοκισμού είναι ο ίδιος για κάθε ένα από τα κεφάλαια. Αν ο χρόνος διαφέρει δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο για τον υπολογισμό του μέσου επιτοκίου.

2.1 Παράδειγμα εύρεσης μέσου επιτοκίου

Κεφάλαιο 10.000 ευρώ ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%, κεφάλαιο 9.000 ευρώ ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 2%, και κεφάλαιο 8.000 ευρώ ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 2,5%. Πόσο είναι το μέσο επιτόκιο;

Λύση

Τα κεφάλαια είναι: K_{o1}=10.000 K_{o2}=9.000 K_{o3}=8.000

Ο χρόνος ανατοκισμού είναι n=5 έτη

Τα αντίστοιχα επιτόκια για κάθε κεφάλαιο είναι i1=3%=0,03 i2=2%=0,02 i3=2,5%=0,025

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του μέσου επιτοκίου και υπολογίζουμε:

$$i = \left[\frac{K_{01}(1+i_1)^n + K_{02}(1+i_2)^n + K_{03}(1+i_3)^n + ...}{K_{01} + K_{02} + K_{03} + ...}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 =$$

$$= \left[\frac{10000(1+0{,}03)^5 + 9000(1+0{,}02)^5 + 8000(1+0{,}025)^5}{10.000 + 9.000 + 8.000}\right]^{\frac{1}{5}} - 1 =$$

$$= \left[\frac{10.000 * 1{,}1593 + 9.000 * 1{,}1041 + 8.000 * 1{,}1314}{27.000}\right]^{\frac{1}{5}} - 1 =$$

$$= (1{,}1326)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1{,}0252 - 1 = 0{,}0252$$

Επομένως το μέσο επιτόκιο των παραπάνω ανατοκιζόμενων κεφαλαίων είναι 2,52%.

3 Ισοδύναμο επιτόκιο

Ισοδύναμα επιτόκια στον ανατοκισμό λέγονται δύο επιτόκια, αν παράγουν τον ίδιο τόκο, για το ίδιο κεφάλαιο στον ίδιο χρόνο, αλλά αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους ανατοκισμού. Μπορεί, δηλαδή, το ένα επιτόκιο να είναι ετήσιο, και το ισοδύναμό του να είναι εξαμηνιαίο επιτόκιο.

Έστω i το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο και iρ το ισοδύναμό του, που αντιστοιχεί σε μικρότερη περίοδο ανατοκισμού (το ρ είναι ρ=2 για εξαμηνιαίο επιτόκιο, ή ρ=3 για τετραμηνιαίο ή ρ=4 για τριμηνιαίο, ή ρ=12 για μηνιαίο κλπ).

Εφόσον για το ίδιο αρχικό κεφάλαιο στον ίδιο χρόνο θέλουμε να υπολογίζεται ο ίδιος τόκος, θα ισχύει η σχέση:

$$K_0(1+i_\rho)^\rho = K_0(1+i)$$

Απαλείφοντας το K0 από τα δύο μέλη της ισότητας, ισχύει η παρακάτω ισότητα, την οποία μπορούμε να επιλύσουμε είτε ως προς το επιτόκιο iρ της μικρότερης περιόδου είτε ως προς το επιτόκιο i της μεγαλύτερης περιόδου. Έτσι θα έχουμε:

$$(1+i_\rho)^\rho = (1+i)$$

$$i_\rho = (1+i)^{\frac{1}{\rho}} - 1$$

$$i = (1+i_\rho)^\rho - 1$$

3.1 Σχέση ετήσιου πραγματικού επιτοκίου με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο

Όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος, το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο συμπίπτει με το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο.

Όταν ο ανατοκισμός γίνεται σε μικρότερη περίοδο από ένα έτος, το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο είναι μεγαλύτερο από το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο.

Έστω ότι το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 4%. Αν καταθέσουμε κεφάλαιο 100 ευρώ, σε ένα έτος θα πάρουμε 104 ευρώ. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, το επιτόκιο του εξαμήνου, που αντιστοιχεί στο ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4%, θα είναι 4%:2=2%. Αν καταθέσουμε κεφάλαιο 100 ευρώ για ένα έτος με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, θα πάρουμε 102 ευρώ το πρώτο εξάμηνο, και στη συνέχεια αυτά τα χρήματα θα ανατοκιστούν για άλλο ένα εξάμηνο και θα γίνουν 102*(1+0,02)=104,04 ευρώ. Επομένως το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο μας απέδωσε 4,04 ευρώ και όχι 4 ευρώ, που αποδίδει το ονομαστικό επιτόκιο.

Το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο ονομάζεται και ποσοστιαίο ετήσιο επιτόκιο (annual percentage rate – APR) (Bradley, 2014).

Η σχέση για τα ισοδύναμα επιτόκια, ειδικά στην περίπτωση του ετήσιου ονομαστικού επιτοκίου i και του επιτοκίου i_m για μικρότερη χρονική περίοδο, γίνεται:

$$(1+i_m)^m = (1+\frac{i}{m})^m = (1+i)$$

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i = (1+i_m)^m - 1$$

Όπου το m=2 για εξάμηνο, m=12 για μήνα κλπ.

3.2 Παράδειγμα

Κεφάλαιο 10.000 ευρώ ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 3%. Πόσο θα είναι το τελικό κεφάλαιο, όταν η περίοδος ανατοκισμού είναι:

α) ανά έτος
β) ανά εξάμηνο
γ) ανά τρίμηνο

<u>Λύση</u>
$Kn=10000\ (1+i)^n$
n=5 έτη
α) το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε ετήσιο ανατοκισμό είναι i1=3%=0,03
β) το ονομαστικό επιτόκιο που αντιστοιχεί σε εξαμηνιαίο ανατοκισμό είναι i2=3%/2=1,5%=0,015

γ) το ονομαστικό επιτόκιο που αντιστοιχεί σε τριμηνιαίο ανατοκισμό είναι $i3=3\%/\ 4=0{,}75\% = 0{,}0075$

Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε τον τύπο του ανατοκισμού με το αντίστοιχο επιτόκιο και υπολογίζουμε την τελική αξία κάθε κεφαλαίου.

α) $K1=10.000(1+0{,}03)^5=11.592{,}7$ ευρώ

β) $K2=10.000(1+0{,}015\ )^{10} =11.605{,}4$ ευρώ

γ) $K3=10.000(1+0{,}0075\ )^{20}=11.611{,}8$ ευρώ

3.3 Παράδειγμα

Να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο που είναι ισοδύναμο με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 8%, όταν ο ανατοκισμός γίνεται:

α) ανά εξάμηνο
β) ανά τετράμηνο
γ) ανά τρίμηνο

<u>Λύση</u>

Από τη σχέση $(1+i)=(1+i\rho)^\rho$ έχουμε :

α) $(1+i)=(1+i1)^2$
$i=(1+0{,}04)2-1=0{,}0816$

β) $(1+i)=(1+i2)^3$
$i=(1+0{,}0266)3-1=0{,}0819$

γ) $(1+i)=(1+i3)^4$
$i=(1+0{,}02)4-1=0{,}0824$

4 Αντικατάσταση γραμματίων (γραμμάτια εις διαταγή και συναλλαγματικές)

Στην πραγματική οικονομία, μερικές φορές τα πραγματικά γεγονότα διαφέρουν από τις προβλέψεις που είχαν γίνει για αυτά. Έτσι επιχειρηματίες ή και απλοί πολίτες που είχαν υποσχεθεί να πληρώσουν ένα γραμμάτιο ή μια συναλλαγματική σε ορισμένο χρόνο, αναγκάζονται λόγω έλλειψης ρευστού, να ζητήσουν νέα χρονική παράταση για την εξόφληση. Αν ο οφειλέτης δεν δεχθεί την παράταση, και ο δανειζόμενος δεν έχει χρήματα να πληρώσει, ο δανειστής θα πρέπει να διεκδικήσει την πληρωμή του δικαστικά. Η πράξη αυτή ονομάζεται «διαμαρτυρία του γραμματίου» και έχει αρνητικές συνέπειες για το δανειζόμενο. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή στην οποία θα κινηθούν οι νομικές διαδικασίες, υπάρχει χρονική καθυστέρηση μέχρι την έκδοση της τελικής απόφασης, με κόστος για το δανειστή. Σε πολλές περιπτώσεις εμπορικών συναλλαγών, ο δανειστής προτιμάει να δώσει ο ίδιος απευθείας την παράταση στον δανειζόμενο, ελπίζοντας ότι έτσι θα πάρει τα χρήματά του γρηγορότερα. Η νέα αυτή παράταση στις οικονομικές συναλλαγές δίνεται, αφού απαιτηθεί επιπλέον τόκος για την καθυστέρηση, και συνήθως συμφωνείται το «σχίσιμο» του παλαιού γραμματίου και η έκδοση νέου γραμματίου με λήξη τη συμφωνηθείσα ημερομηνία, και μεγαλύτερη ονομαστική αξία.

Άλλες φορές ο ίδιος ο οφειλέτης, υπολογίζοντας ότι θα βρεθεί εκτεθειμένος την ημερομηνία λήξης του γραμματίου του, πριν να έρθει η λήξη αυτή, ζητάει από το δανειστή του την αντικατάσταση ενός, δύο ή περισσοτέρων γραμματίων με ένα νέο **ενιαίο** γραμμάτιο το οποίο είναι <u>οικονομικώς ισοδύναμο</u> με το προηγούμενο, ή τα προηγούμενα. Άλλες φορές πάλι μπορεί να ζητηθεί η αντικατάσταση ενός γραμματίου μεγάλης χρηματικής αξίας με περισσότερα γραμμάτια μικρότερης χρηματικής αξίας, που λήγουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, και τα οποία είναι οικονομικώς ισοδύναμα με το αρχικό γραμμάτιο. Ας δούμε όμως τι σημαίνει οικονομικώς ισοδύναμο, ορίζοντας την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας στην αντικατάσταση γραμματίων.

4.1 Αρχή οικονομικής ισοδυναμίας

Το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων ισούται με την παρούσα αξία του νέου γραμματίου σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο.

Εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας
Παρούσα αξία νέου γραμματίου = άθροισμα παρουσών αξιών αντικαθισταμένων γραμματίων

Σημεία προσοχής
Εποχή ισοδυναμίας είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία υπολογίζουμε την οικονομική ισοδυναμία και μπορεί να διαφοροποιείται στο χρόνο, αλλά πάντα είναι η ίδια και στα δύο, ή περισσότερα, γραμμάτια.

Η περίοδος μέτρησης του επιτοκίου θα πρέπει να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου (έτος, εξάμηνο, τρίμηνο κλπ).

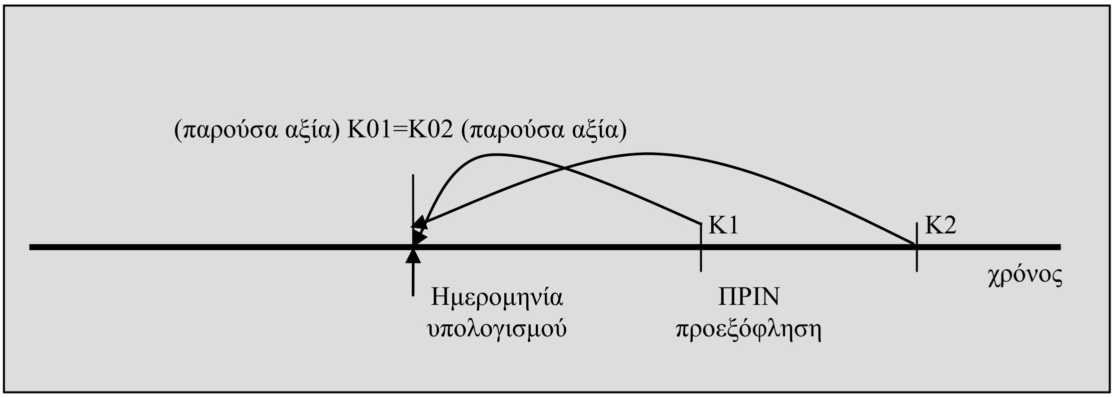
Οι χρονικές περίοδοι n αντιστοιχούν σε ακέραιο αριθμό.

Το επιτόκιο αντιστοιχεί σε μία από τις n χρονικές περιόδους (έτος, ή εξάμηνο ή μήνας…) και γράφεται σε δεκαδική μορφή (όχι σε %) στους τύπους υπολογισμού.

4.2 Γραφική παράσταση οικονομικής ισοδυναμίας

Η οικονομική ισοδυναμία συνήθως παριστάνεται με ένα διάγραμμα, όπως στο σχήμα 5.1. Ο χρόνος αντιστοιχεί σε μια ευθεία γραμμή, πάνω στην οποία σημειώνονται οι ημερομηνίες λήξης, οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων (ή συναλλαγματικών) που αντικαθίστανται, η ημερομηνία (ή ημερομηνίες) των νέων γραμματίων καθώς και η ημερομηνία υπολογισμού της οικονομικής ισοδυναμίας. Με μια καμπύλη συνήθως που καταλήγει σε βέλος, διακρίνονται οι μέρες που μεσολαβούν μεταξύ της ημέρας υπολογισμού και της λήξης κάθε γραμματίου.

Η ημερομηνία της ισοδυναμίας συνήθως αντιστοιχεί στην παρούσα ημερομηνία υπολογισμού, αλλά μπορεί να αντιστοιχεί και στην μελλοντική ημέρα λήξης νέου γραμματίου, ή σε οποιαδήποτε άλλη ημερομηνία. Κριτήριο για την επιλογή της είναι να μας διευκολύνει στους υπολογισμούς, ή στην κατανόηση της αντικατάστασης.

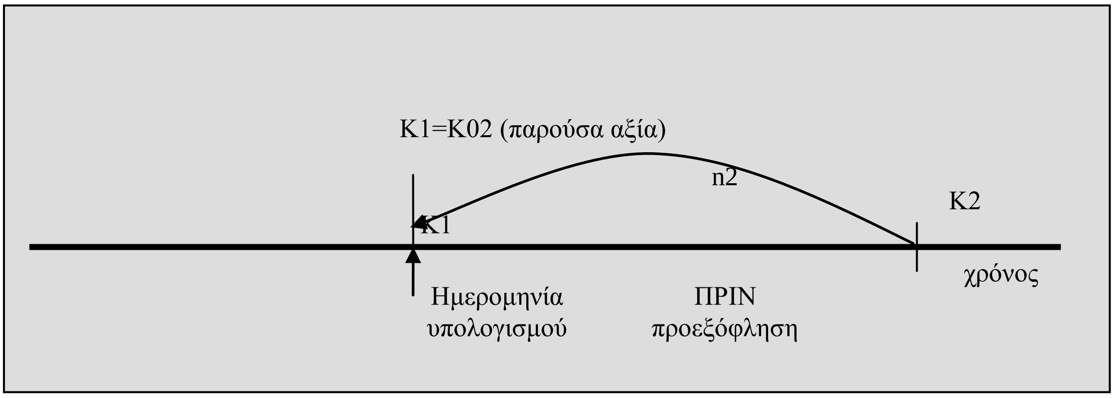


Σχήμα 5.1. *Παράδειγμα γραφικής αναπαράστασης*

4.3 Αντικατάσταση ενός γραμματίου με ένα άλλο

Έστω K1, K2 οι ονομαστικές αξίες πρώτου και δευτέρου γραμματίου αντίστοιχα.

Έστω το δεύτερο γραμμάτιο λήγει σε n2 περιόδους μετά την λήξη του πρώτου γραμματίου (σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2. *Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του πρώτου γραμματίου*

4.3.1 Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του πρώτου γραμματίου

Στη λήξη του πρώτου γραμματίου, η παρούσα αξία του ισούται με την ονομαστική αξία του.

Η παρούσα αξία του δευτέρου γραμματίου θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία μειωμένη κατά το προεξόφλημα (εξωτερικό ή εσωτερικό) και ο χρόνος προεξόφλησης θα είναι n2.

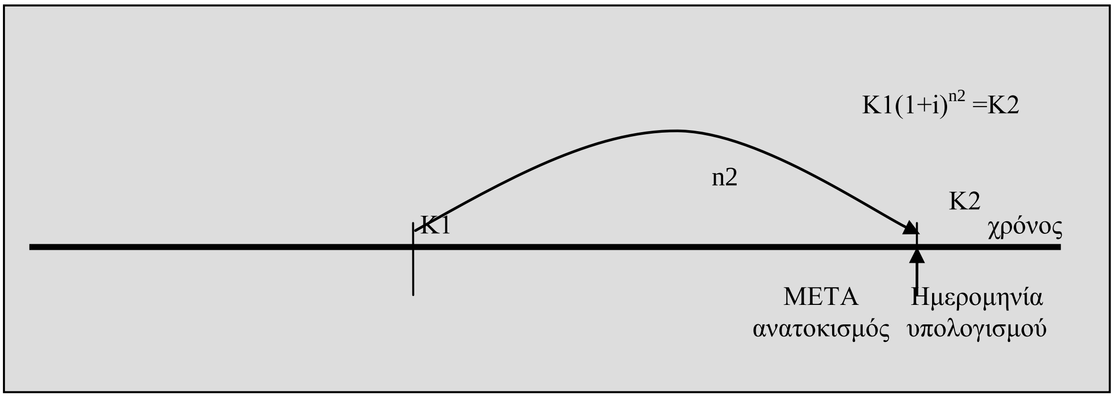
Οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες, οπότε θα έχουμε ανάλογα τις εξισώσεις:

K1=K02

$K1=K2*U^{n2}$

4.3.2 Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του δευτέρου γραμματίου

Στη λήξη του δευτέρου γραμματίου (σχήμα 5.3), η παρούσα αξία του ισούται με την ονομαστική αξία του.



Σχήμα 5.3. *Εποχή ισοδυναμίας η λήξη του δευτέρου γραμματίου*

Η παρούσα αξία του πρώτου γραμματίου θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία αυξημένη με τους τόκους.

Ακόμη ο χρόνος ανατοκισμού είναι n2 χρονικές περίοδοι μετά τη λήξη του πρώτου γραμματίου.

Οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες, οπότε θα έχουμε ανάλογα τις εξισώσεις:

$K1*(1+ i)^{n2} =K2$

4.3.3 Εποχή ισοδυναμίας μια οποιαδήποτε ημερομηνία

Αν χρησιμοποιήσουμε μια οποιαδήποτε ημερομηνία, για να υπολογίσουμε τις παρούσες αξίες των δύο γραμματίων, θα πρέπει να ελέγξουμε πότε λήγουν τα γραμμάτια.

Αν αυτά λήγουν μετά την επιλεγμένη ημερομηνία, υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες με προεξόφληση.

Αν αυτά λήγουν πριν την επιλεγμένη ημερομηνία, υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες, προσθέτοντας τους αντίστοιχους τόκους με ανατοκισμό.

Αν το ένα λήγει πριν την επιλεγμένη ημερομηνία και το άλλο μετά την επιλεγμένη ημερομηνία, η παρούσα αξία του πρώτου υπολογίζεται με ανατοκισμό, ενώ η παρούσα αξία του δευτέρου υπολογίζεται με προεξόφληση.

Ο γενικός κανόνας για τον υπολογισμό παρούσας αξίας είναι:

Αν η λήξη του γραμματίου έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία, πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή ανατοκισμού.

Αν η λήξη του γραμματίου δεν έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία, πολλαπλασιασμένη με το συντελεστή προεξόφλησης, για το χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του γραμματίου από την ημερομηνία υπολογισμού.

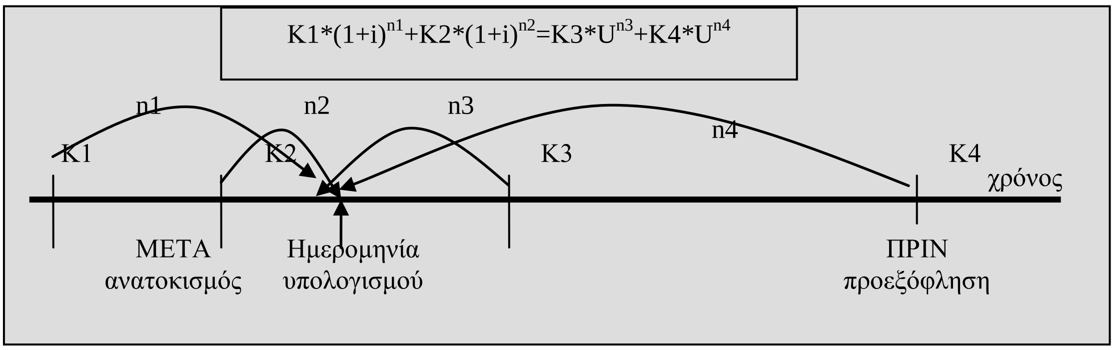
Για τους υπολογισμούς πάντα χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

<u>Οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες.</u>

Κατόπιν αντικαθιστούμε στην εξίσωση που σχηματίζεται από την οικονομική ισοδυναμία, τους γνωστούς όρους, και επιλύουμε ως προς τον άγνωστο όρο, με μαθηματικές τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.

4.4 Αντικατάσταση ενός ή περισσότερων γραμματίων με ένα ή πολλά

Έστω K1, K2, K3, K4,.. οι ονομαστικές αξίες πρώτου, δευτέρου, τρίτου,… γραμματίου αντίστοιχα. Έστω n1, n2, n3, n4,… οι χρόνοι από την ημερομηνία υπολογισμού μέχρι τη λήξη κάθε γραμματίου αντίστοιχα (σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4. *Αντικατάσταση πολλών γραμματίων*

Η Εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας γίνεται

Παρούσα αξία νέου (ή νέων) γραμματίου = άθροισμα όλων των παρουσών αξιών των γραμματίων που αντικαθίστανται.

Στην εξίσωση αυτή, αντικαθιστούμε τους γνωστούς όρους και επιλύουμε ως προς τον άγνωστο όρο με μαθηματικές τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.

Η παρούσα αξία κάθε γραμματίου στην ημερομηνία υπολογισμού υπολογίζεται με τις παρακάτω βασικές αρχές:

-Αν γραμμάτιο λήγει μετά την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, υπολογίζουμε την παρούσα αξία του με προεξόφληση.

-Αν γραμμάτιο λήγει πριν την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, υπολογίζουμε την παρούσα αξία του με ανατοκισμό.

-Αν γραμμάτιο λήγει ακριβώς την επιλεγμένη ημερομηνία υπολογισμού, η παρούσα αξία του είναι ίση με την ονομαστική του αξία.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δώσουμε στον υπολογισμό των χρονικών περιόδων από την ημερομηνία λήξης κάθε γραμματίου μέχρι την ημερομηνία υπολογισμού.

Ο γενικός κανόνας για τον υπολογισμό παρούσας αξίας είναι:
Αν η λήξη του γραμματίου έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία, πολλαπλασιασμένη με το συντελεστή κεφαλαιοποίησης.
Αν η λήξη του γραμματίου δεν έχει παρέλθει, η παρούσα αξία είναι ίση με την ονομαστική αξία, πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή προεξόφλησης.

Ο γενικός τύπος για τον υπολογισμό ονομαστικής αξίας ενός κοινού γραμματίου (κεφαλαίου Κ) που λήγει σε n χρονικές περιόδους και αντικαθιστά πολλά άλλα γραμμάτια (κεφάλαια K1, K2, …Kν), τα οποία λήγουν σε n1,n2, ….nν χρονικές περιόδους, εξαρτάται από την ημερομηνία υπολογισμού της οικονομικής ισοδυναμίας.

Αν η ημέρα υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία αντικατάστασης, ο τύπος είναι:
Kn Un= Kn1 Un1+ Kn2 Un2+…+ Knν Unν

Αν η ημέρα υπολογισμού συμπίπτει με την κοινή λήξη του ενιαίου γραμματίου, ο τύπος γίνεται:
Kn =Kn1 Un1-n+Kn2 Un2-n+…+ Knν Unν-n

4.5 Παράδειγμα αντικατάστασης κεφαλαίων

Γραμμάτια 1000 που λήγει σε 2 έτη και 2000 ευρώ που λήγει σε 5 έτη, αντικαθίστανται με ενιαίο γραμμάτιο το οποίο λήγει σε 3 έτη με ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσο είναι το ενιαίο γραμμάτιο;

<u>Λύση</u>
K1=1000
K2=2000
n1=2 έτη n2=5 έτη n=3 έτη
1. Αν η ημέρα υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία αντικατάστασης ο τύπος είναι
$Kn*U^3= K1*U^2 + K2*U^5 \Leftrightarrow$
$Kn= (K1*U^2 + K2*U^5)/U^3=$
=(1000*0,9070+2000*0,7835)/0,8638=2864,08

2. Αν η ημέρα υπολογισμού συμπίπτει με την κοινή λήξη του ενιαίου γραμματίου, ο τύπος γίνεται
$Kn= K1*U^{2-3} + K2*U^{5-3} = K1*U^{-1} + K2*U^2=$
=1000*1,0500+2000*0,90703=2864,06

5 Ρυθμός πληθωρισμού

<u>Πληθωρισμός</u> είναι το φαινόμενο της συνεχούς αύξησης των τιμών (Χατζηνικολάου, 2011).
Ποσοστό πληθωρισμού πt ανά έτος είναι η μεταβολή σε ποσοστό των τιμών Pt του έτους σε σχέση με τις τιμές Pt-1 του προηγούμενου έτους, και υπολογίζεται από τον τύπο
πt=(Pt-Pt-1)/Pt-1 *100

Pt=Pt-1(1+πt)
Έστω το σημερινό επίπεδο τιμών P0
Το επίπεδο τιμών του επόμενου έτους θα είναι P1=P0*(1+ π1)
Το επίπεδο τιμών του μεθεπόμενου έτους θα είναι P2=P1*(1+ π2)=P0*(1+ π1) (1+ π2)
Το επίπεδο τιμών του έτους t θα είναι Pt=P0*(1+ π1)(1+ π2)…(1+ πt)
Αν ο ρυθμός πληθωρισμού δεν αλλάζει, αλλά είναι ο ίδιος π=π1=π2=…= πt, η παραπάνω σχέση θα γίνει $Pt=P0*(1+ \pi)(1+ \pi)\ldots(1+ \pi) = P0* (1+ \pi)^t$

5.1 Παράδειγμα μελλοντικής αξίας

Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός πληθωρισμού είναι σταθερός για τα επόμενα έξι χρόνια, και ίσος με 4%, να βρεθεί πόσο θα είναι η ισοδύναμη αξία σε 6 έτη για ένα μηχάνημα που σήμερα πουλιέται 500 ευρώ.

Λύση

Το επίπεδο τιμών μετά από t έτη για δίνεται από τη σχέση $Pt=P0*(1+ \pi)^t$.

Αντικαθιστώντας με t=6, θα έχουμε $P_6=500*(1+ 0,04)^6= =500*1,2653=632,655$ ευρώ.

Επομένως η ισοδύναμή αξία του μηχανήματος μετά από 6 έτη με πληθωρισμό 4% ανά έτος θα είναι 632,655 ευρώ.

5.2 Παράδειγμα παρούσας αξίας

Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός πληθωρισμού είναι σταθερός για τα επόμενα έξι χρόνια, και ίσος με 4%, να βρεθεί πόσο θα είναι η ισοδύναμη αξία σήμερα για ένα μηχάνημα που σε 6 έτη θα πουληθεί 500 ευρώ.

Λύση

Στο παράδειγμα αυτό, ξέρουμε την ισοδύναμη μελλοντική αξία του μετά από 6 έτη με πληθωρισμό 4% ανά έτος και ζητάμε την παρούσα αξία του. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$Pt=P0*(1+ \pi)^t$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του παραδείγματος, έχουμε $500= P0 *(1+ 0.04)^6 \Leftrightarrow$

$500 = P0 *1,2653 \Leftrightarrow P0=395,16$ ευρώ

Επομένως η σημερινή ισοδύναμη του αξία θα είναι 395,16 ευρώ και η αξία αυτή με βάση τον πληθωρισμό θα αντιστοιχεί σε αξία 500 ευρώ σε 6 έτη.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε εφαρμόζω τον τύπο μέσου επιτοκίου.
- Πώς βρίσκω το ισοδύναμο επιτόκιο.
- Πώς υπολογίζω την οικονομική ισοδυναμία στην περίπτωση αντικατάστασης κεφαλαίων.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Bradley, T. (2014). Μαθηματικά για την Οικονομία και τη Διοίκηση. Αθήνα: Κριτική.

Αποστολόπουλος, Θ. (2003). Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Χατζηνικολάου, Δ. (2011). Εισαγωγή στη Μακροοικονομική. Ιωάννινα.

Ασκήσεις 5ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο κεφαλαίου 4500 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο και, μετά από 8 έτη, έγινε 10.000 ευρώ.

Απάντηση/Λύση

Επειδή έχουμε εξαμηνιαίο ανατοκισμό, μετατρέπουμε τα έτη σε εξάμηνα (8 έτη =16 εξάμηνα). Χρησιμοποιούμε τον τύπο του ανατοκισμού, για να βρούμε το εξαμηνιαίο επιτόκιο. Κατόπιν βρίσκουμε το ισοδύναμό του πραγματικό ετήσιο επιτόκιο.
Ο τύπος του ανατοκισμού $Kn=K0*(1+ i)^n$ γίνεται $(1+ i)^n=Kn/K0$.
Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και επιλύουμε ως προς το άγνωστο εξαμηνιαίο επιτόκιο i.
$(1+ i)^{16}=10.000/4.500 \Leftrightarrow (1+ i)^{16}=2{,}222$.
Λύνουμε την εξίσωση αυτή, είτε με ύψωση του δεξιού μέλους στην 1/16 (με επιστημονικό κομπιουτεράκι) είτε αναζητώντας στον πίνακα του συντελεστή κεφαλαιοποίησης επιτόκιο που για 16 περιόδους δίνει συντελεστή κεφαλαιοποίησης κοντά 2,222.
Από τον πίνακα συντελεστών ανατοκισμού εντοπίζουμε για 16 χρονικές περιόδους με επιτόκιο 5% τιμή του συντελεστή 2,1829 και με επιτόκιο 5,5% τιμή του συντελεστή 2,3553.
Με παρεμβολή υπολογίζουμε το εξαμηνιαίο επιτόκιο ως εξής:
i=0,05+(2,222-2,1829)/(2,3553-2,1829) *(0,055-0,05)=0,0511=5,11%.
Το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο iετήσιο θα υπολογισθεί με τον τύπο
$1+ i_{ετήσιο}=(1+ i)^2=(1+0{,}0511)^2=1{,}1048 \Leftrightarrow i_{ετήσιο}=0{,}1048=10{,}48\%$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο για τα κεφάλαια 5000 ευρώ, 3000 ευρώ, 9000 ευρώ, τα οποία ανατοκίζονται κάθε έτος, για 9 έτη με αντίστοιχα ετήσια επιτόκια 4%, 4.5% και 3%.

Απάντηση/Λύση

Για την εύρεση του μέσου επιτοκίου χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο, δηλαδή διαιρούμε το συνολικό τελικό κεφάλαιο, που σχηματίζεται, με το συνολικό αρχικά μας κεφάλαιο. Κατόπιν επιλύουμε την εξίσωση με άγνωστο το μέσο επιτόκιο.

$$(1+i)^n = \frac{K_{01}(1+i_1)^n + K_{02}(1+i_2)^n + K_{03}(1+i_3)^n + ...}{K_{01} + K_{02} + K_{03} + ...}$$

$$(1+i)^9 = \frac{5000(1+0{,}04)^9 + 3000(1+0{,}045)^9 + 9000(1+0{,}03)^9}{5000+3000+9000}$$

Για ευκολία στη διεξαγωγή των πράξεων στον αριθμητή χρησιμοποιούμε τον πίνακα με τους συντελεστές κεφαλαιοποίησης, και βρίσκουμε

$$(1+i)^9 = \frac{5000*1{,}4233+3000*1{,}4861+9000*1{,}3048}{17.000} = 1{,}3716$$

Προκύπτει η εξίσωση $(1+i)^9=1{,}3716$.
Λύνουμε την εξίσωση αυτή είτε με ύψωση του δεξιού μέλους στην 1/9 (με επιστημονικό κομπιουτεράκι) είτε αναζητώντας στον πίνακα του συντελεστή κεφαλαιοποίησης επιτόκιο που για 9 περιόδους δίνει συντελεστή κεφαλαιοποίησης κοντά στο 1,3716. Για επιτόκιο 3,5% ο συντελεστής ανατοκισμού για 9 χρονικές περιόδους είναι 1,3629 δηλαδή πολύ κοντά στο ζητούμενο 1,3716.
Επομένως το μέσο επιτόκιο, είναι περίπου 3,5%. Με επιστημονικό κομπιουτεράκι θα βρίσκαμε μέσο επιτόκιο 3,57%.

Άσκηση 3

Υποθέτουμε ότι το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 3%, και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο. Να βρεθεί:

α) το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο
β) το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο
γ) το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο
δ) το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο

Απάντηση/Λύση

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $(1+i_\rho)^\rho=1+i$, όπου i είναι το επιτόκιο της μεγαλύτερης χρονικής περιόδου και i_ρ το επιτόκιο της περιόδου ρ, που περιέχεται ρ φορές στην μεγαλύτερη περίοδο.
α) $i_\rho=3\%$, το έτος περιέχει 4 τρίμηνα. Άρα ρ=4 και η σχέση γίνεται:
$(1+i_\rho)^4=1+i$, $\Leftrightarrow$ $(1+0{,}03)^4=1+i$ $\Leftrightarrow$ $i=1{,}1255-1=0{,}1255=12{,}55\%$.

β)) $i_\rho=3\%$, το εξάμηνο περιέχει 2 τρίμηνα. Άρα ρ=2 και η σχέση γίνεται:
$(1+i_\rho)^2=1+i_{\varepsilon\xi}$, $\Leftrightarrow$ $(1+0{,}03)^2=1+ i_{\varepsilon\xi}$ $\Leftrightarrow$ $i_{\varepsilon\xi} =1{,}0609-1=0{,}0609=6{,}09\%$.

γ) στην περίπτωση αυτή η μεγαλύτερη περίοδος είναι το τρίμηνο, το οποίο περιέχει 3 μήνες (ρ=3), άγνωστο είναι το i_ρ, ενώ γνωρίζουμε το επιτόκιο τριμήνου, και η σχέση θα γραφεί:
$(1+i_\rho)^\rho=1+i_{\tau\rho}$ $\Leftrightarrow$ $(1+i_\rho)^3=1+0{,}03$ $\Leftrightarrow$ $(1+i_\rho)^3=1{,}03$.
Λύνουμε την εξίσωση αυτή, είτε με ύψωση του δεξιού μέλους στην 1/3 (με επιστημονικό κομπιουτεράκι) είτε αναζητώντας το επιτόκιο στον πίνακα των συντελεστών κεφαλαιοποίησης, ώστε για 3 χρονικές περιόδους, να δίνει συντελεστή κεφαλαιοποίησης κοντά στο 1,03.

δ) το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο είναι το ανάλογο επιτόκιο με το τριμηνιαίο, αλλά για 4 τρίμηνα, και, επομένως, υπολογίζεται μόνο με πολλαπλασιασμό 4*0,03= 0,12=12%

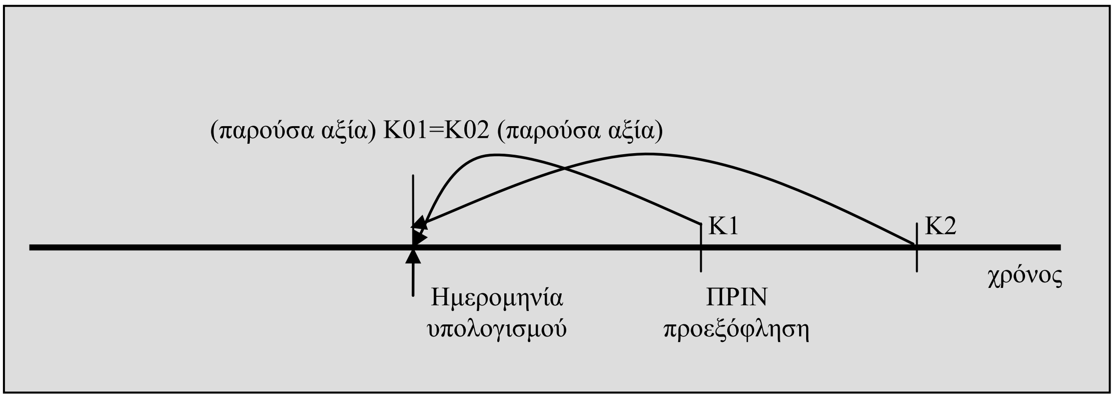
Άσκηση 4

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 200.000 ευρώ λήγει σε 6 χρόνια και αντικαθίσταται με άλλο γραμμάτιο, το οποίο λήγει σε 9 χρόνια, και το ετήσιο επιτόκιο είναι 7,5%. Ποια είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου;

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή έχουμε αντικατάσταση ενός γραμματίου που λήγει σε 6 έτη με ένα άλλο που θα λήγει σε 9 έτη. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την οικονομικά ισοδύναμη ονομαστική αξία του δευτέρου γραμματίου. Προφανώς αυτή δεν θα είναι πάλι 200.000 ευρώ, αφού θα καθυστερήσει άλλα τρία έτη, μέχρι να πληρωθεί. Θα πρέπει να προστεθεί και ο αντίστοιχος τόκος αυτών των τριών ετών, ώστε να υπολογισθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, η οποία θα είναι μεγαλύτερη από 200.000 ευρώ.
Τα δεδομένα μας είναι:
K1=200.000
i=7,5%=0,075
n1=6 έτη n2=9 έτη

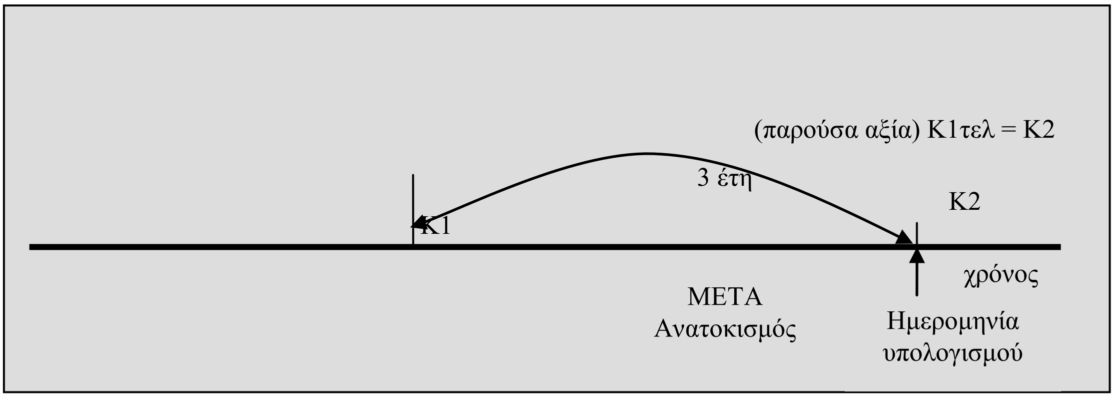
Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία Κ2 του νέου γραμματίου, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία υπολογισμού της αντικατάστασης, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5. *Δεδομένα άσκησης 5.4*

Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία Κ01 του πρώτου γραμματίου και την παρούσα αξία Κ02 του νέου γραμματίου. Αφού τα δύο γραμμάτια είναι οικονομικά ισοδύναμα, οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
$K_{01}=K_{02}$
Η κάθε παρούσα αξία υπολογίζεται με τον τύπο της προεξόφλησης $K0=Kn*U^n$. Υπολογίζουμε το συντελεστή U^n από τον πίνακα συντελεστή προεξόφλησης για επιτόκιο i=7,5% και n έτη αντίστοιχα.
Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης, και η εξίσωση γίνεται:
$K1*U^6= K2*U^9 \Leftrightarrow K1*U^6/ U^9= K2 \Leftrightarrow 200.000*U^6/ U^9= K2 \Leftrightarrow$
K2=200.000 *0,6480/ 0,5216 = 248.466,26

Ένας άλλος τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία Κ2 του νέου γραμματίου, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία λήξης του νέου αυτού γραμματίου, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6. *Δεδομένα άσκησης 5.4*

Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία Κ1τελ του πρώτου γραμματίου και την παρούσα αξία Κ2 του νέου γραμματίου. Για το πρώτο γραμμάτιο έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 3 έτη (9-6=3) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, ανατοκιζόμενη για 3 έτη. Για το νέο δεύτερο γραμμάτιο η ημερομηνία υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία λήξης του, και η παρούσα αξία του θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία. Αφού τα δύο γραμμάτια είναι οικονομικά ισοδύναμα, οι δύο παρούσες αξίες είναι ίσες. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
$K1τελ=K2$ όπου $K1τελ =K1*(1+i)^n$

Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:

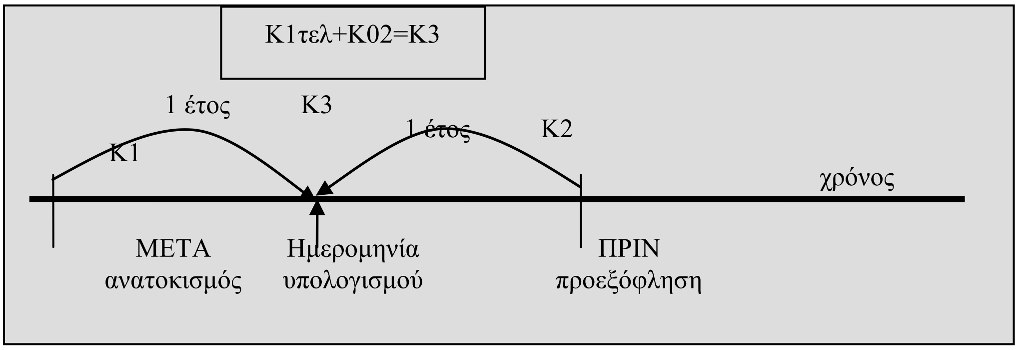
$K1*(1+i)^n = K2 \Leftrightarrow 200.000*(1+0.075)^3 == K2 \Leftrightarrow 200.000*1{,}2423 = K2 \Leftrightarrow$
K2=248.460 ευρώ.
Η διαφορετική τιμή των δύο τρόπων υπολογισμού οφείλεται στην διαφορετική ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς.

Άσκηση 5

Έμπορος οφείλει χρέος 400.000 ευρώ, που πρέπει να πληρωθεί σε 3 χρόνια, και δεύτερο χρέος 150.000 ευρώ, που πρέπει να πληρωθεί σε 5 χρόνια. Ο έμπορος συμφωνεί να πληρώσει τα δύο αυτά χρέη σε 4 χρόνια. Τι ποσό θα πληρώσει, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6%, και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο;

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή έχουμε αντικατάσταση δύο χρεών, 400.000 και 150.000, που λήγουν σε 3 έτη και 5 έτη αντίστοιχα, με ένα άλλο χρέος, που θα λήγει σε 4 έτη. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την οικονομικά ισοδύναμη αξία του τρίτου ποσού χρέους. Προφανώς αυτή δεν θα είναι πάλι 550.000 ευρώ (400.000+150.000), αφού θα καθυστερήσει να πληρωθεί το πρώτο χρέος, αλλά το δεύτερο θα πληρωθεί νωρίτερα από ό,τι είχε συμφωνηθεί. Θα πρέπει να προστεθεί και ο αντίστοιχος τόκος στο πρώτο χρέος που θα καθυστερήσει η οφειλή του, ενώ θα αφαιρεθεί ο αντίστοιχος τόκος από το δεύτερο χρέος που θα προπληρωθεί.



Σχήμα 5.7. *Δεδομένα άσκησης 5.5*

Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία K3 του νέου ποσού χρέους, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία λήξης του νέου αυτού ποσού, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.7.
Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία K1τελ του πρώτου ποσού και την παρούσα αξία K02 του δεύτερου ποσού. Για το πρώτο ποσό έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 1 έτος (4-3=1) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, ανατοκιζόμενη για 1 έτος. Για το νέο δεύτερο ποσό η ημερομηνία υπολογισμού είναι 1 έτος (5-4=1) πριν την ημερομηνία λήξης του και η παρούσα αξία του θα είναι ίση με την ονομαστική του , προεξοφλούμενη για ένα έτος. Η παρούσα αξία του νέου ποσού χρέους συμπίπτει με την ονομαστική του αξία, αφού η ημερομηνία υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία οφειλής. Αφού τα δύο ποσά χρέους είναι οικονομικά ισοδύναμα με το νέο χρέος, το άθροισμα των δύο ποσών χρέους είναι ίσο με τον νέο ποσό K3. Έτσι, έχουμε την εξίσωση:
K1τελ+K02 =K3 όπου $K1τελ = K1*(1+i)^n$ και $K02 = K2*U^n$
Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, θα πρέπει ο χρόνος να μετρηθεί σε εξάμηνα και το επιτόκιο να είναι εξαμηνιαίο. Έτσι το 1 έτος =2 εξάμηνα και i=6%/2=3% το εξαμηνιαίο επιτόκιο.
Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται
$K1τελ+K02 = K3 \Leftrightarrow K1*(1+i)^3 + K2*U^3 = K3 \Leftrightarrow$
$400.000*(1+0{,}03)^2 + 150.000*U^2 = K3 \Leftrightarrow K3 = 400.000*1{,}0609 + 150.000*0{,}9426$
K3= 424.360+141.389,37 = 565.749,37 ευρώ

Επομένως σε 4 χρόνια θα πρέπει να πληρώσει 565.749,37 ευρώ, για να εξοφλήσει και τα δύο χρέη του.

