Tema 1. Una introducción a los juegos y a su teoría

1.1.- Qué es Juego:

Pasatiempo o diversión

Tipos:

- **De mesa**:
  <u>Dos jugadores</u>: **Ajedrez y Damas** → Ganar, perder o tablas
  <u>Varios jugadores</u>: **Monopoli** → Gana el jugador que acaba con más propiedades; los demás pierde.

- **De cartas**:
  <u>Un jugador</u>: Solitario
  De **<u>dos a siete jugadores</u>: Póquer y Blackjack**

- **Videojuegos**

- **Deportivos**: Se enfrentan **dos grupos de jugadores**: Béisbol, Futbol americano, Baloncesto y Hockey.

Situación gobernada por **reglas** con un **resultado bien definido** que se caracteriza por una **interdependencia estratégica**→el resultado de una empresa no sólo depende de su estrategia, sino también de las estrategias que sus competidores eligen.

Aún **con una mala estrategia su resultado puede ser positivo** si el rival escoge aún peor.

Varias empresas compitiendo **en el mismo sector**, en el **mismo juego**

Las **negociaciones económicas** tienen **<u>características de juego</u>**:

Reglas + estrategia + Resultado (statu quo, si se rompen las negociaciones, y acuerdo)

1.2.- Qué es teoría de juegos, por qué?

Ciencia que estudia los juegos con el **rigor** necesario para resolverlos.

John von Neumann (S. XX):

- **Descubrió** una de las regularidades más importantes de los juegos, **la solución de los juegos de suma cero con dos jugadores.**
- Primero en resolver **juegos aplicados a la empresa y a la economía**.
- Proporcionó las **bases matemáticas de la mecánica cuántica**.
- Su trabajo se inspiró en la posibilidad de desarrollar **aplicaciones en economía**.

Se parece mucho al cálculo diferencial (que se usa para resolver problemas de maximización y minimización) y lo utiliza como parte del proceso de resolución de un juego; se trata de un problema de maximización (cuál es el valor máximo y cómo obtenerlo), uno por jugador.

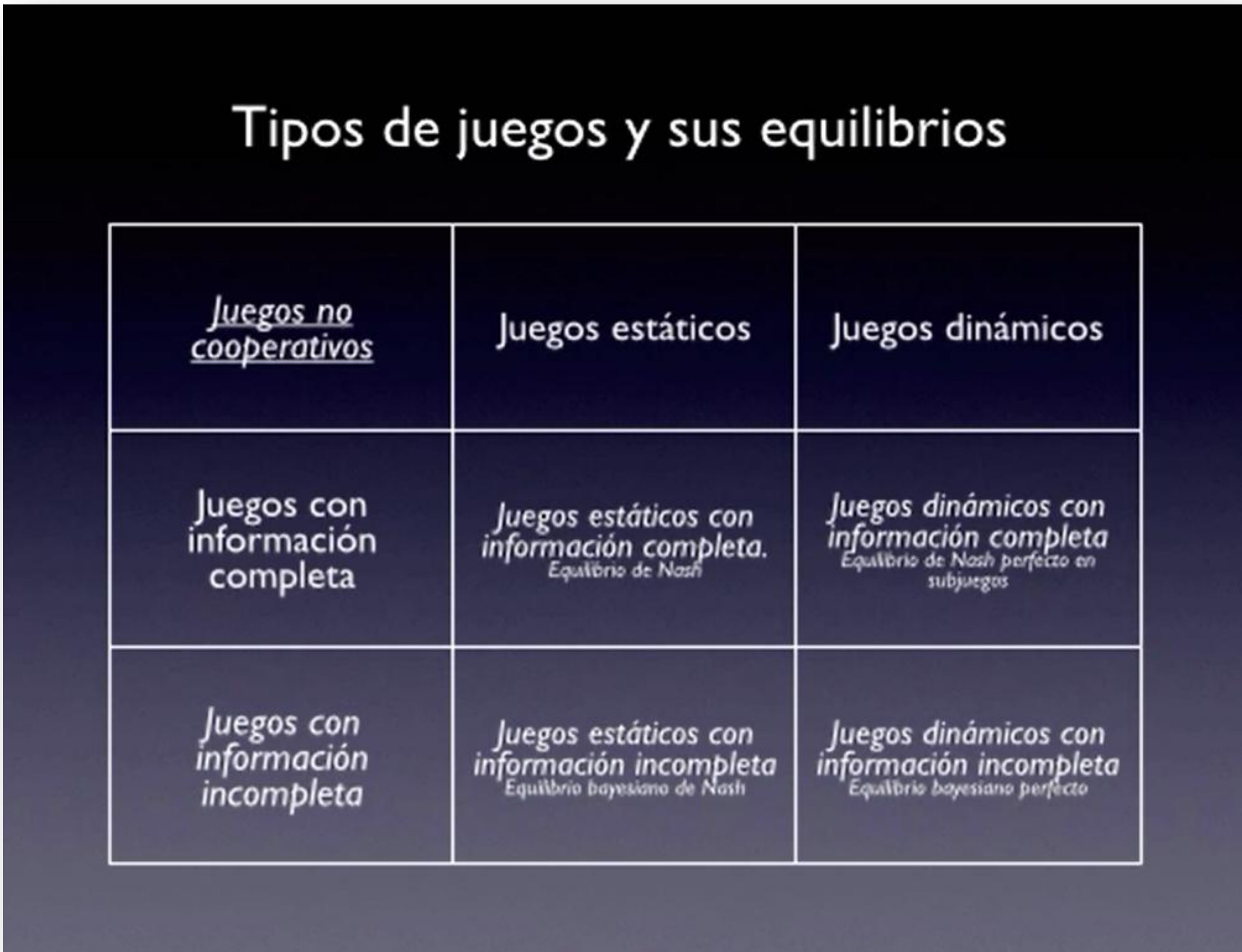
Un juego con 3 jugadores es como tres problemas de maximización a la vez →resolver un juego es más difícil que **resolver un problema de maximización**, y por ello tiene su propia teoría.