Άσκηση 6

Με ποιο επιτόκιο αντικαθίσταται κεφάλαιο 3000 ευρώ σήμερα σε μια τράπεζα με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, ώστε να είναι ισοδύναμο με κεφάλαιο 4000 ευρώ σε 6 χρόνια;

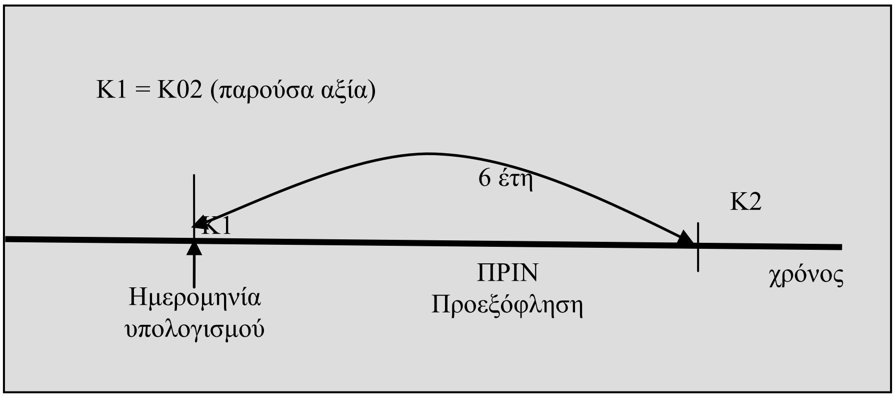
Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή έχουμε αντικατάσταση ενός ποσού που λήγει σε 6 έτη με ένα άλλο που λήγει σήμερα. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το επιτόκιο που ίσχυσε, για να υπάρχει η οικονομική ισοδυναμία. Τα δεδομένα μας είναι:

K1=3.000   K2=4.000

n1=0 έτη   n2=6 έτη

Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία υπολογισμού της αντικατάστασης, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8 . *Δεδομένα άσκησης 5.6*

Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία K1 του πρώτου ποσού και την παρούσα αξία K02 του δευτέρου ποσού. Αφού τα δύο ποσά είναι οικονομικά ισοδύναμα, οι δύο αξίες είναι ίσες. Έτσι έχουμε την εξίσωση:

$K_1=K_{02}$

Η κάθε παρούσα αξία υπολογίζεται με τον τύπο της προεξόφλησης $K_0=Kn*U^n$. Επειδή ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίους, μετατρέπουμε το 6 έτη σε δώδεκα εξάμηνα. Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης, και η εξίσωση γίνεται:

$K1 = K2*U^{12} \Leftrightarrow 3.000=4.000*U^{12} \Leftrightarrow U^{12}=3000/4000=0{,}75$

Θέλουμε δηλαδή να επιλύσουμε την εξίσωση $1/(1+i)^{12}=0{,}75$ με άγνωστο το i.

Από τον πίνακα με τους συντελεστές προεξόφλησης, εντοπίζουμε για τη γραμμή που αντιστοιχεί σε 12 χρονικές περιόδους σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί συντελεστής προεξόφλησης 0,75.

Για το επιτόκιο 2,5% βρίσκουμε συντελεστή προεξόφλησης 0,7436, το οποίο θεωρούμε σχεδόν ίσο με 0,75. Αν θέλαμε μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς, θα μπορούσαμε να λύσουμε μαθηματικά την εξίσωση $1/(1+i)^{12}=0{,}75 \Leftrightarrow (1+i)^{12}=1/0{,}75 \Leftrightarrow (1+i)=1{,}333^{1/12}$

$\Leftrightarrow$ i =1,02424-1=0,02424=2,424%

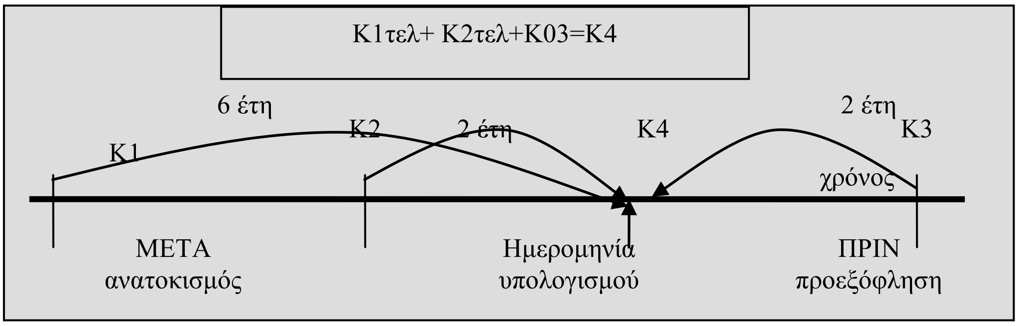
Σημειώνουμε ότι το επιτόκιο που βρήκαμε αντιστοιχεί σε εξαμηνιαίο επιτόκιο, αφού όλες οι σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε αντιστοιχούν σε εξαμηνιαίο ανατοκισμό.

Άσκηση 7

Οφείλει κάποιος 6000 ευρώ μετά από 2 έτη, 7000 ευρώ μετά από 6 έτη και 5000 ευρώ μετά από 10 έτη. Θέλει να ξοφλήσει και τα τρία χρέη του μετά από 8 χρόνια. Αν ο ανατοκισμός γίνεται με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4,5%, τι ποσό θα πρέπει να πληρώσει μετά από 8 χρόνια;

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή, έχουμε αντικατάσταση τριών χρεών 6.000, 7.000 και 5.000 που λήγουν σε 2 έτη, σε 6 έτη και σε 10 έτη αντίστοιχα, με ένα άλλο χρέος που θα λήγει σε 8 έτη. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την οικονομικά ισοδύναμη αξία του νέου ποσού χρέους. Τα δύο πρώτα χρέη θα καθυστερήσουν να πληρωθούν, το τρίτο χρέος θα πληρωθεί νωρίτερα από ό,τι είχε συμφωνηθεί. Θα πρέπει να προστεθεί και ο αντίστοιχος τόκος στο πρώτο και δεύτερο χρέος, που θα καθυστερήσει η οφειλή του, ενώ θα αφαιρεθεί ο αντίστοιχος τόκος από το τρίτο χρέος που θα προπληρωθεί.



Σχήμα 5.9. *Δεδομένα άσκησης 5.7*

Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία Κ4 του νέου ποσού χρέους, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία λήξης του νέου αυτού ποσού, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.9.

Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία Κ1τελ του πρώτου ποσού και την παρούσα αξία Κ2τελ του δεύτερου ποσού με ανατοκισμό. Η παρούσα αξία του τρίτου ποσού Κ03 θα υπολογισθεί με προεξόφληση.

Στα 8 έτη από σήμερα, για το πρώτο ποσό, το οποίο έληγε σε 2 έτη από σήμερα, έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 6 έτος (8-2=6) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, ανατοκιζόμενη για 6 έτη. Για το δεύτερο ποσό, το οποίο έληγε σε 6 έτη από σήμερα), έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 2 έτη (8-6=2) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, ανατοκιζόμενη για 2 έτη.

Για το τρίτο ποσό, το οποίο λήγει σε 10 έτη από σήμερα, στην ημερομηνία υπολογισμού που είναι 2 έτη (10-8=2) πριν την ημερομηνία λήξης του, η παρούσα αξία του θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία, προεξοφλούμενη για δύο έτη. Η παρούσα αξία του νέου ποσού χρέους Κ4 συμπίπτει με την ονομαστική του αξία, αφού η ημερομηνία υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία οφειλής. Αφού τα ποσά χρέους είναι οικονομικά ισοδύναμα με το νέο χρέος, το άθροισμα των τριών ποσών χρέους είναι ίσο με τον νέο ποσό Κ4.

Έτσι έχουμε την εξίσωση:

Κ1τελ+ Κ2τελ+Κ03 =Κ4

όπου Κ1τελ $=K1*(1+i)^{n1}$, όπου Κ2τελ $=K2*(1+i)^{n2}$ και $K03 = K3*U^{n3}$

Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, και το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, θα πρέπει ο χρόνος να μετρηθεί σε εξάμηνα.

6 έτη =12 εξάμηνα, 2 έτη =4 εξάμηνα

Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:

$$K1\tau\varepsilon\lambda + K2\tau\varepsilon\lambda + K03 = K4 \Leftrightarrow K1*(1+i)^{12} + K2*(1+i)^{4} + K3*U^{4} = K4 \Leftrightarrow$$

$$6.000*(1+0{,}045)^{12} + 7.000*(1+0{,}045)^{4} + 5.000*U^{4} = K4 \Leftrightarrow$$

$$K4 = 6.000*1{,}\ 6959 + 7.000*1{,}1925 + 5.000*0{,}8386$$

Κ4= 10.175,29+8.347,63+4.192,81 = 22.715,73 ευρώ

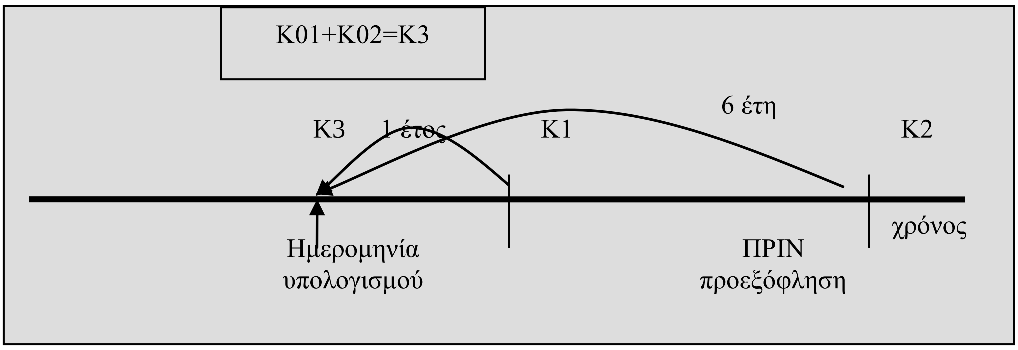
Επομένως σε 8 χρόνια θα πρέπει να πληρώσει 22.715,73 ευρώ, για να εξοφλήσει και τα τρία χρέη του.

Άσκηση 8

Έστω ότι οφείλουμε στην τράπεζα δύο δάνεια αξίας 4.000 ευρώ, σε 5 έτη, και 6.000 ευρώ, σε 10 έτη, με ετήσιο επιτόκιο 5,6% και ανατοκισμό κάθε εξάμηνο. Δεν πληρώνουμε καθόλου δόσεις και αποφασίζουμε να ξοφλήσουμε και τα δύο δάνεια σε 4 έτη από σήμερα. Τι ποσό θα πρέπει να πληρώσουμε;

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή, έχουμε αντικατάσταση δύο χρεών 40.000 και 6.000, που λήγουν σε 5 έτη και 10 έτη αντίστοιχα, με ένα άλλο χρέος που θα λήγει σε 4 έτη. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την οικονομικά ισοδύναμη αξία του τρίτου ποσού χρέους. Προφανώς αυτή δεν θα είναι πάλι 10.000 ευρώ (4.000+6.000), αφού πληρωθούν νωρίτερα από ό,τι είχε συμφωνηθεί. Θα πρέπει να αφαιρεθεί ο αντίστοιχος τόκος από τα δύο χρέη που θα προπληρωθούν.



Σχήμα 5.10. *Δεδομένα άσκησης 5.8*

Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία K3 του νέου ποσού χρέους, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία λήξης του νέου αυτού ποσού, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.10.
Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία K01 του πρώτου ποσού και την παρούσα αξία K02 του δεύτερου ποσού. Για το πρώτο ποσό η ημερομηνία λήξης του θα είναι σε 1 έτος (5-4=1) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία προεξοφλούμενη 1 έτος πριν.
Για το νέο δεύτερο ποσό η ημερομηνία λήξης του θα είναι σε 6 έτη (10-4=6) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, προεξοφλούμενη 6 έτη πριν.
Η παρούσα αξία του νέου ποσού χρέους K3 συμπίπτει με την ονομαστική του αξία, αφού η ημερομηνία υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία οφειλής. Αφού τα δύο ποσά χρέους είναι οικονομικά ισοδύναμα με το νέο χρέος, το άθροισμα των δύο ποσών χρέους είναι ίσο με τον νέο ποσό K3. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
$K01+K02 = K3$ όπου $K01 = K1*U^{n1}$ και $K02 = K2*U^{n2}$

Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, θα πρέπει ο χρόνος να μετρηθεί σε εξάμηνα και το επιτόκιο να είναι εξαμηνιαίο.
1 έτος =2 εξάμηνα, 6 έτη -12 εξάμηνα και i=5,6%/2=2,8% το εξαμηνιαίο επιτόκιο.
Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:
$K01+K02 = K3 \Leftrightarrow K1*U^2 + K2*U^{12} = K3 \Leftrightarrow$
$4.000/(1+0,028)^2 + 6.000/(1+0,028)^{12} = K3 \Leftrightarrow K3 = 4.000*0,9463 + 6.000*0,7179$
$K3 = 3.785,20+4.307,58 = 8.092,78$ ευρώ

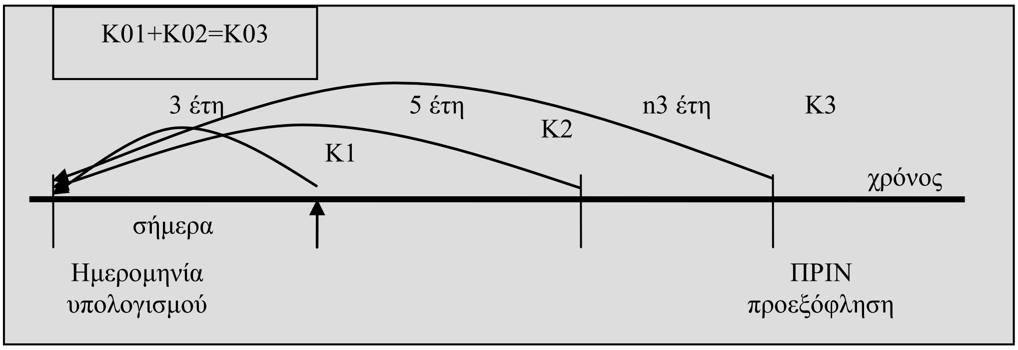
Επομένως σε 4 χρόνια θα πρέπει να πληρώσει 8.092,78 ευρώ, για να εξοφλήσει και τα δύο χρέη του.

Άσκηση 9

Θέλουμε να αντικαταστήσουμε δύο δάνεια μας, το ένα αξίας 20.000 που λήγει σε 3 έτη και το άλλο αξίας 15.000 ευρώ που λήγει σε 5 έτη, με ένα νέο δάνειο 40.000 ευρώ και ετήσιο επιτόκιο 6,5%. Σε πόσο χρόνο θα λήγει το νέο δάνειο;

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή, έχουμε αντικατάσταση δύο χρεών 20.000 και 15.000, που λήγουν σε 3 έτη και 5 έτη αντίστοιχα, με ένα άλλο χρέος 40.000, που θα πρέπει να βρούμε πότε λήγει. Προφανώς, αφού το νέο ποσό 40.000 ευρώ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο χρεών (20.000+15.000), θα καθυστερήσει να πληρωθεί το νέο ποσό. Συμβολίζουμε με n3 τα έτη από σήμερα μέχρι την πληρωμή του ποσού των 40.000 ευρώ.
Θα πρέπει να προστεθεί και ο αντίστοιχος τόκος στο πρώτο και δεύτερο χρέος που θα καθυστερήσει η οφειλή τους.



Σχήμα 5.11. *Δεδομένα άσκησης 5.9*

Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία K3 του νέου ποσού χρέους, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας τη σημερινή ημερομηνία, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.11.
Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία κάθε ποσού που θα είναι ίση με την ονομαστική του αξία, προεξοφλούμενη για τα αντίστοιχα έτη.
Αφού τα δύο ποσά χρέους είναι οικονομικά ισοδύναμα με το νέο χρέος, το άθροισμα των δύο ποσών χρέους είναι ίσο με τον νέο ποσό K3. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
$K01+K02 = K03$ όπου $K02 = K1*U^{n1}$, $K02 = K2*U^{n2}$ και $K03 = K3*U^{n3}$
Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, θα πρέπει ο χρόνος να μετρηθεί σε εξάμηνα και το επιτόκιο να είναι εξαμηνιαίο.
3 έτη =6 εξάμηνα, 5 έτη =10 εξάμηνα, n3 έτη =2*n3 εξάμηνα και i=6,5%/2=3,25% το εξαμηνιαίο επιτόκιο.
Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:

$K01+K02 = K03 \Leftrightarrow K1*U^{6} + K2*U^{10} = K3*U^{2*n3} \Leftrightarrow$
$20.000/(1+0{,}035)^{6} + 15.000/(1+0{,}035)^{10} = 40.000/(1+0{,}035)^{2*n3} \Leftrightarrow$
$20.000*0{,}8135 + 15.000*0{,}7089 = 40.000/(1+0{,}035)^{2*n3} \Leftrightarrow$
$16.270{,}01+10.633{,}78 = 40.000/(1+0{,}035)^{2*n3} \Leftrightarrow$
$(1+0{,}035)^{2*n3} = 40.000/26.903{,}79 \Leftrightarrow$
$(1+0{,}035)^{2*n3} = 1{,}49$

Αν λογαριθμήσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, βρίσκουμε:
$2*n3 = 11{,}56 \Leftrightarrow n3 = 5{,}88$ έτη.
Άλλος τρόπος, για να λύσουμε την εξίσωση, χωρίς λογαρίθμους, είναι να ψάξουμε στον πίνακα κεφαλαιοποίησης (ανατοκισμού) για επιτόκιο 0,035=3,5% σε πόσες χρονικές περιόδους ο συντελεστής είναι 1,49 ή πιο κοντά σε 1,49, και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής, για να βρούμε 2*n3 =11,56, οπότε πάλι συμπεραίνουμε ότι n3=5,88 έτη

Επομένως θα πρέπει το νέο δάνειο 40.000 να λήγει σε 5,88 χρόνια.

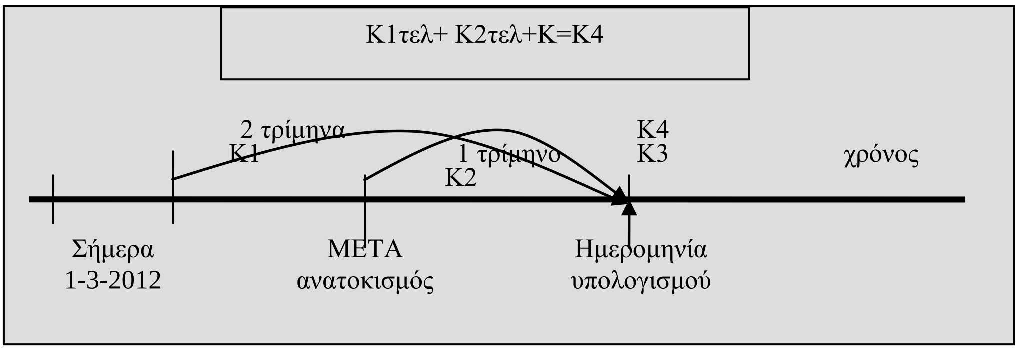
Άσκηση 10

Βιοτέχνης έχει υπογράψει τρία ισόποσα γραμμάτια, τα οποία λήγουν αντίστοιχα 30-6-2012, 30-9-2012 και 31-12-2012. Συμφώνησε σήμερα (1-3-2012) με τον πιστωτή να τα αντικαταστήσει με ένα νέο γραμμάτιο που λήγει 31-12-2012, και έχει ονομαστική αξία 15.000 ευρώ.

α) Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 2%, να βρεθεί η ονομαστική αξία καθενός από τα τρία αρχικά γραμμάτια.
β) (*προαιρετικά*) Αν καθένα από τα ισόποσα γραμμάτια είναι ονομαστικής αξίας 4500 ευρώ, να βρεθεί το τριμηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού.
(Υπόδειξη: Εξισώστε την τελική αξία του ενιαίου γραμματίου με κάθε τελική αξία των τριών γραμματίων και λύστε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που προκύπτει ως προς i. Θα βρείτε i=0,1073).

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή, έχουμε αντικατάσταση τριών γραμματίων, έστω ονομαστικής αξίας K ποσού το καθένα, που λήγουν σε 1 τρίμηνο, σε 2 τρίμηνα και σε 3 τρίμηνα αντίστοιχα, με ένα άλλο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας K4=15.000 που θα λήγει σε 3 τρίμηνα.
α) Το ζητούμενο είναι να βρούμε την ονομαστική αξία K κάθε γραμματίου. Τα δύο πρώτα γραμμάτια θα καθυστερήσουν να πληρωθούν, ενώ το τρίτο θα πληρωθεί κανονικά στην ημερομηνία λήξης του. Θα πρέπει να προστεθεί και ο αντίστοιχος τόκος στο πρώτο και δεύτερο γραμμάτιο, που θα καθυστερήσει η οφειλή τους.



Σχήμα 5.12. *Δεδομένα άσκησης 5.10*

Ένας τρόπος, για να προσδιορίσουμε την ονομαστική αξία K4 του νέου γραμματίου, είναι να θεωρήσουμε ως εποχή οικονομικής ισοδυναμίας την ημερομηνία λήξης του νέου γραμματίου, όπως εμφανίζεται στο σχήμα 5.12.
Στην ημερομηνία αυτή θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία K1τελ του πρώτου ποσού και την παρούσα αξία K2τελ του δεύτερου ποσού με ανατοκισμό. Η παρούσα αξία του τρίτου ποσού K3 συμπίπτει με την ονομαστική αξία K, και η παρούσα αξία του νέου γραμματίου συμπίπτει με την ονομαστική αξία K4.
Στα 3 τρίμηνα από σήμερα, για το πρώτο γραμμάτιο, το οποίο έληγε σε 1 τρίμηνο από σήμερα, έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 3 τρίμηνα (3-1=2) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία, ανατοκιζόμενη για 2 τρίμηνα. Για το δεύτερο γραμμάτιο, το οποίο έληγε σε 2 τρίμηνα από σήμερα, έχει παρέλθει η ημερομηνία λήξης του πριν 1 τρίμηνο (3-2=1) και, επομένως, η αξία του είναι η ονομαστική του αξία ανατοκιζόμενη, για 1 τρίμηνο.
Η παρούσα αξία του τρίτου γραμματίου και του νέου γραμματίου συμπίπτει με την ονομαστική του αξία, αφού η ημερομηνία υπολογισμού συμπίπτει με την ημερομηνία λήξης. Επίσης, αφού τα γραμμάτια είναι οικονομικά ισοδύναμα με το νέο γραμμάτιο, το άθροισμα των τριών γραμματίων είναι ίσο με το νέο γραμμάτιο K4. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
K1τελ+ K2τελ+K3 =K4 όπου K1τελ $=K*(1+i)^{n1}$ και K2τελ $=K*(1+i)^{n2}$
Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο, θα πρέπει ο χρόνος να μετρηθεί σε τρίμηνα, όπως αναφέρθηκε.

Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:
K1τελ+ K2τελ+K3 =K4 ⇔ $K*(1+i)^2+ K*(1+i)^1+ K3 =K4$ ⇔
$K*(1+0,02)^2+ K*(1+0,02)^1+ K =15.000$ ⇔
$K*1,0404+ K*1,02+ K =15.000$ ⇔ $K*(1,0404+1,02+ 1)= 15.000$ ⇔
$K= 15.000/ 3,0604 = 4.901,32$ ευρώ

Επομένως η ονομαστική αξία καθενός από τα τρία ισόποσα γραμμάτια είναι 4.901,32 ευρώ.

β) Στην περίπτωση στην οποία καθένα από τα ισόποσα γραμμάτια είναι ονομαστικής αξίας 4500 ευρώ και αντικαθίστανται με νέο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 15.000 ευρώ, ζητάμε το τριμηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού. Πάλι έχουμε οικονομική ισοδυναμία, η οποία γράφεται:
$K1τελ + K2τελ + K3 = K4$ όπου $K1τελ = K*(1+i)^{n1}$ και $K2τελ = K*(1+i)^{n2}$.
Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, και το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο, θα πρέπει και ο χρόνος να μετρηθεί σε τρίμηνα.

Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα της άσκησης και η εξίσωση γίνεται:
$K1τελ + K2τελ + K3 = K4 \Leftrightarrow K*(1+i)^2 + K*(1+i)^1 + K3 = K4 \Leftrightarrow$
$4.500*(1+i)^2 + 4.500*(1+i)^1 + 4.500 = 15.000 \Leftrightarrow$
$4.500*[(1+i)^2 + (1+i)^1 + 1] = 15.000 \Leftrightarrow$
$4.500*[(1+2i+i^2+1+i+ 1] = 15.000 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3+3i+i^2 = 15.000/4.500 \Leftrightarrow$
$i^2 + 3i + 3 = 3,333 \Leftrightarrow i^2 + 3i + 3 - 3,333 = 0 \Leftrightarrow i^2 + 3i - 0,333 = 0$
Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού (τριώνυμο) ως προς i, και λύνεται, υπολογίζοντας τη διακρίνουσα, η οποία είναι 3*3-4*1*(-0,333)=9+1,333=10,333, και η τετραγωνική της ρίζα είναι 3,2145.
Επομένως υπάρχουν δύο ρίζες ,η μία i=(-3+3,2145)/2 =0,1072 και η άλλη ρίζα είναι
i=(-3-3,2145)/2 = -3,1072.
Η δεύτερη ρίζα απορρίπτεται, αφού είναι αρνητική, και δεν υπάρχει αρνητικό επιτόκιο.
Θα πρέπει, επομένως, να έχουμε τριμηνιαίο επιτόκιο 0,1072=10,72%, για να γίνει η αντικατάσταση των τριών γραμματίων 4.500 ευρώ με ένα νέο 15.000 ευρώ.

Επαναληπτικές ασκήσεις ανατοκισμού

1. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 16.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 4%.

2. Έμπορος καταθέτει 18.000 ευρώ σε τράπεζα με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 2% για 3 έτη και ανατοκισμό κάθε εξάμηνο. Μετά από 1 χρόνο απέσυρε τις 10.000 ευρώ. Ποιο ποσό θα εισπράξει στο τέλος των 3 ετών;

3. Καταθέτουμε σήμερα στην τράπεζα κεφάλαιο 600 ευρώ με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 2%. Μετά από 2 έτη στον ίδιο λογαριασμό καταθέτουμε άλλα 500 ευρώ με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 3%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, να βρεθεί το ποσό του λογαριασμού μας μετά από 3 έτη.

4. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο επένδυσης για κεφάλαια 15.000 ευρώ, 6.000 ευρώ, 10.000 ευρώ, τα οποία ανατοκίζονται κάθε έτος, για 3 έτη με αντίστοιχα ετήσια επιτόκια 2%, 3% και 4%.

5. Τι ποσό θα πρέπει να πληρώσουμε σήμερα, για να ξοφλήσουμε δύο δάνεια μας; Το ένα είναι 4.500 ευρώ και λήγει σε 2 έτη και το άλλα είναι 7.000 ευρώ και λήγει σε 2,5 έτη. Υποθέτουμε ότι το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 3% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

6. Προεξοφλούμε δύο συναλλαγματικές ονομαστικής αξίας 10.000 ευρώ, που λήγει σε 3 έτη, και 15.000 ευρώ, που λήγει σε 4 έτη. Τι χρήματα θα εισπράξουμε σήμερα, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6%, ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο και η τράπεζα εισπράττει για έξοδα 1% επί της ονομαστικής αξίας;

7. Το μηνιαίο επιτόκιο μιας πιστωτικής κάρτας είναι 2,3%, και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε μήνα. Πόσο είναι το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο και πόσο το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο;

8. Καταθέτουμε 5.000 ευρώ με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 6%. Να υπολογισθεί η τελική αξία του κεφαλαίου σε 4 έτη, αν ο ανατοκισμός είναι: α) εξαμηνιαίος, β) μηνιαίος, γ) ετήσιος.

Ράντες

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- *Αρχική αξία*

- *Τελική αξία*

- *Δόση ή όρος*

- *Περίοδος*

- *Διάρκεια (συμβολισμός n)*

- *Διηνεκής ράντα*

- *Κλασματική ράντα*

ΣΤΟΧΟΙ

- *Κατανόηση και χρησιμοποίηση μιας σειράς πληρωμών που ονομάζεται ράντα.*

- *Διάκριση ραντών.*

- *Εύρεση αρχικής αξίας και τελικής αξίας ράντας.*

- *Εύρεση δόσης, χρόνου ή επιτοκίου, για να φθάσουμε στο τελικό κεφάλαιο που επιθυμούμε.*

- *Εύρεση αρχικής αξίας για διηνεκείς ράντες και κλασματικές ράντες.*

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Καταθέτουμε κεφάλαιο 2.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους και θέλουμε να υπολογίσουμε την τελική αξία του ποσού που θα μαζευτεί μετά από 10 έτη.

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την αξία καταθέσεων ή αναλήψεων που γίνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές περιοδικά;

1 Εισαγωγή - Χρήση ράντας

Χρησιμοποιούμε ράντα προκειμένου να κάνουμε υπολογισμούς στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Σχηματισμός κεφαλαίου με ισόποσες καταθέσεις
- Εξόφληση χρέους με δόσεις
- Μηνιαίες κρατήσεις μισθωτών
- Σημερινή αξία ενός πλήθους χρηματικών ποσών, τα οποία εισπράττονται περιοδικά

2 Ορισμοί - έννοιες

Ας δούμε καταρχάς πώς ορίζουμε τις έννοιες που εμπλέκονται στον υπολογισμό μιας ράντας.

2.1 Ράντα (Rent ή Annuity)

Σειρά κεφαλαίων, τα οποία καταθέτονται ή καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Μία ακολουθία χρηματικών ποσών (*εισροών ή εκροών*) που λήγουν (*εισπράττονται ή πληρώνονται*) σε ίσα απέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές ονομάζεται **ράντα** ή σειρά πληρωμών [www.el.wikipedia.org].

2.2 Όρος ή Δόση (Rent)

Το ποσό που καταβάλλεται σε ίσα χρονικά διαστήματα ονομάζεται όρος ή δόση της ράντας. Στις περισσότερες περιπτώσεις η δόση της ράντας είναι σταθερή και δεν αλλάζει στη διάρκεια στης ράντας.

2.3 Λήξη

Η χρονική στιγμή κατάθεσης ή καταβολής της δόσης ονομάζεται λήξη της αντίστοιχης δόσης.

2.4 Περίοδος

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων ονομάζεται περίοδος της ράντας. Η περίοδος συνήθως μετριέται σε ακέραια μονάδα του χρόνου (μήνες ή έτη).

2.5 Παρούσα αξία

Η αξία όλων των όρων μιας ράντας σε μια ορισμένη χρονική στιγμή αντιστοιχεί στην παρούσα αξία της ράντας την ορισμένη χρονική στιγμή.

2.6 Τελική αξία

Η αξία όλων των όρων μιας ράντας στο τέλος της, αφού, δηλαδή, γίνουν όλες οι καταθέσεις ή καταβολές της ράντας, ονομάζεται τελική αξία της ράντας.

2.7 Αρχική αξία

Η αξία όλων των όρων μιας ράντας στην αρχή της ονομάζεται αρχική αξία της ράντας και είναι οικονομικά ισοδύναμη με την τελική αξία της ράντας.

3 Διακρίσεις ράντας

Οι ράντες διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το πότε πληρώνεται η δόση τους. Η πρώτη κατηγορία ονομάζεται ληξιπρόθεσμη ράντα (Ordinary Annuity). Η δεύτερη κατηγορία ονομάζεται προκαταβλητέα ράντα (Annuity Due).

3.1 Ληξιπρόθεσμη ράντα (Ordinary Annuity)

Ο όρος (δόση της ράντας) καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου. Ξεκινάει, δηλαδή, η χρονική περίοδος της ράντας και, όταν αυτή τελειώνει, θα πρέπει να καταβληθεί ο όρος R της ράντας. Αυτό σχηματικά παριστάνεται στο σχήμα 6.1.

Σχήμα 6.1. *Καταβολή δόσεων ληξιπρόθεσμης ράντας*

3.2 Προκαταβλητέα ράντα (Annuity Due)

Ο όρος (δόση της ράντας) καταβάλλεται στην αρχή περιόδου. Όταν ξεκινάει, δηλαδή, η χρονική περίοδος της ράντας, θα πρέπει να καταβληθεί ο όρος R της ράντας. Αυτό σχηματικά παριστάνεται στο σχήμα 6.2.

Σχήμα 6.2. *Καταβολή δόσεων ληξιπρόθεσμης ράντας*

4 Διακρίσεις ραντών

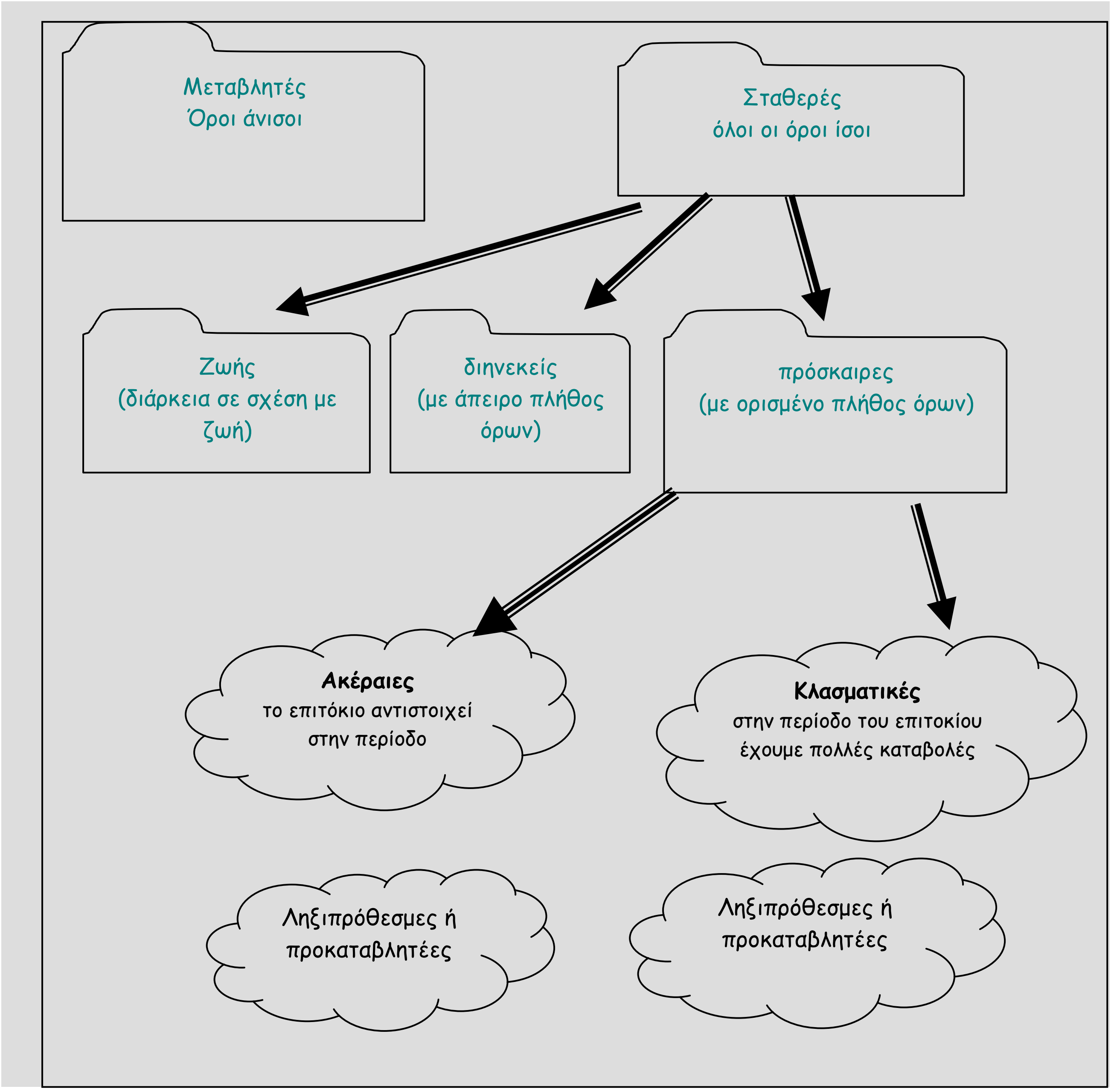
Οι ράντες διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με το ποσό των όρων τους, ανάλογα με τη διάρκεια τους, ανάλογα με την περίοδό τους και ανάλογα με το πότε καταβάλλεται η δόση τους. (σχήμα 6.3)

Όταν η δόση (όρος) μιας ράντας δεν μεταβάλλεται σε όλη τη διάρκειά της, ονομάζεται **σταθερή ράντα**, , όταν η δόση μεταβάλλεται, ονομάζεται **μεταβλητή ράντα**. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με σταθερές ράντες, δηλαδή θα θεωρούμε ότι το ποσό της δόσης παραμένει το ίδιο και καταβάλλεται σε κάθε χρονική περίοδο.

Οι σταθερές ράντες, ανάλογα με τη διάρκεια τους, χωρίζονται σε ράντες ζωής, σε διηνεκείς ράντες και σε πρόσκαιρες ράντες. Οι ράντες **ζωής**, συνδέονται με τη ζωή κάποιου ανθρώπου, ή κάποιας επιχείρησης, και καταβάλλεται δόση όσο διαρκεί η ζωή. Οι ράντες αυτές τελειώνουν με το τέλος της ζωής, και συνήθως δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων πότε θα έρθει το τέλος τους. Οι υπολογισμοί τέτοιου είδους ραντών βασίζονται στη θεωρία των πιθανοτήτων, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτές στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου. Οι **διηνεκείς** ράντες, δεν τελειώνουν ποτέ, αλλά η δόση τους πληρώνεται για πάντα και έχουν άπειρο πλήθος όρων. Οι **πρόσκαιρες** ράντες έχουν συγκεκριμένη διάρκεια, γνωστή εκ των προτέρων, πεπερασμένο πλήθος όρων, και με αυτές θα ασχοληθούμε κυρίως στη συνέχεια.

Οι πρόσκαιρες ράντες, ανάλογα με την περίοδο ανατοκισμού, διακρίνονται σε **ακέραιες** και **κλασματικές** ράντες. Στις **ακέραιες** ράντες η περίοδος της ράντας συμπίπτει με την περίοδο του επιτοκίου και την περίοδο του ανατοκισμού. Αν ο ανατοκισμός, δηλαδή, γίνεται κάθε εξάμηνο, το επιτόκιο υπολογίζεται κάθε εξάμηνο και η δόση της ράντας καταβάλλεται κάθε εξάμηνο. Στις **κλασματικές** ράντες έχουμε περισσότερες καταβολές όρων της ράντας σε μια περίοδο του επιτοκίου ανατοκισμού. Αν ο ανατοκισμός, δηλαδή, γίνεται κάθε εξάμηνο, το επιτόκιο ανατοκισμού υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, αλλά οι δόσεις της ράντας καταβάλλονται κάθε τρίμηνο (δύο καταβολές στην κλασματική ράντα) ή κάθε μήνα (έξι καταβολές στην κλασματική ράντα).

Σε όλες τις παραπάνω διακρίσεις οι ράντες διαχωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το πότε πληρώνεται η δόση τους. Η πρώτη κατηγορία ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη** ράντα (Ordinary Annuity). Η δεύτερη κατηγορία ονομάζεται **προκαταβλητέα** ράντα (Annuity Due).



Σχήμα 6.3. *Διακρίσεις ραντών*

4.1 Εποχή υπολογισμού

Ανάλογα με την εποχή υπολογισμού που θέλουμε να βρούμε τη συνολική αξία μιας ράντας, διακρίνουμε τις ράντες σε **άμεσες, μέλλουσες και αρξάμενες**. **Άμεση** ράντα ονομάζεται η ράντα που ξεκινάει , και υπολογίζουμε την αξία της στην αρχή της. Όταν μια ράντα πρόκειται να αρχίσει στο μέλλον, αλλά υπολογίζουμε την αξία της πριν αρχίσει, αναφερόμαστε σε **μέλλουσα** ράντα. Όταν η ράντα έχει ήδη ξεκινήσει και ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό της αξίας σε κάποια χρονική στιγμή μετά την έναρξή της, ονομάζεται **αρξάμενη** ράντα. Στις μέλλουσες ράντες οι λ χρονικές περίοδοι, μέχρι να ξεκινήσει η ράντα, συμβολίζονται με λ|. Στις αρξάμενες ράντες οι λ χρονικές περίοδοι που έχουν περάσει μετά το ξεκίνημα της ράντα συμβολίζονται με |λ.

4.2 Συμβολισμοί

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

Η αρχική αξία μιας ράντας θα συμβολίζεται με **Vαρχ**.

Η τελική αξία μιας ράντας θα συμβολίζεται με **Vτελ.**

Η αξία μιας ράντας οποιαδήποτε χρονική στιγμή θα συμβολίζεται με **V**.

Η δόση ή όρος της ράντας συμβολίζεται με **R**.

Το επιτόκιο συμβολίζεται με **i**

Ο χρόνος (διάρκεια ράντας) συμβολίζεται με **n**, όταν πρόκειται να συμβολίσουμε ακέραιο πλήθος χρονικών περιόδων.

Ειδικότερα, όταν η ράντα έχει δόση 1 χρηματική μονάδα, χρησιμοποιούνται διεθνώς τα παρακάτω σύμβολα για ληξιπρόθεσμη και για προκαταβλητέα ράντα:

an|i : παρούσα αξία άμεσης μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i

sn|i : τελική αξία μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας με επιτόκιο i

λ|an|i : παρούσα αξία μέλλουσας μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας

|λan|i : παρούσα αξία αρξάμενης μοναδιαίας (R=1) ληξιπρόθεσμης ράντας

an|i : παρούσα αξία μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας με επιτόκιο i

ςn|i : τελική αξία προκαταβλητέας ράντας με επιτόκιο i

λ|an|i :παρούσα αξία μέλλουσας μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας

|λan|i :παρούσα αξία αρξάμενης μοναδιαίας (R=1) προκαταβλητέας ράντας

4.3 Σημεία προσοχής

Η περίοδος μέτρησης του επιτοκίου θα πρέπει να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου. Με n συμβολίζονται οι ακέραιες χρονικές περίοδοι, και το επιτόκιο, που αντιστοιχεί σε μία από τις n χρονικές περιόδους (έτος, ή εξάμηνο ή μήνας…), γράφεται σε δεκαδική μορφή, και όχι σε ποσοστό (%). Αν ο τόκος, δηλαδή, υπολογίζεται κάθε εξάμηνο με επιτόκιο εξαμήνου 2%, στην περίπτωση που έχουμε 3 έτη, θα πρέπει στον τύπο να γράψουμε το επιτόκιο 0,02, και ο χρόνος θα είναι 6 εξάμηνα (3έτη με 2 εξάμηνα ανά έτος).

5 Εύρεση αρχικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά τις δόσεις μιας μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο R=1 ευρώ σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 6.4.

Κάθε δόση αντιστοιχεί σε διαφορετική χρονική στιγμή, αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία της στην αρχή της ράντας, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προεξόφλησης $K_0=KU^n$, για τον υπολογισμό αρχικής αξίας K_0 ενός ποσού K.

Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της πρώτης χρονικής περιόδου θα είναι ίσο με $1*U^1$ στην αρχή της ράντας. Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της δεύτερης χρονικής περιόδου θα είναι ίσο με $1*U^2$ στην αρχή της ράντας. Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της χρονικής περιόδου n θα είναι ίσο με $1*U^n$ στην αρχή της ράντας. Επομένως, η αρχική αξία της ράντας θα είναι ίση με το άθροισμα όλων των αξιών όλων των δόσεων. Το άθροισμα αυτό είναι:

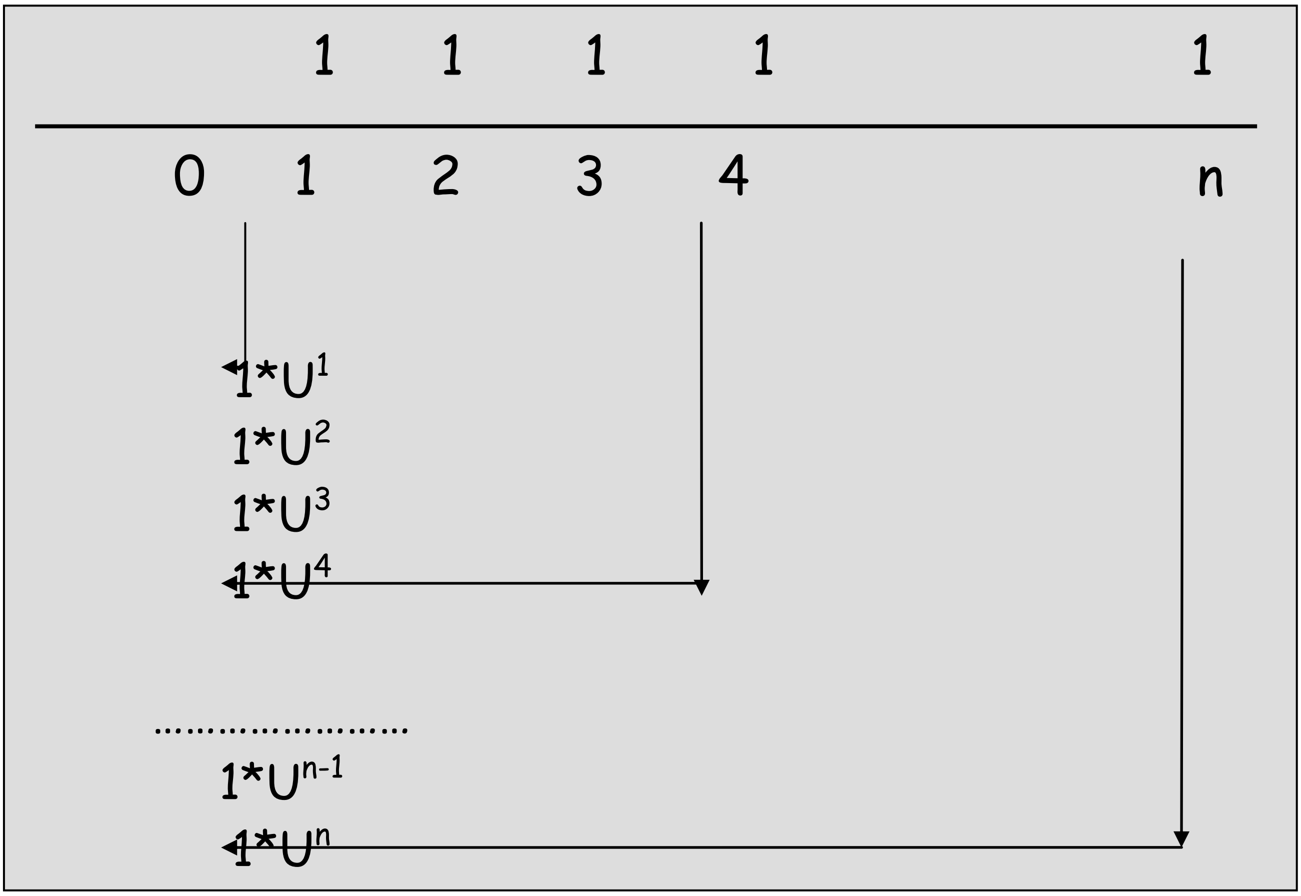
$an|i= U^1+U^2+U^3+\ldots+U^{n-1}+U^n$

αντιστοιχεί σε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου και από τα μαθηματικά αυτό είναι ίσο με

$an|i = (1-U^n) / i$

Ο αριθμός $\alpha_{n|i}$ ονομάζεται **συντελεστής αρχικής αξίας ράντας** (cumulative present value factor). Για ευκολία στους υπολογισμούς, ο όρος $\alpha_{n|i}$ έχει υπολογισθεί για διάφορες τιμής του n και του i, και οι τιμές τους έχουν καταγραφεί σε πίνακα με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. Ο πίνακας αυτός βρίσκεται στο παράρτημα και χρησιμοποιείται κάθε φορά που θέλουμε να υπολογίσουμε το $\alpha_{n|i}$, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αριθμομηχανή.

Παρατηρούμε ότι η αρχική αξία όλων των όρων της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας εξαρτάται από το επιτόκιο i και το πλήθος χρονικών περιόδων n της ράντας. Επίσης παρατηρούμε ότι για την ίδια τιμή του n η παρούσα αξία an|i είναι φθίνουσα συνάρτηση του επιτοκίου. Όσο αυξάνει, δηλαδή, το επιτόκιο μειώνεται η τιμή αn|i. Για το ίδιο επιτόκιο η παρούσα αξία αn|i είναι αύξουσα συνάρτηση του n χρονικές περιόδους. Όσο αυξάνει, δηλαδή, το n τόσο αυξάνει και το πλήθος των δόσεων και η παρούσα αξία.



Σχήμα 6.4. *Υπολογισμός αρχικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας με δόση 1 ευρώ.*

5.1 Εύρεσης αρχικής αξίας άμεσης ράντας

Αν η ράντα δεν έχει δόση 1 ευρώ, αλλά έχει δόση R ευρώ, με τον ίδιο τρόπο μπορεί να υπολογισθεί η αρχική της αξία. Με προεξόφληση, δηλαδή, κάθε δόσης, και βγάζοντας από το άθροισμα το R ως κοινό παράγοντα, ο τύπος της αρχικής παρούσας αξίας γίνεται:

$V = R * (U^1+U^2+U^3+\ldots+U^{n-1}+U^n) = R * \alpha_{n|i}$

Επομένως η συνολική αρχική αξία μιας ράντας με όρο R είναι

V αρχ $=R * \alpha_{n|i}$

όπου ο συντελεστής $\alpha_{n|i}$ υπολογίζεται από τον πίνακα που υπάρχει στο παράρτημα για τις διάφορες τιμές του επιτοκίου i και της διάρκειας n.

5.2 Παράδειγμα εύρεσης αρχικής αξίας άμεσης ράντας

Πόσο κεφάλαιο θα πρέπει να καταθέσουμε σήμερα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3%, ώστε να μπορούμε να αποσύρουμε 3.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους και για 5 έτη;

<u>Λύση</u>
R=3.000
i=3%=0,03

n=5 έτη

Vαρχ =R * $\alpha_{n|i}$ =3.000* 4,5797= 13.739,1 ευρώ

5.3 Εύρεσης αρχικής αξίας μέλλουσας ράντας

Αν η ράντα έχει δόση R ευρώ και πρόκειται να ξεκινήσει μετά από λ περιόδους, ονομάζεται **μέλλουσα** ράντα. Η παρούσα αξία της τη χρονική στιγμή υπολογισμού, η οποία είναι χρονική στιγμή, πριν αρχίσει η ράντα, θα υπολογισθεί ως προεξόφληση της αρχικής αξίας της άμεσης ράντας, αλλά για λ περιόδους νωρίτερα (Καραπιστόλης, 2012). Θα υπολογισθεί με πολλαπλασιασμό του τύπου της αρχικής αξίας επί τον συντελεστή προεξόφλησης ως εξής:

V= Vαρχ * U^{λ} =R * $\alpha_{n|i}$ * U^{λ}

5.4 Παράδειγμα εύρεσης αρχικής αξίας μέλλουσας ράντας

Πόσο κεφάλαιο θα πρέπει να καταθέσουμε σήμερα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3%, ώστε να μπορούμε να αποσύρουμε 3.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους, και για 5 έτη, αλλά η απόσυρση να αρχίσει μετά από 3 έτη;

Λύση

R=3.000

i=3%=0,03

n=5 έτη

λ=2 έτη (αφού έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα, το ένα έτος θεωρείται η αρχή της ράντας)

V=R *αn|i *Uλ =3000* 4,5797 *0,9425 =

=13.739,1*0,9425=12.949,1

5.5 Εύρεσης αρχικής αξίας αρξάμενης ράντας

Αν η ράντα έχει δόση R ευρώ και έχει ήδη ξεκινήσει πριν από λ περιόδους, ονομάζεται **αρξάμενη** ράντα. Η παρούσα αξία της, τη χρονική στιγμή υπολογισμού, θα είναι ίση με τον τύπο για την αρχική αξία της, με ανατοκισμό για λ περιόδους. Επομένως:

V= Vαρχ *$(1+i)^{\lambda}$ =R* $\alpha_{n|i}$ *$(1+i)^{\lambda}$

5.6 Παράδειγμα εύρεσης αρχικής αξίας αρξάμενης ράντας

Να βρεθεί η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3%, ετήσιου όρου 3.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους, και για 5 έτη, της οποίας ο πρώτος όρος κατατέθηκε πριν από 3 έτη;

Λύση

R=3.000

i=3%=0,03

n=5 έτη

λ=4 έτη (αφού έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα, το ένα έτος θεωρείται η αρχή της ράντας)

V=R *αn|i *$(1+i)^{\lambda}$ =3000* 4,5797 *$(1+0,03)^4$ =

=13.739,1*1,1255=15.463,3

6 Εύρεση αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά τις δόσεις μιας μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας με όρο R=1 ευρώ σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 6.5.

Κάθε δόση αντιστοιχεί σε διαφορετική χρονική στιγμή, αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία της στην αρχή της ράντας, χρησιμοποιώντας τον τύπο της προεξόφλησης $K_0=KU^n$ για τον υπολογισμό αρχικής αξίας K_0 ενός ποσού K.

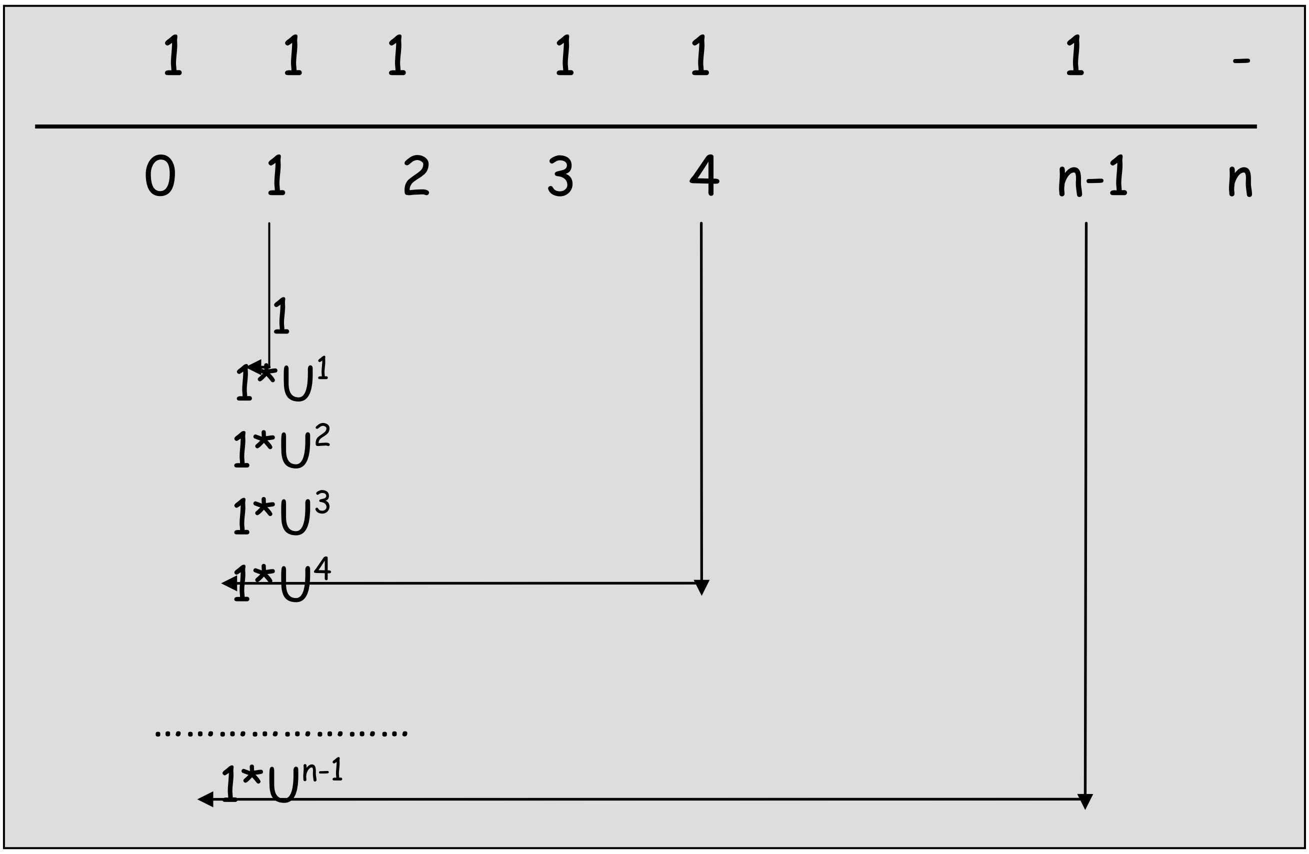
Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της πρώτης χρονικής περιόδου θα είναι ίσο με 1 στην αρχή της ράντας. Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της δεύτερης χρονικής περιόδου θα είναι ίσο με $1*U^1$ στην αρχή της ράντας. Το ποσό 1 ευρώ της δόσης της χρονικής περιόδου n-1 θα είναι ίσο με $1*U^{n-1}$ στην αρχή της ράντας. Επομένως η αρχική αξία της ράντας θα είναι ίση με το άθροισμα όλων των αξιών όλων των δόσεων. Το άθροισμα αυτό είναι:

$a_{n|i}= 1+U^1+U^2+U^3+\ldots+U^{n-1}$

αντιστοιχεί σε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, και από τα μαθηματικά αυτό είναι ίσο με

$a_{n|i} = (1-U^n)/i *(1+i)= \alpha_{n|i} *(1+i)$

όπου $\alpha_{n|i}$ είναι η αρχική αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας, και ο οποίος είναι υπολογισμένος σε πίνακα στο παράρτημα για διάφορες τιμές του n και i.



Σχήμα 6.5. *Υπολογισμός αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας με δόση 1 ευρώ*

6.1 Σχέση προκαταβλητέας με ληξιπρόθεσμη ράντα

Για να υπολογίσουμε την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη για μία ακόμη χρονική περίοδο.

Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας ισούται με την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με έναν όρο λιγότερο + μια δόση

$V=R *\alpha_{n-1|i}+R$

6.2 Εύρεσης αρχικής αξίας μέλλουσας προκαταβλητέας ράντας

Αν η ράντα έχει δόση R ευρώ και πρόκειται να ξεκινήσει μετά από λ περιόδους, ονομάζεται μ**έλλουσα** ράντα. Η παρούσα αξία της τη χρονική στιγμή υπολογισμού θα υπολογισθεί ως προεξόφληση της αρχικής αξίας της άμεσης ράντας, λ περιόδους νωρίτερα.

$V= V\alpha\rho\chi *U^{\lambda} =R *\alpha_{n|i} *(1+i)* U^{\lambda}$

6.3 Εύρεση αρχικής αξίας αρξάμενης προκαταβλητέας ράντας

Αν η ράντα έχει δόση R ευρώ και έχει ήδη ξεκινήσει πριν από λ περιόδους, ονομάζεται **αρξάμενη** ράντα. Η παρούσα αξία της την χρονική στιγμή υπολογισμού θα είναι ίση με την αρχική αξία της, ανατοκιζόμενη για λ περιόδους. Επομένως

$V= V\alpha\rho\chi *(1+i)^{\lambda} = R* \alpha_{n|i} *(1+i)*(1+i)^{\lambda} =R* \alpha_{n|i} *(1+i)^{\lambda+1}$

6.4 Παράδειγμα εύρεσης αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3%, ετήσιου όρου 3.000 ευρώ, διάρκειας 5 ετών.

<u>Λύση</u>
R=3.000
i=3%=0,03
n=5 έτη

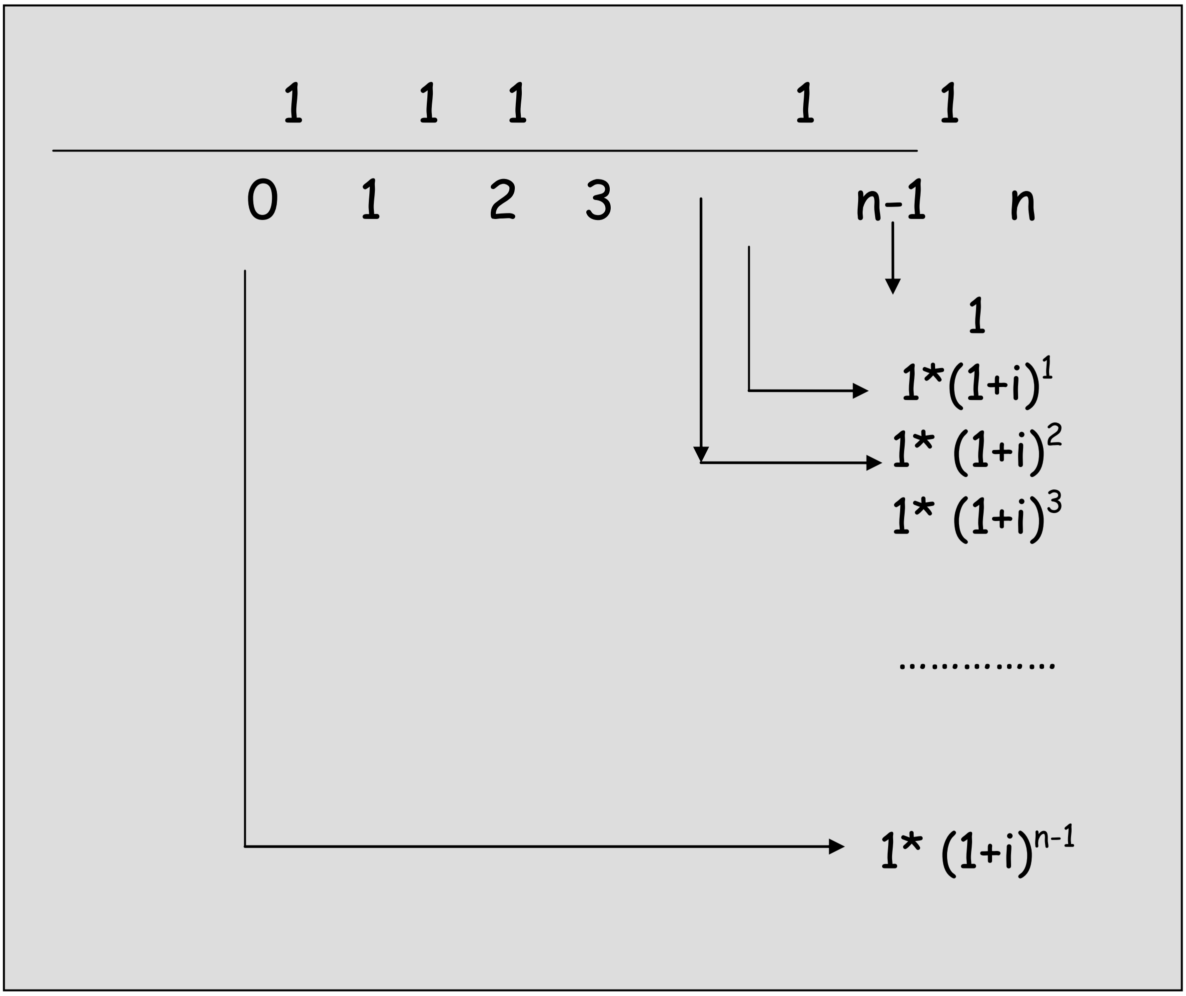
V=R *αn|i *(1+i) =3000* 4,5797 *(1+0,03) = 13.739,1*1,03=14.151,2

6.5 Παράδειγμα εύρεσης αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

Να υπολογισθεί το ύψος δανείου, που μπορεί κάποιος να δανεισθεί, όταν πληρώνει στην αρχή κάθε εξαμήνου 7.000 ευρώ, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Η πρώτη δόση θα πληρωθεί, μόλις πάρει το δάνειο.

<u>Λύση</u>
R=7.000
i=5%=0,05
n=6 έτη =12 εξάμηνα

V=R *αn|i *(1+i) =7000* 8,8632*(1+0,05) = 62042,4*1,05=65.144,52



Σχήμα 6.6. *Υπολογισμός τελικής αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με δόση 1 ευρώ*

7 Εύρεση τελικής αξίας

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά τις δόσεις μιας μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο R=1 ευρώ σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 6.6.

Η τελική αξία της ράντας υπολογίζεται με το άθροισμα όλων των τελικών αξιών όλων των δόσεων.
$s_{n|i}$= $1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{n-1}$
πρόκειται για άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου και είναι:
$s_{n|i}$ =((1+i)n-1)/i
Από πίνακα βρίσκουμε την τιμή του συντελεστή $s_{n|i}$ για διαφορετικές τιμές του n και του i.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:
$s_{n|i} = \alpha_{n|i} *(1+i)^n$
Η τελική αξία μιας ράντας ισούται με την αρχική της αξία, αν την ανατοκίσουμε για n περιόδους.
Και ακόμη μπορούμε να βρούμε την αρχική αξία, αν γνωρίζουμε την τελική αξία και την προεξοφλήσουμε για n περιόδους αφού ισχύει:
$a_{n|i} = s_{n|i} *U^n$.

Η συνολική τελική αξία μιας ράντας με όρο R είναι

Vτελ=R *$s_{n|i}$

8 Εύρεση δόσης, χρόνου, επιτοκίου

Κάποιες φορές γνωρίζουμε το τελικό κεφάλαιο που δημιουργείται με μια ράντα, και ζητάμε να υπολογίσουμε τη δόση που απαιτείται, ώστε να δημιουργηθεί το συγκεκριμένο τελικό κεφάλαιο. Άλλες φορές πάλι, έχοντας ένα αρχικό κεφάλαιο, θέλουμε να δημιουργηθεί συγκεκριμένο τελικό κεφάλαιο με μια ράντα και επιθυμούμε να βρούμε το χρόνο ή το επιτόκιο που χρειάζεται, για να γίνει αυτό. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, χρησιμοποιούμε τον τύπο της αρχικής αξίας ράντας ή τον τύπο της τελικής αξίας ράντας. Δημιουργούμε μια εξίσωση ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος και λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο που ζητάμε.

8.1 Εύρεση δόσης

Στην περίπτωση που ζητάμε τον όρο (δόση) μιας ράντας, προκειμένου να δημιουργηθεί ένα τελικό κεφάλαιο και γνωρίζουμε το επιτόκιο και το χρόνο που απαιτείται, χρησιμοποιούμε τον τύπο τελικής αξίας ράντας και λύνουμε ως προς τη δόση, οπότε έχουμε: $R = V\tau\varepsilon\lambda / s_{n|i}$.

Αν, αντί για την τελική αξία, γνωρίζουμε την αρχική αξία της ράντας ο τύπος για τον υπολογισμό της δόσης γίνεται: $R = V\alpha\rho\chi / \alpha_{n|i}$

8.2 Εύρεση πλήθους όρων ή επιτοκίου

Αν δεν γνωρίζουμε το επιτόκιο, αλλά γνωρίζουμε τη δόση και την αρχική ή την τελική αξία της ράντας, ο ίδιος τύπος μπορεί να γραφεί, λύνοντας ως προς $\alpha_{n|i}$ ή $s_{n|i}$ ως εξής:

$\alpha_{n|i} = V\alpha\rho\chi \ / R$

$s_{n|i} = V\tau\varepsilon\lambda \ / R$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα που γνωρίζουμε στον παραπάνω τύπο, λύνουμε την εξίσωση που δημιουργείται, και από τον πίνακα των συντελεστών αρχικής ή τελικής αξίας ράντας, βρίσκουμε αντίστοιχα τον άγνωστο χρόνο ή το άγνωστο επιτόκιο.

8.3 Τακτοποίηση κλασματικού όρου

Όταν δεν γνωρίζουμε το πλήθος των όρων, το βρίσκουμε από τον τύπο:

$\alpha_{n|i} = V/R$

Αλλά συνήθως η εκτίμηση του n δεν δίνει μόνο ακέραιο αριθμό αλλά και δεκαδικό μέρος.

Π.χ. **n=κ,δ** αν πληρώσουμε **κ** δόσεις, δεν συμπληρώνουμε το ποσό, ενώ, αν πληρώσουμε **κ+1** δόσεις, υπερβαίνουμε το ποσό.

Τότε προβαίνουμε στην **τακτοποίηση του κλασματικού όρου**

Η τακτοποίηση του κλασματικού όρου μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

<u>1ος τρόπος</u>

Καταβάλλουμε κ δόσεις R και μια συμπληρωματική δόση που θα είναι μικρότερη και ίση με δ*R

<u>2ος τρόπος</u>

Αλλάζουμε τη δόση R της ράντας με νέα δόση R’, ώστε να συμπληρωθεί η αξία της ράντας με κ δόσεις R’.

<u>3ος τρόπος</u>

Καταβάλλουμε κ-1 δόσεις R και μια επιπλέον δόση μεγαλύτερη στο τέλος, που θα είναι R + συμπληρωματική δόση, ανάλογα με τη διαφορά αρχικής αξίας ή τελικής αξίας:

Η συμπληρωματική δόση θα είναι $[V\alpha\rho\chi - R*\alpha_{n|i}]*(1+i)^{\kappa+1}$ ή $[V\tau\varepsilon\lambda - R*s_{n|i}]$

8.4 Παράδειγμα με τακτοποίηση κλασματικού όρου

Καταθέτουμε κάθε τέλος του χρόνου με ετήσιο ανατοκισμό ποσό 3.000 ευρώ και ετήσιο επιτόκιο 4%. Πόσο χρόνο θα πρέπει να επαναλαμβάνουμε την κατάθεση, αν θέλουμε να σχηματισθεί στο τέλος κεφάλαιο τουλάχιστον 20.000 ευρώ;

Λύση
Τα δεδομένα μας είναι:
Δόση ή όρος της ράντας: R=3000
Τελική αξία σχηματιζόμενου κεφαλαίου: Vτελ=20.000
Επιτόκιο: i=4%

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $s_{n|i}$ =Vτελ / R =20.000/3000=6,667

Από τον πίνακα τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας εντοπίζουμε για i=4% τους συντελεστές που είναι κοντά στο 6,667. Βρίσκουμε $s_{6|4\%}$ =6,6330 και $s_{7|4\%}$ =7,8983

Αντικαθιστούμε στον επόμενο τύπο της παρεμβολής, για να βρούμε το i:

$$\frac{s_{n|i} - s_{n|i1}}{s_{n|i2} - s_{n|i1}} = \frac{n - n_1}{n_2 - n_1} \Leftrightarrow \frac{6,667 - 6,6329}{7,8982 - 6,6329} = \frac{n-6}{7-6} \Leftrightarrow n = 6,0268$$

Επομένως απαιτούνται 6,027 δόσεις.

1ος τρόπος
Καταβάλλουμε 6 δόσεις των **3.000** η κάθε μία, και μια συμπληρωματική στο τέλος, δηλαδή, στο τέλος των έξι ετών, μια δόση ίση με δ*R=0,027*3.000= 81 ευρώ

2ος τρόπος
Αλλάζουμε τη δόση R σε νέα δόση R', ώστε
$s_{6|4\%}$*R' =20.000 <=> R' =20.000/6,6329= **3.015,27**

3ος τρόπος
Καταβάλλουμε 5 δόσεις των **3.000,** και μια συμπληρωματική δόση στο τέλος των 6 ετών
[Vτελ-R*$s_{n|i}$]=[20.000-3.000* 6,6329]=20.000-19.898,7=**101,3** δηλαδή **3.101,3** ευρώ

9 Διηνεκής ράντα

Μια ράντα ονομάζεται **διηνεκής,** όταν οι όροι της ράντας είναι άπειροι, δηλαδή δεν τελειώνουν ποτέ.

Το σύμβολο αρχικής αξίας μιας διηνεκούς ράντας 1 μονάδας ληξιπρόθεσμης είναι α∞|i= 1/i

Τελική αξία μιας διηνεκούς ράντας δεν μπορούμε να βρούμε, αφού δεν τελειώνει ποτέ. Υπολογίζουμε μόνο την αρχική της αξία.

Η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης διηνεκούς ράντας θα είναι V= R* α∞|i=R/i

Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας διηνεκούς ράντας θα είναι η αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης συν μια επιπλέον δόση, που δίνεται στην αρχή της. Επομένως: V= R* α∞|i=R+R/i

10 Κλασματική ράντα

Αν σε μια ράντα καταβάλλονται **ρ** δόσεις σε μια περίοδο ανατοκισμού, μιλάμε για **κλασματική ράντα** με συχνότητα ρ (Αλεξανδρόπουλος κ.α.,2004). Για παράδειγμα, αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος, και οι δόσεις καταβάλλονται κάθε μήνα, έχουμε κλασματική ράντα με συχνότητα ρ=6.

Τα στοιχεία κλασματικής ράντας είναι:

- Δόση κλασματικής περιόδου R/ρ

- Επιτόκιο κλασματικής περιόδου i_ρ (ισοδύναμο) και ανάλογο επιτόκιο $J_\rho= i_\rho*\rho$
- Πλήθος περιόδων nρ

Ο συντελεστής αρχικής αξίας κλασματικής ράντας θα δίνεται από τους τύπους:
Για Ληξιπρόθεσμη κλασματική ράντα: $an|i^{(\rho)}=\alpha_{n|i} *i/J_\rho$
Όπου i/J_ρ ονομάζεται διορθωτικός παράγοντας

Για προκαταβλητέα κλασματική ράντα: $a_{n|i}^{(\rho)}=\alpha_{n|i} *i/J\rho *(1+J_\rho/\rho)$

Η Αξία κλασματικής ράντας υπολογίζεται από τον τύπο $V= R^* a_{n|i}^{(\rho)}$

Ο συντελεστής τελικής αξίας κλασματικής ράντας θα δίνεται από τους τύπους:
Για Ληξιπρόθεσμη κλασματική ράντα: $s_{n|i}^{(\rho)}=s_{\ n|i} *i/J_\rho$
Όπου i/J_ρ ονομάζεται διορθωτικός παράγοντας

Για προκαταβλητέα κλασματική ράντα: $s_{n|i}^{(\rho)}=s_{n|i} *i/J_\rho *(1+i)^{1/\rho}$

Η αξία κλασματικής ράντας υπολογίζεται από τον τύπο $V= R^* s_{n|i}^{(\rho)}$

11 Μέση λήξη ράντας

Όταν σε κάποια χρονική στιγμή η παρούσα αξία μιας ράντα είναι ίση με το άθροισμα των δόσεων της, η στιγμή αυτή ονομάζεται **μέση λήξη** της ράντας (Αλεξανδρόπουλος κ.α.,2004).

Για τη μέση λήξη μ, ισχύει η παρακάτω σχέση:
$Ra_{\ n|i} *(1+i)^\mu=n*R \Leftrightarrow (1+i)^\mu=n*R/ R*\alpha_{n|i} \Leftrightarrow (1+i)^\mu=n /\alpha_{n|i}$

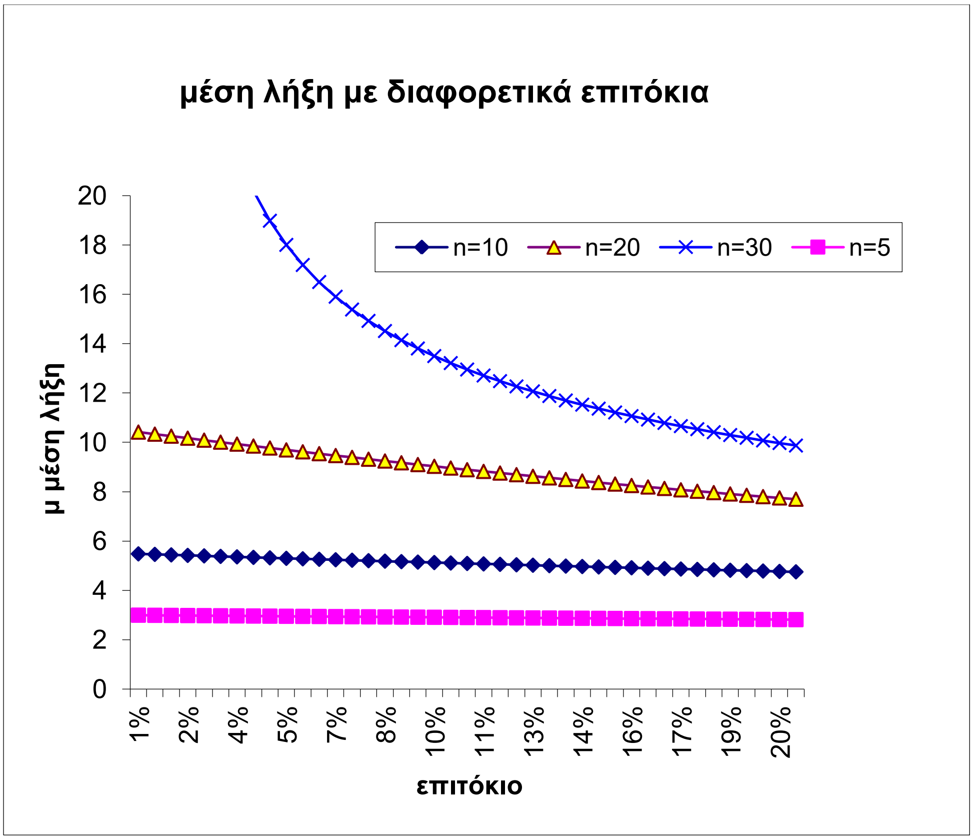
Ο αριθμός μ, που αντιστοιχεί στην περίοδο της μέσης λήξης, υπολογίζεται από τον πίνακα συντελεστών ανατοκισμού, απευθείας ή με παρεμβολή, ή με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.
$\mu= [\ln n-\ln(\alpha_{n|i})]/\ln(1+i)$

Όπως παρατηρούμε στον τύπο, η μέση λήξη μ δεν εξαρτάται από τον όρο (δόση) της ράντας. Συγκεκριμένα επηρεάζεται μόνο από το επιτόκιο i και τη διάρκεια n της ράντας.

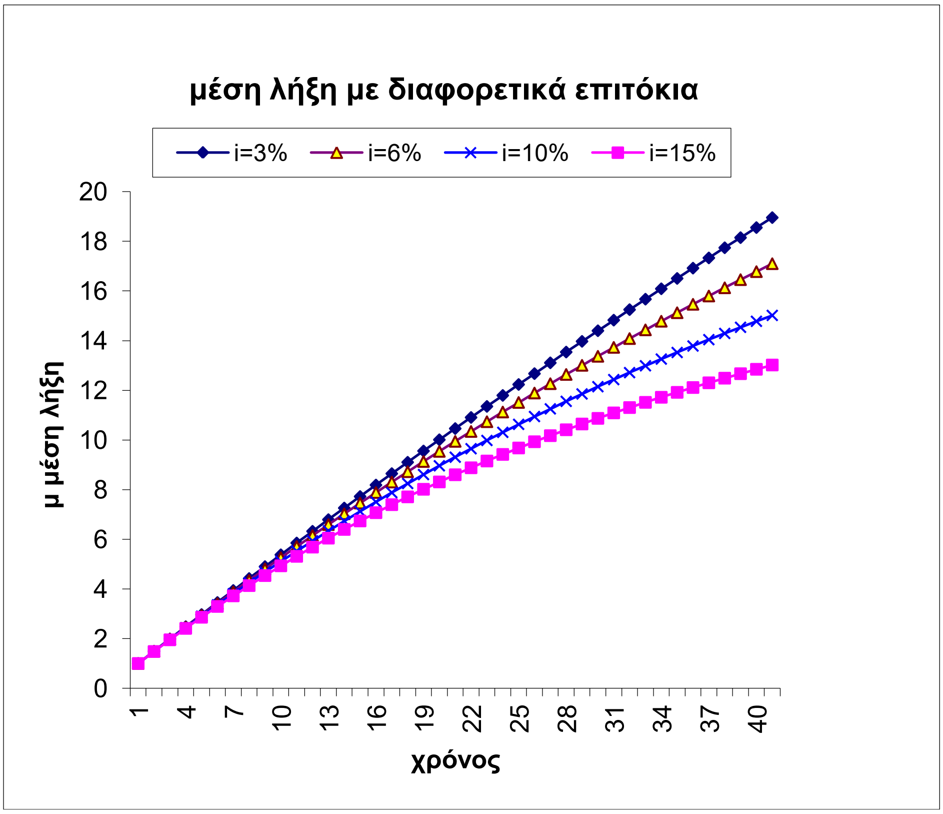
Στο σχήμα 6.7, παριστάνονται οι τιμές της μέσης λήξης για μια ράντα 5 ή 10 ή 20 ή 30 περιόδων ανάλογα με το επιτόκιο i. Παρατηρούμε ότι συνήθως η μέση λήξη πλησιάσει το μισό των περιόδων της ράντας, εκτός και αν τα επιτόκια είναι πολύ μικρά, οπότε η μέση λήξη μεγαλώνει. Γενικά, όσο μεγαλώνει το επιτόκιο, μικραίνει η μέση λήξη, δηλαδή ο χρόνος, ώστε η παρούσα αξία της ράντα να είναι ίση με το άθροισμα των δόσεών της.

Στο σχήμα 6.8 παριστάνονται οι τιμές της μέσης λήξης για μια ράντα με επιτόκιο 3% ή 6% ή 10% ή 15%, ανάλογα με το χρόνο διάρκειας της ράντας. Παρατηρούμε ότι συνήθως η μέση λήξη πλησιάσει το μισό των περιόδων της ράντας, εκτός και αν τα επιτόκια είναι μεγάλα, οπότε η μέση λήξη πέφτει γρηγορότερα κάτω από το μισό της περιόδου. Γενικά, όσο μεγαλώνει ο χρόνος, η μέση λήξη είναι χαμηλότερη από το μέσο των περιόδων με γρηγορότερο ρυθμό, όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο.

Ο χρόνος της μέσης λήξης χρησιμοποιείται σε προβλήματα υπολογισμού χρέους, όπου θέλουμε να πληρώσουμε όλη την αξία της ράντα σαν σύνολο των όρων (n*R), και θέλουμε να βρούμε την κατάλληλη χρονική στιγμή, για να γίνει αυτό, με δίκαιο τρόπο και για τις δύο, δηλαδή και για τον πιστωτή και για τον οφειλέτη.



Σχήμα 6.7. *Χρόνος μέσης λήξη ράντας ανάλογα με το επιτόκιο και τη διάρκεια της ράντας*



Σχήμα 6.8. *Χρόνος μέσης λήξη ράντας ανάλογα με τη διάρκεια της ράντας*

12 Μεταβαλλόμενοι όροι ράντας

Όταν ο όρος (δόση) μιας ράντας δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται, αναφερόμαστε σε μεταβλητές ράντες (Αλεξανδρόπουλος κ.α., 2004). Αν οι όροι μιας μεταβλητής ληξιπρόθεσμης ράντας είναι R1,R2,R3,…Rn, τότε η αρχική αξία της ράντας θα υπολογισθεί αναλυτικά με υπολογισμό της προεξόφλησης κάθε όρου της ράντας (Φράγκος, 2007), ως εξής:

Αρχική αξία Ράντας = R1* U1+R2*U2+R3*U3+…+Rn*Un

Ανάλογα η τελική αξία μεταβλητής ληξιπρόθεσμης ράντας θα υπολογισθεί με υπολογισμό μελλοντικής αξίας κάθε όρου της, ανατοκιζόμενου μέχρι τη λήξη της ράντας, ως εξής:

Τελική αξία Ράντας = R1* $(1+i)^{n-1}$+R2*$(1+i)^{n-2}$+R3*$(1+i)^{n-3}$+…+Rn*$(1+i)^{n-n}$

Ειδική περίπτωση μιας μεταβλητής ράντας είναι η περίπτωση στην οποία οι όροι της αλλάζουν, και συνήθως αυξάνονται, ανά τακτά χρονικά διαστήματα Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή ράντα αποτελείται από δύο ή περισσότερες σταθερές ράντες με διαφορετική χρονική διάρκεια. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζουμε στο παράδειγμα 12.1.

12.1 Παράδειγμα με μεταβλητή ράντα

Να υπολογισθεί η αρχική και η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 30 ετήσιων όρων, της οποίας οι 6 πρώτοι όροι είναι 700 ευρώ, οι επόμενοι 10 όροι είναι 900 ευρώ και οι επόμενοι 14 όροι είναι 1.000 ευρώ. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 5%.

Λύση

Επειδή οι όροι της ράντας αυξάνονται προοδευτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 3 ράντες. Η πρώτη ράντα έχει διάρκεια 30 έτη και όρο R1=700 ευρώ. Η δεύτερη ράντα αρχίζει μετά από 6 έτη, διαρκεί 24 έτη και ο όρος της είναι το επιπλέον ποσό των R2=200 ευρώ (900-700). Η τρίτη ράντα αρχίζει μετά από 16 έτη, διαρκεί 14 έτη και ο όρος της είναι το επιπλέον ποσό των R3=100 ευρώ (1000-900). Και οι τρεις μαζί σχηματίζουν τις δόσεις της μεταβαλλόμενης ράντας.

Καταρχάς ζητάμε να βρούμε την αρχική αξία της μεταβαλλόμενης ράντας. Θα την υπολογίσουμε ως το άθροισμα των αρχικών αξιών των τριών σταθερών ραντών. Η δεύτερη ράντα αρχίζει 6 έτη μετά την πρώτη και, επομένως, η αρχική αξία της θα προεξοφληθεί για 6 έτη. Η τρίτη ράντα αρχίζει 16 έτη μετά την πρώτη και, επομένως, η αρχική αξία της θα προεξοφληθεί για 16 έτη. Έτσι έχουμε:

Αρχική αξία μεταβλητής Ράντας= Αρχική αξία $1^{ης}$+Αρχική αξία $2^{ης}$ + Αρχική αξία $3^{ης}$ =
= R1*$\alpha_{30|i}$+ R2*$\alpha_{24|i}$ *U^6+ R3*$\alpha_{14|i}$*U^{16}

Οι συντελεστές $\alpha_{30|i}$, $\alpha_{24|i}$, $\alpha_{14|i}$ και U^6 , U^{16} θα υπολογισθούν από τον πίνακα των συντελεστών αρχικής αξίας ράντας και των συντελεστών προεξόφλησης αντίστοιχα, για επιτόκιο i =5%. Επομένως:

Αρχική αξία μεταβλητής Ράντας= 700*$\alpha_{30|0,05}$+ 200*$\alpha_{24|0,05}$ *U^6+ 100*$\alpha_{14|0,05}$*U^{16}=
= 700*15,3725+ 200*13,7986 *0,7462+ 100*9,8986*0,4581 =10.760,75+2.059,30+453,45=13.273,51 ευρώ.

Για να βρούμε την τελική αξία της μεταβαλλόμενης ράντας, θα υπολογίσουμε το άθροισμα των τελικών αξιών των τριών σταθερών ραντών. Η δεύτερη ράντα αρχίζει 6 έτη μετά την πρώτη και, επομένως, η διάρκεια της είναι 24 έτη. Η τρίτη ράντα αρχίζει 16 έτη μετά την πρώτη και, επομένως, η διάρκεια της θα είναι 14 έτη. Και οι τρεις ράντες τελειώνουν την ίδια χρονική στιγμή. Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε τις τελικές αξίες τους και να τις προσθέσουμε. Έτσι έχουμε:

Τελική αξία μεταβλητής Ράντας= Τελική αξία $1^{ης}$+Τελική αξία $2^{ης}$ + Τελική αξία $3^{ης}$ =
= R1*$s_{30|i}$+ R2*$s_{24|i}$ + R3*$s_{14|i}$

Οι συντελεστές $s_{30|i}$, $s_{24|i}$, $s_{14|i}$ θα υπολογισθούν από τον πίνακα των συντελεστών τελικής αξίας ράντας, για επιτόκιο i =5%. Επομένως:

Τελική αξία μεταβλητής Ράντας= $700*s_{30|0,05}+ 200*s_{24|0,05} + 100*s_{14|0,05}$ =
= 700*66,4388+ 200*44,5020 + 100*19,5986= 46.507,16+8.900,4 +1.959,86 =57.367,42 ευρώ.

Βέβαια, από τη στιγμή που βρήκαμε την αρχική αξία ράντας, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τελική της αξία μετά από 30 έτη, ανατοκίζοντας την αρχική αξία. Να πολλαπλασιάσουμε, δηλαδή, την αρχική αξία της ράντας με τον συντελεστή ανατοκισμού για 30 έτη με επιτόκιο 5% που είναι 4,3219. Έτσι θα βρίσκαμε τελική αξία της ράντας = 13.273,51 *4,3219= 57.366,78 ευρώ, που πολύ λίγο διαφέρει, λόγω αποκοπής δεκαδικών ψηφίων, από την τιμή 57.367,42 ευρώ που υπολογίσαμε.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε εφαρμόζω τον τύπο αρχικής αξίας ράντας.
- Πώς αλλάζει ο τύπος, αν η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη, προκαταβλητέα, μέλλουσας ή αρξάμενης.
- Για ευκολία στους υπολογισμούς υπάρχει πίνακας με υπολογισμένου τους συντελεστές αρχικής και τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας.
- Πώς βρίσκω το χρόνο ή το επιτόκιο, όταν γνωρίζω αρχική ή τελική αξία ράντας.
- Πως βρίσκω την αρχική αξία διηνεκούς ράντας.
- Πως βρίσκω την αρχική και τελική αξία κλασματικής ράντας.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Αλεξανδρόπουλος, Α., Παλιατσός, Α. & Σάσσαλος, Σ. (2004). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Καραπιστόλης, Δ. (2012). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Θεσσαλονίκη: Αλτιντζή.

Φράγκος, Χ. (2007). Οικονομικά Μαθηματικά. Αθήνα: Σταμούλης.

Ασκήσεις 6ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με πληρωμές 800 ευρώ κάθε χρόνο για 25 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%.