Puede **mejorar la toma de decisiones estratégica**; ayuda ser consciente ante situaciones estratégicas decisivas y de las **sutilezas estratégicas de los competidores**.

Mejora la capacidad para dirigir un negocio y evaluar los cambios en política económica.

Es el **paradigma central de la economía y de las finanzas**.

La solución a un problema de maximización debe **indicar** cuál es **el valor máximo y cómo obtenerlo**→ un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo.



La **Teoría de juegos** consiste en **elegir una combinación óptima de bienes teniendo en cuenta algunos parámetros dados.**

Hay **cuatro tipos de juegos con equilibrios distintos**.

- **Juegos con información incompleta**: aquellos en los que **interviene el azar en la decisión** para suplir la falta de información.

- En **los juegos estáticos ambos jugadores toman su decisión a la vez** y ahí *termina el juego* (los chinos con monedas).

- Los **juegos dinámicos** permiten **tomar decisiones de forma secuencial, conociendo previamente la decisión del otro (**ajedrez).

- **Juegos no cooperativos** analizan **comportamientos estratégicos de individuos que deben competir entre sí para obtener un beneficio o premio**.

Por otro lado, tenemos los:

- **Juegos cooperativos** (con transferencia de utilidad) se centran en **problemas estratégicos de grupos**. Abren la **posibilidad de pactos entre los individuos para repartirse ganancias potenciales.** En ellos es **más difícil definir sus equilibrios**, que pueden ser múltiples. Hay que **buscar el beneficio máximo** pero este deberá ser **repartible, divisible y agregable** entre los miembros de la coalición (**Cártel: Monopolio virtual entre empresas** para repartirse el beneficio).

Un óptimo personal puede no serlo socialmente. Las dos condiciones son contradictorias:

Condición liberal: si la elección entre dos alternativas **solo concierne al individuo, la sociedad tiene que aceptar lo que elija** él→ la elección del individuo se debe aceptar socialmente (**mi elección será un óptimo personal y social**). Por el principio de transitividad:

L>n, **n>P**, **L>P**

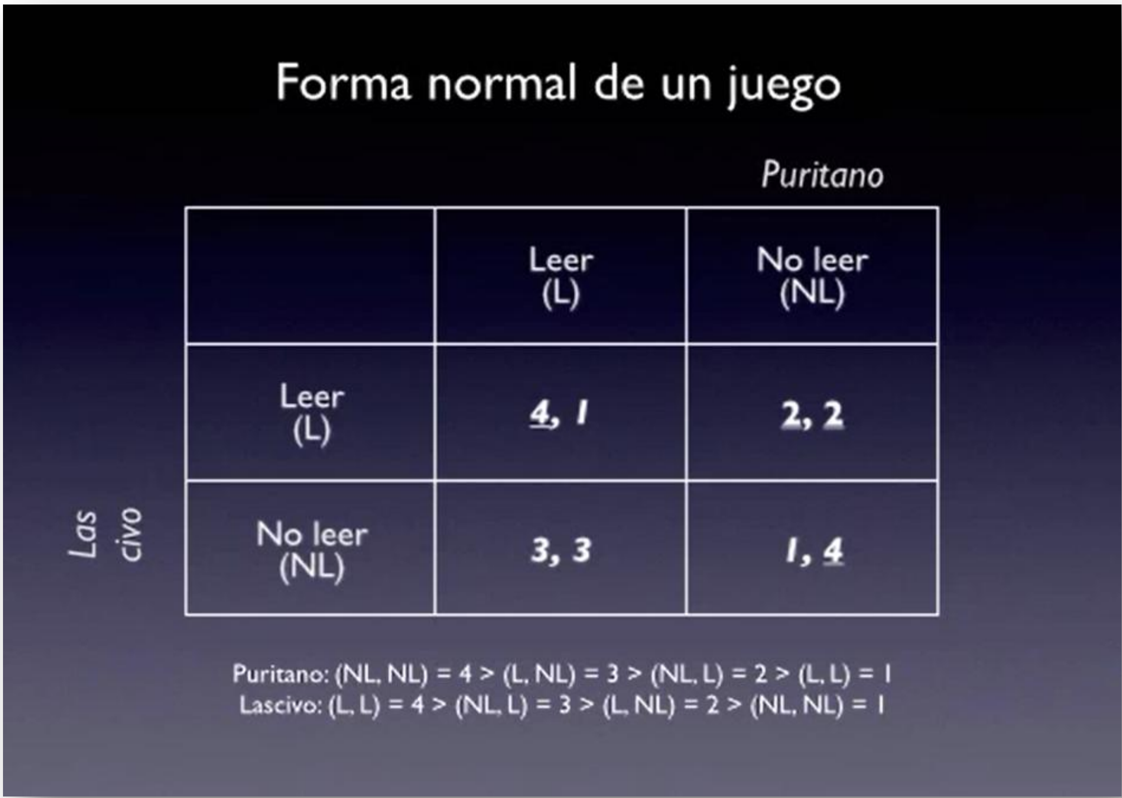
Esta condición **lleva a un resultado social subóptimo**. →**El óptimo social implica violar la condición liberal.**

La condición liberal nos lleva a un equilibrio de Nash, pero éste no es un óptimo social o paretiano.

Condición de Optimalidad paretiana (Óptimo de Pareto): **Si toda la sociedad prefiere un estado social a otro, el primero es preferible al segundo por el colectivo.**

P>L

Si formamos una matriz:



Ambos jugadores eligen de forma simultánea.

Equilibrio de Nash: es una situación en la que **dos jugadores han llevado a cabo una acción** que consideran **la más correcta en función de lo que ha elegido el contrario**; se evalúa a posteriori, después de la elección.

Estrategia dominante: la que **proporciona mejores resultados que la alternativa ante cualquiera de las elecciones del otro jugador**.

Óptimo de Pareto: es aquella situación en que **un jugador no puede ganar más sin que el otro pierda algo.**

*Para **determinar equilibrios de Nash o estrategias dominantes**:*

- *Suponiendo que P va a elegir leer, L; nos fijamos solo en la primera columna*
- *L tiene que elegir una fila; comparamos sus resultados, números a la izda.. de la coma. Vemos el primer número de cada par para cada columna que le corresponde y elegimos el mayor; lo subrayamos; 4 >3.*
- *Suponiendo que P va a elegir no leer: L tiene que elegir fila y debe ver los números a la izda.. de la coma en la segunda columna el valor más grande (segundo número de cada par)→ L sabiendo esto, deberá elegir el mayor de esta segunda columna.*

- *Si L va a elegir leer→ L compara ambos números en esa columna y elige el más grande y P también*

Observamos los resultados; si hay **una casilla con los dos valores subrayados, será un equilibrio de Nash.**

Si vemos **una fila con todos los números a la izda.. de la coma subrayados, será una estrategia dominante** para el jugador que elige filas.