Απάντηση/Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας ράντας που είναι

V αρχ =R an|i = 800 *$\alpha_{25|0,06}$ = 800 *12,7834=10.226,72 ευρώ

Άσκηση 2

Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να λάβει κάποιος τώρα, το οποίο είναι ισοδύναμο με μια ράντα που αποτελείται από τριμηνιαίες πληρωμές ποσού 250 ευρώ για 10 χρόνια, αν υποτεθεί ότι ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Εφόσον θέλουμε το ισοδύναμο ποσό με την αρχική αξία ράντας, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας ράντας που είναι

V αρχ =R an|i

Επειδή, όμως, οι πληρωμές της ράντας είναι τριμηνιαίες, θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το επιτόκιο σε τριμηνιαίο επιτόκιο.

n= 10 έτη = 40 τρίμηνα

i= ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4% = 1% ανά τρίμηνο

V αρχ =R an|i = 250 *$\alpha_{40|0,01}$ = 250 *32,8347=8.208,675 ευρώ

Άσκηση 3

Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, ώστε μετά από 5 χρόνια να αρχίσουμε να εισπράττουμε 2.500 ευρώ το εξάμηνο για 10 χρόνια; Υποθέστε ότι ο ανατοκισμός είναι ανά εξάμηνο, με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Επειδή οι δόσεις της ράντας είναι εξαμηνιαίες, θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο επιτόκιο.

n= 10 έτη = 20 εξάμηνα

i= ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4% = 2% ανά εξάμηνο

Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας μέλλουσας ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, προεξοφλούμενη 5 έτη (10 εξάμηνα) πριν την αρχή της. Επειδή όμως οι εισπράξεις θα ξεκινήσουν αμέσως μετά το τέλος των 10 εξαμήνων, η ληξιπρόθεσμη ράντα θεωρούμε ότι αρχίζει στο 9^o εξάμηνο, και η πρώτη δόση ξεκινάει στο 10^o εξάμηνο. Η παρούσα αξία της μέλλουσας ράντας θα είναι:

$V=V\alpha\rho\chi\ U^9=R\ *\alpha_{n|i}\ *U^9 = 2.500\ *\alpha_{20|0,02}\ *U^9 = 2500*16{,}3514*0{,}8368=34.207{,}1288$ ευρώ

Άσκηση 4

Ποια είναι η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο 400 ευρώ το εξάμηνο, η οποία ξεκίνησε πριν 2 χρόνια και θα συνεχίσει για άλλα 3 χρόνια. Υποθέστε ότι ο ανατοκισμός είναι ανά εξάμηνο, με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Επειδή οι δόσεις της ράντας είναι εξαμηνιαίες, θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο επιτόκιο.
Η συνολική διάρκεια της ράντας είναι n= 2+3=5 έτη = 10 εξάμηνα
i= ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4% = 2% ανά εξάμηνο
Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας αρξάμενης ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 2 έτη (4 εξάμηνα) από την αρχή της. Η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:
$V=V\alpha\rho\chi\ *(1+ i)^4=R\ *\alpha_{n|i}\ *(1+ i)^4 = 400\ *\alpha_{10|0,02}\ *(1+ 0{,}02)^4 = 400 * 8{,}9826 *1{,}0824 =3.889{,}1065$ ευρώ

Άσκηση 5

Τι ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, ώστε να έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε για 8 έτη, 5.000 στο τέλος κάθε έτους, και η αρχή της απόσυρσης να γίνει μετά από 4 έτη;

Απάντηση/Λύση

n= 8 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 4,5%
Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας μέλλουσας ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, προεξοφλούμενη 3 έτη πριν την αρχή της. Επειδή όμως οι εισπράξεις θα ξεκινήσουν αμέσως μετά το τέλος των 4 ετών, η ληξιπρόθεσμη ράντα θεωρούμε ότι αρχίζει στο 3^o έτος, και η πρώτη δόση ξεκινάει στο 4^o έτος. Η παρούσα αξία της μέλλουσας ράντας θα είναι:

$V=V\alpha\rho\chi\ U^3=R\ *\alpha_{n|i}\ *U^3 = 5000*\ \alpha_{8|0,045}\ *U^3 = 5000*6{,}5959*0{,}8763=28.899{,}94$ ευρώ

Άσκηση 6

Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας με ετήσιο όρο 5.000 ευρώ διάρκειας 15 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο 3%.

Απάντηση/Λύση

n= 15 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3%
Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας. Η αξία της θα είναι:

$V=V\alpha\rho\chi\ (1+ i)=R\ \alpha n|i\ (1+ i)= 5000\ \alpha_{15|0,03}\ (1+ 0{,}03)= 5000*11{,}9379*1{,}03= 61.480{,}185$ ευρώ

Άσκηση 7

Να βρεθεί η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας με ετήσιο όρο 5.000 ευρώ διάρκειας 15 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο 3%, που πρόκειται να αρχίσει η πρώτη καταβολή μετά από 3 έτη.

Απάντηση/Λύση

n= 15 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3%
Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας μέλλουσας ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, προεξοφλούμενη 3 έτη πριν την αρχή της. Η παρούσα αξία της μέλλουσας ράντας θα είναι:

$V = V_{αρχ} * U^3 = R * α_{n|i} * (1+ i) * U^3 = 5000 * α_{15|0,03} * (1+ 0,03) * U^3 =$
$= 5000*11,9379*1,03 *0,9151 = 56.260,52$ ευρώ

Άσκηση 8
Να βρεθεί η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας με ετήσιο όρο 5000 ευρώ διάρκειας 15 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο 3%, της οποίας η πρώτη καταβολή άρχισε πριν 2 χρόνια.

Απάντηση/Λύση
n= 15 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3%
Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας αρξάμενης ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 2 έτη από την αρχή της. Η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:

$V = V_{αρχ} * (1+ i)^2 = R * α_{n|i} * (1+ i) * (1+ i)^2 = 5.000 * α_{15|0,03} * (1+ 0,03)^3 =$
$= 5.000*11,9379 *1,0927 = 65.222,72$ ευρώ

Άσκηση 9
Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας με εξαμηνιαίο όρο 2000 ευρώ διάρκειας 10 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση
Επειδή οι δόσεις της ράντας είναι εξαμηνιαίες, θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα, και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο επιτόκιο.
Η συνολική διάρκεια της ράντας είναι n=10 έτη = 20 εξάμηνα
i= ετήσιο επιτόκιο 4% = 2% ανά εξάμηνο
Η αρχική αξία της ράντας θα είναι
$V = V_{αρχ} * (1+ i) = R * α_{n|i} * (1+ i) = 2.000 * α_{20|0,02} * (1+ 0,02) = 2.000*16,3514 *1,02 = 33.356,856$ ευρώ

Άσκηση 10
Κάποιος δανείστηκε σήμερα με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%, και συμφώνησε να ξοφλήσει, πληρώνοντας κάθε έτος 10.000 ευρώ για 7 έτη, με την πρώτη πληρωμή να γίνει με την είσπραξη του δανείου. Τι ποσό δανείστηκε;

Απάντηση/Λύση
Η αποπληρωμή του δανείου θα γίνει με ισόποσες δόσεις σε μορφή προκαταβλητέας ράντας. Ζητάμε το ποσό του δανείου που αντιστοιχεί στην αρχική αξία της ράντας.
n= 7 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 8%
Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας. Η αξία της θα είναι:

$V = V_{αρχ} * (1+ i) = R * α_{n|i} * (1+ i) = 10000 * α_{7|0,08} * (1+ 0,08) = 10.000*5.2064*1,08 = 56.229,12$ ευρώ

Άσκηση 11
Υποθέτουμε ότι κάποιος άρχισε να καταθέτει πριν 6 χρόνια, κάθε χρόνο 2.500 ευρώ και σκοπεύει να συνεχίσει για άλλα 3 χρόνια. Να βρεθεί η παρούσα αξία όλων των καταθέσεων, όταν το επιτόκιο είναι 3,5%.

Απάντηση/Λύση

n= 6+3=9 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3,5%
Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας αρξάμενης ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 6 έτη από την αρχή της. Η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:
$V=V_{αρχ} *(1+ i)^6=R *α_{n|i} *(1+ i) *(1+ i)^6 = 2.500*α_{9|0,035} *(1+ 0,035)^7 =$
$= 9.000*7,6077* 1,2723 = 87.113,5$ ευρώ

Άσκηση 12

Η Εταιρεία Ε πρέπει να καταθέσει σήμερα ένα μεγάλο ποσό, ώστε να μπορεί στο τέλος κάθε έτους και για 10 έτη να δίνει δώρα στα παιδιά των εργαζομένων της αξίας 2.000 ευρώ. Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει, αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος και το επιτόκιο 3%;

Απάντηση/Λύση

n= 10 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3%
R=2.000
Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας. Η αξία της θα είναι:

$V_{αρχ} = R *α_{n|i} = 2000* α_{10|0,03} = 2000*8,5302 = 17060,4$ ευρώ

Άσκηση 13

Η Εταιρεία Ε πρέπει να καταθέσει σήμερα ένα μεγάλο ποσό, ώστε να μπορεί στο τέλος κάθε έτους, και για πάντα, να δίνει δώρα στα παιδιά των εργαζομένων της, αξίας 3.000 ευρώ. Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει, αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος και το επιτόκιο 3%;

Απάντηση/Λύση

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα που δεν τελειώνει ποτέ και, η οποία, ονομάζεται **διηνεκής** ράντα. Η αρχική της αξία δίνεται από τον τύπο:
$V_{αρχ} = R /i$

i= ετήσιο επιτόκιο 3%
R=3.000
Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία διηνεκούς ράντας που θα είναι:

$V_{αρχ} = R /i = 3000 /0,03 = 100.000$ ευρώ

Άσκηση 14

Να βρεθεί η τελική αξία μιας ράντας με πληρωμές 800 ευρώ κάθε χρόνο, για 25 έτη, και με ετήσιο επιτόκιο 6%.

Απάντηση/Λύση

Θέλουμε να βρούμε την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας.
R =800 ευρώ
n= 15 έτη
i= ετήσιο επιτόκιο 3%
Η τελική αξία της θα είναι $V=R *s_{n|i} = 800* s_{25|0,06} = 800* 54,8645= 43.891,6$ ευρώ

Άσκηση 15

Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να πληρώνει κάποιος στην αρχή κάθε τριμήνου, για 10 χρόνια, αν υποτεθεί ότι ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4%, και σκοπεύει να ξεπληρώσει αρχικό ποσό 50.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Εφόσον το ποσό πληρώνεται στην αρχή κάθε τριμήνου, έχουμε προκαταβλητέα ράντα με δόση τριμήνου. Θα πρέπει να μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία σε τρίμηνα.
n= 10 έτη=40 τρίμηνα
i= ετήσιο επιτόκιο 4% = 1% επιτόκιο τριμήνου
Ξέρουμε την αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας και ζητάμε να βρούμε τη δόση της.
Η αξία της θα είναι:

Vαρχ = R *$\alpha_{n|i}$ *1+i) ⇔ 50.000 = R *$\alpha_{40|0,01}$ *(1+0,01) ⇔ 50.000= R*32,8347 *1,01 ⇔
R= 50.000 / 33,163047= 1.507,7 ευρώ
Επομένως: 1.507,7 ευρώ πρέπει να πληρώνει κάποιος στην αρχή κάθε τριμήνου, ώστε να ξεπληρώσει 50.000 ευρώ.

Άσκηση 16

Ποιο επιτόκιο θα πρέπει να ζητήσουμε, αν θέλουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα με όρο 5.000 ευρώ το εξάμηνο, διάρκειας 12 ετών, να μας δώσει τελικά αξία 150.000 ευρώ.

Απάντηση/Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα με δόση εξαμήνου. Θα πρέπει να μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία σε εξάμηνα.
n= 12 έτη=24 εξάμηνα
Ξέρουμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, και ζητάμε να βρούμε το επιτόκιο.
Η τελική αξία της θα είναι
Vτελ = R *$s_{n|i}$ ⇔ 150.000 = 5.000 *$s_{240|i}$ ⇔ $s_{24|i}$ = 150.000 / 5.000 ⇔ $s_{24|i}$ =30

Θα πρέπει ο συντελεστής τελικής αξίας ράντας για 24 περιόδους να είναι 30. Από τον πίνακα του συντελεστή τελικής αξίας ράντας, εντοπίζουμε για ποιο επιτόκιο ο συντελεστής είναι 30 ή κοντά στο 30.
Για επιτόκιο 2% η τιμή του συντελεστή $s_{24|2\%}$ =30,4219.
Επομένως το ζητούμενο επιτόκιο είναι σχεδόν 2%.

Άσκηση 17

Καταθέσουμε σήμερα σε τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, ποσό 60.000 ευρώ. Για πόσα χρόνια θα έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε 5.000 στην αρχή κάθε έτους, και η αρχή της απόσυρσης να γίνει σε από 6 έτη από σήμερα;

Απάντηση/Λύση

Αρχικά έχουμε ανατοκισμό των 60.000 για 6 έτη. Στη συνέχεια αρχίζουμε να αποσύρουμε στην αρχή κάθε έτους, και έχουμε προκαταβλητέα ράντα με δόση 5.000, επιτόκιο 4,5%, και άγνωστη διάρκεια. Η αρχική αξία της ράντας θα είναι 60.000 * $(1+i)^n$=60.000 * $(1+0,045)^6$=60.000 *1,3023= 78.138 ευρώ.

Για να βρούμε τη διάρκειά της, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Vαρχ = R an|i (1+i) ⇔
$\alpha_{n|i}$ =Vαρχ / (R*(1+i)) ⇔ $\alpha_{n|i}$ =78.138/ (5.000*(1+0,045)) ⇔ $\alpha_{n|i}$ =78.138/5.225=14,9546

Στον πίνακα με τους συντελεστές αρχικής αξίας ράντας, εντοπίζουμε το συντελεστή που είναι κοντά στο 14,9546 για επιτόκιο 4,5%. Για 25 έτη βρίσκουμε $\alpha_{25|0,045}$ =14,8282.
Επομένως θα μπορούμε για 25 τουλάχιστον έτη να αποσύρουμε 5.000 ευρώ κάθε έτος.

Άσκηση 18

Κάποιος καταθέτει από σήμερα, και στο τέλος κάθε τριμήνου, 850 ευρώ με ανατοκισμό, και ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 12,5%. Τι ποσό θα έχει μαζευτεί στο λογαριασμό του μετά από 7 έτη και 6 μήνες;

Απάντηση/Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα με δόση τριμήνου. Θα πρέπει να μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία σε τρίμηνα. Τα 7 έτη και 6 μήνες είναι 7*4+2=30 τρίμηνα.
Ακόμη, επειδή μας δίνεται ετήσιο πραγματικό επιτόκιο, θα πρέπει να βρούμε το ισοδύναμό του i3 τριμηνιαίο επιτόκιο. Για το πραγματικό επιτόκιο ισχύει $1+i= (1+i3)^4 \Leftrightarrow 1+0,125= (1+i3)^4 \Leftrightarrow$
1+i3=1,02988. Άρα για το τριμηνιαίο επιτόκιο έχουμε i3=0,02988≈0,03=3%.
Ζητούμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με δόση 850 ευρώ, επιτόκιο 3% και διάρκεια 30 περιόδους.
Θα είναι $V_{τελ} = R *s_{n|i} = 850 *s_{30|0,03}=850 *47,5754=40.439,09$ ευρώ.

Άσκηση 19

Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε έτους και για 4 έτη 2.500 ευρώ με ανατοκισμό προς 3,5%. Από το 5ο έτος συνεχίζει τις καταθέσεις, αλλά τις κάνει 4.500 ευρώ και για διάστημα 5 επιπλέον ετών με το ίδιο επιτόκιο. Να υπολογιστεί η τελική αξία της κατάθεσης.

Απάντηση/Λύση

Έχουμε αρχικά μια ληξιπρόθεσμη ράντα με όρο R1=2.500 και διάρκεια 4+5 =9 έτη. Στη συνέχεια έχουμε μια δεύτερη ράντα με όρο R2 =(4.500-2.500)= 2.000 ευρώ και διάρκεια 5 έτη. Ζητούμε την τελική αξία και των δύο ραντών στο τέλος των καταθέσεων. Θα είναι ίση με το άθροισμα της τελικής αξίας πρώτης και δεύτερης ράντας.
$V_{τελ} = V1_{τελ} +V2_{τελ} = R1 *s_{n1|i} + R2 *s_{n2|i} =2.500 *s_{9|0,035} + 2.000 *s_{5|0,035} =$
$=2.500*10,3885+2.000*5,3625=25.971,25+10.725 =36.696,25$ ευρώ

Άσκηση 20

Καταθέτει κάποιος, στο τέλος κάθε χρόνου, 2.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, και αυτό συνεχίζεται επί 11 έτη. Το κεφάλαιο που έχει σχηματιστεί στο τέλος του 11ου έτους τοποθετείται στο ίδιο ταμιευτήριο με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει ο καταθέτης στο τέλος του 22ου έτους από την αρχική κατάθεση;

Απάντηση/Λύση

Αρχικά έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα με όρο R=2.000 και διάρκεια 11 έτη. Στη συνέχεια έχουμε ανατοκισμό του ποσού που έχει συγκεντρωθεί για 11 έτη.
Η τελική αξία της ράντας θα είναι $V_{τελ} = R *s_{n|i} = 2.000 *s_{11|0,045}=2.000*13,8412=7.682,4$
Στη συνέχεια το ποσό των 7.682,4 ανατοκίζεται για 11 έτη με επιτόκιο 5,5%. Η τελική αξία του θα είναι:
$Kn=Ko*(1+i)^n= 7.682,4 *(1+0,055)^{11}=7.682,4 *1,8021=13.844,45$ ευρώ
Επομένως στο τέλος του 22^{ου} θα συγκεντρωθούν 13.844,45 ευρώ

Άσκηση 21

Καταθέτει κάποιος, επί 15 έτη, στην αρχή κάθε χρόνου 4.000 ευρώ με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 3,5%. Ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση, αρχίζει να αποσύρει, στην αρχή κάθε χρόνου, 5.000 ευρώ επί 10 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει ο καταθέτης στο τέλος του 25ου έτους, από την πρώτη κατάθεση.

Απάντηση/Λύση

Αρχικά έχουμε προκαταβλητέα ράντα με όρο R=4.000 και διάρκεια 15 έτη. Στη συνέχεια έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα με όρο R=5.000 και διάρκεια 10 έτη
Στην πρώτη ράντα έχουμε καταθέσεις ποσού, ενώ στη δεύτερη ράντα έχουμε αναλήψεις από το ποσό που έχει συγκεντρωθεί. Ζητάμε το ποσό που απέμεινε στο τέλος των αναλήψεων.
Η τελική αξία, στα 15 έτη, της προκαταβλητέας ράντας θα είναι:

$V\tau\varepsilon\lambda = R1 * s_{n|i} *(1+i) = 4.000 * s_{15|0,035} *(1+0,035)= 4.000 *19,2957*1,035=79.884,198$ ευρώ

Για να μπορέσουμε να βρούμε το υπόλοιπο ποσό που έμεινε μετά τις αναλήψεις, πρέπει να κάνουμε αφαίρεση των αναλήψεων, αλλά η αφαίρεση πρέπει να γίνει την ίδια χρονική περίοδο, δηλαδή μετά το τέλος των 15 ετών

Για την ληξιπρόθεσμη ράντα, θα βρούμε την αρχική της αξία.

$V\alpha\rho\chi = R2 * \alpha_{n|i} = 5.000 * \alpha_{10|0,035} =5.000 *8,3166=41.583$ ευρώ

Στο 15ο έτος η διαφορά καταθέσεων και αναλήψεων θα είναι 79.884,198-41.583 = 38.301,198 ευρώ.

Η διαφορά αυτή υπάρχει σε όλη τη διάρκεια των 10 ετών, και ανατοκίζεται, ώστε στο 25ο έτος θα γίνει:

$38.301,198 *(1+0,035)^{10}=38.301,198 *1,4106=54.027,67$ ευρώ.

καταθέτης θα εισπράξει στο τέλος του 25ου έτους, από την πρώτη κατάθεση, το ποσό 54.027,67 ευρώ.

Άσκηση 22

Χρωστάμε ένα ποσό για το οποίο έχουμε συμφωνήσει ότι η αποπληρωμή θα γίνεται για 6 έτη, στο τέλος κάθε εξαμήνου, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Καθυστερήσαμε τις πρώτες πληρωμές, και ο πιστωτής μας υποχρεώνει να πληρώσουμε άμεσα όλο το ποσό του χρέους. Σε ποια χρονική στιγμή θα πρέπει να γίνει αυτό, ώστε να μην πληρώσουμε τόκους, αλλά μόνο το σύνολο των δόσεων;

Απάντηση/Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα με δόση εξαμήνου. Θα πρέπει να μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία σε εξάμηνα.

n= 6 έτη=12 εξάμηνα

Η δόση είναι άγνωστη, αλλά θα πρέπει τη ζητούμενη χρονική στιγμή μ το σύνολο των δόσεων της ράντας να είναι ίσο με την παρούσα αξία της. Ζητούμε, δηλαδή, να υπολογίσουμε τη μέση λήξη της ράντας, η οποία θα βρεθεί σε εξάμηνα, αφού όλοι οι υπολογισμοί γίνονται σε εξάμηνα.

Ο τύπος υπολογισμού υπολογίζεται από την εξίσωση:

$R*\alpha_{n|i} *(1+i)^{\mu}=n*R \Leftrightarrow (1+i)^{\mu}=n / \alpha_{n|i}$

$(1+0,05)^{\mu}=12 / \alpha_{12|5\%} \Leftrightarrow (1+0,05)^{\mu}=12 / 8,8633 \Leftrightarrow (1+0,05)^{\mu}=1,3539$

Από το πίνακα συντελεστών ανατοκισμού βρίσκουμε $(1+0,05)^6=1,3401$ και $(1+0,05)^7=1,4071$

οπότε υπολογίζουμε το χρόνο με παρεμβολή $\mu=6+(1,3539-1,3401)/ (1,4071-1,3401) * (7-6) =6,206$ εξάμηνα

ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι μπορούμε να υπολογίσουμε $\mu= \ln1,3539/\ln1,05 \Leftrightarrow$

$\mu= 0,3030/0,0488 = 6,2$ εξάμηνα

Επομένως ο χρόνος, για να ξεπληρώσουμε το σύνολο του χρέους, χωρίς επιπλέον τόκους, είναι 6 εξάμηνα (3 έτη) και 1 μήνα περίπου (0,2 εξάμηνα) από την έναρξή του.

Άλυτες ασκήσεις ανατοκισμού και ραντών

23. Κατέθεσε κάποιος με ανατοκισμό 10.000 ευρώ για 7 έτη και 8 μήνες, με ετήσιο επιτόκιο 4%. Μετά τη λήξη του ανατοκισμού, άρχισε να αποσύρει στο τέλος κάθε χρόνου 3.000 ευρώ. Επί πόσα έτη θα συνεχίσει τις αναλήψεις, ώστε να αποσύρει ολόκληρο το ποσό;

24. Υποθέτουμε ότι κάποιος άρχισε να καταθέτει πριν 6 χρόνια, κάθε χρόνο, 2.500 ευρώ, και σκοπεύει να συνεχίσει για άλλα 3 χρόνια. Να βρεθεί η αξία όλων των καταθέσεων 5 χρόνια από σήμερα, όταν το επιτόκιο είναι 3,5%.

25. Κάποιος, για να συγκεντρώσει 40.000 ευρώ, καταθέτει στην αρχή κάθε εξαμήνου 8.000 ευρώ, με ετήσιο επιτόκιο 5%, και εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Σε πόσο χρόνο θα συγκεντρώσει το ποσό;
Υπόδειξη: Αν βρεθεί κλασματικός όρος, να γίνει τακτοποίηση του.

26. Ένα επαγγελματικό αυτοκίνητο κοστίζει 20.000 ευρώ. Αγοράζεται με 4.000 προκαταβολή και το υπόλοιπο σε εξαμηνιαίες δόσεις για 3 έτη. Να βρεθεί το ποσό κάθε δόσης, αν το ισχύον επιτόκιο είναι 8% το χρόνο και ο ανατοκισμός είναι ετήσιος.

27. Έμπορος αγοράζει προϊόντα από προμηθευτή και συμφωνεί να πληρώνει 1.500 ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου για 6 χρόνια. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6%, και ο έμπορος δεν κάνει καμία πληρωμή για τα 3 πρώτα χρόνια, τι ποσό θα πρέπει να πληρώσει στο τέλος του τρίτου χρόνου, ώστε να ξεπληρώσει όλο το χρέος του;

Εφαρμογές με Ράντες

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Απόσβεση

- Σύνθετη παραγωγική διάρκεια παγίων

- Κεφαλαιοποιημένο κόστος

- Καθαρά παρούσα αξία

- Εσωτερικός βαθμός απόδοσης

- Αξιολόγηση επενδύσεων

ΣΤΟΧΟΙ

- Κατανόηση και χρησιμοποίηση μιας ράντα σε ζητήματα αποτίμησης, αξιολόγησης επενδύσεων.

- Εύρεση καθαρής παρούσας αξίας μελλοντικών επενδύσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Πρόκειται να επενδύσουμε 10.000 με στόχο να έχουμε έσοδα 3.000 το χρόνο, για τα επόμενα πέντε έτη, ενώ εκτιμούμε ότι στο τέλος των πέντε ετών μπορούμε να πουλήσουμε την επένδυση, και να εισπράξουμε 2.000 ευρώ.

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης;

1 Εισαγωγή

Οι τύποι υπολογισμού αρχικής και τελικής αξίας ράντας εφαρμόζονται σε πολλές άλλες περιπτώσεις. Κάποιες από τις περιπτώσεις εφαρμογών ραντών, κυρίως σε αξιολόγηση επενδύσεων, θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

2 Απόσβεση στοιχείων

Ας δούμε, καταρχάς, πώς ορίζουμε την απόσβεση ενός στοιχείου. Σε μια επιχείρηση, τα πάγια στοιχεία της, όπως κτίρια, μηχανήματα, αυτοκίνητα και άλλα, χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς της επιχείρησης και φθείρονται με τη χρήση τους, οπότε μετά από κάποια χρόνια θα πρέπει να αντικατασταθούν. Η αξία των παγίων αυτών μειώνεται μετά από τα χρόνια χρήσης τους.

«**Απόσβεση** (Depreciation) ονομάζεται η μείωση της αξίας ενός πάγιου περιουσιακού στοιχείου από τη φθορά που υπέστη αυτό, είτε λόγω της παρόδου του χρόνου (χρονική φθορά), είτε λόγω της χρήσεως (λειτουργική φθορά), είτε και όταν οφείλεται σε επιστημονικές και τεχνικές ανακαλύψεις και εφευρέσεις (τεχνολογική απαξίωση). Εναλλακτικά είναι το κόστος των αναλωμένων υπηρεσιών κάθε παγίου εκτός της γης. Η γη δεν υπόκειται σε απόσβεση, γιατί το απόθεμα των υπηρεσιών της είναι ανεξάντλητο. Η απόσβεση θεωρείται μη ταμειακό έξοδο, γιατί το ποσό των εισπράξεων που αντιστοιχεί στην απόσβεση παραμένει στην επιχείρηση και δεν εκταμιεύεται υπέρ κάποιου τρίτου, όπως συμβαίνει με τους μισθούς, τα εργατικά, τα ενοίκια κλπ.» (Απόσβεση Ευρετήρι, 2010).

Θα πρέπει λοιπόν να απεικονισθεί λογιστικά αυτή η μείωση της αξίας, η οποία θεωρείται και έξοδο της επιχείρησης. Επειδή όμως δεν υπάρχει πραγματική τιμή μείωσης της αξίας, εκτιμούμε την ετήσια μείωση της αξίας με μια μέθοδο απόσβεσης παγίων.

2.1 Μέθοδοι Απόσβεσης στοιχείων

Αναζητώντας στο www.euretirio.com τις κυριότερες μεθόδους υπολογισμού του ετήσιου ποσού αποσβέσεως, διαβάζουμε τα εξής:

«1) Μέθοδος της σταθερής αποσβέσεως

Είναι εκείνη κατά την οποία ο συντελεστής αποσβέσεως είναι σταθερός κάθε χρόνο, και ο υπολογισμός με βάση το συντελεστή γίνεται πάντοτε από την αρχική αξία του περιουσιακού στοιχείου.

2) Μέθοδος της φθίνουσας αποσβέσεως με σταθερό συντελεστή

Είναι εκείνη κατά την οποία ο μεν συντελεστής παραμένει ο ίδιος, ο δε υπολογισμός δεν γίνεται από την αρχική αξία του περιουσιακού στοιχείου, αλλά κάθε φορά επί του υπολοίπου που εναπομένει από την αφαίρεση της αποσβέσεως.

3) Μέθοδος φθίνουσας αποσβέσεως με μειωμένο συντελεστή:

Είναι εκείνη η μέθοδος κατά την οποία το ποσό της αποσβέσεως υπολογίζεται πάντα από την αρχική αξία αλλά με μειωμένο συντελεστή.

4) Μέθοδος της αύξουσας αποσβέσεως

Είναι εκείνη κατά την οποία το ποσό της αποσβέσεως αυξάνει κάθε χρόνο, με αντίστοιχη αύξηση του συντελεστή.

5) Μέθοδος αύξουσας αποσβέσεως με συντελεστή τα έτη ζωής

Κατά τη μέθοδο αυτή, το ποσό της ετήσιας απόσβεσης του στοιχείου, από τον ένα χρόνο στον άλλο, αυξάνεται, δηλαδή ο συντελεστής αποσβέσεως του στοιχείου αυξάνεται από τον ένα χρόνο στον άλλο. Υπολογίζεται πάντοτε από την αρχική αξία του στοιχείου. Για να βρεθεί το ετήσιο ποσό της αποσβέσεως, πρέπει να μερισθεί το ποσό της αξίας του στοιχείου σε μέρη ανάλογα με τα έτη διαρκείας χρησιμοποιήσεως του στοιχείου.» (Απόσβεση Ευρετήριο, 2015).

2.2 Μέθοδος Απόσβεσης με χρήση ράντας

Οι αποσβέσεις μπορούν να υπολογισθούν και με χρήση ραντών, θεωρώντας ότι το ποσό της ετήσιας απόσβεσης σαν όρο της ράντας. Έστω ότι η αρχική αξία ενός στοιχείου συμβολίζεται με C και η αξία του στο τέλος της χρήσης του συμβολίζεται με **S,** και ονομάζεται **υπολειμματική** αξία. Πολλές φορές, βέβαια, η υπολειμματική αξία μπορεί να είναι μηδενική. Αν ο χρόνος απόσβεσης είναι n χρονικές περίοδοι και θεωρούμε ίσο ποσό απόσβεσης για κάθε χρονική περίοδο και έστω ότι το επιτόκιο του χρήματος (υπολογισμού) είναι i, τότε τα ποσά των αποσβέσεων σε κάθε χρονική περίοδο μπορούν να θεωρηθούν σαν ράντα με όρο R (ποσό περιοδικής απόσβεσης) και διάρκεια n. Η τελική αξία αυτής της ράντας, συν την υπολειμματική αξία, θα είναι ίση με την αρχική αξία του στοιχείου.

Θα ισχύει C=Vτελ+S.

Η τελική αξία Vτελ της ράντας είναι Vτελ= $R*s_{n|i}$ όπου η τιμή του συντελεστή sn|i υπολογίζεται από τον πίνακα τελικής αξίας ράντας.

Ο τύπος C=Vτελ+S γίνεται C=R sn|i +S. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς R (ετήσιο ποσό απόσβεσης), βρίσκουμε το ποσό περιοδικής απόσβεσης R= $(C-S)/s_{n|i}$. Τον τελευταίο αυτό τύπο χρησιμοποιούμε προκειμένου να υπολογίσουμε τη δαπάνη απόσβεσης.

2.3 Παράδειγμα εύρεσης απόσβεσης

Έστω μια μηχανή που αγοράστηκε 400.000 ευρώ, μετά τα 7 έτη λειτουργίας της μπορεί να πωληθεί 50.000 ευρώ. Να υπολογισθεί η ετήσια δαπάνη απόσβεσης, αν το ισχύον επιτόκιο είναι 4,5%.

Λύση

Η αρχική αξία είναι C=400.000 ευρώ, η υπολειμματική S=50.000 ευρώ ενώ οι αποσβέσεις γίνονται κάθε έτος για 7 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4,5%.

Το σύνολο των αποσβέσεων θα είναι $R*s_{n|i}$ και αυτό θα είναι ίσο με C-S

Έτσι έχουμε

$R= (C-S)/s_{n|i}= (400.000-50.000)/s_{7|0,045}= 350.000/8,7873= 39.830,21$ ευρώ

Σημείωση: Η τιμή του συντελεστή $s_{n|i}$ υπολογίζεται από τον πίνακα τελικής αξίας ράντας.

3 Σύνθετη παραγωγική διάρκεια παγίων

Στην περίπτωση που διαφορετικά πάγια στοιχεία έχουν διαφορετική ωφέλιμη ζωή, υπολογίζουμε τη σύνθετη παραγωγική διάρκεια. (Αποστολόπουλος, 2003). **Σύνθετη παραγωγική διάρκεια** είναι ο χρόνος που απαιτείται, ώστε η συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης να είναι ίση με την συνολική αποσβεστέα αξία..

Έστω οι εξής συμβολισμοί:
Συνολική αποσβεστέα αξία ΣV
Συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης ΣR
Σύνθετη παραγωγική διάρκεια n
Επιτόκιο υπολογισμού i

Υπολογίζουμε τη συνολική αξία ΣV όλων των παγίων και τη συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης ΣR, και εντοπίζουμε τον ισοδύναμο χρόνο n, ώστε να ισχύει ΣR /sn|i = ΣV

Θεωρούμε, δηλαδή, το σύνολο των αποσβέσεων ως ράντα με διάρκεια n (ίση με τη σύνθετη παραγωγική διάρκεια των παγίων), και η τελική αξία της ράντας αυτής θα είναι ίση με το σύνολο των αποσβεστέων αξιών όλων των παγίων, άσχετα με το χρόνο ζωής του καθενός.

Την παραπάνω σχέση τη μετατρέπουμε σε $s_{n|i}$ = ΣR /ΣV και, στη συνέχεια, εντοπίζουμε την τιμή n για το δοσμένο επιτόκιο i από τον πίνακα συντελεστών τελικής αξίας ράντας, είτε απευθείας είτε με παρεμβολή.

3.1 Παράδειγμα εύρεσης σύνθετης παραγωγικής διάρκειας

Έστω μια μηχανή που αγοράστηκε 400.000 ευρώ, μετά τα 7 έτη λειτουργίας της μπορεί να πωληθεί 50.000 ευρώ. και μια ακόμη μηχανή αγοράστηκε 300.000 ευρώ και μετά από 5 έτη έχει υπολειμματική αξία 70.000 ευρώ. Να υπολογισθεί η σύνθετη παραγωγική διάρκεια των δύο μηχανών, αν το ισχύον επιτόκιο είναι 4,5%.

Λύση

Υπολογίζουμε καταρχάς την ετήσια απόσβεσης κάθε μηχανής με τον τύπο R= (C-S) /$s_{n|i}$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	Αρχική αξία	**Υπολειμματική αξία**	**Διάρκεια**	**Ετήσια απόσβεση**
Μηχανή 1	400.000	50.000	7	350.000/s7|0,045=39.830,21
Μηχανή 2	300.000	70.000	5	230.000/s5|0,045=42.042,15

Πίνακας 1. *Υπολογισμοί παραδείγματος 3.1*

Κατόπιν θέλουμε να υπολογίσουμε την σύνθετη παραγωγική διάρκεια n που αντιστοιχεί στις δύο μηχανές μαζί.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$\Sigma R = \Sigma V / s_{n|i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 350.000/s_{7|0,045} + 230.000/s_{5|0,045} = (350.000+230.000)/s_{n|0,045} \Leftrightarrow$

$s_{n|0,045} = 580.000/(39.830,21+42.042,15) \Leftrightarrow s_{n|0,045} = 7,0842$

Από τον πίνακα συντελεστών τελικής αξίας ράντας βρίσκουμε:

$s_{6|0,045} = 6,7169$ και $s_{7|0,045} = 8,0192$

Με τη μέθοδο της παρεμβολής προκύπτει n=6,39 έτη.

4 Καθαρή παρούσα αξία

Πολλές φορές χρειάζεται η αξιολόγηση διαφορετικών επενδυτικών σχεδίων-αποφάσεων από επενδυτές, προκειμένου να επιλεγεί η πιο συμφέρουσα. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι αξιολόγησης επενδύσεων. Συγκεκριμένα μια από αυτές, που χρησιμοποιείται πολύ συχνά, είναι η μέθοδος υπολογισμού της καθαρής παρούσας αξίας όλων των ταμειακών ροών της επένδυσης. **Ταμειακές ροές** ονομάζονται τα έσοδα που αποφέρει η επένδυση, αλλά και τα έξοδα που αυτή απαιτεί. Η διαφορά έσοδα – έξοδα κάθε έτους είναι η καθαρή ταμειακή ροή του αντίστοιχου έτους.

«Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών των εισερχόμενων και εξερχόμενων ταμειακών ροών κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Μετράει το πλεόνασμα, ή την έλλειψη, ταμειακών ροών, σε όρους παρούσας αξίας, σε σχέση με το κόστος κεφαλαίων (cost of funds) που χρησιμοποιήθηκαν για μια επένδυση. Η Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που χρησιμοποιείται στην οικονομική επιστήμη (economics), στα χρηματοοικονομικά (finance) και στη λογιστική (accounting), για να καθοριστεί αν μια επένδυση ή ένα έργο, κρίνεται συμφέρουσα για να χρηματοδοτηθεί, ή όχι. Η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών υπολογίζεται με την προεξόφληση τους, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο (discount rate)» (Καθαρά Παρούσα Αξία Ευρετήριο, 2015)

Κριτήριο για την αξιολόγηση των εναλλακτικών επενδύσεων αποτελεί ο υπολογισμός της καθαρής παρούσας αξίας καθεμιάς με τη σχέση:

Καθαρά Παρούσα Αξία= Παρούσα αξία όλων των καθαρών ταμειακών ροών – Κόστος επένδυσης

Μια επένδυση είναι κερδοφόρα, όταν έχει Θετική Καθαρή Παρούσα Αξία. Μια επένδυση είναι ζημιογόνα, όταν η Καθαρή Παρούσα Αξία της είναι αρνητική.

Καλύτερη από πολλές εναλλακτικές επενδύσεις, είναι αυτή με τη μεγαλύτερη θετική Παρούσα Αξία.

Αν οι ταμειακές ροές μιας επένδυσης είναι ίσες για κάθε χρονική περίοδο, μπορούν να θεωρηθούν ως ράντα με δόση R ίση με την καθαρή ταμειακή ροή. Η αρχική αξία της ράντας αυτής δίνεται από τον τύπο Ran|i. Αν Ko το αρχικό κόστος της επένδυσης, η Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) θα είναι:

ΚΠΑ= $R*\alpha_{n|i} - Ko$

Η Καθαρή Παρούσα Αξία, σαν εργαλείο ανάλυσης επενδύσεων, έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

«Δίνει αποτελέσματα για μία επένδυση με τη μορφή ρευστότητας. Είναι πρακτικά χρήσιμη, καθώς προεξοφλεί τις ταμειακές ροές. Μεταξύ δύο επενδύσεων με θετική παρούσα αξία, μπορούμε να αξιολογήσουμε ως καλύτερη αυτή που έχει μεγαλύτερη Καθαρή Παρούσα Αξία» (Bradley, 2014).

Η Καθαρή Παρούσα Αξία, σαν εργαλείο ανάλυσης επενδύσεων, έχει τα εξής μειονεκτήματα:

«Οι εκτιμώμενες ταμειακές ροές σπανίως συμπίπτουν με τα πραγματικά αποτελέσματα, καθώς εξαρτώνται από πάρα πολλές μεταβλητές κι από τις υποκειμενικές εκτιμήσεις των αναλυτών, κατά τη διάρκεια του οικονομικού προϋπολογισμού. Το προεξοφλητικό επιτόκιο (discount rate), που θα πρέπει χρησιμοποιηθεί, δεν είναι πάντοτε σαφές, ενώ θεωρείται σταθερό, κατά τη διάρκεια ζωής της επένδυσης, πράγμα μη ρεαλιστικό για μακροχρόνιες και υψηλού ρίσκου επενδύσεις» (Καθαρά Παρούσα Αξία Ευρετήριο, 2015).

4.1 Παράδειγμα εύρεσης καθαρής παρούσας αξίας

Να βρεθεί η Καθαρή Παρούσα Αξία, αν το επιτόκιο είναι 5%, μιας επένδυσης με αρχικό κόστος 40.000 ευρώ, ετήσια έξοδα συντήρησης 800 ευρώ και ετήσια έσοδα 10.500 ευρώ για τα επόμενα πέντε έτη.

Λύση

Καθαρή Παρούσα Αξία= Παρούσα αξία όλων των καθαρών ταμειακών ροών – αρχικό κόστος επένδυσης

Καθαρή Παρούσα Αξία=(10.500-800) $\alpha_{5|5\%}$ -40.000 = 9.700 * 4,3295 -40.000 =
41.996,15-40.000 =1.996,15 ευρώ

5 Εσωτερικός βαθμός απόδοσης

Μια άλλη μέθοδος αξιολόγησης επενδύσεων είναι η μέθοδος του εσωτερικού βαθμού απόδοσης της επένδυσης. Διεθνώς ονομάζεται **internal rate of return,** και συμβολίζεται με **IRR**. Με τη μέθοδο αυτή δεν χρησιμοποιούμε επιτόκιο υπολογισμού της αξίας της επένδυσης, αλλά υπολογίζουμε το επιτόκιο r, το οποίο ονομάζεται **εσωτερικός βαθμός απόδοσης** της επένδυσης, χρησιμοποιώντας την αρχική αξία της επένδυσης και την τελική της αξία. Αν ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της επένδυσης είναι μεγαλύτερος από το ισχύον κόστος κεφαλαίου (επιτόκιο), τότε αξιολογούμε την επένδυση ως κερδοφόρα. Διαφορετικά η απόδοσή της είναι αρνητική. Καλύτερη από πολλές εναλλακτικές επενδύσεις είναι αυτή με το μεγαλύτερο εσωτερικός βαθμός απόδοσης.

«Το πλεονέκτημα της χρήσης της μεθόδου του εσωτερικού βαθμού απόδοσης είναι ότι δεν εξαρτάται από κάποιο εξωτερικό επιτόκιο. Βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν διαφοροποιείται μεταξύ επενδύσεων διαφορετικής κλίμακας. Μια επένδυση μπορεί να περιλαμβάνει χρηματικές ροές σε χιλιάδες ευρώ, ενώ μια άλλη σε δεκάδες ευρώ, αλλά και οι δύο να έχουν τον ίδιο εσωτερικό βαθμό απόδοσης» (Bradley, 2014).

«Το internal rate of return (IRR) είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο που μηδενίζει την καθαρή παρούσα αξία μιας επένδυσης. Επομένως, όσο μεγαλύτερη είναι η καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης, τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το IRR. Το IRR χρησιμοποιείται, για να συγκρίνει επενδύσεις, και διαφέρει από τη καθαρή παρούσα αξία, διότι μετράει και το χρόνο των ταμειακών ροών, όχι μόνο το συνολικό όγκο. Για παράδειγμα, δύο επενδύσεις με καθαρή παρούσα αξία 1.000.000€ μπορούν να έχουν διαφορετικά IRR, και η επένδυση με το μεγαλύτερο IRR επιστρέφει χρήματα γρηγορότερα από αυτή με το χαμηλότερο IRR» (IRR ependysopedia, 2015).

Έστω ότι οι ταμειακές ροές μιας επένδυσης είναι ίσες για κάθε χρονική περίοδο και μπορούν να θεωρηθούν ως ράντα με δόση R ίση με την καθαρή ταμειακή ροή.

Η αρχική αξία της ράντας αυτής δίνεται από τον τύπο: $R*\alpha_{n|r}$.

Αν Ko το αρχικό κόστος της επένδυσης και Kn η τελική αξία της, τότε μπορούμε να βρούμε τον εσωτερικό βαθμό απόδοσης από τη σχέση:

$R*\alpha_{n|r} + Kn*U^n = Ko$ λύνοντας ως προς τον άγνωστο r.

Άλλος τρόπος να βρούμε τον εσωτερικό ρυθμό απόδοσης είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της καθαρής παρούσας αξίας, ΚΠΑ= $R\alpha_{n|i}$ – Ko και να αντικαθιστούμε το επιτόκιο i, με διαφορετικές τιμές επιτοκίων, μέχρι η παρούσα αξία να μηδενισθεί. Το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε μηδενική παρούσα αξία, είναι ο εσωτερικός ρυθμός απόδοσης.

5.1 Παράδειγμα εύρεσης εσωτερικού βαθμού απόδοσης

Μια επένδυση με αρχικό κόστος 10.000 ευρώ θα μας αποφέρει 3.500 ευρώ κάθε χρόνο, για τα επόμενα 8 έτη, ενώ η υπολειμματική της αξία είναι μηδενική. Ποιος είναι ο εσωτερικός βαθμός απόδοσής της;

Λύση

Έστω r ο εσωτερικός βαθμός απόδοσής της. Αφού η υπολειμματική της αξία είναι μηδενική, ισχύει η σχέση

$R\alpha_{n|r} = Ko \Leftrightarrow 4.000\ \alpha_{8|r} = 10.000 \Leftrightarrow$

$\alpha_{8|r} = 10.000 / 3.500 \Leftrightarrow \alpha_{8|r} = 2,857$

Από τον πίνακα των συντελεστών αρχικής αξίας ράντας για 8 έτη βρίσκουμε $\alpha_{8|2,5\%} = 2,856$

Άρα ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της επένδυσης είναι 2,5%.

Αν το επιτόκιο καταθέσεων είναι μεγαλύτερο από 2,5%, τότε η επένδυση δεν μας συμφέρει. Αν το επιτόκιο καταθέσεων είναι μικρότερο από 2,5%, η επένδυση μας αποφέρει κέρδη.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πώς μετατρέπω μελλοντικές ταμειακές ροές σε σημερινή αξία χρήματος.

- Πώς συγκρίνω επενδύσεις με τη μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας.
- Τι είναι ο εσωτερικός ρυθμός απόδοσης μιας επένδυσης.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Απόσβεση Ευρετήριο (2015). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.euretirio.com/aposvesi-depreciation/

Αποστολόπουλος, Θ. (2003). Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Bradley, T. (2014). Μαθηματικά για την Οικονομία και τη Διοίκηση. Αθήνα: Κριτική.

IRR ependysopedia (2015). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.ependysopedia.gr/internal-rate-of-return-irr

Καθαρά Παρούσα Αξία Ευρετήριο (2015). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.euretirio.com/kathari-parousa-axia-kpa-npv/

Ασκήσεις 7ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Η αξία των παγίων στοιχείων μιας επιχείρησης είναι 250.000 ευρώ και υπολογίζετε να αντικατασταθούν σε 5 χρόνια, οπότε η υπολειμματική τους αξία θα είναι 30.000 ευρώ. Πόση θα είναι η ετήσια δαπάνη απόσβεσης των παγίων, αν το ισχύον επιτόκιο είναι 6% το χρόνο.

Απάντηση/Λύση

Η αρχική αξία είναι C=250.000 ευρώ, η υπολειμματική S=30.000 , ενώ οι αποσβέσεις γίνονται κάθε έτος για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%. Το σύνολο των αποσβέσεων θα είναι $R*s_{n|i}$, και αυτό θα είναι ίσο με C-S
Έτσι έχουμε ετήσια απόσβεση θα είνια $R= (C-S)/s_{n|i}= (250.000-30.000)/s_{5|0,06}= 220.000/5,6371 = 39.027,16$ ευρώ.

Άσκηση 2

Ένα επαγγελματικό αυτοκίνητο κοστίζει 20.000 ευρώ, και η υπολειμματική του αξία μετά από 10 έτη είναι 3.000 ευρώ, ενώ η ετήσια δαπάνη συντήρησης είναι 1.000 ευρώ. Να βρεθεί η παρούσα αξία όλης της δαπάνης του αυτοκινήτου, αν το ισχύον επιτόκιο είναι 6% το χρόνο.

Απάντηση/Λύση

Τα έξοδα συντήρησης 1.000 κάθε χρόνο αποτελούν μια ράντα της οποίας η αρχική αξία θα είναι $50.000*α_{10|6\%}$. Η αρχική αξία της τιμής πώλησης των 3.000 ευρώ στο τέλος της δεκαετίας θα υπολογισθεί με προεξόφληση και θα είναι $3.000*U^{10}$.
Η παρούσα αξία της δαπάνης του αυτοκινήτου θα είναι η αρχική αξία αγοράς, συν τα έξοδα συντήρησης και μείον την υπολειμματική του αξία.
Επομένως: Παρούσα αξία = $Ko+1.000*a10|6\% -3.000*U^{10} \Leftrightarrow$
Παρούσα αξία =20.000 +1.000*7,3601-3.000*0,5584=25.684,9 ευρώ

Άσκηση 3

Με τη μέθοδο της Καθαρής Παρούσας Αξίας, συγκρίνετε τις παρακάτω επενδύσεις, αν το επιτόκιο είναι 6,5%:
Α) Επένδυση 6.000 ευρώ αρχικά και ετήσια συντήρηση 800 ευρώ με ετήσια έσοδα 1.500 ευρώ για πέντε έτη.

Β) Επένδυση 10.000 ευρώ αρχικά και ετήσια συντήρηση 1.500 ευρώ με ετήσια έσοδα 3.500 ευρώ για τρία έτη.
Γ) Επένδυση 20.000 ευρώ αρχικά και ετήσια συντήρηση 5.000 ευρώ με ετήσια έσοδα 8.500 ευρώ για δέκα έτη.

Απάντηση/Λύση

Για κάθε επένδυση η καθαρά παρούσα αξία θα υπολογίζεται με την παρακάτω σχέση:
Καθαρά Παρούσα Αξία= Παρούσα αξία όλων των καθαρών ταμειακών ροών – αρχικό κόστος επένδυσης
Επομένως θα έχουμε
Α) ΚΠΑ1= (1500-800) $\alpha_{5|6,5\%}$ - 6.000 =700 *4,1557 -6.000 =2.909-6.000 = -3.091 ευρώ.
Β) ΚΠΑ2= (3500-1500) $\alpha_{3|6,5\%}$ - 10.000 =2.000 *2,6485 -10.000 =5.297-10.000 = -4.703 ευρώ.
Γ) ΚΠΑ3= (8500-5000) $\alpha_{10|6,5\%}$ - 20.000 =3.500 *7,1888 -20.000 =25.160-20.000 = 5.160 ευρώ.
Οι δύο πρώτες επενδύσεις έχουν αρνητική παρούσα αξία και, επομένως, είναι ζημιογόνες. Η τρίτη επένδυση έχει θετική παρούσα αξία και, επομένως, είναι συμφέρουσα.

Άσκηση 4

Να βρεθεί η αρχική αξία των παγίων στοιχείων μιας επιχείρησης, τα οποία συμφωνείται να πωληθούν με προκαταβολή 250.000 ευρώ και πληρωμές 50.000 στο τέλος κάθε χρόνου, για 5 χρόνια. Το ισχύον επιτόκιο είναι 6% το χρόνο.

Απάντηση/Λύση

Οι πληρωμές 50.000 στο τέλος κάθε χρόνου για 5 χρόνια αποτελούν μια ληξιπρόθεσμη ράντα με αρχική αξία 50.000 * $\alpha_{5|6\%}$ =50.000*4,2124=210.620 ευρώ.
Άρα η αρχική αξία των παγίων είναι 250.000 + 210.620 = 460.620 ευρώ.

Άσκηση 5

Ο διευθυντής μιας επιχείρησης σχεδιάζει την αγορά ενός μηχανήματος που θα στοιχίσει 5.000 ευρώ, και μετά από 7 χρόνια θα μπορεί να πωληθεί 800 ευρώ. Τα έξοδα συντήρησής της είναι 300 ευρώ το μήνα. Εναλλακτικά μπορεί να ενοικιαστεί μια παρόμοια μηχανή με 900 ευρώ το μήνα, και η συντήρηση να επιβαρύνει την εταιρεία ενοικίασης. Αν η αξία του χρήματος είναι 12% το χρόνο και ο ανατοκισμός είναι μηνιαίος, ποια λύση είναι πιο συμφέρουσα;

Απάντηση/Λύση

Ο διευθυντής της επιχείρησης θα πρέπει να αξιολογήσει τις δύο εναλλακτικές επιλογές και να τις συγκρίνει. Η σύγκριση θα γίνει με τη μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας (ΚΠΑ). Επειδή το ετήσιο επιτόκιο είναι 12% και ο ανατοκισμός είναι μηνιαίος, το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε μήνα είναι 1% και οι χρονικές περίοδοι θα μετρηθούν σε μήνες.
Η ΚΠΑ για την αγορά του μηχανήματος, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για 7 έτη, δηλαδή για 84 μήνες, θα είναι
ΚΠΑ1=5.000 + 300 $\alpha_{84|1\%}$ - 800 *U^{84} =5.000 + 300 *(1-1/$(1+0,01)^{84}$)/0,01 - 800 *0,4335 =
5.000 + 300 *56,6485 - 800 *0,4335 == 5.000 +16.994,55 -346,8 = 21.647,75 ευρώ
Η ΚΠΑ για την ενοικίαση του μηχανήματος, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για 7 έτη, δηλαδή για 84 μήνες, θα είναι
ΚΠΑ2= 900 $\alpha_{84|1\%}$=900 *56,6485=50.983,65 ευρώ
Επομένως η ενοικίαση του μηχανήματος δεν είναι συμφέρουσα για την επιχείρηση, αφού το κόστος ενοικίασης είναι περισσότερο από το διπλάσιο του κόστους αγοράς του μηχανήματος.

Άσκηση 6

Μελετάτε τη δημιουργία μιας νέας επιχείρησης που μπορεί να σας αποφέρει 50.000 ευρώ κάθε χρόνο για 5 χρόνια. Στο τέλος του έκτου χρόνου υπολογίζετε να πουλήσετε την επιχείρηση στην τιμή των 150.000 ευρώ. Πόσα χρήματα αξίζει να επενδύσετε σήμερα, αν πιστεύετε ότι μια δίκαιη απόδοση της επιχείρηση είναι 21% το χρόνο.

Απάντηση/Λύση

Έστω Κο η αρχική αξία της επένδυσης. Θα πρέπει η αξία των χρημάτων αυτών να είναι ίση με τις μελλοντικές ταμειακές, συν την αρχική αξία της τιμής πώλησης της επένδυσης στο τέλος των πέντε ετών. Η απόδοση 21% της επένδυσης αντιστοιχεί στο επιτόκιο υπολογισμού. Θεωρείται σαν να ήταν απόδοση των χρημάτων της επένδυσης, αν, αντί να τα επενδύαμε, τα καταθέταμε σε τραπεζικό λογαριασμό.

Τα έσοδα 50.000 κάθε χρόνο αποτελούν μια ράντα της οποίας η αρχική αξία θα είναι 50.000*a5|21%. Η αρχική αξία της τιμής πώλησης των 150.000 ευρώ στο τέλος της πενταετίας θα υπολογισθεί με προεξόφληση και θα είναι $150.000*U^5$

Θα πρέπει $Ko=50.000*\alpha_{5|21\%}+150.000*U^5 \Leftrightarrow$

$Ko=50.000*(1-1/(1+0,21)^5)/0,21+150.000*1/(1+0,21)^5 \Leftrightarrow$

Ko=50.000*2,9260+150.000*0,3855=146.300 +57.831,5 = 204.131,5 ευρώ

Επομένως, αν επενδύσουμε σήμερα 204.131,5 ευρώ, θα έχουμε απόδοση της επένδυσής μας 21% στα επόμενα 5 έτη.

Άσκηση 7

Μελετάτε δύο επενδύσεις Α και Β. Η Α απαιτεί αρχική δαπάνη 30.000 ευρώ, ενώ η Β 13.000 ευρώ. Οι δύο επενδύσεις πρόκειται να αποφέρουν τις χρηματικές ροές για τα επόμενα τέσσερα έτη, που εμφανίζονται στον πίνακα:

επένδυση	**Αρχική δαπάνη**	**1^o έτος**	**2^o έτος**	**3^o έτος**	**4^o έτος**
Α	**-30.000**	**-1.000**	**2.000**	**3.000**	**6.000**
Β	**-13.000**	**1.500**	**1.500**	**1.500**	**1.500**

Υπολογίστε τον εσωτερικό βαθμό απόδοσης κάθε επένδυσης. Ποια επένδυση είναι η καλύτερη;

Απάντηση/Λύση

Στην επένδυση Β οι μελλοντικές ταμειακές ροές είναι ίσες και θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ράντα, αλλά στην επένδυση Α οι μελλοντικές ταμειακές ροές διαφέρουν και δεν μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως ράντα.

Θα χρησιμοποιήσουμε την Καθαρή Παρούσα Αξία κάθε επένδυσης προκειμένου να βρούμε τον εσωτερικό ρυθμό απόδοσης.

Αφού δεν γνωρίζουμε το επιτόκιο που ισχύει, υπολογίζουμε την καθαρή παρούσα αξία κάθε επένδυσης, με διάφορα επιτόκια. Δοκιμάζουμε τιμές επιτοκίου 5%, 7%, 7,5%, 8%, 8,5%, 9%.

Προκειμένου να βοηθηθούμε στους υπολογισμούς, συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές των συντελεστών προεξόφλησης U για 1, 2, 3 και 4 έτη αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές προκύπτουν από τον πίνακα υπολογισμού συντελεστών προεξόφλησης.

	i=5%	i=7%	i=7,5%	i=8%	i=8,5%	i=9%
U^1	0,956938	0,934579	0,930233	0,925926	0,921659	0,917431
U^2	1,872668	1,808018	1,795565	1,783265	1,771114	1,759111
U^3	2,748964	2,624316	2,600526	2,577097	2,554022	2,531295
U^4	3,587526	3,387211	3,349326	3,312127	3,275597	3,23972

Η Καθαρή Παρούσα Αξία, στην αρχή της επένδυσης, θα υπολογισθεί από τη σχέση:
αρχική δαπάνη + παρούσα αξία κάθε μελλοντικής χρηματικής ροής.
Ο υπολογισμός της σχέση αυτής εμφανίζεται στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα, και τα αποτελέσματα της ΚΠΑ στις αντίστοιχες στήλες επιτοκίου του παρακάτω πίνακα:

επένδυση	Σχέση υπολογισμού ΚΠΑ	i=5%	i=7%	i=7,5%	i=8%	I=8,5%	i=9%
Α	-30.000 $- 1.000 U^1 +2.000U^2+3.000U^3+6.000U^4$	2.560,4	877,6	558,4	244,6	-63,7	-367,0
Β	-13.000 $+1.500U^1+1.500U^2+1.500U^3+1.500U^4$	749,1	131,1	13,4	-102,3	-216,4	-328,6

Για την επένδυση Α, παρατηρούμε θετική ΚΠΑ για επιτόκιο 5%, 7%, 7,5%, 8% και αρνητική ΚΠΑ για επιτόκιο μεγαλύτερο από 8,5%. Ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της Α επένδυσης είναι λίγο χαμηλότερος από 8,5%.
Για την επένδυση Β, παρατηρούμε θετική ΚΠΑ για επιτόκιο 5%, 7%, 7,5% και αρνητική ΚΠΑ για επιτόκιο μεγαλύτερο από 8%. Ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της Β επένδυσης είναι λίγο μεγαλύτερος από 7,5%.
Άρα μεγαλύτερο εσωτερικό ρυθμό απόδοσης έχει η Α επένδυση (περίπου 8,5%), η οποία κρίνεται και πιο συμφέρουσα με το κριτήριο του εσωτερικού ρυθμού απόδοσης. Αν θέλαμε να βρούμε την ακριβή εκτίμηση του εσωτερικού ρυθμού απόδοσης, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Άσκηση 8

Μια επιχείρηση σκέφτεται να αγοράσει εξοπλισμό για την παραγωγή της, ο οποίος στοιχίζει σήμερα 15.000 ευρώ, και μετά από τέσσερα έτη θα αχρηστευθεί, και η αξία του θα είναι μηδενική. Μια εναλλακτική λύση είναι να νοικιάσει τον εξοπλισμό με σύστημα leasing, πληρώνοντας ετήσιο μίσθωμα 4.000 ευρώ. Ποια επιλογή προτείνεται να προτιμηθεί, όταν το επιτόκιο είναι 4% και ποια, όταν είναι 2%;

Απάντηση/Λύση

Αγοράζοντας τον εξοπλισμό, η επιχείρηση θα πρέπει να πληρώσει σήμερα 15.000 ευρώ, και δεν θα πληρώσει ούτε θα λάβει χρήματα στο μέλλον, αφού η υπολειμματική αξία είναι 0 ευρώ.
Με τη μίσθωση θα έχει ετήσιες περιοδικές πληρωμές, δηλαδή, σχηματίζεται μια ράντα με όρο 4.000 ευρώ και διάρκεια 4 έτη. Για να συγκρίνουμε τις δύο επιλογές, θα υπολογίσουμε την αρχική αξία Α της ράντας, με τη σχέση $A=R* \alpha_{n|i}$, όπου R η δόση και $\alpha_{n|i}$ ο συντελεστής αρχικής αξία ράντας όπως υπολογίζεται από τον πίνακα.

α) Όταν το επιτόκιο είναι 4%, στον πίνακα εντοπίζουμε $\alpha_{4|0,04}$=3,6299, και η αρχική αξία των μισθωμάτων θα είναι $A=R* \alpha_{n|i}$ = 4.000*3,6299 =14.519,60 ευρώ.

β) Όταν το επιτόκιο είναι 2%, στον πίνακα εντοπίζουμε $\alpha_{4|0,025}$=3,8077, και η αρχική αξία των μισθωμάτων θα είναι $A=R* \alpha_{n|i}$ = 4.000*3,8077 =15.230,80 ευρώ.

Παρατηρούμε ότι, όταν το επιτόκιο είναι 4%, συμφέρει στην επιχείρηση να νοικιάσει τον εξοπλισμό, αφού η συνολική αρχική αξία των μισθωμάτων 14.519,60 είναι μικρότερη από 15.000 που στοιχίζει ο εξοπλισμός.
Αν το επιτόκιο είναι 2%, δεν συμφέρει στην επιχείρηση να νοικιάσει τον εξοπλισμό, αφού η συνολική αρχική αξία των μισθωμάτων 15.230,80 είναι μεγαλύτερη από 15.000 που στοιχίζει ο εξοπλισμός.

Συμπερασματικά, σε σχέση με την αγορά ή μίσθωση παγίων μιας επιχείρησης, θα μπορούσαμε να πούμε:
Όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο κεφαλαίου, τόσο λιγότερο μας συμφέρει να δεσμεύσουμε κεφάλαιο σε πάγια της επιχείρησης. Στην πράξη, για τη λήψη της σωστής απόφασης, λαμβάνεται υπόψη εκτός από το επιτόκιο, το οποίο συνήθως δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια, οι ανάγκες της επιχείρησης για ταμειακή ρευστότητα και η εγγύηση καλής λειτουργίας του εξοπλισμού.

Δάνεια

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Κεφάλαιο δανείου

- Ενιαία δάνεια

- Απόσβεση δανείων

- Χρεολύσιο

- Τοκοχρεολύσιο

- Εξοφλητικό απόθεμα

- Σύστημα απόσβεσης δανείου

ΣΤΟΧΟΙ

- Εντοπισμός και εύρεση κυριότερων στοιχείων δανείου.

- Διάκριση δανείων.

- Τρόποι απόσβεσης ενιαίων δανείων.

- Εύρεση δόσης για δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος.

- Εύρεση δόσης για δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Δανειζόμαστε κεφάλαιο 20.000 ευρώ, και θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία του ποσού που θα επιστρέψουμε μετά από 10 έτη, προκειμένου να εξοφλήσουμε το χρέος μας.

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε τη δόση που πρέπει να πληρώνουμε (ή να αποταμιεύουμε) κάθε περίοδο, ώστε να εξοφλήσουμε χρέος σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο;

1 Ιστορία δανείου

Η ιστορία του δανείου είναι τόσο παλιά όσο και η ιστορία του χρήματος. «Στην αρχαία Ελλάδα του 5ου αιώνα π.Χ. το επάγγελμα του τραπεζίτη δεν έχαιρε ιδιαίτερης εκτίμησης και συχνά ταυτιζόταν με αυτό του τοκογλύφου. Οι τράπεζες σχετίζονταν με δάνεια και, σύμφωνα με τα πάτρια ήθη, «όπου υπήρχε δάνειο δεν υπήρχε φίλος», αφού, όταν «ένας άνθρωπος είναι φίλος δεν δανείζει αλλά δίνει», και, σε μια τέτοια περίπτωση, τόκος ήταν η ευγνωμοσύνη του δανειζομένου προς το δανειστή του.

Ο Πλάτων στους *Νόμους* του ρητά ζητά να απαγορευτούν τα έντοκα δάνεια. Ο ελληνικός πολιτισμός δεν ήταν «πλουτοκεντρικός», αλλά ανθρωποκεντρικός. Η ελληνική φιλοσοφία θεωρούσε το χρήμα ως μέσο για την απόκτηση αγαθών, αλλά τίποτε περισσότερο. Εφόσον το κέντρο της ελληνικής φιλοσοφίας είναι ο άνθρωπος, και, καθώς η τοκογλυφία οδηγεί στον εξευτελισμό του ανθρώπου, ήταν λογικό να θεωρούνταν ανήθικη. Η πρακτική χρέωσης τόκων είχε αποκηρυχτεί από πολλούς Έλληνες και ξένους φιλοσόφους και ηγέτες, όπως ο Πλάτωνας, ο Αριστοτέλης, ο Πλούταρχος, ο Κικέρων, ο Μουχάμαντ κλπ. Ο Κάτων, όταν ρωτήθηκε «τί γνώμη έχεις για τη χρέωση τόκων;» απάντησε «τί γνώμη έχεις για τη δολοφονία;»

Ο κυρίαρχος τότε θεσμός της πόλης-κράτους είχε ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μεγάλου αριθμού ανεξαρτήτων κρατών, πολλά από τα οποία έκοβαν δικά τους νομίσματα, ποικίλης πραγματικής, ονομαστικής και εμπορικής αξίας. Η κυκλοφορία τόσων πολλών και ανόμοιων, ως προς την αξία τους, νομισμάτων δυσκόλευε τις διάφορες εμπορικές συναλλαγές, και αποτέλεσε την αιτία ανάπτυξης μιας αγοράς νομισματικών ισοτιμιών, όπου γινόταν ο υπολογισμός της αξίας κάθε νομίσματος σε σχέση με τα υπόλοιπα.

Η διαδικασία αυτή έδωσε λαβή για τη δημιουργία του επαγγέλματος του αργυραμοιβού ενός ατόμου που θα αντάλλασσε τα διάφορα νομίσματα επί αμοιβής. Μεταξύ άλλων, οι αργυραμοιβοί έπρεπε να γνωρίζουν τις αξίες και το βάρος των νομισμάτων κάθε κράτους και να καθορίζουν την αξία τους σε σχέση με το νόμισμα της χώρας στην οποία γινόταν η συναλλαγή. Έπρεπε να ξεχωρίζουν τα κίβδηλα νομίσματα και να εντοπίζουν τα ελλιποβαρή.

Η αναγνώριση της ανάγκης για την αγορά συναλλάγματος ήταν ελληνική, αλλά η εκμετάλλευση της νεοσυσταθείσας αγοράς νομισματικών ισοτιμιών δεν ενδιέφερε του Έλληνες, και έμεινε στα χέρια των εμπόρων του χρήματος. Οι ιδιώτες τραπεζίτες επεκτάθηκαν και σε αυτόν τον τομέα, τον οποίο συμπεριέλαβαν στις δραστηριότητες τους.

Ακόμη τα νομίσματα, εκτός από τη χρήση τους ως μέσο για τον υπολογισμό της αξίας των προϊόντων και τη διευκόλυνση των συναλλαγών, λειτουργούσαν τα ίδια ως εμπορεύματα στις περιοχές εκείνες που δεν διέθεταν τα απαραίτητα πολύτιμα μέταλλα. Οι τραπεζίτες βρήκαν και άλλον έναν τομέα εμπορίας χρήματος, πουλώντας χρήμα στις περιοχές που δεν είχαν και παίρνοντας ως αντάλλαγμα γη και αγαθά.

Έτσι, οι τραπεζικές εργασίες, σε εκείνη τη φάση χωρίζονταν στις εξής κατηγορίες:

- στη δοκιμασία και στην ανταλλαγή νομισμάτων
- στις καταθέσεις
- στις χορηγήσεις δανείων
- στην εκτέλεση εντολών προς τρίτους» («Ιστορία του Χρήματος, 2015).

2 Ορισμοί - έννοιες

2.1 Δάνειο (Loan)

Δάνειο είναι κεφάλαιο που παραχωρείται με ορισμένους όρους, οι οποίοι λέγονται *όροι δανεισμού*.

Δανειστής είναι αυτός που παραχωρεί το κεφάλαιο, ενώ *δανειζόμενος* (οφειλέτης) αυτός που παίρνει το κεφάλαιο.

2.2 Όροι δανεισμού

Οι όροι δανεισμού αναφέρονται στον τόπο, στο χρόνο επιστροφής του δανείου και στον τόκο που πρέπει να καταβάλλει ο δανειζόμενος στο δανειστή.

2.3 Χρεολύσιο

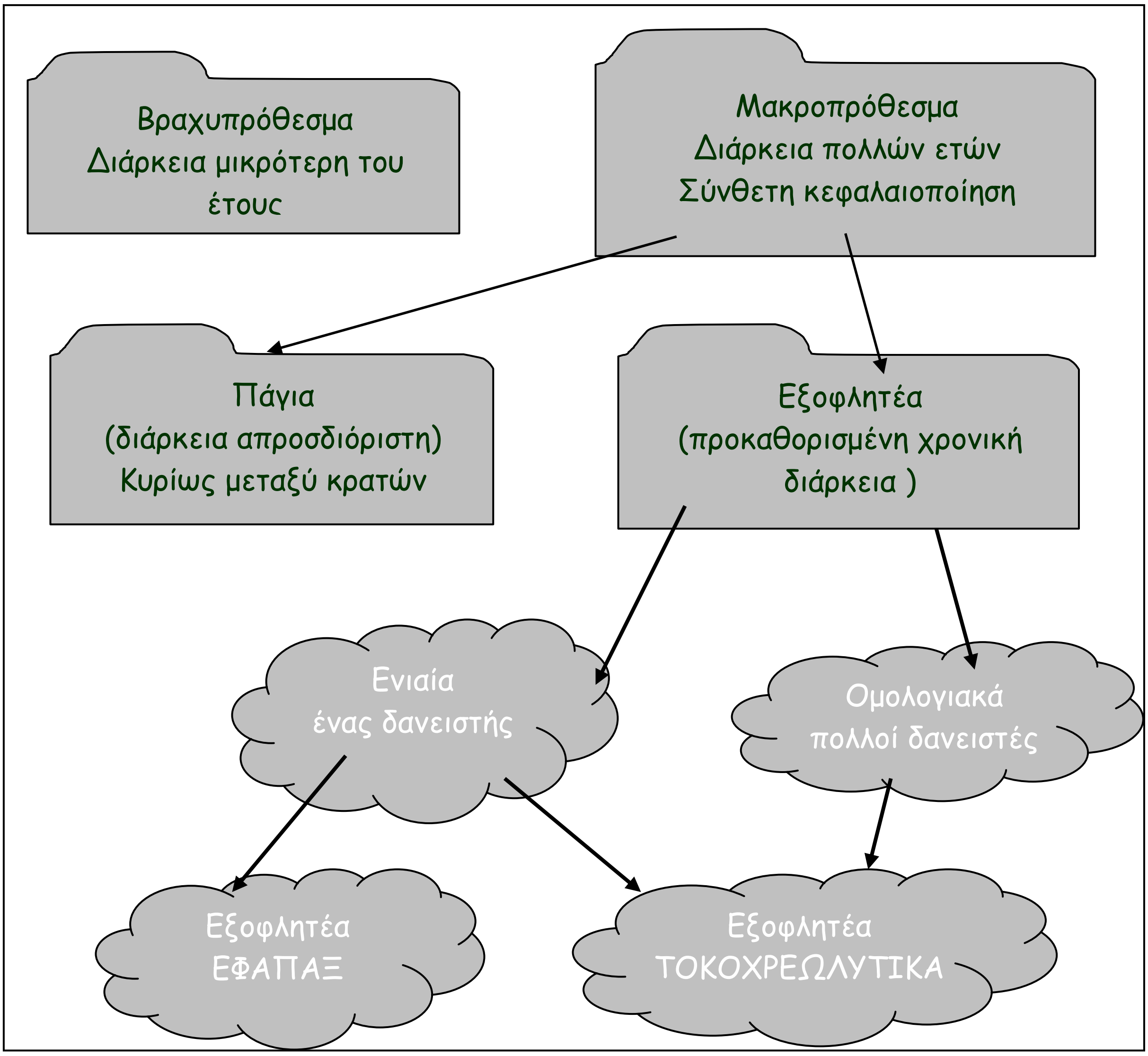
Το ποσό που επιστρέφουμε περιοδικά για την εξόφληση (λύση) του κεφαλαίου (χρέους), ονομάζεται *τοκοχρεολύσιο*. Το ποσό αυτό καταβάλλεται συνήθως σε ίσα χρονικά διαστήματα.

2.4 Τόκος

Το ποσό που καταβάλλεται για την εξόφληση του τόκου του δανείου (αμοιβή του δανειστή), ονομάζεται *τόκος*. Το ποσό αυτό είναι ανάλογο με το επιτόκιο του δανείου και το μη εξοφλημένο κεφάλαιο του δανείου.

2.5 Τοκοχρεολύσιο

Το άθροισμα των ποσών χρεολυσίου και τόκου που καταβάλλονται σε κάθε χρονική περίοδο, ονομάζεται *τοκοχρεολύσιο*. Συνήθως το τοκοχρεολύσιο ονομάζεται και *δόση* του δανείου, αφού είναι το ποσό που δίνουμε περιοδικά για την εξόφληση του δανείου. Μας ενδιαφέρει ο διαχωρισμός του σε χρεολύσιο και τόκους για καθαρά λογιστικούς λόγους.



Σχήμα 8.1. *Διαχωρισμός δανείων σε κατηγορίες*

3 Διακρίσεις δανείων

Τα δάνεια χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το χρόνο αποπληρωμής τους. Σε **βραχυπρόθεσμα** και **μακροπρόθεσμα** (σχήμα 8.1). Βραχυπρόθεσμα ονομάζονται τα δάνεια με χρονική διάρκεια μικρότερη του έτους, ενώ μακροπρόθεσμα είναι τα δάνεια με χρονική διάρκεια αποπληρωμής μεγαλύτερη του έτους. Τα μακροπρόθεσμα δάνεια διαχωρίζονται με τη σειρά τους σε **πάγια** και **εξοφλητέα** δάνεια. Πάγια δάνεια συνάπτονται, κυρίως, μεταξύ κρατών, δεν έχουν προσδιορισμένη χρονική διάρκεια αποπληρωμής, πληρώνονται τόκοι στο δανειστή και το ποσό δανείου παραμένει αμετάβλητο. Εξοφλητέα ονομάζονται τα δάνεια που πρέπει να εξοφληθούν σε προκαθορισμένη χρονική διάρκεια, η οποία καθορίζεται στη σύμβαση του δανείου. Ανάλογα με το αν τα εξοφλητέα δάνεια δίνονται από έναν δανειστή ή από πολλούς δανειστές, διακρίνονται σε δύο υποκατηγορίες. Η πρώτη αντιστοιχεί στα **ενιαία** δάνεια και η δεύτερη στα **ομολογιακά** δάνεια.

Ανάλογα με τον τρόπο εξόφληση τους, τα δάνεια διακρίνονται σε δάνεια **εξοφλητέα εφάπαξ** και σε δάνεια **εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά**. Στην πρώτη κατηγορία, η συμφωνία μεταξύ δανειστή και οφειλέτη περιλαμβάνει το χρόνο εξόφλησης όλου του δανειζόμενου ποσού με μία μόνο καταβολή, η οποία περιλαμβάνει συνήθως και τον ανάλογο τόκο του δανείου. Στα τοκοχρεολυτικά εξοφλητέα δάνεια, ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλεί τμηματικά μέρος του δανείου μαζί με τον ανάλογο τόκο, μέχρι να εξοφλήσει ολόκληρο το δάνειο στο συμφωνηθέντα χρόνο.

3.1 Βραχυπρόθεσμα δάνεια

Τα δάνεια για τα οποία η συμφωνημένη περίοδος αποπληρωμής τους είναι μικρότερη του έτους ονομάζονται *βραχυπρόθεσμα* δάνεια. Στα δάνεια αυτά, συνήθως, υπολογίζεται απλός τόκος, ανάλογος του κεφαλαίου, και στη λήξη τους επιστρέφεται το κεφάλαιο μαζί με τον απλό τόκο, που αναλογεί.

3.2 Μακροπρόθεσμα δάνεια

Τα δάνεια για τα οποία η συμφωνημένη περίοδος αποπληρωμής τους είναι μεγαλύτερη του έτους ονομάζονται μακροπρόθεσμα δάνεια. Στα δάνεια αυτά υπολογίζεται ο σύνθετος τόκος με ανατοκισμό των τόκων του δανείου και στη λήξη τους επιστρέφεται το κεφάλαιο ανατοκισμένο.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια, επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι πάγια δάνεια, για τα οποία πληρώνονται μόνο τόκοι, και το κεφάλαιο παραμένει δανεικό χωρίς να επιστρέφεται. Τέτοιου είδους δάνεια συνάπτονται, κυρίως, μεταξύ κρατών. Η δεύτερη κατηγορία είναι τα συνηθισμένα δάνεια, που εξοφλούνται σε συγκεκριμένη χρονική διάρκεια. Η δεύτερη αυτή κατηγορία αποτελείται από δύο είδη δανείων, τα ενιαία δάνεια και τα ομολογιακά δάνεια.

3.3 Ενιαία δάνεια

Στα *ενιαία* δάνεια, στα οποία υπάρχει ένας μόνο δανειστής που δανείζει ολόκληρο το ποσό του δανείου στον οφειλέτη. Ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να επιστρέψει το ποσό δανείου μαζί με τον ανάλογο τόκο σε προκαθορισμένο χρόνο, και με τρόπου που καθορίζεται στη σύμβαση του δανείου.

3.4 Ομολογιακά δάνεια

Στα *ομολογιακά* δάνεια υπάρχουν πολλοί δανειστές που δανείζουν μέρος από το ποσό του δανείου στον οφειλέτη. Το ποσό ενός ομολογιακού δανείου, συνήθως, είναι πολύ μεγάλο, για να το δώσει μόνο ένας δανειστής. Ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να επιστρέψει το ποσό δανείου, μαζί με τον ανάλογο τόκο, σε προκαθορισμένο χρόνο, και με τρόπο που καθορίζεται στη σύμβαση του δανείου, σε κάθε δανειστή.

3.5 Συμβολισμοί δανείων

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς στους τύπους υπολογισμού ενός δανείου:

- **K** για το συμβολισμό του συνολικού ποσού δανείου
- **n** για το συμβολισμό της διάρκειας δανείου σε χρονικές περιόδους (έτη, μήνες, εξάμηνα κλπ)
- **i** για το συμβολισμό του επιτοκίου δανεισμού
- **Ιρ** για το συμβολισμό του ποσού του τόκου της ρ-οστης χρονικής περιόδου
- **Χρ** για το συμβολισμό του ποσού του χρεολυσίου της ρ-οστης χρονικής περιόδου
- **Rρ** για το συμβολισμό του ποσού του τοκοχρεολυσίου της ρ-οστης χρονικής περιόδου
- **Υρ** για το συμβολισμό του ποσού του υπόλοιπου χρέους της ρ-οστης χρονικής περιόδου

3.6 Σημεία προσοχής

Η περίοδος μέτρησης του επιτοκίου θα πρέπει να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου. Με n συμβολίζονται οι ακέραιες χρονικές περίοδοι, και το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε μία από τις n χρονικές περιόδους (έτος, ή εξάμηνο ή μήνας…), γράφεται σε δεκαδική μορφή, και όχι σε %. Αν, δηλαδή, ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο με επιτόκιο εξαμήνου 2%, και η χρονική διάρκεια του δανείου είναι 3 έτη, θα πρέπει στον τύπο να γράψουμε το επιτόκιο 0,02 και το χρόνο σαν 6 εξάμηνα, αφού 3 έτη με 2 εξάμηνα ανά έτος αντιστοιχούν σε 6 εξάμηνα.

4 Σύστημα απόσβεσης δανείου

Ο τρόπος υπολογισμού του τόκου, του χρεολυσίου και των υπολοίπων στοιχείων του δανείου, που εξαρτώνται από αυτό, ονομάζεται **σύστημα απόσβεσης** δανείου.

Το συνολικό ποσό K του δανείου θα πρέπει να αποπληρωθεί σε n περιόδους (διάρκεια δανείου) με τα αντίστοιχα χρεολύσια. Επομένως το άθροισμα όλων των χρεολυσίων θα είναι ίσο με το ποσό του δανείου.

- K=X1+X2+…Xn

Ας συμβολίσουμε με ρ κάθε χρονική περίοδο αποπληρωμής μέρος του δανείου. Το ρ παίρνει τιμές 1, 2, .. έως n. Για κάθε περίοδο, υπολογίζουμε το χρεολύσιο της περιόδου, τον τόκο και το άθροισμά τους που ονομάζεται τοκοχρεολύσιο.

Μεταξύ του τόκου, χρεολυσίου και τοκοχρεολυσίου ισχύει η παρακάτω σχέση:

- Rρ=Xρ+Iρ για ρ=1,2,3,….n

Σε κάθε χρονική περίοδο μας ενδιαφέρει να υπολογίζουμε το υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο, δηλαδή το κεφάλαιο που οφείλουμε ακόμη να ξεπληρώσουμε και ονομάζεται *υπόλοιπο δανείου*. Πάνω στο ανεξόφλητο υπόλοιπο του δανείου, υπολογίζονται οι τόκοι της επόμενης περιόδου. Η σχέση που συνδέει το ανεξόφλητο υπόλοιπο του δανείου με το ανεξόφλητο υπόλοιπο της προηγούμενης περιόδου είναι:

- $Yρ=Y_{ρ-1}-Xρ$ και $Y_0=K$

Στην αρχή του δανείου, χρονική περίοδος 0, προφανώς, το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι ίσο με το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

Τα παραπάνω ποσά, για κάθε χρονική περίοδο, υπολογίζονται και καταγράφονται σε ένα πίνακα. Οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν στις χρονικές περιόδους. Στις στήλες του πίνακα καταγράφεται το χρεολύσιο, ο τόκος, το τοκοχρεολύσιο, το ποσό που εξοφλήθηκε και το υπόλοιπο δανείου για κάθε χρονική περίοδο. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **πίνακας απόσβεσης** δανείου.

5 Σύστημα απόσβεσης για ενιαία δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ

Ενιαία δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ είναι τα δάνεια όπου υπάρχει ένας μόνο δανειστής, και για τα οποία έχει συμφωνηθεί η ολική εξόφλησή τους στο τέλος της περιόδου δανεισμού. Διακρίνουμε τρεις τρόπους εξόφλησή τους, ανάλογα με το πότε πληρώνονται οι τόκοι του δανείου. Οι τρόποι αυτοί περιγράφονται παρακάτω:

1ος Τρόπος

Ο οφειλέτης στη λήξη του δανείου πληρώνει όλο το κεφάλαιο και όλους τους τόκους δανεισμού.

2ος Τρόπος

Ο οφειλέτης πληρώνει περιοδικά μόνο τους τόκους του δανείου και στη λήξη του δανείου πληρώνει όλο το κεφάλαιο.

3ος Τρόπος

Ο οφειλέτης καταθέτει περιοδικά σε δικό του καταθετικό λογαριασμό ορισμένο χρηματικό πόσο το οποίο ανατοκιζόμενο, με συμφωνημένο επιτόκιο, εξοφλεί το δάνειο στη λήξη του. Το κεφάλαιο που συγκεντρώνεται στον καταθετικό λογαριασμό ονομάζεται **εξοφλητικό απόθεμα**.

5.1 Οι τόκοι πληρώνονται στη λήξη του δανείου μαζί με το κεφάλαιο

Ο οφειλέτης πληρώνει όλο το κεφάλαιο και, επίσης, πληρώνει όλους τους τόκους στη λήξη του δανείου.

Επομένως ο οφειλέτης θα πληρώσει στο τέλος το ποσό του δανείου, ανατοκιζόμενο με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους. Το ποσό αυτό υπολογίζεται με τον τύπο του ανατοκισμού και είναι:

$K(1+i)^n$

5.2 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα του ενιαίου ποσού, σύμφωνα με το οποίο οι τόκοι πληρώνονται όλοι στη λήξη του δανείου. Να βρεθεί το τελικό επιστρεφόμενο ποσό.

Λύση

Πρόκειται για δάνειο εξοφλητέο εφάπαξ μαζί με τους τόκους του στη λήξη του. Το τελικό επιστρεφόμενο ποσό δίνεται από τον τύπο $K(1+i)^n = 30.000*(1+0,10)^5 = 30.000* 1,61051 = 48.315,3$ ευρώ.

5.3 Οι τόκοι πληρώνονται σε κάθε περίοδο και στη λήξη του δανείου το κεφάλαιο

Ο οφειλέτης στη λήξη του δανείου πληρώνει όλο το κεφάλαιο K, και σε κάθε χρονική περίοδο πληρώνει τους τόκους που αναλογούν στο κεφάλαιο. Αφού το κεφάλαιο του δανείου είναι K, σε κάθε χρονική περίοδο ρ, ο τόκος θα υπολογίζεται με τον τύπο $I\rho=K*i$, και είναι ίδιος για κάθε περίοδο. Έχουμε, δηλαδή, μια ληξιπρόθεσμη ράντα με όρο $K*i$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία όλων των καταβολών του δανειζόμενου στο δανειστή, θα υπολογίσουμε την αρχική αξία της ράντας που είναι $K*i *\alpha_{n|i}$, και την αρχική αξία του κεφαλαίου που πληρώνεται στη λήξη, που θα είναι KU^n. Επομένως η αρχική αξία των τελικών καταβολών του δανείου K θα δίνεται από τη σχέση:

$$K= K*i\ \alpha_{n|i} + KU^n$$

5.4 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα του ενιαίου ποσού, σύμφωνα με το οποίο οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Αφού το κεφάλαιο του δανείου είναι 30.000, σε κάθε χρονική περίοδο ρ, ο τόκος θα υπολογίζεται με τον τύπο $I\rho=K*i$, και είναι $I\rho=30.000 * 0,10= 3.000$

Έτος	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	3000		3000	0	30000
2	3000		3000	0	30000
3	3000		3000	0	30000
4	3000		3000	0	30000
5	3000	30.000	33.000	30.000	0

Πίνακας 8.1. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 5.4*

5.5 Δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος

Στα δάνεια που εξοφλούνται εφάπαξ, το ποσό του δανείου πληρώνεται στη λήξη του. Πολλές φορές, όμως, προκειμένου να συγκεντρωθεί το ποσό, ο οφειλέτης καταθέτει περιοδικά σε δικό του λογαριασμό ορισμένο χρηματικό πόσο, το οποίο ανατοκιζόμενο με διαφορετικό επιτόκιο από το επιτόκιο δανεισμού, με επιτόκιο που αντιστοιχεί στο επιτόκιο κατάθεσης, σχηματίζεται συνολικό ποσό κατάθεσης ίσο με το απαιτούμενο ποσό, για να εξοφληθεί το δάνειο στη λήξη του. Το ποσό, που συγκεντρώνεται περιοδικά με την κατάθεση, αυτό ονομάζεται *εξοφλητικό απόθεμα*. Συγκεντρώνεται με κατάθεση δόσεων, οι οποίες δεν δίνονται στο δανειστή, αλλά μπαίνουν σε τραπεζικό λογαριασμό του οφειλέτη και ανατοκίζονται. Στη λήξη του δανείου, ο οφειλέτης μπορεί να πάρει το εξοφλητικό απόθεμα και να το δώσει για την εξόφληση του δανείου. Ανάλογα με το αν οι τόκοι του δανείου καταβάλλονται περιοδικά στο δανειστή ή όχι, διακρίνουμε δύο συστήματα δημιουργίας εξοφλητικού αποθέματος Το **αμερικάνικο** σύστημα και το σύστημα **κεφαλαίου χρεολυσίας - sinking fund**.

5.6 Δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος με το αμερικάνικο σύστημα

Στο αμερικάνικο σύστημα απόσβεσης με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, δεν πληρώνονται τόκοι σε όλη τη διάρκεια του δανείου, αλλά στη λήξη του δανείου εξοφλείται όλο το ποσό μαζί με τους τόκους του. Το ποσό που θα πρέπει να πληρωθεί στη λήξη είναι $K(1+i)^n$.

Το ποσό, που κατατίθεται σε κάθε περίοδο της διάρκειας του δανείου για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος έστω ότι είναι D και το επιτόκιο για την κατάθεσή του έστω ότι είναι t. Το επιτόκιο κατάθεσης ονομάζεται και *επιτόκιο τοποθέτησης*. Συνήθως είναι μικρότερο από το επιτόκιο δανεισμού, αφού οι τράπεζες δανείζουν με μεγαλύτερο επιτόκιο από το επιτόκιο με το οποίο δέχονται καταθέσεις. Εφόσον έχουμε περιοδικές ίσες καταθέσεις, έχουμε σχηματισμό μιας ράντας με όρο (δόση) D, διάρκεια n και επιτόκιο t. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο για τις ράντες, η τελική αξία μια τέτοιας ράντας είναι $D^*s_{n|t}$. Η τελική αυτή αξία θα είναι και η αξία του εξοφλητικού αποθέματος στη λήξη του δανείου. Το εξοφλητικό απόθεμα θα πρέπει να είναι ίσο με το ποσό του δανείου, που πρέπει να πληρωθεί στη λήξη του, και είναι $K(1+i)^n$. Επομένως θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$Ds_{n|t} = K\,(1+i)^n$

Διαιρώντας με το συντελεστή τελικής αξίας ράντας $s_{n|t}$ και τα δύο μέλη, έχουμε:

$D = K^*(1+i)^n / s_{n|t} = K\,(1+i)^n * 1/s_{n|t}$

Το κλάσμα $1/s_{n|t}$ το συμβολίζουμε με $P_{n|t}$ και ο τύπος υπολογισμού της δόσης D γίνεται:

$D = K^*(1+i)^n * P_{n|t}$

Για να βρούμε, δηλαδή, τη δόση κατάθεσης, πολλαπλασιάζουμε το οφειλόμενο ποσό $K(1+i)^n$ με το συντελεστή $P_{n|t}$.

Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται **συντελεστής χρεολυσίου.** Είναι ίσος με το αντίστροφο του συντελεστή τελικής αξίας ράντας. Η τιμή του έχει υπολογισθεί σε πίνακα για διάφορες τιμές του n και t. Ο πίνακας αυτός μας βοηθάει στον υπολογισμό των πράξεων.

Η τιμή του συντελεστή χρεολυσίου $P_{n|t}$ αντιστοιχεί στο ποσό που πρέπει να καταθέτουμε στο τέλος κάθε μιας από τις n περιόδους με επιτόκιο t, ώστε στη λήξη του δανείου, να σχηματισθεί 1 νομισματική μονάδα. Η τιμή του συντελεστή είναι μικρότερη από τη μονάδα.

5.7 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 9% με το αμερικάνικο σύστημα και επιτόκιο κατάθεσης - τοποθέτησης 7%. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 5 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα, δίνεται από τον τύπο:

$D = K^*(1+i)^n * P_{n|t} = 30.000^*(1+0{,}09)^5 * P_{5|0.07} = 30.000^*\ 1{,}5386^*0{,}1738 = 8.022{,}26$.

Το ποσό αυτό θα αποφέρει τόκο 7% για κάθε έτος κατάθεσή του. Επίσης ο τόκος ενσωματώνεται στον καταθετικό λογαριασμό και ανατοκίζεται και αυτός με 7% για το επόμενο έτος.

Έτσι στο τέλος των 5 ετών θα έχει μαζευτεί ποσό ίσο με το κεφάλαιο του δανείου ανατοκιζόμενο, δηλαδή θα γίνει $K\,(1+i)^n = 30.000(1+0{,}09)^5 = 30.000^*\ 1{,}5386 = 46.158$ ευρώ.

Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου θα είναι ο πίνακας 8.2. Μικροδιαφορές στο σύνολο κατάθεσης και στο εξοφλημένο ποσό οφείλονται στην ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούμε.