Si vemos **una columna con los números a la dcha.. de la coma subrayados, será una estrategia dominante** para el jugador que elige columnas.

Cuando un **jugador tiene una estrategia dominante, tiene que jugar a esta** porque **le garantiza a priori su mejor resultado, independientemente de lo que haga el otro jugador → Puede que no haya ninguna estrategia dominante o dos**; cuando haya una estrategia dominante para cada jugador, el resultado será un equilibrio de Nash.

Pueden haber 0, 1 o más **equilibrios de Nash→** esto **no garantiza que sea uno de los equilibrios potenciales existentes en el juego**, **pero** solo el equilibrio de Nash **deja satisfecho a los jugadores con el resultado** del juego.

Pueden haber varios óptimos de Pareto que **pueden o no coincidir con el equilibrio de Nash.**

En nuestro juego:

- *Hay **un equilibrio de Nash (2,2):** lascivo leer, puritano no leer. **No es el mejor juego** porque **ambos podrían mejorar**. Con la teoría liberal, **toma de decisiones racional y egoísta**, nos lleva a un equilibrio de Nash y **no necesariamente a un óptimo de Pareto***
- *Hay estrategia dominante para cada uno*
- ***El óptimo de Pareto es Lascivo leer y puritano no leer (3,3)** que **garantiza un resultado mejor que el equilibrio de Nash para cada jugador**. Aquí **ninguno puede mejorar sin que el otro empeore.***

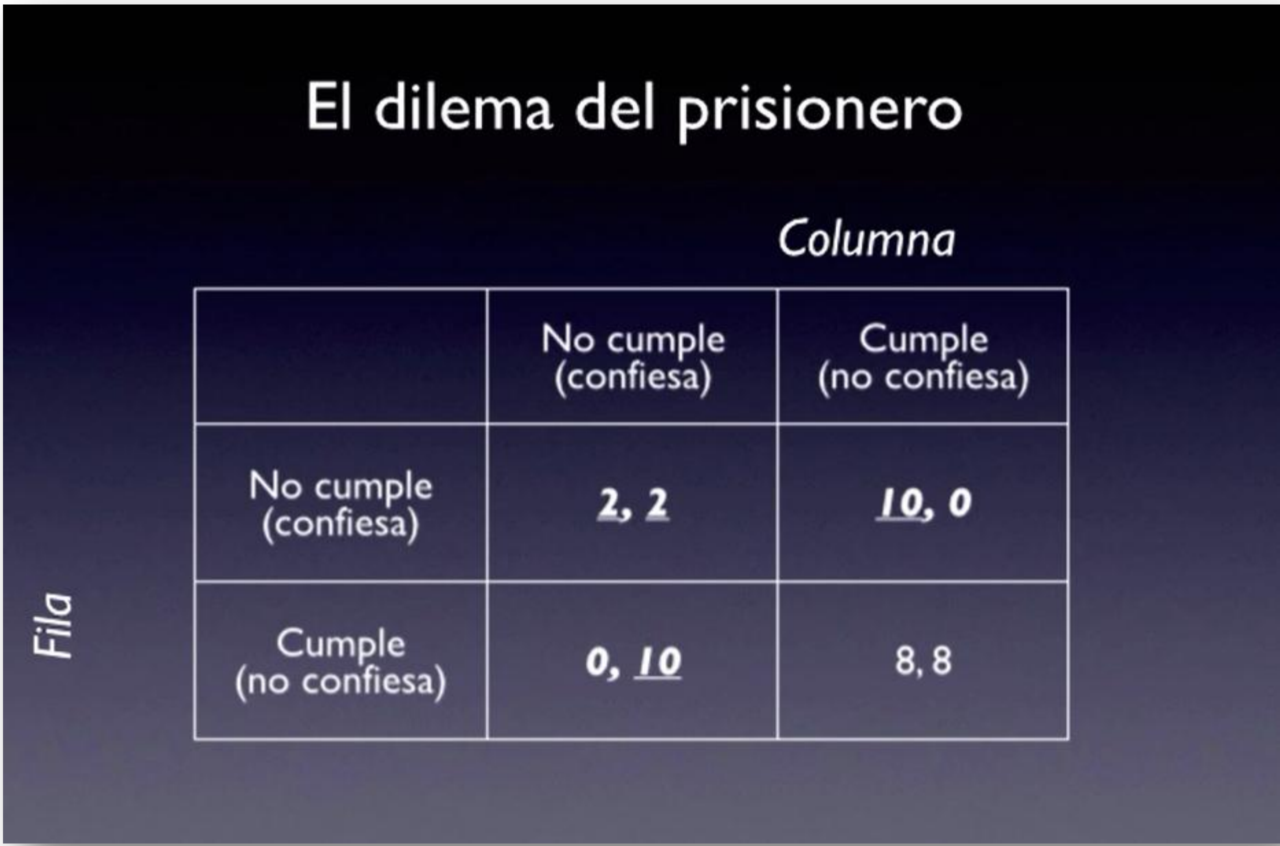
a)<u>Juegos Estáticos en estrategias puras:</u>