Πίνακας 8.2 Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος	**δόση**	**τόκος**	**Σύνολο κατάθεσης**	**εξοφλήθηκε**	**υπόλοιπο**

8.5.7Ετος					
1	8.022,26		8.022,26	0	30.000
2	8.022,26	561,55	16.606	0	30.000
3	8.022,26	1.162,4	25.790,6	0	30.000
4	8.022,26	1.805,3	35.618	0	30.000
5	8.022,26	2.493,1	46.133	46.158	0

Πίνακας 8.2. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 5.7*

5.8 Δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος με το σύστημα κεφαλαίου χρεολυσίας (sinking fund)

Στο σύστημα απόσβεσης κεφαλαίου χρεολυσίας (sinking fund) με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, πληρώνονται περιοδικά οι τόκοι του δανείου σε όλη τη διάρκεια του δανείου, και στη λήξη του δανείου εξοφλείται όλο το ποσό K, χωρίς τους τόκους του, αφού οι τόκοι έχουν πληρωθεί κατά τη διάρκεια του δανείου. Το ποσό δανείου, που θα πρέπει να πληρωθεί στη λήξη, είναι K.

Το ποσό, που κατατίθεται σε κάθε περίοδο της διάρκειας του δανείου για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, έστω ότι είναι D, και το επιτόκιο για την κατάθεσή του έστω ότι είναι t. Εφόσον έχουμε περιοδικές ίσες καταθέσεις, έχουμε σχηματισμό μιας ράντας με όρο (δόση) D, διάρκεια n και επιτόκιο t. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο για τις ράντες, η τελική αξία μια τέτοιας ράντας είναι $D*s_{n|t}$. Η τελική αυτή αξία θα είναι και η αξία του εξοφλητικού αποθέματος στη λήξη του δανείου. Το εξοφλητικό απόθεμα θα πρέπει να είναι ίσο με το ποσό του δανείου που πρέπει να πληρωθεί στη λήξη του και είναι K. Επομένως θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$D*s_{n|t} = K$

Διαιρώντας με το συντελεστή τελικής αξίας ράντας $s_{n|t}$ και τα δύο μέλη έχουμε:

$D = K / s_{n|t} = K * 1/s_{n|t}$

Το κλάσμα $1/s_{n|t}$ το συμβολίζουμε με $P_{n|t}$, είναι ο συντελεστής χρεολυσίου και ο τύπος υπολογισμού της δόσης D γίνεται:

$D = K * P_{n|t}$

Για να βρούμε, δηλαδή, τη δόση κατάθεσης, πολλαπλασιάζουμε το οφειλόμενο ποσό K με το συντελεστή χρεολυσίου $P_{n|t}$.

5.9 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 9% με το σύστημα κεφαλαίου χρεολυσίας και επιτόκιο κατάθεσης - τοποθέτησης 7%. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 5 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα, υπολογίζεται με τον τύπο:

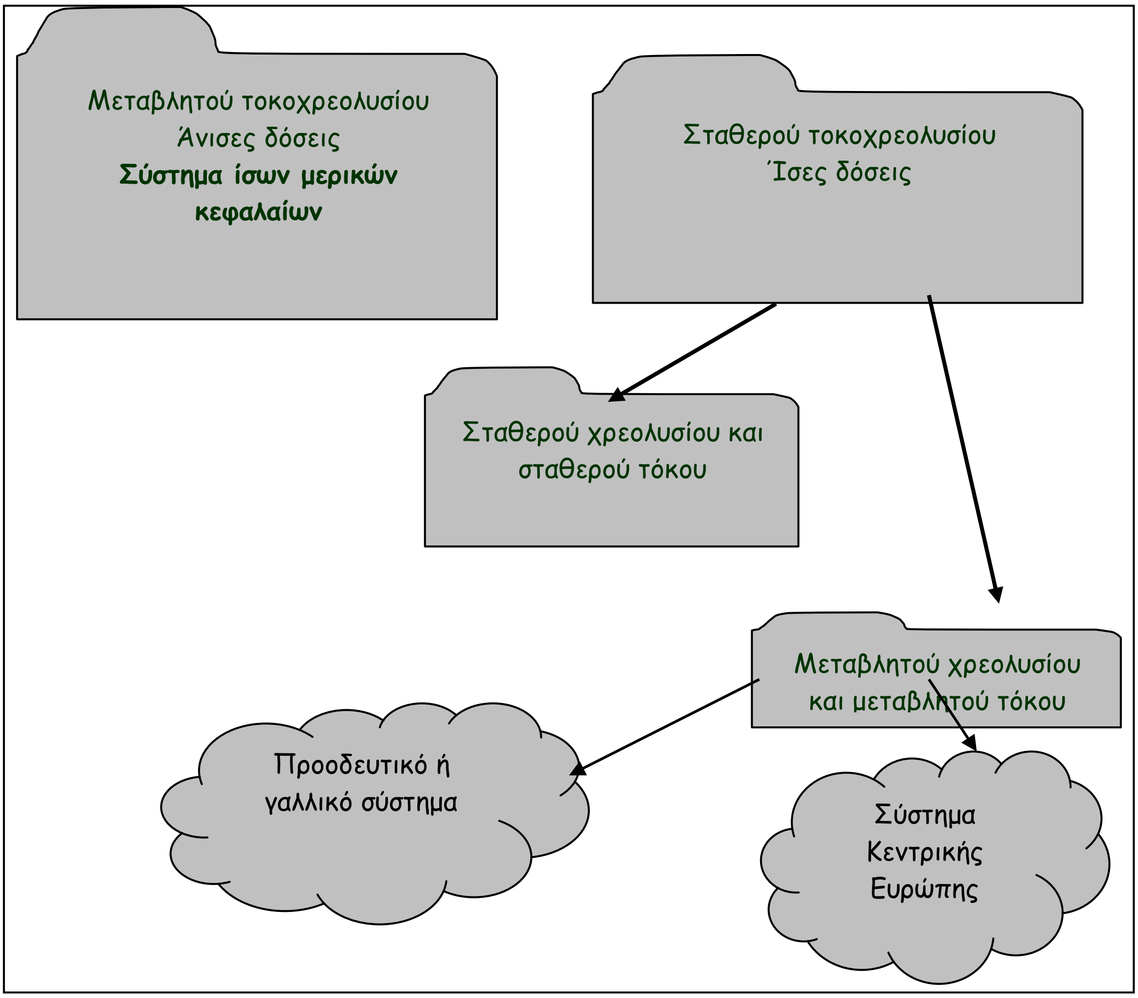
$D = K\ P_{n|t} = 30.000\ P_{5|0.07} = 30.000 * 0,173891 = 5.216,73$

Το ποσό αυτό θα αποφέρει τόκο 7% για κάθε έτος κατάθεσή του. Επίσης ο τόκος μένει στο λογαριασμό και ανατοκίζεται, και αυτός, με 7% για το επόμενο έτος.

Έτσι στο τέλος των 5 ετών θα έχει μαζευτεί ποσό ίσο με το κεφάλαιο του δανείου, δηλαδή θα γίνει ίσο με 30.000. Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου θα είναι ο πίνακας 8.3. Μικροδιαφορές, στο σύνολο κατάθεσης και στο εξοφλημένο ποσό, οφείλονται στην ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούμε.

Έτος	Δόση κατάθεσης	Τόκος κατάθεσης	Σύνολο κατάθεσης	Τόκοι που εξοφλήθηκαν	Υπόλοιπο δανείου
1	5.216,73		5.216,73	2.700	30.000
2	5.216,73	365,17	10.798,63	2.700	30.000
3	5.216,73	755,9	16.771,26	2.700	30.000
4	5.216,73	1.173,99	23.167,98	2.700	30.000
5	5.216,73	1.621,34	30.006	2.700	0

Πίνακας 8.3. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 5.9*



Σχήμα 8.2. *Διακρίσεις τοκοχρεολυτικών δανείων.*

6 Σύστημα απόσβεσης για ενιαία δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

Στο τέλος κάθε περιόδου ρ πληρώνουμε δόσεις Rρ με σκοπό να εξοφλήσουμε δάνειο Κ. Οι δόσεις αυτές ονομάζονται *τοκοχρεολύσιο* αφού περιλαμβάνουν τους τόκους και το χρεολύσιο της αντίστοιχης περιόδου. Οι δόσεις κάθε περιόδου μπορεί να είναι ίσες μεταξύ τους, ή άνισες.

Όταν οι τοκοχρεολυτικές δόσεις είναι ίσες μεταξύ τους, μιλάμε για <u>σύστημα σταθερού τοκοχρεολυσίου,</u> και μπορεί να αποτελείται από:

σταθερό χρεολύσιο και σταθερό τόκο
ή
μεταβλητό χρεολύσιο και μεταβλητό τόκο με σταθερό όμως άθροισμα τοκοχρεολυσίου.
Στην δεύτερη περίπτωση διακρίνουμε δύο συστήματα απόσβεσης:
Προοδευτικό ή Γαλλικό σύστημα, και
Σύστημα Κεντρικής Ευρώπης

Όταν οι τοκοχρεολυτικές δόσεις είναι άνισες μεταξύ τους, μιλάμε για σύστημα μεταβλητού τοκοχρεολυσίου, και ο υπολογισμός τους εξαρτάται από τον τρόπο υπολογισμού του τοκοχρεολυσίου.
Η κυριότερη κατηγορία είναι το σύστημα ίσων μερικών κεφαλαίων.

7 Δάνειο σταθερού τοκοχρεολυσίου

Οι τοκοχρεολυτικές δόσεις είναι ίσες μεταξύ τους και τις συμβολίζουμε με R. Αποτελούν σταθερή ληξιπρόθεσμη ράντα, με αρχική αξία K ίση με το δάνειο.
Ισχύει $R*\alpha_{n|i}=K$
Άρα $R=K/\alpha_{n|i}$
Και ακόμη $R=X\rho+I\rho$.

7.1 Δάνεια σταθερού τοκοχρεολυσίου με σταθερό χρεολύσιο

Γνωρίζουμε ότι το τοκοχρεολύσιο είναι το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου:
$R=X\rho+I\rho \quad \rho=1,2,3,\ldots.n$

Αφού τα χρεολύσια είναι σταθερά θα ισχύει:
$X1=X2=\ldots=Xn$
και θα πρέπει και οι τόκοι να είναι ίσοι, ώστε να έχουμε σταθερό τοκοχρεολύσιο.
$I1=I2=\ldots=In$

Το σταθερό χρεολύσιο θα είναι:
$X= R -I$ όπου $I=K*i$
Ο τόκος υπολογίζεται στο σύστημα αυτό πάντα για το αρχικό ποσό δανείου. Επομένως:

$X= R –I = K/\alpha_{n|i} –K*I =K(1/\alpha_{n|i} –i)$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει $X=K/s_{n|i}= K*P_{n|i}$.

7.2 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα των σταθερών ετήσιων τοκοχρεωλυτικών δόσεων με σταθερό χρεολύσιο. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση
Το χρεολύσιο υπολογίζεται με τον τύπο: $X=K*P_{n|I} =X=30.000*0,1638=4.914$
Το χρεολύσιο του πρώτου έτους θεωρείται κατάθεση για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, και ανατοκίζεται με επιτόκιο i.

Έτσι το δεύτερο χρόνο το ποσό που αντιστοιχεί σε εξόφληση δανείου είναι:
4.914+4.914(1+0,10)=4.914+4.914+491,4=10.319,4
Το εξοφληθέν ποσό του δευτέρου έτους θεωρείται κατάθεση για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, και ανατοκίζεται με επιτόκιο i.

Έτσι τον τρίτο χρόνο το ποσό που αντιστοιχεί σε εξόφληση δανείου είναι:

4.914+10.319(1+0,10)=16.265

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο τους υπολογισμούς, συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης 8.4.

Ετος	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	3.000	4.914	7.914	4.914	25.086
2	3.000	4.914	7.914	10.319	19.681
3	3.000	4.914	7.914	16.265	13.735
4	3.000	4.914	7.914	22.806	7.194
5	3.000	4.914	7.914	30.000	0

Πίνακας 8.4. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 7.2*

7.3 Δάνεια σταθερού τοκοχρεολυσίου με μεταβλητό χρεολύσιο

Τα δάνεια της κατηγορίας αυτής εξοφλούνται με ίσες τοκοχρεολυτικές δόσεις, αλλά τα χρεολύσια μεταβάλλονται. Γνωρίζουμε ότι το τοκοχρεολύσιο είναι το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου:

R=Xρ+Iρ ρ=1,2,3,….n

Το χρεολύσιο μεταβάλλεται, και επομένως, μεταβάλλεται και ο τόκος, ώστε το τοκοχρεολύσιο να είναι σταθερό. Εφαρμόζονται, κυρίως, δύο συστήματα:

-Το γαλλικό σύστημα ή προοδευτικό χρεολύσιο

-Το σύστημα Κεντρικής Ευρώπης

7.4 Δάνεια σταθερού τοκοχρεολυσίου με γαλλικό σύστημα

Στο σύστημα αυτό, έχουμε σταθερό τοκοχρεολύσιο, και οι τόκοι καταβάλλονται κάθε χρονική περίοδο και υπολογίζονται για το υπόλοιπο του δανείου που αντιστοιχεί στην αρχή της χρονικής περιόδου.

Γνωρίζουμε ότι το τοκοχρεολύσιο είναι το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου:

R=Xρ+Iρ ρ=1,2,3,….n

Ο τόκος Iρ που καταβάλλεται στο τέλος της ρ περιόδου, υπολογίζεται στο υπόλοιπο ποσό του δανείου της προηγούμενης περιόδου.

Ο τόκος αυτός ελαττώνεται κάθε φορά και το χρεολύσιο αυξάνει, ώστε το τοκοχρεολύσιο να είναι σταθερό.

Τα πρώτα χρόνια πληρώνουμε μεγάλους τόκους και μικρά χρεολύσια, ενώ τα επόμενα μικραίνουν οι τόκοι και αυξάνουν τα χρεολύσια.

Επειδή το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό, θα ισχύει:

X1+I1=X2+I2=… =Xρ +Iρ =…=Xn +In

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει $X_{\rho+1} + I_{\rho+1}$ =X ρ+ Iρ.

Ο τόκος I υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το ανεξόφλητο ποσό κάθε περιόδου με το επιτόκιο i.

Η ισότητα $X_{\rho+1} + I_{\rho+1}$ =X ρ+ Iρ, γίνεται:

$X_{\rho+1}$ +(K-X1-X2-…-X_ρ)*i =X ρ+(K-X1-X2-…-$X_{\rho-1}$)*i ⇔ $X_{\rho+1}$ -X_ρ*i =X ρ ⇔

$X_{\rho+1} = X_\rho$* (1+ i)

Επειδή X1+X2+… +Xρ +Xn=K μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις, θα πάρουμε την ισότητα:
$X1=K/s_{n|i} = K^* P_{n|i}$

7.5 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα των σταθερών ετήσιων τοκοχρεωλυτικών δόσεων με το γαλλικό σύστημα. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

$X1=K^*P_{n|i}=X=30.000^*0{,}1638=4.914$

Το χρεολύσιο του δευτέρου έτους θα είναι:

X2=X1*(1+i)=4.914*1,10=5.405,4
Ο τόκος του δευτέρου έτους
I2=7.914-5.405,4=2.509
X2=X1*(1+i)=4.914*1,10=5.405,4

Το χρεολύσιο του τρίτου έτους θα είναι:

X3=X2*(1+i)=5.405*1,10=5.945,5
Ο τόκος του τρίτου έτους είναι:
I2=7.914-5.946=1.968

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο τους υπολογισμούς, συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης 8.5.

Έτος	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1ο	3000	4914	7914	4914	25086
2ο	2509	5405	7914	10319	19681
3ο	1968	5946	7914	16265	13735
4ο	1373	6541	7914	22806	7194
5ο	719	7595	7914	30000	0

Πίνακας 8.5. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 7.5*

7.6 Δάνεια σταθερού τοκοχρεολυσίου με σύστημα Κεντρικής Ευρώπης

Στο σύστημα αυτό, έχουμε σταθερό τοκοχρεολύσιο, αλλά οι τόκοι προκαταβάλλονται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, και υπολογίζονται για το υπόλοιπο του δανείου, που αντιστοιχεί στην αρχή της χρονικής περιόδου. Με την έναρξη του δανείου, πληρώνονται αμέσως οι τόκοι του πρώτου έτους.

Γνωρίζουμε ότι το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό και ίσο με το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου:
R=Xρ+Iρ ρ=1,2,3,….n

Ο τόκος προκαταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου. Με τη λήψη του δανείου πληρώνεται ο τόκος πρώτου έτους.

Ο τόκος Ιρ που καταβάλλεται στο τέλος της ρ περιόδου υπολογίζεται στο υπόλοιπο ποσό του δανείου της αρχής της επόμενης περιόδου.

Ο τόκος αυτός ελαττώνεται κάθε φορά και το χρεολύσιο αυξάνει, ώστε το τοκοχρεολύσιο να είναι σταθερό.

Τα πρώτα χρόνια πληρώνουμε μεγάλους τόκους και μικρά χρεολύσια, ενώ τα επόμενα μικραίνουν οι τόκοι και αυξάνουν τα χρεολύσια.

$R=X\rho+I\rho \quad \rho=1,2,3,\ldots.n$

Επειδή το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό, θα ισχύει:
$X1+I1=X2+I2=\ldots=X\rho+I\rho=\ldots=Xn+In$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει $X_{\rho+1}+I_{\rho+1}=X\rho+I\rho$.

Ο τόκος I υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το ανεξόφλητο ποσό της αρχής κάθε περιόδου με το επιτόκιο i.
Η ισότητα $X_{\rho+1}+I_{\rho+1}=X\rho+I\rho$, γίνεται:
$X_{\rho+1}+(K-X1-X2-\ldots-X_{\rho}-X_{\rho+1})*i=X\rho+(K-X1-X2-\ldots-X_{\rho})*i \Leftrightarrow X_{\rho+1}-X_{\rho+1}*i=X\rho$

$X_{\rho+1}=X\rho*(1/\ 1-i)$

Θέτουμε $t=i/(1-i)$ και έτσι προκύπτει:

$X_{\rho+1}=X_{\rho}*(1+t)$

Μετατρέπεται, δηλαδή, το σύστημα Κεντρικής Ευρώπης σε προοδευτικό (γαλλικό) σύστημα, αλλά με επιτόκιο t στους υπολογισμούς.
Στο σύστημα Κεντρικής Ευρώπης, αποδεικνύεται ότι το σταθερό τοκοχρεολύσιο δίνεται από τη σχέση:
$R=K*(1-i)/\alpha_{n|t}$

και το χρεολύσιο του πρώτου έτους υπολογίζεται με τον τύπο: $X1=R*(1+t)^{-n+1}$.

7.7 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα των σταθερών ετήσιων τοκοχρεωλυτικών δόσεων με το σύστημα Κεντρικής Ευρώπης. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση
Το επιτόκιο υπολογισμών θα είναι $t=i/(1-i)=0,10/(1-0,10)=0,111$
Επειδή για επιτόκιο 0,111 δεν υπάρχει τιμή υπολογισμού στον πίνακα με τους συντελεστές αρχικής αξίας ράντας, υπολογίζουμε το $\alpha_{n|t}$ με τον τύπο:
$\alpha_{n|t}=(1-1/(1+t)^{n})/t \Leftrightarrow \alpha_{5|0,111}=(1-1/((1+0,111)^{5}))/0,111=3,6866$

Η τοκοχρεολυτική δόση θα υπολογισθεί με αντικατάσταση στον τύπο:
$R=K*(1-i)/\alpha_{n|t}=30.000\ (1-0,10)/\ \alpha_{5|0,111}=30.000\ (1-0,10)/3,6866=7.324$

Το χρεολύσιο του πρώτου έτους υπολογίζεται με τον τύπο:
$X1=R*(1+t)^{-n+1} \Leftrightarrow X1=7.324*(1+0,111)^{-5+1}=7.324*0,6563=4.807$

Το χρεολύσιο του δευτέρου έτους υπολογίζεται με προοδευτική αύξηση, με τον τύπο:
$X2=X1*(1+t)=4.807*(1+0,111)=5.341$
Ο τόκος για το δεύτερο έτος θα είναι $I2=7.324-5.341=1.983$

Το ποσό που εξοφλήθηκε είναι το άθροισμα χρεολυσίου πρώτου και δευτέρου έτους: 4.807+5.341=10.148

Το χρεολύσιο του τρίτου έτους υπολογίζεται με προοδευτική αύξηση, με τον τύπο:

X3=X2*(1+t) =5.341*(1+0,111)=5.933

Ο τόκος για το τρίυο έτος θα είναι: I3=7.324-5.933 = 1.391

Το ποσό που εξοφλήθηκε είναι το άθροισμα προηγούμενου ποσού που είχε εξοφληθεί συν το χρεολυσίου του τρίτου έτους: 10.148+5.933=16.081

Με τον ίδιο τρόπο κάνουμε τους υπολογισμούς για τα επόμενα έτη και συμπληρώνουμε τον πίνακα 8.6.

Έτος	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
0	3.000	-		-	30.000
1	2.517	4.807	7.324	4.807	25.193
2	1.983	5.341	7.324	10.148	19.852
3	1.391	5.933	7.324	16.081	13.919
4	732	6.592	7.324	22.673	7.327
5	0	7.324	7.324	29.997	3

Πίνακας 8.6. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 7.7*

8 Δάνειο μεταβλητού τοκοχρεολυσίου

Σύστημα ίσων μερών κεφαλαίων

Το σύστημα αυτό εφαρμόζεται σε δάνεια μικρής διάρκειας.

Το χρεολύσιο είναι ίδιο, αλλά ο τόκος μεταβάλλεται ανάλογα με το ανεξόφλητο υπόλοιπο δανείου.

Το χρεολύσιο υπολογίζεται διαιρώντας το ποσό του δανείου με τη διάρκειά του.

Επομένως έχουμε: X1=X2=X3=X4=…=Xn =K/n

Επειδή το ποσό του δανείου μειώνεται με τον ίδιο τρόπο σε κάθε χρονική περίοδο, οι τόκοι αποτελούν φθίνουσα αριθμητική πρόοδο, ξεκινώντας από K*i, και με λόγο -K*i/n.

Στο σύστημα αυτό, υπολογίζεται εύκολα ο πίνακας απόσβεσης, αλλά ο οφειλέτης επιβαρύνεται στην αρχή του δανείου με μεγάλα ποσά, και στη συνέχεια με μικρότερα ποσά εξόφλησης.

8.1 Παράδειγμα

Δάνειο 30.000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Τα χρεολύσια κάθε έτους είναι ίσα μεταξύ τους και υπολογίζονται με διαίρεση του ποσού του δανείου με τα έτη αποπληρωμής. X1=X2=X3=X4=X5=30000/5=6.000

Οι τόκοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο K*i=30.000*0,10=3.000

και λόγω προοδευτικής μείωσή τους: λ=-K*i/5= -30.000*0,10/5=-3.000/5 = -600

Έτος	χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	6.000	3.000	9.000	6.000	24.000
2	6.000	2.400	8.400	12.000	18.000
3	6.000	1.800	7.800	18.000	12.000
4	6.000	1.200	7.200	24.000	6.000

5	6.000	600	6.600	30.000	0

Πίνακας 8.7. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 8.1*

9 Προεξόφληση δανείου

Ας υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος έχει πληρώσει ορισμένες δόσεις του δανείου του και θέλει να προεξοφλήσει το υπόλοιπο οφειλόμενο ποσό στην τράπεζα. «Γενικά, η εξόφληση ενός δανείου νωρίτερα από το χρόνο λήξης του, με τρόπο που να μη ζημιώνει ούτε το δανειστή ούτε το δανειζόμενο, έχει σαν επακόλουθο τον υπολογισμό της αξίας του δανείου, σε χρόνο μ από την ημέρα που συνάφθηκε, δηλαδή τον υπολογισμό της παρούσας αξίας των μελλοντικών υποχρεώσεων του οφειλέτη με χρήση ορισμένου επιτοκίου t –που λέγεται επιτόκιο εξόφλησης- και είναι, συνήθως, διαφορετικό από το επιτόκιο δανεισμού i που λέγεται και πραγματική ή παραγωγικό επιτόκιο του δανείου» (Αλεξανδρόπουλος κ.α., 2004).

Αν λοιπόν στο χρόνο μ ($\mu<n$) από την έναρξη του δανείου έχουν πληρωθεί οι πρώτες μ τοκοχρεολυτικές δόσεις, ορίζουμε τα ακόλουθα:

- **Αξία** του δανείου στο χρόνο μ είναι το άθροισμα των πραγματικών αξιών όλων των υπολοίπων n-μ τοκοχρεολυτικών δόσεων. Υπολογίζεται με προεξόφληση (με επιτόκιο t) των υπολοίπων τοκοχρεολυσίων για χρονικές περιόδους 1, 2, .. .n-μ αντίστοιχα.
- **Ψιλή κυριότητα** του δανείου στο χρόνο μ είναι το άθροισμα των πραγματικών αξιών όλων των υπολοίπων n-μ χρεολυσίων. Υπολογίζεται με προεξόφληση (με επιτόκιο t) των υπολοίπων χρεολυσίων για χρονικές περιόδους 1, 2, .. .n-μ αντίστοιχα.
- **Επικαρπία** του δανείου στο χρόνο μ είναι το άθροισμα των πραγματικών αξιών όλων των υπολοίπων n-μ τόκων του δανείου. Υπολογίζεται με προεξόφληση (με επιτόκιο t) των υπολοίπων δόσεων τόκου για χρονικές περιόδους 1, 2, .. .n-μ αντίστοιχα.

Επειδή, όπως αναφέραμε, το τοκοχρεολύσιο είναι το άθροισμα του χρεολυσίου και του τόκου, θα ισχύει:

Αξία του δανείου= Ψιλή κυριότητα του δανείου + Επικαρπία του δανείου

10 Περίοδος χάριτος δανείου

Ας υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος δεν έχει τη δυνατότητα να πληρώνει τις δόσεις του δανείου από την έναρξη του δανείου. Τότε συμφωνεί με τον πιστωτή να έχει μια **περίοδο χάριτος**, συνήθως στην αρχή, κατά την οποία, δεν πληρώνει καθόλου δόσεις του δανείου του. Βέβαια, κατά την περίοδο χάριτος, υπολογίζονται τόκοι του δανειζόμενου ποσού, οι οποίοι αθροίζονται με το ποσό δανείου που πρέπει να επιστραφεί. Έτσι, αν η περίοδος χάριτος είναι 5 έτη και K το αρχικό ποσό δανείου, μετά τα 5 έτη της περιόδου χάριτος ο δανειζόμενος θα πρέπει να υπολογίσει τις δόσεις που θα πληρώνει όχι για το ποσό K που δανείστηκε, αλλά για ποσό $K_5=K(1+i)^5$.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Τι είναι το σύστημα απόσβεσης ενός δανείου.
- Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται τα δάνεια ανάλογα με το σύστημα απόσβεσή τους.
- Πώς βρίσκω τον τόκο και το χρεολύσιο.
- Πώς βρίσκω τη δόση κατάθεσης σε περίπτωση δημιουργίας εξοφλητικού αποθέματος.
- Πώς βρίσκω την τοκοχρεολυτική δόση στην περίπτωση δανείου που εξοφλείται τοκοχρεολυτικά.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Αλεξανδρόπουλος, Α., Παλιατσός, Α. & Σάσσαλος, Σ. (2004). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Ιστορία του χρήματος, (χ.χ.). Ανακτήθηκε 30 Ιουνίου, 2015, από http://www.businesslife.gr/articles/money-is-money/istoria-tou-chrimatos.html

Ασκήσεις 8ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Δάνειο 30.000 ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 7 ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 7,5% και δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος. Να βρεθεί το χρεολύσιο, αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 4,5% και:
α) οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους,
β) οι τόκοι δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους,

Απάντηση/Λύση

α) Με τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, δεν πληρώνουμε καθόλου μέρος του δανείου, και οι τόκοι υπολογίζονται στο αρχικό ποσό δανείου. Κάθε έτος θα πληρώνουμε τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται με τον τύπο
$I=K^* \, i =30.000^*0,075 =2.250$ ευρώ.

Παράλληλα καταθέτουμε ποσό σε λογαριασμό για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος. Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 7 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα δίνεται από τον τύπο:
$D= K \, {}^*P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:
$D =30.000^* \, P_{7|0.045}= 30.000^*0,1247=3.741$ ευρώ.

β) Εφόσον δεν πληρώνουμε καθόλου τόκους, πρόκειται για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος με το αμερικάνικο σύστημα. Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 7 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα, δίνεται από τον τύπο:
$D= K \, (1+i)^n \, P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:
$D =30.000(1+0,075)^7 \, P_{7|0.045}= 30.000^* \, 1,65390^*0,1247=6.206,32$ ευρώ.

Άσκηση 2

Έμπορος πήρε δάνειο 50.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 7% και διάρκεια 10 έτη με τη συμφωνία να το ξοφλήσει όλο μαζί στη λήξη. Να υπολογισθεί ο πίνακας απόσβεσης δανείου
α) αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο
β) αν οι τόκοι πληρωθούν όλοι μαζί στο τέλος.
Υποθέστε ότι δημιουργείται εξοφλητικό απόθεμα με επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

α) Με τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, δεν πληρώνουμε καθόλου μέρος του δανείου, και οι τόκοι υπολογίζονται στο αρχικό ποσό δανείου. Κάθε έτος θα πληρώνουμε τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται με τον τύπο:
$I=K* i =50.000*0,07 =3.500$ ευρώ.

Παράλληλα καταθέτουμε ποσό σε λογαριασμό για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος. Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 10 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα δίνεται από τον τύπο:
$D= K *P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:
$D =50.000* P_{10|0.04}= 50.000*0,0833=4.165$ ευρώ.

Έτος	δόση	Τόκος κατάθεσης	Σύνολο κατάθεσης	Τόκοι δανείου	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	4.165		4.165	3.500	0	50.000
2	4.165	166,6	8.497	3.500	0	50.000
3	4.165	339,86	13.001	3.500	0	50.000
4	4.165	520,05	17.687	3.500	0	50.000
5	4.165	707,46	22.559	3.500	0	50.000
6	4.165	902,35	27.626	3.500	0	50.000
7	4.165	1105,05	32.896	3.500	0	50.000
8	4.165	1315,85	38.377	3.500	0	50.000
9	4.165	1535,09	44.077	3.500	0	50.000
10	4.165	1763,09	50.005	3.500	50.005	0

Πίνακας 8.8. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 8.2.α*

β) Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 10 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα, δίνεται από τον τύπο:
$D= K (1+i)^n P_{n|t} =50.000(1+0,07)^{10} P_{10|0.04}= 50.000* 1,9672*0,0833=8.193,39$ ευρώ.

Το ποσό αυτό θα αποφέρει τόκο 4% για κάθε έτος κατάθεσή του. Επίσης ο τόκος ενσωματώνεται στον καταθετικό λογαριασμό και ανατοκίζεται, και αυτός, με 4% για το επόμενο έτος.

Έτσι, στο τέλος των 10 ετών θα έχει μαζευτεί ποσό ίσο με το κεφάλαιο του δανείου ανατοκιζόμενο, δηλαδή θα γίνει $K (1+i)^n =50.000(1+0,07)^{10}= 50.000* 1,9672=98.360$ ευρώ.

Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου θα είναι ο παρακάτω. (Μικροδιαφορές στο σύνολο κατάθεσης και στο εξοφλημένο ποσό, οφείλονται στην ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούμε.)

Έτος	δόση	τόκος	Σύνολο κατάθεσης	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	8.193,39		8.193,39	0	50.000
2	8.193,39	327,73	16.715	0	50.000
3	8.193,39	668,58	25.576	0	50.000
4	8.193,39	1023,06	34.793	0	50.000

5	8.193,39	1391,71	44.378	0	50.000
6	8.193,39	1775,12	54.347	0	50.000
7	8.193,39	2173,86	64.714	0	50.000
8	8.193,39	2588,55	75.496	0	50.000
9	8.193,39	3019,83	86.709	0	50.000
10	8.193,39	3468,35	98.371	98.371	0

Πίνακας 8.9. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 8.2.β*

Άσκηση 3

Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να καταθέτει κάποιος κάθε εξάμηνο για 4 χρόνια, ώστε να μπορέσει να αποσβέσει δάνειο 20.000 ευρώ με επιτόκιο δανεισμού 6%, το οποίο εξοφλείται στη λήξη του μαζί με τους τόκους. Να υποτεθεί ότι το ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων είναι 4%.

Απάντηση/Λύση

α Αφού καταθέτουμε χρήματα κάθε εξάμηνο, τα 4 χρόνια αντιστοιχούν σε 8 εξάμηνα, και το επιτόκιο δανεισμού 6% αντιστοιχείς σε 3% το εξάμηνο, ενώ το επιτόκιο καταθέσεων 4%, θα είναι 2% το εξάμηνο.

Εφόσον δεν πληρώνουμε καθόλου τόκους, πρόκειται για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος με το αμερικάνικο σύστημα. Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 8 εξάμηνα, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα, δίνεται από τον τύπο:

$D = K\,(1+i)^n\, P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$D = 20.000(1+0{,}03)^8\, P_{8|0.02} = 20.000 * 1{,}2668 * 0{,}1165 = 2.951{,}65$ ευρώ

Άσκηση 4

Η Εταιρεία Ε πήρε δάνειο 40.000 ευρώ, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με το σύστημα Sinking Fund. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση και να κατασκευασθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου. Επιτόκιο δανεισμού 6,5% και επιτόκιο καταθέσεως 3%.

Απάντηση/Λύση

Με τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος, δεν πληρώνουμε καθόλου μέρος του δανείου και οι τόκοι υπολογίζονται στο αρχικό ποσό δανείου. Κάθε έτος θα πληρώνουμε τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται με τον τύπο:

$I = K * i = 40.000 * 0{,}065 = 2.600$ ευρώ.

Παράλληλα καταθέτουμε ποσό σε λογαριασμό για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος. Η δόση που πρέπει να καταθέτουμε σε λογαριασμό για κάθε ένα από το 10 έτη, ώστε να δημιουργηθεί το εξοφλητικό απόθεμα δίνεται από τον τύπο:

$D = K * P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$D = 40.000 * P_{10|0.03} = 40.000 * 0{,}0872 = 3.488$ ευρώ.

Έτος	**δόση**	**Τόκος κατάθεσης**	**Σύνολο κατάθεσης**	**Τόκοι δανείου**	**εξοφλήθηκε**	**υπόλοιπο**
1	3.488		3.488	2.600	0	40.000
2	3.488	104,64	7.081	2.600	0	40.000
3	3.488	212,41	10.781	2.600	0	40.000

4	3.488	323,43	14.592	2.600	0	40.000
5	3.488	437,77	18.518	2.600	0	40.000
6	3.488	555,54	22.562	2.600	0	40.000
7	3.488	676,85	26.727	2.600	0	40.000
8	3.488	801,8	31.016	2.600	0	40.000
9	3.488	930,49	35.435	2.600	0	40.000
10	3.488	1063,05	39.986	2.600	39.986	0

Πίνακας 8.10. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 8.4*

Άσκηση 5

Δάνειο εξοφλείται με το σύστημα Sinking Fund και επιτόκιο 8%. Αν στο τοκοχρεολύσιο του δανείου ο τόκος είναι 4.800 ευρώ, να βρεθεί το ποσό του δανείου και το ετήσιο χρεολύσιο, όταν η διάρκεια δανείου είναι 5 χρόνια και το επιτόκιο ανασύστασης 6%.

Απάντηση/Λύση

Οι τόκοι υπολογίζονται στο αρχικό ποσό δανείου. Κάθε έτος θα πληρώνουμε τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται με τον τύπο:
I=K* i Γνωρίζουμε ότι 4.800=K*0,08. Λύνοντας την εξίσωση ως προς K, βρίσκουμε το ποσό του δανείου:
K=4.800/0.08=60.000 ευρώ.

Το ετήσιο χρεολύσιο δίνεται από τον τύπο:
D= K *$P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:
D =60.000* $P_{5|0.06}$= 60.000*0,1774=10.644 ευρώ.

Άσκηση 6

Έμπορος θέλει να δανειστεί 500.000 ευρώ για 8 έτη. Η τράπεζα Α δανείζει με ετήσιο επιτόκιο 10%, και το δάνειο εξοφλείται με πληρωμή τόκων κάθε έτος και κατάθεση χρεολυσίου με το ίδιο επιτόκιο δανεισμού. Η τράπεζα Β δανείζει με ετήσιο επιτόκιο 9%, αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε έτος και το δάνειο εξοφλείται όλο στη λήξη του, αφού ο έμπορος κάνει ίσες ετήσιες καταθέσεις στην Τράπεζα με επιτόκιο 7%. Ποια τράπεζα θα προτιμήσει ο έμπορος;

Απάντηση/Λύση

Και οι δύο τράπεζες χρησιμοποιούν το σύστημα απόσβεσης Sinking Fund αλλά με διαφορετικά επιτόκια.
Στην Α τράπεζα ο έμπορος θα πρέπει να πληρώνει κάθε χρόνο τόκους:
I=K* i =500.000*0,10=50.000 ευρώ
και δόση κατάθεσης χρεολυσίου
D =500.000* $P_{8|0.10}$= 500.000*0,0874=43.700 ευρώ

Συνολικά θα πληρώνει κάθε έτος 50.000 +43.700 =93.700 ευρώ

Στη Β τράπεζα ο έμπορος θα πρέπει να πληρώνει κάθε χρόνο τόκους:
I=K* i =500.000*0,09=45.000 ευρώ
και δόση κατάθεσης χρεολυσίου
D =500.000* $P_{8|0.09}$= 500.000*0,0907=45.350 ευρώ

Συνολικά θα πληρώνει κάθε έτος 45.000 +45.350 =90.350 ευρώ

Επομένως στη Β τράπεζα ο έμπορος θα εξοφλήσει το δάνειο δίνοντας λιγότερα χρήματα κάθε έτος.

Άσκηση 7

Δανείστηκε κάποιος 150.000 ευρώ προς 11% και, για την ανασύσταση αυτού του ποσού, μπορεί να διαθέτει κάθε έτος 14.000 ευρώ, τα οποία καταθέτει με επιτόκιο 7%. Σε πόσα χρόνια θα έχει δημιουργήσει το ποσό του δανείου, όταν πληρώνει τόκους κάθε έτος;

Απάντηση/Λύση

Το σύστημα απόσβεση που χρησιμοποιείται είναι το Sinking Fund. Γνωρίζουμε το ποσό της ετήσιας κατάθεσης 14.000 ευρώ, το επιτόκιο κατάθεσης 7% και δεν γνωρίζουμε τα έτη αποπληρωμής.
Η δόση κατάθεσης χρεολυσίου δίνεται με τον τύπο D =K* $P_{n|0.07}$, όπου άγνωστος είναι τα έτη.
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε:
14.000=150.000* $P_{n|0.07}$ ⇔ * $P_{n|0.07}$= 14.000/150.000 = 0,0933.
Αναζητούμε στον πίνακα συντελεστών χρεολυσίου στη στήλη με επιτόκιο 7%, τιμή χρονικής περιόδου, ώστε ο συντελεστή να είναι κοντά στο 0,0933. Βρίσκουμε $P_{8|0.07}$=0,0975. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα χρειαστούν περίπου 8 έτη για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος του δανειζόμενου ποσού.

Άσκηση 8

Δάνειο 40.000 ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 4 ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 7,5%. Να βρεθεί το χρεολύσιο κάθε έτους στις ακόλουθες περιπτώσεις:
α) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο,
β) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (γαλλικό σύστημα)
γ) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (σύστημα Κεντρικής Ευρώπης)
δ) εξόφληση με μεταβλητό τοκοχρεολύσιο (σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου)

Απάντηση/Λύση

α) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο
Στο σύστημα αυτό υπάρχει σταθερό χρεολύσιο κάθε έτος, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:
D =K* $P_{4|0.075}$=40.000*0,223567=8.942,68 ευρώ.

β) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (γαλλικό σύστημα)
Στο σύστημα αυτό το χρεολύσιο κάθε έτους αυξάνει προοδευτικά. Για το πρώτο έτος, το χρεολύσιο υπολογίζεται από τη σχέση:
X1 =K* $P_{4|0.075}$=40.000*0,223567=8.942,68 ευρώ.
Για το δεύτερο έτος, το χρεολύσιο X2 θα είναι το X1 πολλαπλασιαζόμενο με (1+i), όπου i είναι το επιτόκιο του δανείου. Υπολογίζουμε
X2=X1 * (1+ i) = 8.942,68 * (1+0,075)=9.613,381 ευρώ.
Παρόμοια για το τρίτο και τέταρτο έτος θα έχουμε:
X3=X2 * (1+ i) = 9.613,381 * (1+0,075)=10.334,38 ευρώ.
X4=X3 * (1+ i) = 10.334,38 * (1+0,075)=11.109,46 ευρώ.

γ) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (σύστημα Κεντρικής Ευρώπης)
Στο σύστημα αυτό το χρεολύσιο κάθε έτους αυξάνει προοδευτικά. Αλλά, επειδή οι τόκοι προπληρώνονται, το πραγματικό επιτόκιο δανεισμού t υπολογίζεται από τη σχέση:
t=i/(1-i)= 0,081081. Αυτό το επιτόκιο χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την προοδευτική αύξηση του χρεολυσίου.
Επειδή για επιτόκιο 0,081081 δεν υπάρχει τιμή υπολογισμού στον πίνακα με τους συντελεστές αρχικής αξίας ράντας, υπολογίζουμε το $\alpha_{n|t}$ με τον τύπο:
$\alpha_{n|t}$ =(1-1/(1+t)^{n})/t ⇔ $\alpha_{4|0,081}$ =(1-1/((1+0,081)^{4}))/0, 081=3,3048

Για το πρώτο έτος το χρεολύσιο υπολογίζεται από τη σχέση:
X1 =R* (1+t)$^{-n+1}$= R = K*(1-i)/$\alpha_{n|t}$*(1+t)$^{-4+1}$ =40.000*(1-0,075)/3,3048*(1+0,081081)$^{-3}$ =8.863ευρώ.

Για το δεύτερο έτος το χρεολύσιο X2 θα είναι το X1 πολλαπλασιαζόμενο με (1+ t). Υπολογίζουμε:
X2=X1 * (1+ t) = 8.863* (1+0,081081)=9.581,6 ευρώ.

Παρόμοια για το τρίτο και τέταρτο έτος θα έχουμε:
X3=X2 * (1+ t) = 9.581,6 * (1+0,081081)=10.358,5 ευρώ.

X4=X3 * (1+ t) = 10.358,5 * (1+0,081081)=11.198,4 ευρώ.

δ) εξόφληση με μεταβλητό τοκοχρεολύσιο (σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου)
Στο σύστημα αυτό τα χρεολύσια κάθε έτους είναι ίσα μεταξύ τους και υπολογίζονται, διαιρώντας το ποσό του δανείου με τις περιόδους εξόφλησης. Στην περίπτωσή μας θα είναι X=K/4= 40.000/4= 10.000 ευρώ.

Άσκηση 9

Να γίνει πίνακας απόσβεσης δανείου της άσκησης 8.8, σε κάθε μία από τις 4 περιπτώσεις συστήματος δανεισμού.

Απάντηση/Λύση

α) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο
Συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης με τα χρεολύσια, τα οποία υπολογίσαμε στην άσκηση 8.8.
Οι τόκοι υπολογίζονται στο αρχικό ποσό του δανείου και είναι ίσοι κάθε έτος. Στο ποσό που εξοφλήθηκε, προστίθεται κάθε φορά το νέο χρεολύσιο, και ανατοκίζεται το προηγούμενο ποσό που εξοφλήθηκε, αφού θεωρείται κατατιθέμενο σε καταθετικό λογαριασμό.

Έτος	Χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	8942,68	3000	11942,68	8942,68	31057,3
2	8942,68	3000	11942,68	18556,06	21443,9
3	8942,68	3000	11942,68	28890,45	11109,6
4	8942,68	3000	11942,68	39999,91	0,09101

Πίνακας 8.11. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9α*

β) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (γαλλικό σύστημα)
Συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης με τα χρεολύσια που υπολογίσαμε στην άσκηση 8.8.
Οι τόκοι υπολογίζονται στο ανεξόφλητο υπόλοιπο του προηγούμενου έτους, ενώ στο ποσό που εξοφλήθηκε προστίθεται κάθε φορά το νέο χρεολύσιο.

Έτος	χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο
1	8942,68	3000	11942,70	8942,68	31057,3
2	9613,381	2329,3	11942,70	18556,06	21443,9
3	10334,38	1608,3	11942,70	28890,45	11109,6
4	11109,46	833,24	11942,70	39999,91	0,09101

Πίνακας 8.12. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9β*

γ) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (σύστημα Κεντρικής Ευρώπης)
Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το βοηθητικό επιτόκιο t=i/(1-i)= 0,081081 και, στη συνέχεια, συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης με τα χρεολύσια, που υπολογίσαμε στην άσκηση 8.8.
Το τοκοχρεολύσιο είναι R=K*(1-i)*/$α_{n|t}$= 40.000*(1-0,075)/3,3048=
Οι τόκοι υπολογίζονται στο ανεξόφλητο υπόλοιπο της αρχής του έτους, ενώ στο ποσό που εξοφλήθηκε προστίθεται κάθε φορά το νέο χρεολύσιο.

Έτος	χρεολύσιο	Τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο
1	8863	2332,8	11195,8	8863	31137
2	9581,6	1614,2	11195,8	18444,6	21555,4
3	10358,5	837,3	11195,8	28803,1	11196,9
4	11198,4	-2,6	11195,8	40001,5	-1,5

Πίνακας 8.13. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9γ*

δ) εξόφληση με μεταβλητό τοκοχρεολύσιο (σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου)
Το ποσό του χρεολυσίου είναι το ίδιο κάθε έτος, οι τόκοι υπολογίζονται στο υπόλοιπο του δανείου και στο ποσό, που εξοφλήθηκε, προστίθεται κάθε φορά το νέο χρεολύσιο.