Son **los más elementales**.

<u>El dilema del prisionero</u>.

Se supone que **los jugadores son libres y racionales**; se utiliza para ver por qué individuos racionales **pueden llegar a resultados subóptimos de equilibrio**.

Tengamos dos individuos sospechosos de haber participado en un robo:



- ***Los dos** ladrones **conocen la matriz de ganancias** y presumen la racionalidad del otro pero no saben qué van a contar*

- ***Números más bajos** en la matriz de ganancias **implican más años de cárcel**.*

- ***Subrayamos resultados** según la técnica vista antes:*
    - *En **cada columna** vemos los **valores a la izda**. de la coma, elegimos **los más altos.***
    - *En **cada fila** comparamos los **valores a la dcha**. de la coma, elegimos **los más altos.***

- ***El juego tiene estrategias dominantes para ambos jugadores.** La primera fila tiene todos los valores a la izda. de la coma subrayados y la primera columna todos los valores a la derecha de la coma subrayados. **Ambos tienen una estrategia dominante, no cumplir → <u>equilibrio de Nash, no cumplir, no cumplir</u>**. Pero este equilibrio de Nash **no es un óptimo de Pareto.***

- ***El óptimo de Pareto está en la casilla (8,8)** y se llega a ello **cumpliendo un pacto expreso de no confesar**, lo que implica un pacto expreso de **cooperación→ obtener un resultado mejor.***

El juego del gallina: Nace con análisis estratégicos durante la **guerra fría.**

Señalamos ***los resultados****:*

- ***No hay estrategia dominante para ninguno***
- *Pero hay* ***dos equilibrios de Nash→ Uno para y el otro sigue (3, 1) y (1, 3)***
- ***Optimo de Pareto→*** *que* ***ambos paren (2, 2)****. Pero no es equilibrio de Nash*


Juego del Gallina

Fila \ Columna	Parar	Seguir
Parar	**2, 2**	**1, 3**
Seguir	**3, 1**	-10, -10

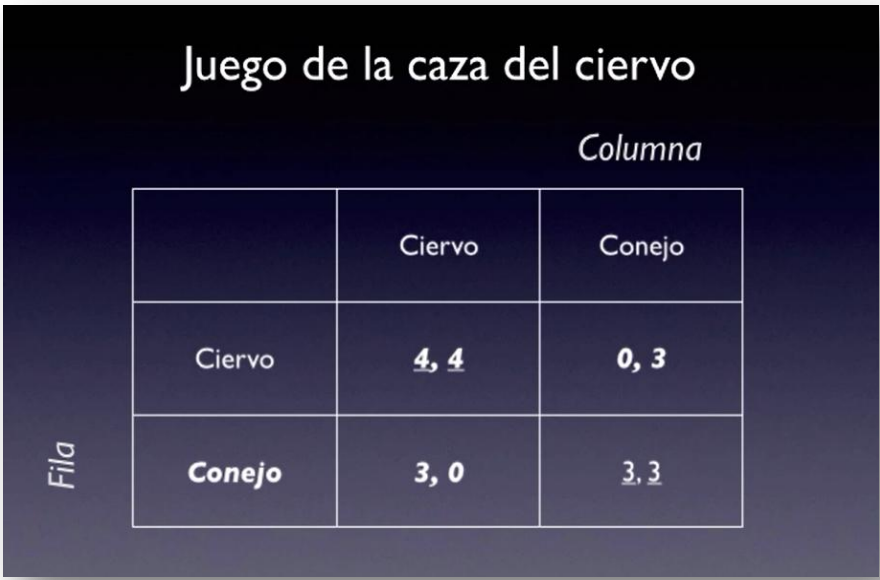
- *Como no hay equilibrio de Nash, el* ***juego queda abierto a cualquier solución****,* ***incluida la peor*** *que supone que ambos siguen y se maten* ***(-10, -10).***

Juego de la caza del ciervo:

Dos cazadores *pueden* ***cooperar o no*** *hacerlo e intentar cazar.*

El ***miedo es que el otro vea un conejo y decida cazarlo, pasando del ciervo.***

- *Aquí hay* ***dos equilibrios de Nash*** *(4, 4) y (3, 3).*
- ***No hay estrategia dominante***
- *Pero* ***el óptimo de Pareto coincide con uno de los equilibrios de Nash****: Cooperar para cazar el ciervo (4, 4)* ***. Pero no hay estrategias dominantes que garanticen este resultado.***


Juego de la caza del ciervo

Columna

Fila	Ciervo	Conejo
Ciervo	4, 4	**0, 3**
Conejo	**3, 0**	3, 3

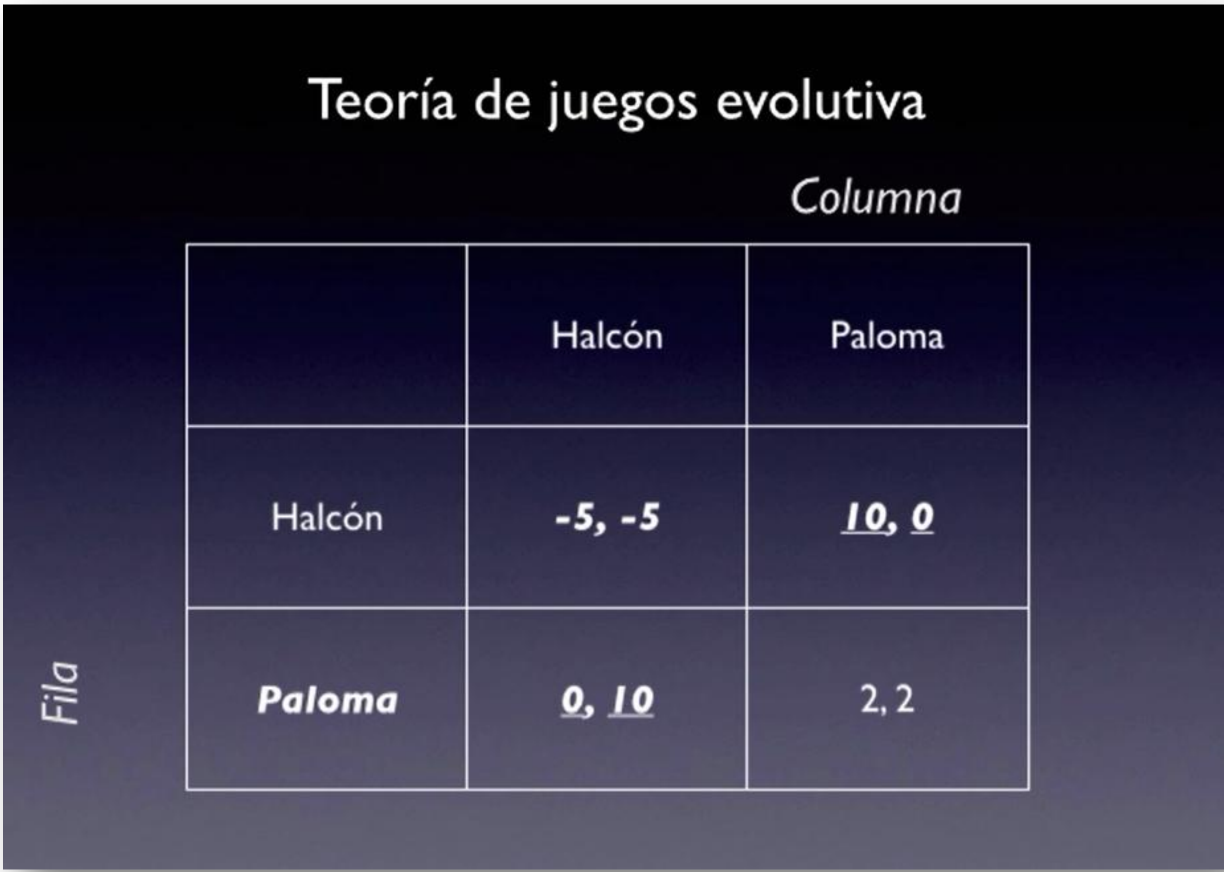
b)<u>**Juegos dinámicos en estrategias mixtas:**</u>