Έτος	χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	10000	3000	13000	10000	30000
2	10000	2250	12250	20000	20000
3	10000	1500	11500	30000	10000
4	10000	750	10750	40000	0

Πίνακας 8.14. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9δ*

Άσκηση 10

Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να καταθέτει κάποιος κάθε εξάμηνο για 4 χρόνια, ώστε να μπορέσει να αποσβέσει δάνειο 20.000 ευρώ με επιτόκιο δανεισμού 6%, το οποίο εξοφλείται με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο;

Απάντηση/Λύση

Στο σύστημα αυτό υπάρχει σταθερό χρεολύσιο και σταθερό ποσό τόκων κάθε εξάμηνο. Μετατρέπουμε τα χρόνια σε εξάμηνα. Είναι 4 έτη=8 εξάμηνα. Επίσης το επιτόκιο δανεισμού 6% γίνεται εξαμηνιαίο επιτόκιο 6%/2=3%.
Το χρεολύσιο υπολογίζεται από τη σχέση:
$D = K^* P_{8|0.03}$=20.000*0,1125=2.250 ευρώ.
Οι τόκοι κάθε εξαμήνου θα υπολογισθούν από τη σχέση:
I =K* i=20.000*0,03=600 ευρώ.
Επομένως η συνολική εξαμηνιαία δόση που πρέπει να κατατίθεται για την εξόφληση του δανείου είναι :
2.250 +600= 2.850 ευρώ

Άσκηση 11

Η Εταιρεία Ε πήρε δάνειο 40.000 ευρώ, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με το σύστημα Sinking Fund με επιτόκιο δανεισμού 6,5% και επιτόκιο καταθέσεως 3%. Η εταιρεία Ε εξετάζει και την περίπτωση να δανεισθεί το ίδιο ποσό με την προοδευτική μέθοδο και επιτόκιο δανεισμού 6,5%. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση σε κάθε περίπτωση. Ποια περίπτωση συμφέρει στην εταιρεία;

Απάντηση/Λύση

Στην περίπτωση εξόφλησης με το σύστημα Sinking Fund με επιτόκιο δανεισμού 6,5% και επιτόκιο καταθέσεως 3%, η ετήσια τοκοχρεωλυτική δόση θα είναι ίση με τη δόση χρεολυσίου συν τους τόκους.
Υπολογίζουμε χρεολύσιο D= K $^*P_{n|t}$ =40.000* $P_{10|0,03}$ =40.000*0,0872= 3.488 ευρώ.
Ο τόκος κάθε έτους είναι: I=K*i= 40.000*0,065=2.600 ευρώ.
Η ετήσια τοκοχρεωλυτική δόση θα είναι 3.488 +2.600 = 6.088 ευρώ

Στην περίπτωση εξόφλησης με το προοδευτικό σύστημα με επιτόκιο δανεισμού 6,5% η ετήσια τοκοχρεωλυτική δόση θα είναι σταθερή και ίση με $R=K/\alpha_{n|i}$.
Υπολογίζουμε $R=K/\alpha_{n|i} = 40.000/\alpha_{10|0,65} = 40.000 / 7,1888 = 5.564,2$ ευρώ.
Η ετήσια τοκοχρεωλυτική δόση στην περίπτωση αυτή θα είναι 5.564,2 ευρώ μικρότερη από τη δόση 6.088 ευρώ, που είχαμε βρει στην πρώτη περίπτωση.
Η δεύτερη περίπτωση συμφέρει καλύτερα στην εταιρεία, αφού πληρώνει κάθε έτος μικρότερη δόση με διαφορά περίπου 500 ευρώ κάθε έτος.

Άσκηση 12

Δάνειο 350.000 ευρώ εξοφλείται με 12 ίσες ετήσιες δόσεις 40.000 ευρώ. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο υπολογίσθηκαν οι δόσεις.

Απάντηση/Λύση

Αφού η εξόφληση γίνεται με ίσες ετήσιες δόσεις, κάθε δόση τοκοχρεολυσίου θα δίνεται από τη σχέση: $R=K/\alpha_{n|i}$.
Άγνωστο στη σχέση αυτή είναι το επιτόκιο, ενώ γνωρίζουμε το κεφάλαιο K του δανείου και την τοκοχρεωλυτική δόση R.
Επιλύουμε τη σχέση ως προς $\alpha_{n|i}$ ώστε να υπολογίσουμε το i.
$\alpha_{n|i}=K/ R = 350.000 / 40.000= 8,75$.
Αφού γνωρίζουμε ότι n=12, ψάχνουμε στον πίνακα συντελεστών αρχικής αξίας ράντας, να εντοπίσουμε για ποιο επιτόκιο ο συντελεστής είναι κοντά στο 8,75. Βρίσκουμε $\alpha_{12|0,055}=8,6185$ και $\alpha_{12|0,05}=8,8633$. Με τη μέθοδο της παρεμβολής μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή του επιτοκίου μεταξύ 5% και 5,5%.

Άσκηση 13

Δάνειο 150.000 ευρώ, εξοφλείται με ίσες τοκοχρεολυτικές δόσεις σε 6 έτη. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης με το σύστημα σταθερού τόκου και χρεολυσίου, όταν ο δανειζόμενος πληρώνει κάθε χρόνο για τόκους 10.500 ευρώ.

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή, δεν γνωρίζουμε το επιτόκιο, αλλά μπορούμε να το υπολογίσουμε, αφού γνωρίζουμε το ποσό των τόκων. Οι τόκοι κάθε έτους υπολογίζονται με τη σχέση $I = K^* i \Leftrightarrow i= I/K$
Αντικαθιστώντας, υπολογίζουμε i=10.500/150.000=0,07 = 7%.
Στο σύστημα απόσβεσης σταθερού χρεολυσίου και τοκοχρεολυσίου, υπάρχει σταθερό χρεολύσιο κάθε έτος, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:
$D = K^* P_{6|0.07} = 150.000^*0,1398 = 20.970$ ευρώ.
Ο πίνακας απόσβεσης θα είναι:

Έτος	Χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	Εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1	20.970	10.500	31.470	20.970	129.030
2	20.970	10.500	31.470	43.407,9	106.592
3	20.970	10.500	31.470	67.416,45	82.583,5
4	20.970	10.500	31.470	93.105,6	56.894,4
5	20.970	10.500	31.470	120.593	29.407
6	20.970	10.500	31.470	150.004,5	-4,5

Πίνακας 8.15. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 13*

Ομολογιακά Δάνεια

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- *Ομολογιακό δάνειο*

- *Ομολογία*

- *Τοκομερίδιο*

- *Απόσβεση*

- *Ζώσες ομολογίες*

ΣΤΟΧΟΙ

- *Κατανόηση και χρησιμοποίηση λειτουργίας δανείου που παρέχεται από πολλούς δανειστές.*

- *Υπολογισμός πίνακα απόσβεσης ομολογιακού δανείου.*

- *Εύρεση τοκομεριδίων.*

- *Εύρεση πλήθους ομολογιών εν ζωή.*

- *Εύρεση χρεολυσίου.*

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Δουλεύουμε σε ένα μεγάλο νοσοκομείο και χρειαζόμαστε κεφάλαιο 200.000.000 ευρώ, ώστε να δημιουργήσουμε το τμήμα πυρηνικής ιατρικής. Σκοπεύουμε να δανεισθούμε τα χρήματα αυτά και να τα επιστρέψουμε μετά από 10 έτη με τον αντίστοιχο τόκο τους. Το πρόβλημα μας είναι στο ότι καμιά τράπεζα δεν δέχεται να μας δανείσει το μεγάλο αυτό ποσό. Έτσι αποφασίζουμε να το μαζέψουμε από πολλούς δανειστές με Ομολογιακό δάνειο.

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την αξία κάθε ομολογίας και το ποσό του τόκου που θα πληρώσουμε στην καθεμία κάθε έτος;

1 Εισαγωγή

Στις μέρες μας συχνά διαβάζουμε άρθρα στον οικονομικό τύπο, όπως τα επόμενα:

«18.08.15. Τα Πλαστικά Κρήτης αποτελούν την πρώτη εισηγμένη μετά την εφαρμογή των capital controls (28/6/2015) που προχωράει στην έκδοση κοινού ομολογιακού δανείου μέχρι του ποσού των 5.000.000 ευρώ. Το ποσό του δανείου θα χρησιμοποιηθεί ως κεφάλαιο κίνησης, για την αγορά πρώτων υλών, την κάλυψη φορολογικών υποχρεώσεων κ.λπ. και την υλοποίηση επενδυτικού σχεδίου της εταιρείας» («Ομολογιακό δάνειο για πλαστικά Κρήτης», 2015).

«26.03.2015. Ομολογιακό δάνειο 36 εκατ. ευρώ με τις τέσσερις συστημικές τράπεζες έκλεισε θυγατρική εταιρεία της οικογένειας Αλαφούζου, η «Καθημερινές Εκδόσεις Α.Ε.», η οποία μεταξύ άλλων εκδίδει τις εφημερίδες «Καθημερινή» και «Καθημερινή της Κυριακής»» («Δάνειο 36 εκατ. Στην Καθημερινή», 2015).

«16.04.15. Το «πράσινο φως» για την έκδοση ομολογιακού δανείου μέχρι του συνολικού ποσού των 8.941.186,11 ευρώ, αντί των 8 εκατ. ευρώ που ήταν αρχικά, άναψε η γενική συνέλευση της Spider που πραγματοποιήθηκε χθες. Παράλληλα η γενική συνέλευση εξουσιοδότησε το διοικητικό συμβούλιο να καταρτίσει με τους δανειστές της εταιρείας κάθε σύμβαση (ενοχική ή εκποιητική κινητών ή ακινήτων, συμβάσεις ανταλλαγής, εκμίσθωσης και μίσθωσης ακινήτων κ.λπ.) που εξασφαλίζει τη συνέχιση της λειτουργίας της, με όρους και συμφωνίες κατά την κρίση του» («Έκδοση ομολογιακού δανείου», 2015).

Παραθέτουμε στη συνέχεια μια ηλεκτρονική αναφορά, η οποία αναφέρει αναλυτικά τι είναι ομολογιακό δάνεια και ποια είναι τα οφέλη του για μια ανώνυμη εταιρεία που το εκδίδει, ή για τους ομολογιούχους που το αγοράζουν.

«Η συλλογή κεφαλαίων από ευρέα κοινωνικά στρώματα αποτελεί για μια ανώνυμη εταιρεία (ΑΕ) το σημαντικότερο μέσο χρηματοδότησής της, προκειμένου να επιτύχει τους οικονομικούς της σκοπούς. Και η δυνατότητα αυτή καθίσταται ευχερέστερη με τη διαίρεση του μετοχικού κεφαλαίου της σε τμήματα μικρής αξίας, τις μετοχές, καθώς και με την εισαγωγή των μετοχών της στο χρηματιστήριο. Η χρηματοδότηση της ΑΕ μπορεί να γίνει είτε με ίδια είτε με ξένα κεφάλαια. Στην πρώτη περίπτωση θα πρόκειται είτε για καταβολή νέων εισφορών είτε για κεφαλαιοποίηση κερδών, δηλαδή για αυτοχρηματοδότηση. Πολύ συχνά όμως η ΑΕ καταφεύγει σε ξένα κεφάλαια, δηλαδή σε δανειοδοτήσεις από τράπεζες ή άλλους πιστωτές ή στη σύναψη ομολογιακού δανείου. Συνεπώς ένας από τους τρόπους χρηματοδότησης μιας ανώνυμης εταιρείας με ξένα κεφάλαια είναι η σύναψη ομολογιακού δανείου, η οποία ρυθμίζεται από το Ν.3156/2003 και συμπληρωματικά από το Ν.2190/1920. Ομολογιακό είναι το δάνειο που εκδίδεται από ΑΕ, που εδρεύει στην Ελλάδα, και διαιρείται σε ομολογίες, οι οποίες αντιπροσωπεύουν δικαιώματα των ομολογιούχων έναντι της εκδότριας κατά τους όρους του δανείου. Οι ομολογίες είναι χρεόγραφα, τα οποία ενσωματώνουν έντοκη απαίτηση κατά της εταιρείας, και αποτελούν τμήματα του δανειζομένου ποσού, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί στην ονομαστική αξία της ομολογίας.

Ο νόμος διακρίνει τέσσερις κατηγορίες ομολογιακών δανείων: το κοινό, το ομολογιακό δάνειο με ανταλλάξιμες ομολογίες, το ομολογιακό δάνειο με δικαίωμα συμμετοχής στα κέρδη και το ομολογιακό δάνειο με μετατρέψιμες ομολογίες. Όλες οι παραπάνω κατηγορίες δανείων μπορεί να είναι εξασφαλισμένες με κάθε είδους εμπράγματη ασφάλεια ή εγγύηση.

Το όφελος για την ΑΕ από τη σύναψη ομολογιακού δανείου έγκειται στο γεγονός ότι δεν επιβαρύνεται με το κόστος διαμεσολάβησης χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και, συνεπώς, καταβάλλει μικρότερο τόκο. Αντίστοιχα το όφελος για τους ομολογιούχους δανειστές έγκειται στην απολαβή μεγαλύτερου τόκου από εκείνον που θα ελάμβαναν από τυχόν τραπεζική κατάθεση, καθώς και στην απόλαυση των ιδιαίτερων δικαιωμάτων που μπορεί να παρέχουν οι ομολογίες» (http://virvilis.gr/banking/omologiako_daneio-bank-article_cat-26.html).

Βέβαια, υπάρχει και η αρνητική πλευρά των ομολογιακών δανείων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

«Δεν υπάρχει μεγαλύτερη κατάρα από αυτή που έχει πλέον ποτίσει τις εθνικές και διεθνείς οικονομίες και λέγεται ομολογιακός δανεισμός. Τα ομόλογα είναι τίτλοι χρήματος που ουσιαστικά έχουν δημιουργήσει μια δική τους παγκόσμια οικονομία εικονική, δένοντας στο άρμα τους τις πραγματικές οικονομίες των εθνών, σέρνοντας τες στην κυριολεξία από τη μύτη. Επιβλήθηκαν σαν κύρια χρηματοοικονομικά προϊόντα, όταν το κράτος αδυνατούσε να εκπληρώσει τις τρομερές χρηματοδοτικές υποχρεώσεις του για πολεμικές επιχειρήσεις και διάφορα άλλα ανώφελα για την κοινωνία έργα, που επέβαλαν, όμως, ως αναγκαιότητα οι μεγάλοι εμπορικοί και βιομηχανικοί οίκοι, αυτοί που είχαν συγκεντρώσει πολύ πλεόνασμα χρήματος και, γενικότερα, υλικο- τεχνικού κεφαλαίου. Οι πλούσιοι οίκοι ανάγκαζαν τα κράτη να δανείζονται από αυτούς, προκείμενου να εξυπηρετήσουν τα υπερφίαλα σχέδια τους τα αποικιοκρατικά. Η αποικιοκρατία ιστορικά έβαλε τις κρατικές οικονομίες σε αυτή την τροχιά εξάρτησης από τους δανειστές. Οι αποικιοκράτες στήριξαν τα κατακτητικά σχέδια τους που τους απέφεραν τρελά κέρδη στη συμμετοχή των κρατών στα οποία δάνειζαν μέσω ομολόγων. Ο μηχανισμός της οικονομικής μέσω του δανεισμού του ομολογιακού έφερε πολλαπλό ανταποδοτικό όφελος στους μεγάλους οίκους:

-έθεσε τα κράτη κάτω από την άμεση επιρροή των εμπορικών και βιομηχανικών οίκων, κάνοντας τα πειθήνια εργαλεία τους

-μετακύλησε το κόστος των αποικιοκρατικών εξορμήσεων των εξερευνητικών και πολεμικών στις πλάτες των κρατών και της κοινωνίας

-απέφερε στους οίκους ανεξέλεγκτο πλούτο μέσω άνισων συναλλαγών που πραγματοποίησε, και συνεχίζει να πραγματοποιεί η εμπεδωμένη πλέον για τα καλά αποικιοκρατία

Αυτόν το μηχανισμό, βέβαια, δεν μπορούμε πλέον να τον ανιχνεύσουμε παρά μόνο, αν παρακολουθήσουμε την ιστορία των ομολόγων, έτσι όπως αυτά άρχισαν να κάνουν την εμφάνιση τους στην Ευρώπη, π.Χ., στο κράτος της Βενετίας, της γαληντοτάτης αυτής δημοκρατίας το 1500 έως 1700 μ.Χ. Οι έμποροι σε αυτήν τη δημοκρατία δάνειζαν στο κράτος, για να μπορέσει αυτό να αναλάβει τα έξοδα των κατακτητικών αποικιοκρατικών και πολεμικών εξορμήσεων. Το ίδιο τροπάρι και στην Πορτογαλία και στην Ισπανία και στην Αγγλία. Τα κράτη-βασίλεια της εποχής εκείνης άρχισαν σιγά-σιγά να βυθίζονται μέσα στα χρέη τους, και οι βασιλικοί οίκοι να δέχονται πιέσεις απίστευτες, προκειμένου να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις στους εμπόρους και στην ανερχομένη αστική τους δύναμη. Και, βέβαια, να παραδίδονται σιγά-σιγά αμαχητί στις πιέσεις των οργανωμένων εμπορικών συμφερόντων των πιστωτών τους. Με αυτόν το τρόπο τα κράτη κατέληξαν διεκπεραιωτές αυτών που σήμερα λέμε συγκεντρωμένο κεφάλαιο. Αποπροσανατολίστηκαν οριστικά από τον κοινωνικό τους ρόλο και δεν υπάρχουν παρά μόνο ως μεσολαβητές και εκτελεστές εντολών από τους πιστωτές τους» (http://www.phorum.gr/viewtopic.php?f=80&t=287667).

2 Ορισμοί - έννοιες

Ομολογιακό δάνειο είναι το δάνειο που παραχωρείται από πολλούς δανειστές. Πρόκειται, κυρίως, για μεγάλα ποσά κεφαλαίου.

Ολόκληρο το ποσό του δανείου χωρίζεται σε μικρότερα ποσά, συνήθως ίσα μεταξύ τους, και για κάθε τέτοιο ποσό, εκδίδεται ειδικό έγγραφο σύμβασης δανείου (τίτλος) που ονομάζεται **ομολογία**. Για το λόγο αυτό, τα ομολογιακά δάνεια λέγονται και *δάνεια με τίτλους*.

Η πρόσκληση ενδιαφερομένων να δανείσουν, να πάρουν, δηλαδή, ομολογίες, δανείζοντας τα αντίστοιχα χρήματα, γίνεται με τη διάθεση ομολογιών μέσω δημόσιας εγγραφής σε καταλόγους.

Η εξόφληση του δανειζόμενου κεφαλαίου από τον οφειλέτη, γίνεται με την πληρωμή των ομολογιών σε ορισμένα τακτικά διαστήματα. Η πληρωμή των τόκων που αντιστοιχούν σε κάθε ομολογία για κάθε χρονική περίοδο, γίνεται με τα **τοκομερίδια**. Στην Ελλάδα ο νόμος 3156/2003 (ΦΕΚ 157Α) ρυθμίζει τα θέματα των ομολογιακών δανείων.

2.1 Ομολογία

Ομολογία είναι έγγραφος πιστωτικός τίτλος που εκδίδεται για ένα μέρος δανείου. Σήμερα, με την εξέλιξη της τεχνολογίας, η ομολογία έπαψε να είναι έγγραφο, και αποτελεί τίτλο άυλης μορφής. Κάθε ομολογία αποτελείται από το κύριο σώμα και από τα τοκομερίδια.

Στο κύριο σώμα αναγράφεται, ή περιέχεται, η ονομαστική αξία της που αντιστοιχεί στο δανειζόμενο ποσό δανείου, το ονομαστικό επιτόκιο που έχει συμφωνηθεί για το δάνειο, ο χρόνος απόσβεσης του δανείου και χρόνος καταβολής τόκων, ο τόπος και ο τρόπος πληρωμής των τόκων και η σειρά μαζί με τον αριθμό της ομολογίας. Επειδή, για το ίδιο ομολογιακό δάνειο, εκδίδονται πολλές ομολογίες, κάθε μία έχει και έναν διαφορετικό αριθμό, για να ξεχωρίζει.

2.2 Ομολογιούχοι

Ομολογιούχος ονομάζεται ο κάτοχος ομολογιών ενός ομολογιακού δανείου. Η πρόσκληση για διάθεση (αγορά) των ομολογιών στο κοινό γίνεται μέσω δημόσιας εγγραφής στις τράπεζες ή το χρηματιστήριο, πριν την αγορά των ομολογιών. Κάθε ομολογιούχος μπορεί να αγοράσει απλές ομολογίες ή πολλαπλές ομολογίες, οι οποίες αντιστοιχούν σε πολλές απλές ομολογίες. Η αγορά των ομολογιών σημαίνει την παροχή δανείου στον οφειλέτη, ενώ η πληρωμή των ομολογιών από τον οφειλέτη στον ομολογιούχο, σημαίνει την εξόφληση του δανείου. Όσο μια ομολογία δεν πληρώνεται, δεν εξοφλείται από τον οφειλέτη, αυτή αποφέρει τόκο στον ομολογιούχο για κάθε χρονική περίοδο. Ο τόκος αυτός της ομολογίας για κάθε χρονική περίοδο ονομάζεται *τοκομερίδιο*. Περισσότερες χρηστικές πληροφορίες σχετικά με την έκδοση ομολογιακού δανείου μπορεί να αναζητήσει κάποιος και στην αναφορά (Χρηματιστήριο Αθηνών, 2014).

2.3 Τρόπος απόσβεσης ομολογιακού δανείου

Το δανειζόμενο κεφάλαιο επιστρέφεται λίγο-λίγο με την πληρωμή κάποιων ομολογιών κάθε χρονική περίοδο, ενώ οι τόκοι δίνονται με την πληρωμή των τοκομεριδίων όλων των ομολογιών που δεν έχουν εξοφληθεί. Ο τρόπος απόσβεσης ενός ομολογιακού δανείου περιγράφεται σε ένα πίνακα, όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στις χρονικές περιόδους, και οι στήλες στο πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, στο ποσό των τόκων, στο σύνολο των εξοφλημένων ομολογιών και στο σύνολο των ανεξόφλητων ομολογιών, που απομένουν. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **πίνακας απόσβεσης** του ομολογιακού δανείου. Είναι πολύ χρήσιμος στο να εμφανίζει συνοπτικά όλες τις πληροφορίες απόσβεσης του ομολογιακού δανείου.

Πώς αποφασίζεται ποιες ομολογίες από το σύνολο των ομολογιών πρόκειται να πληρωθούν – εξοφληθούν κάθε χρονική περίοδο; Η απόφαση αυτή καθορίζεται με κλήρωση, βάση του αριθμού που αναγράφεται – αντιστοιχεί σε κάθε ομολογία. Το πλήθος των ομολογιών που κληρώνονται σε κάθε χρονική περίοδο, εξοφλούνται από το δανειζόμενο και, στη συνέχεια καταστρέφονται, δηλαδή, παύουν να υφίστανται. Οι εξοφλημένες ομολογίες για τις επόμενες χρονικές περιόδους δεν εισπράττουν τόκους. Οι υπόλοιπες ομολογίες ονομάζονται ανεξόφλητες ομολογίες, ή **ομολογίες εν ζωή**. Οι ομολογίες εν ζωή μπορούν να μεταβιβαστούν σε κάποιον άλλο με τιμή μεταβίβασης που συμφωνούν μεταξύ τους πωλητής και αγοραστής, και είτε είναι ίδια με την ονομαστική αξία της ομολογίας, είτε μεγαλύτερη, είτε μικρότερη από αυτή. Η τιμή αυτή ονομάζεται *εμπορεύσιμη τιμή* της ομολογίας.

2.4 Τιμές ομολογίας

Μια ομολογία, επομένως, μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές τιμές. Η τιμή της, κατά τη χρονική στιγμή που εκδίδεται, ονομάζεται **τιμή έκδοσης** ή ονομαστική αξία.

Η τιμή στην οποία, πωλείται, συνήθως, από την τράπεζα, όταν εκδίδεται, ονομάζεται **τιμή πώλησης στην έκδοση.**

Η τιμή με την οποία κάποιος μπορεί να την εξοφλήσει σε μια τράπεζα ονομάζεται **τιμή εξόφλησης** και όταν την εξοφλεί την ημερομηνία λήξης της, τιμή εξόφλησης στη λήξη της. Η τιμή με την οποία αγοράζεται μια εμπορεύσιμη ομολογία από κάποιον άλλο λέγεται **τρέχουσα ή πραγματική** τιμή.

Λέμε ότι μια ομολογία έχει **έκδοση στο άρτιο,** όταν ισχύει η ισότητα
Τιμή έκδοσης = ονομαστική αξία.

Λέμε ότι μια ομολογία έχει **έκδοση υπό το άρτιο,** όταν ισχύει η ανίσωση
Τιμή έκδοσης < ονομαστική αξία.

Λέμε ότι μια ομολογία έχει **έκδοση υπέρ το άρτιο,** όταν ισχύει η ανίσωση
Τιμή έκδοσης > ονομαστική αξία.

Ερώτηση: Ποια από τις παραπάνω τιμές έκδοσης συμφέρει στον οφειλέτη που «πουλάει» ομολογίες και τι στο δανειστή που «αγοράζει» ομολογίες;

2.5 Συμβολισμοί

Στις σχέσεις υπολογισμού των ομολογιακών δανείων χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:

K συμβολίζει το συνολικό ονομαστικό ποσό του ομολογιακού δανείου
C συμβολίζει την ονομαστική αξία μιας απλής ομολογίας
N=K/C συμβολίζει το πλήθος όλων των ομολογιών
T συμβολίζει την τιμή έκδοσης της ομολογίας
C’ συμβολίζει την τιμή εξόφλησης μιας απλής ομολογίας
n συμβολίζει τη διάρκεια του ομολογιακού δανείου
i συμβολίζει το ονομαστικό επιτόκιο δανεισμού

Συμβολίζουμε ακόμη για κάθε χρονική περίοδο ρ ως εξής:
Nρ συμβολίζει το πλήθος ομολογιών που εξοφλούνται στο τέλος της ρ χρονικής περιόδου

Mρ συμβολίζει το συνολικό πλήθος ομολογιών που εξοφλούνται μέχρι το τέλος της ρ χρονικής περιόδου

Lρ συμβολίζει το πλήθος ανεξόφλητων ομολογιών (ομολογίες εν ζωή) στο τέλος της ρ χρονικής περιόδου.

3 Σχέσεις

Μεταξύ των διαφόρων συμβολισμών που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν οι σχέσεις:

- N=N1+N2+…Nn

  Ο συνολικός αριθμός, δηλαδή, των ομολογιών είναι ίσος με το άθροισμα των ομολογιών που εξοφλούνται σε κάθε χρονική περίοδο.

- Lρ=N-Mρ ρ=1,2,3,….n

  το πλήθος ανεξόφλητων ομολογιών κάθε χρονικής περιόδου είναι ίσο με τη διαφορά συνολικού πλήθους ομολογιών μείον του πλήθους των ομολογιών, που έχουν εξοφληθεί έως το τέλος της χρονικής περιόδου.

- Xρ = C*Nρ Το χρεολύσιο της ρ περιόδου, είναι ίσο με το γινόμενο του πλήθους των ομολογιών που εξοφλούνται τη χρονική περίοδο πολλαπλασιασμένο με την τιμή κάθε ομολογίας.
- Iρ = $C*L_{ρ-1}$ *i ρ=1,2,3,….n Ο συνολικός τόκος, που στα τοκομερίδια κάθε χρονικής περιόδου είναι ίσος με το γινόμενο του πλήθους των ανεξόφλητων ομολογιών της προηγούμενης χρονικής περιόδου, επί την τιμή κάθε ομολογίας επί το επιτόκιο δανεισμού.
- Rρ=Xρ+Iρ= CNρ+$C*L_{ρ-1}$ *i Το τοκοχρεολύσιο κάθε χρονικής περιόδου είναι ίσο με το άθροισμα του χρεολυσίου και του τόκου της χρονικής περιόδου.

4 Απόσβεση ομολογιακών δανείων το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου

Η απόσβεση ενός ομολογιακού δανείου, μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, όπως και η απόσβεση ενός απλού δανείου, ανάλογα με τη συμφωνία δανειστή και οφειλέτη. Στα ομολογιακά δάνεια συνήθως χρησιμοποιούνται δύο συστήματα απόσβεσης: Το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου και το προοδευτικό σύστημα απόσβεσης.

Στο σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου κάθε χρονική στιγμή αποσβένεται ίσο ποσό κεφαλαίου, που στο ομολογιακό δάνειο αντιστοιχεί σε ίδιο πλήθος ομολογιών. Για να επιλεγούν οι ομολογίες που θα εξοφληθούν γίνεται κλήρωση στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, και κάθε φορά κληρώνεται το ίδιο πλήθος ομολογιών. Ο τόκος, όμως, κάθε χρονικής περιόδου δεν είναι ίδιος, αλλά μειώνεται ανάλογα με το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται. Με το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου στα πρώτα χρόνια αποπληρωμής του δανείου πληρώνουμε μεγάλα ποσά τοκοχρεολυσίου και στα επόμενα χρόνια μικρότερα ποσά. Οι υπολογισμοί γίνονται πολύ εύκολα, αλλά η απαίτηση για μεγάλα ποσά αποπληρωμής στα πρώτα έτη δανεισμού, δυσχεραίνει τον οφειλέτη.

Ας δούμε πώς δημιουργείται ο πίνακας απόσβεσης με τη χρήση του παραδείγματος 4.1.

4.1 Παράδειγμα

Ομολογιακό δάνειο 300.000 ομολογιών με αξία κάθε μιας 1000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το σύστημα του ίσων μερών κεφαλαίου. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Αφού η διάρκεια του δανείου είναι 5 έτη, κάθε χρόνο κληρώνεται πλήθος ομολογιών ίσο με 300.000/5 = 60.000 ομολογίες. Αφού η αξία κάθε ομολογίας είναι 1.000 ευρώ, το χρεολύσιο που αντιστοιχεί σε κάθε έτος θα είναι 60.000*1000=60.000.000 ευρώ.

Οι τόκοι το πρώτο έτος θα είναι K*i =N*C*i= 300.000 *1.000*10% = 30.000.000 και κάθε επόμενο έτος μειώνονται κατά το ποσό που αντιστοιχεί στη μείωση του κεφαλαίου (πλήθος ομολογιών) και είναι κάθε έτος λιγότεροι τόκοι κατά 60.000.000 *10% = 6.000.000 ευρώ.

Ετος	Εξοφλημένες ομολογίες Nρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	Εξοφλήθηκε δάνειο	Υπόλοιπο δανείου
1°	60.000	30.000.000	60.000.000	90.000.000	60.000.000	240.000.000
2°	60.000	24.000.000	60.000.000	84.000.000	120.000.000	180.000.000
3°	60.000	18.000.000	60.000.000	78.000.000	180.000.000	120.000.000
4°	60.000	12.000.000	60.000.000	72.000.000	240.000.000	60.000.000
5°	60.000	6.000.000	60.000.000	66.000.000	300.000.000	0

Πίνακας 9.1. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 4.1*

Παρατηρούμε ότι το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους είναι 90.000.000 ευρώ και μειώνεται κάθε έτος κατά 6.000.000 ευρώ.

5 Απόσβεση ομολογιακών δανείων με το προοδευτικό σύστημα

Ένας άλλος τρόπος απόσβεσης ομολογιακού δανείου είναι το προοδευτικό σύστημα. Με το σύστημα αυτό, το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται αυξάνει προοδευτικά με τις χρονικές περιόδους αποπληρωμής. Το σύνολο όμως χρεολυσίου και τόκου που πληρώνεται σε κάθε χρονική περίοδο είναι σταθερό. Έτσι ο οφειλέτης ξέρει ότι σε κάθε χρονική περίοδο θα πληρώνει το ίδιο ποσό τοκοχρεολυσίου, αλλά διαφορετικά ποσά για χρεολύσιο και για τόκο. Το ποσό του χρεολυσίου αυξάνει προοδευτικά ενώ το ποσό των τόκων μειώνεται προοδευτικά, σχηματίζοντας πάντα σταθερό άθροισμα τοκοχρεολυσίου.

Για να έχουμε την προοδευτική αύξηση του χρεολυσίου, κάθε φορά κληρώνεται, για να εξοφληθεί, διαφορετικό πλήθος ομολογιών, μεγαλύτερο από το πλήθος της προηγούμενης φοράς.

Για να έχουμε πλήρη εξόφληση όλων των ομολογιών (κεφαλαίου δανείου) στις n χρονικές περιόδους διάρκειας του δανείου, όπως μελετήσαμε και στο προοδευτικό σύστημα εξόφλησης ενιαίου δανείου, τη πρώτη χρονική περίοδο εξοφλείται πλήθος ομολογιών, που δίνεται από τη σχέση:

N1= N * Pn|i όπου N το συνολικό πλήθος ομολογιών και Pn|I ο συντελεστής χρεολυσίου που αντιστοιχεί σε διάρκεια n δανείου και σε επιτόκιο i.

Σε κάθε επόμενη χρονική περίοδο, το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται δίνεται από τη σχέση: Nρ+1= Nρ *(1+i) και αυξάνει προοδευτικά ανάλογα με το επιτόκιο i.

Το χρεολύσιο κάθε χρονικής περιόδου υπολογίζεται, πολλαπλασιάζοντας το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται με την αξία τους, σύμφωνα με τον τύπο:

Xρ= Nρ * C

Ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου υπολογίζεται, πολλαπλασιάζοντας το πλήθος των ανεξόφλητων ομολογιών της προηγούμενης χρονικής περιόδου με την αξία τους και με το επιτόκιο, σύμφωνα με τον τύπο:

Iρ= Lρ-1 *C* i

Το τοκοχρεολύσιο δίνεται από το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου:

Rρ= Xρ +Iρ   Όπως αναφέραμε το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό και μπορεί να υπολογισθεί με τον τύπο υπολογισμού τοκοχρεολυσίου των ενιαίων δανείων, που είναι:

R=C*N/an|i όπου an|i είναι ο συντελεστής αρχικής αξίας ράντας διάρκειας n με επιτόκιο i.

Ας δούμε πώς δημιουργείται ο πίνακας απόσβεσης με τη χρήση ενός παραδείγματος.

5.1 Παράδειγμα

Ομολογιακό δάνειο 300.000 ομολογιών με αξία κάθε μιας 1000 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 10% με το προοδευτικό σύστημα. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Τον πρώτο χρόνο κληρώνονται ομολογίες σε πλήθος που δίνεται από τον τύπο:

N1= N * Pn|i = 300.000*P5|10% = 300.000*0,163797=49.139,1 ομολογίες και το χρεολύσιο του πρώτου έτους θα είναι 49.139*1000=49.139.000 ευρώ.

Το δεύτερο χρόνο κληρώνεται πλήθος ομολογιών N2= N1 *(1+i) =49.139*(1,10)= 54.053 ομολογίες, τον τρίτο χρόνο 54.053 *(1,10)= 59.458 ομολογίες, τον τέταρτο χρόνο 59.458 *(1,10)= 65.404 ομολογίες και τον πέμπτο χρόνο εξοφλούνται οι υπόλοιπες 65.404*(1,10)= 71.945 ομολογίες.

Οι τόκοι το πρώτο έτος υπολογίζονται για ολόκληρο το ποσό του δανείου, και είναι 300.000 *1.000*10% = 30.000.000 ευρώ. Για κάθε επόμενο έτος οι τόκοι αλλάζουν ανάλογα με το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, που αντιστοιχεί στην αξία των ομολογιών εν ζωή. Έτσι το δεύτερο χρόνο οι τόκοι υπολογίζονται 251.861*1.000*10%=25.186.100 ευρώ, τον τρίτο χρόνο 196.808*1.000*10%=19.680.810 ευρώ, τον τέταρτο χρόνο 137.350*1.000*10%=13.734.991 ευρώ και τον πέμπτο χρόνο τον τρίτο χρόνο 71.946*1.000*10%=7.194.596 ευρώ.

Παρατηρούμε στον πίνακα προοδευτική μείωση του ποσού των τόκων και προοδευτική αύξηση του ποσού του χρεολυσίου, που δίνουν πάντα σταθερό τοκοχρεολύσιο.

Ετος	Εξοφλημένες ομολογίες Νρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Ομολογίες εν ζωή
1ο	49.139	30.000.000	49.139.000	79.139.000	49.139.000	251.861
2ο	54.053	25.186.100	54.052.900	79.239.000	103.191.900	196.808
3ο	59.458	19.680.810	59.458.190	79.139.000	162.650.090	137.350
4ο	65.404	13.734.991	65.404.009	79.139.000	228.054.099	71.946
5ο	71.945	7.194.596	71.945.014	79.139.610	299.999.056	1

Πίνακας 9.2. *Πίνακας απόσβεσης παραδείγματος 9.5.1*

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Τι είναι ομολογιακό δάνειο.
- Ποια είναι τα συστήματα απόσβεσης ενός ομολογιακού δανείου.
- Βρίσκω τον πίνακα απόσβεσης ανάλογα με το σύστημα απόσβεσης ενός ομολογιακού δανείου.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Ομολογιακό δάνειο για πλαστικά Κρήτης, (2015, 6 Ιουνίου). *Καθημερινή*. Ανακτήθηκε 28 Σεπτεμβρίου, 2015 από http://www.kathimerini.gr/827512/article/oikonomia/epixeirhseis/omologiako-daneio-gia-plastika-krhths

Δάνειο 36 εκατ. στην Καθημερινή. (2015, 3 Μαρτίου). *Εφημερίδα των Συντακτών*. Ανακτήθηκε 28 Σεπτεμβρίου, 2015 από http://www.efsyn.gr/arthro/daneio-36-ekat-stin-kathimerini

Έκδοση ομολογιακού δανείου. (2015, 4 Απριλίου). *Ημερησία*. Ανακτήθηκε 28 Σεπτεμβρίου, 2015 από http://www.imerisia.gr/article.asp?catid=26519&subid=2&pubid=113503507

Χρηματιστήριο Αθηνών, (2014). Συχνές Ερωτήσεις Ομολογιακά Δάνεια & Ομόλογα, Έκδοση 1.0. Ανακτήθηκε 28 Σεπτεμβρίου, 2015 από http://www.helex.gr/documents/10180/1858364/FAQs+for+Bonds+V1-0.pdf/3896d6cb-6f4b-429f-840d-f069001c2333

Ασκήσεις 9ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Ομολογιακό δάνειο 200.000 ευρώ με αξία κάθε μιας ομολογίας 400 ευρώ εξοφλείται σε 3 χρόνια με επιτόκιο 8% με το προοδευτικό σύστημα. Να υπολογισθεί το χρεολύσιο, ο τόκος και το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους.

Απάντηση/Λύση

Το πλήθος των ομολογιών του δανείου είναι N=K/C = 200.000/ 400=500 ομολογίες.
Αφού χρησιμοποιείται το προοδευτικό σύστημα, το πλήθος N1 των ομολογιών που θα πληρωθούν του πρώτο έτος (χρεολύσιο), θα υπολογισθεί με τον τύπο N1=N*Pn|i = 500 * 0,3080= 154 ομολογίες με συνολική αξία 154*400=61.600 ευρώ
I=K*i=200.000*0,08=16.000 ευρώ.
Σε κάθε μία ομολογία αντιστοιχεί τόκος 400*0,08=32 ευρώ.
Το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους, επομένως, είναι 61.600 +16.000=77.600 ευρώ.

Άσκηση 2

Ομολογιακό δάνειο 150.000 ομολογιών με αξία κάθε μιας 200 ευρώ εξοφλείται σε 15 χρόνια με εξαμηνιαίες δόσεις, με το σύστημα του ίσων μερών κεφαλαίου και ονομαστικό επιτόκιο 12%. Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο χρεολύσιο.

Απάντηση/Λύση

Στην άσκηση αυτή έχουμε εξαμηνιαίες δόσεις και, επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε επιτόκιο εξαμήνου, και να μετρήσουμε το χρόνο σε εξάμηνα.
Το εξαμηνιαίο επιτόκιο θα είναι 12%/2= 6%.
Η διάρκεια του δανείου θα είναι 15 έτη, δηλαδή 30 εξάμηνα.
Η αξία του δανείου είναι K=150.000x200=30.000.000 ευρώ.
Αφού η εξόφληση γίνεται με το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου, το εξαμηνιαίο χρεολύσιο θα δίνεται από τη σχέση:
X=K/30=30.000.000/30=1.000.000 ευρώ, δηλαδή με την πληρωμή 150.000/30=5.000 ομολογιών κάθε εξάμηνο.

Άσκηση 3

Ομολογιακό δάνειο 100.000 ομολογιών με αξία κάθε μιας 800 ευρώ εξοφλείται σε 5 χρόνια με επιτόκιο 8%. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης:
α) με το σύστημα του ίσων μερών κεφαλαίου,
β) με το προοδευτικό σύστημα (γαλλικό σύστημα).

Απάντηση/Λύση

Το κεφάλαιο του δανείου είναι K=100.000x800 =80.000.000 ευρώ
α) Με εξόφληση με το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου, το χρεολύσιο θα δίνεται από τη σχέση 100.000/5=20.000 ομολογίες με συνολική αξία 20.000*800=16.000.000 ευρώ.
Ο τόκος του πρώτου έτους θα είναι K*i=80.000.000 *0,08 =6.400.000 ευρώ
Το ποσό του δανείου που εξοφλήθηκε το πρώτο έτος είναι 16.000.000 ευρώ (χρεολύσιο) και το υπόλοιπο του δανείου που απομένει θα είναι 80.000.000-16.000.000= 64.000.000 ευρώ.
Το υπόλοιπο αυτό πολλαπλασιάζεται με το 8%, και υπολογίζεται ο τόκος για το δεύτερο έτος. Παρόμοια εργαζόμαστε, για να υπολογίσουμε τόκο και τοκοχρεολύσιο για τα επόμενα έτη, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Έτος	Εξοφλημένες ομολογίες Νρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1ο	20.000	6.400.000	16.000.000	22.400.000	16.000.000	64.000.000
2ο	20.000	5.120.000	16.000.000	21.120.000	32.000.000	48.000.000
3ο	20.000	3.840.000	16.000.000	19.840.000	48.000.000	32.000.000
4ο	20.000	2.560.000	16.000.000	18.560.000	64.000.000	16.000.000
5ο	*20.000*	*1.280.000*	*16.000.000*	*17.280.000*	*80.000.000*	*0*

Πίνακας 9.3. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.3α*

β) Με εξόφληση με το προοδευτικό σύστημα, το χρεολύσιο (πλήθος ομολογιών που πληρώνονται) του πρώτου έτους θα δίνεται από τη σχέση:
N1=N*Pn|i = 100.000*0,1705 =17.050 ομολογίες με συνολική αξία 17.050 *800=13.640.000 ευρώ.
Ο τόκος του πρώτου έτους θα είναι K*i=80.000.000 *0,08 =6.400.000 ευρώ
Το ποσό του δανείου που εξοφλήθηκε το πρώτο έτος είναι 13.640.000 ευρώ (χρεολύσιο) και το υπόλοιπο του δανείου που απομένει θα είναι 80.000.000-13.640.000= 66.360.000 ευρώ.

Το υπόλοιπο αυτό πολλαπλασιάζεται με το 8%, και υπολογίζεται ο τόκος για το δεύτερο έτος.
Το πλήθος ομολογιών που πληρώνονται το δεύτερο έτος θα δίνεται από τη σχέση:
N2=N1*(1+i)= 17.050 * (1+0,08)= 18.414 ομολογίες αξίας 18.414 *800=14.731.200 ευρώ.
Παρόμοια εργαζόμαστε, για να υπολογίσουμε τόκο και τοκοχρεολύσιο για τα επόμενα έτη, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	Εξοφλημένες ομολογίες Νρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1ο	17.050	6.400.000	13.640.000	20.040.000	13.640.000	66.360.000
2ο	18.414	5.308.800	14.731.200	20.040.000	28.371.200	51.628.800

3ο	19.887	4.130.304	15.909.696	20.040.000	44.280.896	35.719.104
4ο	21.478	2.857.528	17.182.472	20.040.000	61.463.368	18.536.632
5ο	23.196	1.482.931	18.557.069	20.040.000	80.020.437	-20.437

Πίνακας 9.4. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.3.β*

Το υπόλοιπο του 5ου έτους δεν είναι 0, λόγου σφάλματος των στρογγυλοποιήσεων που κάναμε.

Άσκηση 4

Ομολογιακό δάνειο 300.000 ομολογιών με αξία κάθε μιας 600 ευρώ εξοφλείται σε 8 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις και ονομαστικό επιτόκιο 10%. Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο.

Απάντηση/Λύση

Το κεφάλαιο του δανείου είναι K=300.000x600 =180.000.000 ευρώ

Στην άσκηση αυτή έχουμε ίσες εξαμηνιαίες δόσεις και, επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε επιτόκιο εξαμήνου και να μετρήσουμε το χρόνο σε εξάμηνα.

Το εξαμηνιαίο επιτόκιο θα είναι 10%/2= 5%.

Η διάρκεια του δανείου θα είναι 8 έτη, δηλαδή 16 εξάμηνα.

Αφού η εξόφληση γίνεται με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις, το σύστημα απόσβεσης είναι το προοδευτικό και το τοκοχρεολύσιο θα δίνεται από τη σχέση:

$R=K/\alpha_{n|i}$ $=180.000.000/\alpha_{16|5\%}$ =180.000.000/10,8378 =16.608.537 ευρώ.

Άσκηση 5

Ένας οργανισμός έχει εκδώσει ομολογιακό δάνειο με επιτόκιο 8% και διάρκεια 9 ετών. Αν κάθε έτος πληρώνει τοκοχρεολύσιο 3.529.425 ευρώ και η ονομαστική αξία κάθε ομολογίας είναι 1200 ευρώ, να βρεθεί ο αριθμός όλων των αρχικών ομολογιών του δανείου.