Aquellos en que **el juego se repite o el jugador responde al movimiento del otro jugador un número determinado de veces.**

Aquí surge un **nuevo equilibrio de Nash en estrategias mixtas:**

Teoría de juegos evolutiva: Dos especies pelean por un recurso escaso, con un valor positivo, el territorio:

- Hay **dos estrategias puras**. Si ambos eligen estrategia halcón uno caerá herido
- **No hay estrategias dominantes**
- Existen **dos equilibrios de Nash** en estrategias puras, halcón-paloma y paloma halcón (<u>0</u>, <u>10</u>) (<u>10</u>, <u>0</u>).
- Pero **puede aparecer un nuevo equilibrio Mixto**:
    - si el juego continúa y unas veces se puede seguir una estrategia y otras veces
    - si un grupo de individuos sigue una estrategia y otros otra,



Las **estrategias Mixtas→** cada jugador las utilizará con una proporción o tiempo determinado.

Cada jugador las aplicará según el cuadro:

- ***El jugador fila seguirá la estrategia 1 con una proporción "p" y la estrategia 2 con una proporción "1-p"***.

  P *es un valor que oscila* ***entre 0 y 1.***

- *El* ***jugador columna*** *seguirá la* ***estrategia 1 con proporción "q" y la 2 con proporción "1-q".***

- ***Jugando*** *el juego* ***muchas veces*** *o si cada jugador representa una población* ***nos sale la tabla****.*

- *Después* ***calculamos la función de pagos de cada jugador →Cada casilla por el porcentaje de cada casilla****. Y* ***sumamo****s todo→ en nuestro ejemplo, halcón y paloma.*

- ***Derivamos con respecto a una variable y despejamos la otra*** *con cada una de las funciones, después de igualar a cero.*

Obteniendo el resultado, en nuestro ejemplo 8/13 y 5/13 será el complementario → El equilibrio de Nash se dará cuando cada especie sigue una estrategia de halcón, estrategia 1, 8/13 partes de las veces y estrategia de paloma 5/13 veces

c) <u>juegos cooperativos o de transferencia de utilidad</u>

La cooperación implica coaliciones y acuerdos vinculantes.

Aquí, el equilibrio de Nash es más dificil. Debe ser siempre estable y ningún jugador tener interés en una coalición alternativa; algo que por otro lado casi nunca sudede.

Sean tres individuos, A, B, C, que se reparten 12€. Este reparto se hace por votación. Una mayoría puede decidir el reparto, pero otra coalición puede mejorarlo… así varias veces:

Juegos cooperativos

	A	B	C
Reparto inicial	4	4	4
Coalición A + B	6	6	0
Coalición B + C	0	8	4
Coalición A + C	6	0	6
...	...	...	...