Απάντηση/Λύση

Αφού το τοκοχρεολύσιο είναι ίδιο κάθε έτος, η απόσβεση του δανείου γίνεται με το προοδευτικό σύστημα. Ο τύπος του τοκοχρεολυσίου είναι R=K/an|i. Αντικαθιστώντας, ο τύπος αυτός γίνεται:

3.529.425=K/ a9|8% ⇔ K= 3.529.425*6,2469=22.047.965 ευρώ.

Αφού η αξία κάθε ομολογίας είναι 1200 ευρώ και το κεφάλαιο του δανείου είναι 22.047.965 ευρώ, το πλήθος των ομολογιών θα υπολογισθεί με τη διαίρεση 22.047.965/ 1200= 18373,3. Σε ακέραιο, δηλαδή, αριθμό 18.374 ομολογίες.

Άσκηση 6

Συμπληρώστε τα κενά του πίνακα απόσβεσης (4) της επόμενης σελίδας.
Υπόδειξη: Υπολογίστε την αξία κάθε ομολογίας.
Υπολογίστε το επιτόκιο.
Υπολογίστε το κεφάλαιο του δανείου και το πλήθος αρχικών ομολογιών.

Έτος	Εξοφλημένες ομολογίες Nρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο
1ο	17.045	12.000.000	22.567.500			
2ο	18.409			34.567.500		
3ο						

4ο						
5ο						

Πίνακας 9.5. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.6*

Απάντηση/Λύση

Η αξία κάθε ομολογίας θα υπολογισθεί, διαιρώντας το χρεολύσιο 22.567.500 δια το πλήθος 17.045 των εξοφλημένων ομολογιών του πρώτου έτους, και θα είναι 22.567.500 / 17.045= 1324 ευρώ.
Το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους θα είναι 12.000.000+22.567.500=34.567.500 ευρώ, ίσο με το τοκοχρεολύσιο του δευτέρου έτους. Επομένως το σύστημα απόσβεσης θα είναι το προοδευτικό σύστημα που δίνει ίσα τοκοχρεολύσια.
Το επιτόκιο i θα υπολογισθεί από το πλήθος ομολογιών που εξοφλούνται το δεύτερο έτος, που στο προοδευτικό σύστημα είναι N2=N1*(1+ i). Αντικαθιστώντας, έχουμε:
18.049=17.045 *(1+ i) ⇔ (1+ i)= 18.049/17.045=1,06 <=> i =0,06=6%.

Το κεφάλαιο του δανείου θα υπολογισθεί από τη σχέση υπολογισμού του τόκου πρώτου έτους:
I=K*i ⇔ K=I/i ⇔ K=12.000.000/0,06=200.000.000 ευρώ.

Η αξία κάθε ομολογίας βρέθηκε 1.324 ευρώ και το πλήθος όλων των αρχικών ομολογιών υπολογίζεται διαιρώντας το ποσό του δανείου με την αξία της ομολογίας:
200.000.000 /1.324= 151.057 ομολογίες.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται τα επόμενα έτη και συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης, όπως φαίνεται παρακάτω:

Έτος	**Εξοφλημένες ομολογίες Νρ**	**τόκος**	**χρεολύσιο**	**τοκοχρεολύσιο**	**εξοφλήθηκε**	**Υπόλοιπο**
1ο	17.045	12.000.000	22.567.500	34.567.500	22.567.500	127.432.500
2ο	18.409	10.197.590	24.369.910	34.567.500	46.937.410	103.062.590
3ο	19.882	8.247.426	26.320.074	34.567.500	73.257.484	76.742.516
4ο	21.473	6.141.202	28.426.298	34.567.500	101.683.781	48.316.219
5ο	19.882	3.866.431	30.701.069	34.567.500	132.384.850	17.615.150

Πίνακας 9.6. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.6*

Άσκηση 7

Συμπληρώστε τα κενά του παρακάτω πίνακα απόσβεσης. Προοδευτικό σύστημα απόσβεσης ομολογιακού δανείου.

Έτος	**Εξοφλημένες ομολογίες Νρ**	**τόκος**	**χρεολύσιο**	**τοκοχρεολύσιο**	**εξοφλήθηκε**	**υπόλοιπο**
1ο	15.000		30.000.000			120.000.000
2ο		18.000.000				

3ο						

Πίνακας 9.7. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.7α*

Απάντηση/Λύση

Η αξία κάθε ομολογίας θα υπολογισθεί, διαιρώντας το χρεολύσιο 30.000.000 δια το πλήθος 15.000 των εξοφλημένων ομολογιών του πρώτου έτους και θα είναι 30.000.000 / 15.000 = 2.000 ευρώ.
Το ποσό που εξοφλήθηκε το πρώτο έτος είναι 30.000.000 ευρώ (χρεολύσιο) και αφού το υπόλοιπο δανείου είναι 120.000.000, το συνολικό ποσό δανείου θα είναι Κ=120.000.000+30.000.000=150.000.000 ευρώ.
Ο τόκος του δευτέρου έτους θα είναι 120.000.000*i=18.000.000.
Επομένως i=18.000.000/120.000.000= 0,15=15%.

Το σύστημα απόσβεσης είναι το προοδευτικό σύστημα που δίνει ίσα τοκοχρεολύσια και πλήθος ομολογιών κάθε έτος αυξανόμενο κατά (1+i).

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον τόκο κάθε έτους και το πλήθος των ομολογιών που εξοφλούνται τα επόμενα έτη και συμπληρώνουμε τον πίνακα απόσβεσης, όπως φαίνεται παρακάτω:

Έτος	Εξοφλημένες ομολογίες Nρ	τόκος	χρεολύσιο	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	υπόλοιπο
1ο	15.000	22.500.000	30.000.000	52.500.000	30.000.000	120.000.000
2ο	17.250	18.000.000	34.500.000	52.500.000	64.500.000	85.500.000
3ο	19.838	12.825.000	39.675.000	52.500.000	104.175.000	45.825.000

Πίνακας 9.8. *Πίνακας απόσβεσης άσκησης 9.7β*

Παράρτημα

	i			πίνακας υπολογισμού (1+i)^n				ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ								
n	**0,5%**	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**3,5%**	**4,0%**	**4,5%**	**5,0%**	**5,5%**	**6,0%**	**6,5%**	**7,0%**	**7,5%**	**8,0%**
1	1,0050	1,0100	1,0150	1,0200	1,0250	1,0300	1,0350	1,0400	1,0450	1,0500	1,0550	1,0600	1,0650	1,0700	1,0750	1,0800
2	1,0100	1,0201	1,0302	1,0404	1,0506	1,0609	1,0712	1,0816	1,0920	1,1025	1,1130	1,1236	1,1342	1,1449	1,1556	1,1664
3	1,0151	1,0303	1,0457	1,0612	1,0769	1,0927	1,1087	1,1249	1,1412	1,1576	1,1742	1,1910	1,2079	1,2250	1,2423	1,2597
4	1,0202	1,0406	1,0614	1,0824	1,1038	1,1255	1,1475	1,1699	1,1925	1,2155	1,2388	1,2625	1,2865	1,3108	1,3355	1,3605
5	1,0253	1,0510	1,0773	1,1041	1,1314	1,1593	1,1877	1,2167	1,2462	1,2763	1,3070	1,3382	1,3701	1,4026	1,4356	1,4693
6	1,0304	1,0615	1,0934	1,1262	1,1597	1,1941	1,2293	1,2653	1,3023	1,3401	1,3788	1,4185	1,4591	1,5007	1,5433	1,5869
7	1,0355	1,0721	1,1098	1,1487	1,1887	1,2299	1,2723	1,3159	1,3609	1,4071	1,4547	1,5036	1,5540	1,6058	1,6590	1,7138
8	1,0407	1,0829	1,1265	1,1717	1,2184	1,2668	1,3168	1,3686	1,4221	1,4775	1,5347	1,5938	1,6550	1,7182	1,7835	1,8509
9	1,0459	1,0937	1,1434	1,1951	1,2489	1,3048	1,3629	1,4233	1,4861	1,5513	1,6191	1,6895	1,7626	1,8385	1,9172	1,9990
10	1,0511	1,1046	1,1605	1,2190	1,2801	1,3439	1,4106	1,4802	1,5530	1,6289	1,7081	1,7908	1,8771	1,9672	2,0610	2,1589
11	1,0564	1,1157	1,1779	1,2434	1,3121	1,3842	1,4600	1,5395	1,6229	1,7103	1,8021	1,8983	1,9992	2,1049	2,2156	2,3316
12	1,0617	1,1268	1,1956	1,2682	1,3449	1,4258	1,5111	1,6010	1,6959	1,7959	1,9012	2,0122	2,1291	2,2522	2,3818	2,5182
13	1,0670	1,1381	1,2136	1,2936	1,3785	1,4685	1,5640	1,6651	1,7722	1,8856	2,0058	2,1329	2,2675	2,4098	2,5604	2,7196
14	1,0723	1,1495	1,2318	1,3195	1,4130	1,5126	1,6187	1,7317	1,8519	1,9799	2,1161	2,2609	2,4149	2,5785	2,7524	2,9372
15	1,0777	1,1610	1,2502	1,3459	1,4483	1,5580	1,6753	1,8009	1,9353	2,0789	2,2325	2,3966	2,5718	2,7590	2,9589	3,1722
16	1,0831	1,1726	1,2690	1,3728	1,4845	1,6047	1,7340	1,8730	2,0224	2,1829	2,3553	2,5404	2,7390	2,9522	3,1808	3,4259
17	1,0885	1,1843	1,2880	1,4002	1,5216	1,6528	1,7947	1,9479	2,1134	2,2920	2,4848	2,6928	2,9170	3,1588	3,4194	3,7000
18	1,0939	1,1961	1,3073	1,4282	1,5597	1,7024	1,8575	2,0258	2,2085	2,4066	2,6215	2,8543	3,1067	3,3799	3,6758	3,9960
19	1,0994	1,2081	1,3270	1,4568	1,5987	1,7535	1,9225	2,1068	2,3079	2,5270	2,7656	3,0256	3,3086	3,6165	3,9515	4,3157
20	1,1049	1,2202	1,3469	1,4859	1,6386	1,8061	1,9898	2,1911	2,4117	2,6533	2,9178	3,2071	3,5236	3,8697	4,2479	4,6610
21	1,1104	1,2324	1,3671	1,5157	1,6796	1,8603	2,0594	2,2788	2,5202	2,7860	3,0782	3,3996	3,7527	4,1406	4,5664	5,0338
22	1,1160	1,2447	1,3876	1,5460	1,7216	1,9161	2,1315	2,3699	2,6337	2,9253	3,2475	3,6035	3,9966	4,4304	4,9089	5,4365
23	1,1216	1,2572	1,4084	1,5769	1,7646	1,9736	2,2061	2,4647	2,7522	3,0715	3,4262	3,8197	4,2564	4,7405	5,2771	5,8715
24	1,1272	1,2697	1,4295	1,6084	1,8087	2,0328	2,2833	2,5633	2,8760	3,2251	3,6146	4,0489	4,5331	5,0724	5,6729	6,3412
25	1,1328	1,2824	1,4509	1,6406	1,8539	2,0938	2,3632	2,6658	3,0054	3,3864	3,8134	4,2919	4,8277	5,4274	6,0983	6,8485
26	1,1385	1,2953	1,4727	1,6734	1,9003	2,1566	2,4460	2,7725	3,1407	3,5557	4,0231	4,5494	5,1415	5,8074	6,5557	7,3964
27	1,1442	1,3082	1,4948	1,7069	1,9478	2,2213	2,5316	2,8834	3,2820	3,7335	4,2444	4,8223	5,4757	6,2139	7,0474	7,9881
28	1,1499	1,3213	1,5172	1,7410	1,9965	2,2879	2,6202	2,9987	3,4297	3,9201	4,4778	5,1117	5,8316	6,6488	7,5759	8,6271
29	1,1556	1,3345	1,5400	1,7758	2,0464	2,3566	2,7119	3,1187	3,5840	4,1161	4,7241	5,4184	6,2107	7,1143	8,1441	9,3173
30	1,1614	1,3478	1,5631	1,8114	2,0976	2,4273	2,8068	3,2434	3,7453	4,3219	4,9840	5,7435	6,6144	7,6123	8,7550	10,0627
31	1,1672	1,3613	1,5865	1,8476	2,1500	2,5001	2,9050	3,3731	3,9139	4,5380	5,2581	6,0881	7,0443	8,1451	9,4116	10,8677
32	1,1730	1,3749	1,6103	1,8845	2,2038	2,5751	3,0067	3,5081	4,0900	4,7649	5,5473	6,4534	7,5022	8,7153	10,1174	11,7371
33	1,1789	1,3887	1,6345	1,9222	2,2589	2,6523	3,1119	3,6484	4,2740	5,0032	5,8524	6,8406	7,9898	9,3253	10,8763	12,6760
34	1,1848	1,4026	1,6590	1,9607	2,3153	2,7319	3,2209	3,7943	4,4664	5,2533	6,1742	7,2510	8,5092	9,9781	11,6920	13,6901
35	1,1907	1,4166	1,6839	1,9999	2,3732	2,8139	3,3336	3,9461	4,6673	5,5160	6,5138	7,6861	9,0623	10,6766	12,5689	14,7853
36	1,1967	1,4308	1,7091	2,0399	2,4325	2,8983	3,4503	4,1039	4,8774	5,7918	6,8721	8,1473	9,6513	11,4239	13,5115	15,9682
37	1,2027	1,4451	1,7348	2,0807	2,4933	2,9852	3,5710	4,2681	5,0969	6,0814	7,2501	8,6361	10,2786	12,2236	14,5249	17,2456
38	1,2087	1,4595	1,7608	2,1223	2,5557	3,0748	3,6960	4,4388	5,3262	6,3855	7,6488	9,1543	10,9467	13,0793	15,6143	18,6253
39	1,2147	1,4741	1,7872	2,1647	2,6196	3,1670	3,8254	4,6164	5,5659	6,7048	8,0695	9,7035	11,6583	13,9948	16,7853	20,1153
40	1,2208	1,4889	1,8140	2,2080	2,6851	3,2620	3,9593	4,8010	5,8164	7,0400	8,5133	10,2857	12,4161	14,9745	18,0442	21,7245

	i			πίνακας υπολογισμού U^n				ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ								
n	**0,5%**	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**3,5%**	**4,0%**	**4,5%**	**5,0%**	**5,5%**	**6,0%**	**6,5%**	**7,0%**	**7,5%**	**8,0%**
1	0,9950	0,9901	0,9852	0,9804	0,9756	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259
2	0,9901	0,9803	0,9707	0,9612	0,9518	0,9426	0,9335	0,9246	0,9157	0,9070	0,8985	0,8900	0,8817	0,8734	0,8653	0,8573
3	0,9851	0,9706	0,9563	0,9423	0,9286	0,9151	0,9019	0,8890	0,8763	0,8638	0,8516	0,8396	0,8278	0,8163	0,8050	0,7938
4	0,9802	0,9610	0,9422	0,9238	0,9060	0,8885	0,8714	0,8548	0,8386	0,8227	0,8072	0,7921	0,7773	0,7629	0,7488	0,7350
5	0,9754	0,9515	0,9283	0,9057	0,8839	0,8626	0,8420	0,8219	0,8025	0,7835	0,7651	0,7473	0,7299	0,7130	0,6966	0,6806
6	0,9705	0,9420	0,9145	0,8880	0,8623	0,8375	0,8135	0,7903	0,7679	0,7462	0,7252	0,7050	0,6853	0,6663	0,6480	0,6302
7	0,9657	0,9327	0,9010	0,8706	0,8413	0,8131	0,7860	0,7599	0,7348	0,7107	0,6874	0,6651	0,6435	0,6227	0,6028	0,5835
8	0,9609	0,9235	0,8877	0,8535	0,8207	0,7894	0,7594	0,7307	0,7032	0,6768	0,6516	0,6274	0,6042	0,5820	0,5607	0,5403
9	0,9561	0,9143	0,8746	0,8368	0,8007	0,7664	0,7337	0,7026	0,6729	0,6446	0,6176	0,5919	0,5674	0,5439	0,5216	0,5002
10	0,9513	0,9053	0,8617	0,8203	0,7812	0,7441	0,7089	0,6756	0,6439	0,6139	0,5854	0,5584	0,5327	0,5083	0,4852	0,4632
11	0,9466	0,8963	0,8489	0,8043	0,7621	0,7224	0,6849	0,6496	0,6162	0,5847	0,5549	0,5268	0,5002	0,4751	0,4513	0,4289
12	0,9419	0,8874	0,8364	0,7885	0,7436	0,7014	0,6618	0,6246	0,5897	0,5568	0,5260	0,4970	0,4697	0,4440	0,4199	0,3971
13	0,9372	0,8787	0,8240	0,7730	0,7254	0,6810	0,6394	0,6006	0,5643	0,5303	0,4986	0,4688	0,4410	0,4150	0,3906	0,3677
14	0,9326	0,8700	0,8118	0,7579	0,7077	0,6611	0,6178	0,5775	0,5400	0,5051	0,4726	0,4423	0,4141	0,3878	0,3633	0,3405
15	0,9279	0,8613	0,7999	0,7430	0,6905	0,6419	0,5969	0,5553	0,5167	0,4810	0,4479	0,4173	0,3888	0,3624	0,3380	0,3152
16	0,9233	0,8528	0,7880	0,7284	0,6736	0,6232	0,5767	0,5339	0,4945	0,4581	0,4246	0,3936	0,3651	0,3387	0,3144	0,2919
17	0,9187	0,8444	0,7764	0,7142	0,6572	0,6050	0,5572	0,5134	0,4732	0,4363	0,4024	0,3714	0,3428	0,3166	0,2925	0,2703
18	0,9141	0,8360	0,7649	0,7002	0,6412	0,5874	0,5384	0,4936	0,4528	0,4155	0,3815	0,3503	0,3219	0,2959	0,2720	0,2502
19	0,9096	0,8277	0,7536	0,6864	0,6255	0,5703	0,5202	0,4746	0,4333	0,3957	0,3616	0,3305	0,3022	0,2765	0,2531	0,2317
20	0,9051	0,8195	0,7425	0,6730	0,6103	0,5537	0,5026	0,4564	0,4146	0,3769	0,3427	0,3118	0,2838	0,2584	0,2354	0,2145
21	0,9006	0,8114	0,7315	0,6598	0,5954	0,5375	0,4856	0,4388	0,3968	0,3589	0,3249	0,2942	0,2665	0,2415	0,2190	0,1987
22	0,8961	0,8034	0,7207	0,6468	0,5809	0,5219	0,4692	0,4220	0,3797	0,3418	0,3079	0,2775	0,2502	0,2257	0,2037	0,1839
23	0,8916	0,7954	0,7100	0,6342	0,5667	0,5067	0,4533	0,4057	0,3634	0,3256	0,2919	0,2618	0,2349	0,2109	0,1895	0,1703
24	0,8872	0,7876	0,6995	0,6217	0,5529	0,4919	0,4380	0,3901	0,3477	0,3101	0,2767	0,2470	0,2206	0,1971	0,1763	0,1577
25	0,8828	0,7798	0,6892	0,6095	0,5394	0,4776	0,4231	0,3751	0,3327	0,2953	0,2622	0,2330	0,2071	0,1842	0,1640	0,1460
26	0,8784	0,7720	0,6790	0,5976	0,5262	0,4637	0,4088	0,3607	0,3184	0,2812	0,2486	0,2198	0,1945	0,1722	0,1525	0,1352
27	0,8740	0,7644	0,6690	0,5859	0,5134	0,4502	0,3950	0,3468	0,3047	0,2678	0,2356	0,2074	0,1826	0,1609	0,1419	0,1252
28	0,8697	0,7568	0,6591	0,5744	0,5009	0,4371	0,3817	0,3335	0,2916	0,2551	0,2233	0,1956	0,1715	0,1504	0,1320	0,1159
29	0,8653	0,7493	0,6494	0,5631	0,4887	0,4243	0,3687	0,3207	0,2790	0,2429	0,2117	0,1846	0,1610	0,1406	0,1228	0,1073
30	0,8610	0,7419	0,6398	0,5521	0,4767	0,4120	0,3563	0,3083	0,2670	0,2314	0,2006	0,1741	0,1512	0,1314	0,1142	0,0994
31	0,8567	0,7346	0,6303	0,5412	0,4651	0,4000	0,3442	0,2965	0,2555	0,2204	0,1902	0,1643	0,1420	0,1228	0,1063	0,0920
32	0,8525	0,7273	0,6210	0,5306	0,4538	0,3883	0,3326	0,2851	0,2445	0,2099	0,1803	0,1550	0,1333	0,1147	0,0988	0,0852
33	0,8482	0,7201	0,6118	0,5202	0,4427	0,3770	0,3213	0,2741	0,2340	0,1999	0,1709	0,1462	0,1252	0,1072	0,0919	0,0789
34	0,8440	0,7130	0,6028	0,5100	0,4319	0,3660	0,3105	0,2636	0,2239	0,1904	0,1620	0,1379	0,1175	0,1002	0,0855	0,0730
35	0,8398	0,7059	0,5939	0,5000	0,4214	0,3554	0,3000	0,2534	0,2143	0,1813	0,1535	0,1301	0,1103	0,0937	0,0796	0,0676
36	0,8356	0,6989	0,5851	0,4902	0,4111	0,3450	0,2898	0,2437	0,2050	0,1727	0,1455	0,1227	0,1036	0,0875	0,0740	0,0626
37	0,8315	0,6920	0,5764	0,4806	0,4011	0,3350	0,2800	0,2343	0,1962	0,1644	0,1379	0,1158	0,0973	0,0818	0,0688	0,0580
38	0,8274	0,6852	0,5679	0,4712	0,3913	0,3252	0,2706	0,2253	0,1878	0,1566	0,1307	0,1092	0,0914	0,0765	0,0640	0,0537
39	0,8232	0,6784	0,5595	0,4619	0,3817	0,3158	0,2614	0,2166	0,1797	0,1491	0,1239	0,1031	0,0858	0,0715	0,0596	0,0497
40	0,8191	0,6717	0,5513	0,4529	0,3724	0,3066	0,2526	0,2083	0,1719	0,1420	0,1175	0,0972	0,0805	0,0668	0,0554	0,0460

	i			πίνακας υπολογισμού αn|i				ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ								
n	**0,5%**	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**3,5%**	**4,0%**	**4,5%**	**5,0%**	**5,5%**	**6,0%**	**6,5%**	**7,0%**	**7,5%**	**8,0%**
1	0,9950	0,9901	0,9852	0,9804	0,9756	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259
2	1,9851	1,9704	1,9559	1,9416	1,9274	1,9135	1,8997	1,8861	1,8727	1,8594	1,8463	1,8334	1,8206	1,8080	1,7956	1,7833
3	2,9702	2,9410	2,9122	2,8839	2,8560	2,8286	2,8016	2,7751	2,7490	2,7232	2,6979	2,6730	2,6485	2,6243	2,6005	2,5771
4	3,9505	3,9020	3,8544	3,8077	3,7620	3,7171	3,6731	3,6299	3,5875	3,5460	3,5052	3,4651	3,4258	3,3872	3,3493	3,3121
5	4,9259	4,8534	4,7826	4,7135	4,6458	4,5797	4,5151	4,4518	4,3900	4,3295	4,2703	4,2124	4,1557	4,1002	4,0459	3,9927
6	5,8964	5,7955	5,6972	5,6014	5,5081	5,4172	5,3286	5,2421	5,1579	5,0757	4,9955	4,9173	4,8410	4,7665	4,6938	4,6229
7	6,8621	6,7282	6,5982	6,4720	6,3494	6,2303	6,1145	6,0021	5,8927	5,7864	5,6830	5,5824	5,4845	5,3893	5,2966	5,2064
8	7,8230	7,6517	7,4859	7,3255	7,1701	7,0197	6,8740	6,7327	6,5959	6,4632	6,3346	6,2098	6,0888	5,9713	5,8573	5,7466
9	8,7791	8,5660	8,3605	8,1622	7,9709	7,7861	7,6077	7,4353	7,2688	7,1078	6,9522	6,8017	6,6561	6,5152	6,3789	6,2469
10	9,7304	9,4713	9,2222	8,9826	8,7521	8,5302	8,3166	8,1109	7,9127	7,7217	7,5376	7,3601	7,1888	7,0236	6,8641	6,7101
11	10,6770	10,3676	10,0711	9,7868	9,5142	9,2526	9,0016	8,7605	8,5289	8,3064	8,0925	7,8869	7,6890	7,4987	7,3154	7,1390
12	11,6189	11,2551	10,9075	10,5753	10,2578	9,9540	9,6633	9,3851	9,1186	8,8633	8,6185	8,3838	8,1587	7,9427	7,7353	7,5361
13	12,5562	12,1337	11,7315	11,3484	10,9832	10,6350	10,3027	9,9856	9,6829	9,3936	9,1171	8,8527	8,5997	8,3577	8,1258	7,9038
14	13,4887	13,0037	12,5434	12,1062	11,6909	11,2961	10,9205	10,5631	10,2228	9,8986	9,5896	9,2950	9,0138	8,7455	8,4892	8,2442
15	14,4166	13,8651	13,3432	12,8493	12,3814	11,9379	11,5174	11,1184	10,7395	10,3797	10,0376	9,7122	9,4027	9,1079	8,8271	8,5595
16	15,3399	14,7179	14,1313	13,5777	13,0550	12,5611	12,0941	11,6523	11,2340	10,8378	10,4622	10,1059	9,7678	9,4466	9,1415	8,8514
17	16,2586	15,5623	14,9076	14,2919	13,7122	13,1661	12,6513	12,1657	11,7072	11,2741	10,8646	10,4773	10,1106	9,7632	9,4340	9,1216
18	17,1728	16,3983	15,6726	14,9920	14,3534	13,7535	13,1897	12,6593	12,1600	11,6896	11,2461	10,8276	10,4325	10,0591	9,7060	9,3719
19	18,0824	17,2260	16,4262	15,6785	14,9789	14,3238	13,7098	13,1339	12,5933	12,0853	11,6077	11,1581	10,7347	10,3356	9,9591	9,6036
20	18,9874	18,0456	17,1686	16,3514	15,5892	14,8775	14,2124	13,5903	13,0079	12,4622	11,9504	11,4699	11,0185	10,5940	10,1945	9,8181
21	19,8880	18,8570	17,9001	17,0112	16,1845	15,4150	14,6980	14,0292	13,4047	12,8212	12,2752	11,7641	11,2850	10,8355	10,4135	10,0168
22	20,7841	19,6604	18,6208	17,6580	16,7654	15,9369	15,1671	14,4511	13,7844	13,1630	12,5832	12,0416	11,5352	11,0612	10,6172	10,2007
23	21,6757	20,4558	19,3309	18,2922	17,3321	16,4436	15,6204	14,8568	14,1478	13,4886	12,8750	12,3034	11,7701	11,2722	10,8067	10,3711
24	22,5629	21,2434	20,0304	18,9139	17,8850	16,9355	16,0584	15,2470	14,4955	13,7986	13,1517	12,5504	11,9907	11,4693	10,9830	10,5288
25	23,4456	22,0232	20,7196	19,5235	18,4244	17,4131	16,4815	15,6221	14,8282	14,0939	13,4139	12,7834	12,1979	11,6536	11,1469	10,6748
26	24,3240	22,7952	21,3986	20,1210	18,9506	17,8768	16,8904	15,9828	15,1466	14,3752	13,6625	13,0032	12,3924	11,8258	11,2995	10,8100
27	25,1980	23,5596	22,0676	20,7069	19,4640	18,3270	17,2854	16,3296	15,4513	14,6430	13,8981	13,2105	12,5750	11,9867	11,4414	10,9352
28	26,0677	24,3164	22,7267	21,2813	19,9649	18,7641	17,6670	16,6631	15,7429	14,8981	14,1214	13,4062	12,7465	12,1371	11,5734	11,0511
29	26,9330	25,0658	23,3761	21,8444	20,4535	19,1885	18,0358	16,9837	16,0219	15,1411	14,3331	13,5907	12,9075	12,2777	11,6962	11,1584
30	27,7941	25,8077	24,0158	22,3965	20,9303	19,6004	18,3920	17,2920	16,2889	15,3725	14,5337	13,7648	13,0587	12,4090	11,8104	11,2578
31	28,6508	26,5423	24,6461	22,9377	21,3954	20,0004	18,7363	17,5885	16,5444	15,5928	14,7239	13,9291	13,2006	12,5318	11,9166	11,3498
32	29,5033	27,2696	25,2671	23,4683	21,8492	20,3888	19,0689	17,8736	16,7889	15,8027	14,9042	14,0840	13,3339	12,6466	12,0155	11,4350
33	30,3515	27,9897	25,8790	23,9886	22,2919	20,7658	19,3902	18,1476	17,0229	16,0025	15,0751	14,2302	13,4591	12,7538	12,1074	11,5139
34	31,1955	28,7027	26,4817	24,4986	22,7238	21,1318	19,7007	18,4112	17,2468	16,1929	15,2370	14,3681	13,5766	12,8540	12,1929	11,5869
35	32,0354	29,4086	27,0756	24,9986	23,1452	21,4872	20,0007	18,6646	17,4610	16,3742	15,3906	14,4982	13,6870	12,9477	12,2725	11,6546
36	32,8710	30,1075	27,6607	25,4888	23,5563	21,8323	20,2905	18,9083	17,6660	16,5469	15,5361	14,6210	13,7906	13,0352	12,3465	11,7172
37	33,7025	30,7995	28,2371	25,9695	23,9573	22,1672	20,5705	19,1426	17,8622	16,7113	15,6740	14,7368	13,8879	13,1170	12,4154	11,7752
38	34,5299	31,4847	28,8051	26,4406	24,3486	22,4925	20,8411	19,3679	18,0500	16,8679	15,8047	14,8460	13,9792	13,1935	12,4794	11,8289
39	35,3531	32,1630	29,3646	26,9026	24,7303	22,8082	21,1025	19,5845	18,2297	17,0170	15,9287	14,9491	14,0650	13,2649	12,5390	11,8786
40	36,1722	32,8347	29,9158	27,3555	25,1028	23,1148	21,3551	19,7928	18,4016	17,1591	16,0461	15,0463	14,1455	13,3317	12,5944	11,9246

	i			πίνακας υπολογισμού $s_{n|i}$				ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΡΑΝΤΑΣ								
n	**0,5%**	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**3,5%**	**4,0%**	**4,5%**	**5,0%**	**5,5%**	**6,0%**	**6,5%**	**7,0%**	**7,5%**	**8,0%**
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0050	2,0100	2,0150	2,0200	2,0250	2,0300	2,0350	2,0400	2,0450	2,0500	2,0550	2,0600	2,0650	2,0700	2,0750	2,0800
3	3,0150	3,0301	3,0452	3,0604	3,0756	3,0909	3,1062	3,1216	3,1370	3,1525	3,1680	3,1836	3,1992	3,2149	3,2306	3,2464
4	4,0301	4,0604	4,0909	4,1216	4,1525	4,1836	4,2149	4,2465	4,2782	4,3101	4,3423	4,3746	4,4072	4,4399	4,4729	4,5061
5	5,0503	5,1010	5,1523	5,2040	5,2563	5,3091	5,3625	5,4163	5,4707	5,5256	5,5811	5,6371	5,6936	5,7507	5,8084	5,8666
6	6,0755	6,1520	6,2296	6,3081	6,3877	6,4684	6,5502	6,6330	6,7169	6,8019	6,8881	6,9753	7,0637	7,1533	7,2440	7,3359
7	7,1059	7,2135	7,3230	7,4343	7,5474	7,6625	7,7794	7,8983	8,0192	8,1420	8,2669	8,3938	8,5229	8,6540	8,7873	8,9228
8	8,1414	8,2857	8,4328	8,5830	8,7361	8,8923	9,0517	9,2142	9,3800	9,5491	9,7216	9,8975	10,0769	10,2598	10,4464	10,6366
9	9,1821	9,3685	9,5593	9,7546	9,9545	10,1591	10,3685	10,5828	10,8021	11,0266	11,2563	11,4913	11,7319	11,9780	12,2298	12,4876
10	10,2280	10,4622	10,7027	10,9497	11,2034	11,4639	11,7314	12,0061	12,2882	12,5779	12,8754	13,1808	13,4944	13,8164	14,1471	14,4866
11	11,2792	11,5668	11,8633	12,1687	12,4835	12,8078	13,1420	13,4864	13,8412	14,2068	14,5835	14,9716	15,3716	15,7836	16,2081	16,6455
12	12,3356	12,6825	13,0412	13,4121	13,7956	14,1920	14,6020	15,0258	15,4640	15,9171	16,3856	16,8699	17,3707	17,8885	18,4237	18,9771
13	13,3972	13,8093	14,2368	14,6803	15,1404	15,6178	16,1130	16,6268	17,1599	17,7130	18,2868	18,8821	19,4998	20,1406	20,8055	21,4953
14	14,4642	14,9474	15,4504	15,9739	16,5190	17,0863	17,6770	18,2919	18,9321	19,5986	20,2926	21,0151	21,7673	22,5505	23,3659	24,2149
15	15,5365	16,0969	16,6821	17,2934	17,9319	18,5989	19,2957	20,0236	20,7841	21,5786	22,4087	23,2760	24,1822	25,1290	26,1184	27,1521
16	16,6142	17,2579	17,9324	18,6393	19,3802	20,1569	20,9710	21,8245	22,7193	23,6575	24,6411	25,6725	26,7540	27,8881	29,0772	30,3243
17	17,6973	18,4304	19,2014	20,0121	20,8647	21,7616	22,7050	23,6975	24,7417	25,8404	26,9964	28,2129	29,4930	30,8402	32,2580	33,7502
18	18,7858	19,6147	20,4894	21,4123	22,3863	23,4144	24,4997	25,6454	26,8551	28,1324	29,4812	30,9057	32,4101	33,9990	35,6774	37,4502
19	19,8797	20,8109	21,7967	22,8406	23,9460	25,1169	26,3572	27,6712	29,0636	30,5390	32,1027	33,7600	35,5167	37,3790	39,3532	41,4463
20	20,9791	22,0190	23,1237	24,2974	25,5447	26,8704	28,2797	29,7781	31,3714	33,0660	34,8683	36,7856	38,8253	40,9955	43,3047	45,7620
21	22,0840	23,2392	24,4705	25,7833	27,1833	28,6765	30,2695	31,9692	33,7831	35,7193	37,7861	39,9927	42,3490	44,8652	47,5525	50,4229
22	23,1944	24,4716	25,8376	27,2990	28,8629	30,5368	32,3289	34,2480	36,3034	38,5052	40,8643	43,3923	46,1016	49,0057	52,1190	55,4568
23	24,3104	25,7163	27,2251	28,8450	30,5844	32,4529	34,4604	36,6179	38,9370	41,4305	44,1118	46,9958	50,0982	53,4361	57,0279	60,8933
24	25,4320	26,9735	28,6335	30,4219	32,3490	34,4265	36,6665	39,0826	41,6892	44,5020	47,5380	50,8156	54,3546	58,1767	62,3050	66,7648
25	26,5591	28,2432	30,0630	32,0303	34,1578	36,4593	38,9499	41,6459	44,5652	47,7271	51,1526	54,8645	58,8877	63,2490	67,9779	73,1059
26	27,6919	29,5256	31,5140	33,6709	36,0117	38,5530	41,3131	44,3117	47,5706	51,1135	54,9660	59,1564	63,7154	68,6765	74,0762	79,9544
27	28,8304	30,8209	32,9867	35,3443	37,9120	40,7096	43,7591	47,0842	50,7113	54,6691	58,9891	63,7058	68,8569	74,4838	80,6319	87,3508
28	29,9745	32,1291	34,4815	37,0512	39,8598	42,9309	46,2906	49,9676	53,9933	58,4026	63,2335	68,5281	74,3326	80,6977	87,6793	95,3388
29	31,1244	33,4504	35,9987	38,7922	41,8563	45,2189	48,9108	52,9663	57,4230	62,3227	67,7114	73,6398	80,1642	87,3465	95,2553	103,9659
30	32,2800	34,7849	37,5387	40,5681	43,9027	47,5754	51,6227	56,0849	61,0071	66,4388	72,4355	79,0582	86,3749	94,4608	103,3994	113,2832
31	33,4414	36,1327	39,1018	42,3794	46,0003	50,0027	54,4295	59,3283	64,7524	70,7608	77,4194	84,8017	92,9892	102,0730	112,1544	123,3459
32	34,6086	37,4941	40,6883	44,2270	48,1503	52,5028	57,3345	62,7015	68,6662	75,2988	82,6775	90,8898	100,0335	110,2182	121,5659	134,2135
33	35,7817	38,8690	42,2986	46,1116	50,3540	55,0778	60,3412	66,2095	72,7562	80,0638	88,2248	97,3432	107,5357	118,9334	131,6834	145,9506
34	36,9606	40,2577	43,9331	48,0338	52,6129	57,7302	63,4532	69,8579	77,0303	85,0670	94,0771	104,1838	115,5255	128,2588	142,5596	158,6267
35	38,1454	41,6603	45,5921	49,9945	54,9282	60,4621	66,6740	73,6522	81,4966	90,3203	100,2514	111,4348	124,0347	138,2369	154,2516	172,3168
36	39,3361	43,0769	47,2760	51,9944	57,3014	63,2759	70,0076	77,5983	86,1640	95,8363	106,7652	119,1209	133,0969	148,9135	166,8205	187,1021
37	40,5328	44,5076	48,9851	54,0343	59,7339	66,1742	73,4579	81,7022	91,0413	101,6281	113,6373	127,2681	142,7482	160,3374	180,3320	203,0703
38	41,7354	45,9527	50,7199	56,1149	62,2273	69,1594	77,0289	85,9703	96,1382	107,7095	120,8873	135,9042	153,0269	172,5610	194,8569	220,3159
39	42,9441	47,4123	52,4807	58,2372	64,7830	72,2342	80,7249	90,4091	101,4644	114,0950	128,5361	145,0585	163,9736	185,6403	210,4712	238,9412
40	44,1588	48,8864	54,2679	60,4020	67,4026	75,4013	84,5503	95,0255	107,0303	120,7998	136,6056	154,7620	175,6319	199,6351	227,2565	259,0565

	i			πίνακας υπολογισμού Pn¦i				ΧΡΕΟΛΥΣΙΟ								
n	**0,5%**	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**3,5%**	**4,0%**	**4,5%**	**5,0%**	**5,5%**	**6,0%**	**6,5%**	**7,0%**	**7,5%**	**8,0%**
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,4988	0,4975	0,4963	0,4950	0,4938	0,4926	0,4914	0,4902	0,4890	0,4878	0,4866	0,4854	0,4843	0,4831	0,4819	0,4808
3	0,3317	0,3300	0,3284	0,3268	0,3251	0,3235	0,3219	0,3203	0,3188	0,3172	0,3157	0,3141	0,3126	0,3111	0,3095	0,3080
4	0,2481	0,2463	0,2444	0,2426	0,2408	0,2390	0,2373	0,2355	0,2337	0,2320	0,2303	0,2286	0,2269	0,2252	0,2236	0,2219
5	0,1980	0,1960	0,1941	0,1922	0,1902	0,1884	0,1865	0,1846	0,1828	0,1810	0,1792	0,1774	0,1756	0,1739	0,1722	0,1705
6	0,1646	0,1625	0,1605	0,1585	0,1565	0,1546	0,1527	0,1508	0,1489	0,1470	0,1452	0,1434	0,1416	0,1398	0,1380	0,1363
7	0,1407	0,1386	0,1366	0,1345	0,1325	0,1305	0,1285	0,1266	0,1247	0,1228	0,1210	0,1191	0,1173	0,1156	0,1138	0,1121
8	0,1228	0,1207	0,1186	0,1165	0,1145	0,1125	0,1105	0,1085	0,1066	0,1047	0,1029	0,1010	0,0992	0,0975	0,0957	0,0940
9	0,1089	0,1067	0,1046	0,1025	0,1005	0,0984	0,0964	0,0945	0,0926	0,0907	0,0888	0,0870	0,0852	0,0835	0,0818	0,0801
10	0,0978	0,0956	0,0934	0,0913	0,0893	0,0872	0,0852	0,0833	0,0814	0,0795	0,0777	0,0759	0,0741	0,0724	0,0707	0,0690
11	0,0887	0,0865	0,0843	0,0822	0,0801	0,0781	0,0761	0,0741	0,0722	0,0704	0,0686	0,0668	0,0651	0,0634	0,0617	0,0601
12	0,0811	0,0788	0,0767	0,0746	0,0725	0,0705	0,0685	0,0666	0,0647	0,0628	0,0610	0,0593	0,0576	0,0559	0,0543	0,0527
13	0,0746	0,0724	0,0702	0,0681	0,0660	0,0640	0,0621	0,0601	0,0583	0,0565	0,0547	0,0530	0,0513	0,0497	0,0481	0,0465
14	0,0691	0,0669	0,0647	0,0626	0,0605	0,0585	0,0566	0,0547	0,0528	0,0510	0,0493	0,0476	0,0459	0,0443	0,0428	0,0413
15	0,0644	0,0621	0,0599	0,0578	0,0558	0,0538	0,0518	0,0499	0,0481	0,0463	0,0446	0,0430	0,0414	0,0398	0,0383	0,0368
16	0,0602	0,0579	0,0558	0,0537	0,0516	0,0496	0,0477	0,0458	0,0440	0,0423	0,0406	0,0390	0,0374	0,0359	0,0344	0,0330
17	0,0565	0,0543	0,0521	0,0500	0,0479	0,0460	0,0440	0,0422	0,0404	0,0387	0,0370	0,0354	0,0339	0,0324	0,0310	0,0296
18	0,0532	0,0510	0,0488	0,0467	0,0447	0,0427	0,0408	0,0390	0,0372	0,0355	0,0339	0,0324	0,0309	0,0294	0,0280	0,0267
19	0,0503	0,0481	0,0459	0,0438	0,0418	0,0398	0,0379	0,0361	0,0344	0,0327	0,0312	0,0296	0,0282	0,0268	0,0254	0,0241
20	0,0477	0,0454	0,0432	0,0412	0,0391	0,0372	0,0354	0,0336	0,0319	0,0302	0,0287	0,0272	0,0258	0,0244	0,0231	0,0219
21	0,0453	0,0430	0,0409	0,0388	0,0368	0,0349	0,0330	0,0313	0,0296	0,0280	0,0265	0,0250	0,0236	0,0223	0,0210	0,0198
22	0,0431	0,0409	0,0387	0,0366	0,0346	0,0327	0,0309	0,0292	0,0275	0,0260	0,0245	0,0230	0,0217	0,0204	0,0192	0,0180
23	0,0411	0,0389	0,0367	0,0347	0,0327	0,0308	0,0290	0,0273	0,0257	0,0241	0,0227	0,0213	0,0200	0,0187	0,0175	0,0164
24	0,0393	0,0371	0,0349	0,0329	0,0309	0,0290	0,0273	0,0256	0,0240	0,0225	0,0210	0,0197	0,0184	0,0172	0,0161	0,0150
25	0,0377	0,0354	0,0333	0,0312	0,0293	0,0274	0,0257	0,0240	0,0224	0,0210	0,0195	0,0182	0,0170	0,0158	0,0147	0,0137
26	0,0361	0,0339	0,0317	0,0297	0,0278	0,0259	0,0242	0,0226	0,0210	0,0196	0,0182	0,0169	0,0157	0,0146	0,0135	0,0125
27	0,0347	0,0324	0,0303	0,0283	0,0264	0,0246	0,0229	0,0212	0,0197	0,0183	0,0170	0,0157	0,0145	0,0134	0,0124	0,0114
28	0,0334	0,0311	0,0290	0,0270	0,0251	0,0233	0,0216	0,0200	0,0185	0,0171	0,0158	0,0146	0,0135	0,0124	0,0114	0,0105
29	0,0321	0,0299	0,0278	0,0258	0,0239	0,0221	0,0204	0,0189	0,0174	0,0160	0,0148	0,0136	0,0125	0,0114	0,0105	0,0096
30	0,0310	0,0287	0,0266	0,0246	0,0228	0,0210	0,0194	0,0178	0,0164	0,0151	0,0138	0,0126	0,0116	0,0106	0,0097	0,0088
31	0,0299	0,0277	0,0256	0,0236	0,0217	0,0200	0,0184	0,0169	0,0154	0,0141	0,0129	0,0118	0,0108	0,0098	0,0089	0,0081
32	0,0289	0,0267	0,0246	0,0226	0,0208	0,0190	0,0174	0,0159	0,0146	0,0133	0,0121	0,0110	0,0100	0,0091	0,0082	0,0075
33	0,0279	0,0257	0,0236	0,0217	0,0199	0,0182	0,0166	0,0151	0,0137	0,0125	0,0113	0,0103	0,0093	0,0084	0,0076	0,0069
34	0,0271	0,0248	0,0228	0,0208	0,0190	0,0173	0,0158	0,0143	0,0130	0,0118	0,0106	0,0096	0,0087	0,0078	0,0070	0,0063
35	0,0262	0,0240	0,0219	0,0200	0,0182	0,0165	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0100	0,0090	0,0081	0,0072	0,0065	0,0058
36	0,0254	0,0232	0,0212	0,0192	0,0175	0,0158	0,0143	0,0129	0,0116	0,0104	0,0094	0,0084	0,0075	0,0067	0,0060	0,0053
37	0,0247	0,0225	0,0204	0,0185	0,0167	0,0151	0,0136	0,0122	0,0110	0,0098	0,0088	0,0079	0,0070	0,0062	0,0055	0,0049
38	0,0240	0,0218	0,0197	0,0178	0,0161	0,0145	0,0130	0,0116	0,0104	0,0093	0,0083	0,0074	0,0065	0,0058	0,0051	0,0045
39	0,0233	0,0211	0,0191	0,0172	0,0154	0,0138	0,0124	0,0111	0,0099	0,0088	0,0078	0,0069	0,0061	0,0054	0,0048	0,0042
40	0,0226	0,0205	0,0184	0,0166	0,0148	0,0133	0,0118	0,0105	0,0093	0,0083	0,0073	0,0065	0,0057	0,0050	0,0044	0,0039