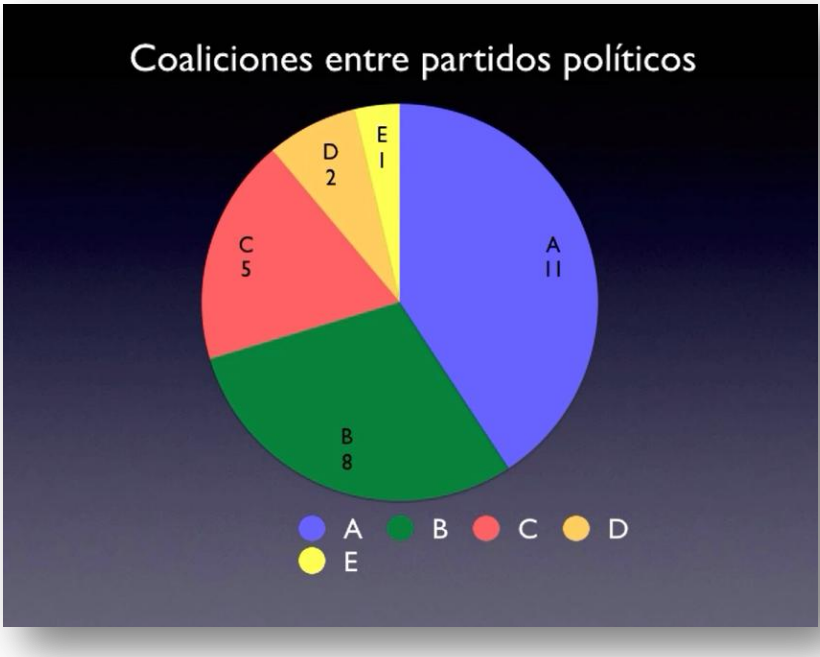
Se dan infinitos equilibrios inestables→ se recurre a diversos mecanismos para corregirlo.

Un equilibrio en juegos cooperativos es un pacto que resulte estable, en el que ninguno de los participantes tenga incentivos para no cumplirlo y salirse de lo acordado.

El valor de Shapley es un criterio de reparto que implica un equilibrio para juegos cooperativos→ criterio para llegar a acuerdos estables.

El pago a cada jugador debe ser proporcional al número de juegos en que el jugador es imprescindible para el éxito de los mismos.

Imaginemos cinco partidos políticos que se presenten a las elecciones: A, B, C, D y E:



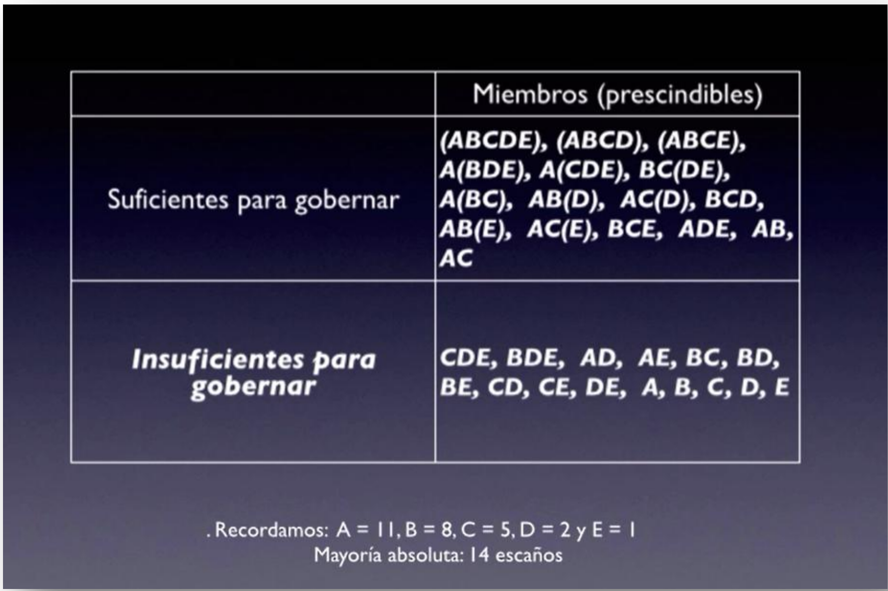
Los escaños recibidos son, respectivamente, 11, 8, 5, 2 y 1

El presupuesto es 1.000.000.000

Para que haya acuerdo de gobierno se precisa mayoría absoluta, es decir (11+8+5+2+1)/2= 27/2=14 escaños.

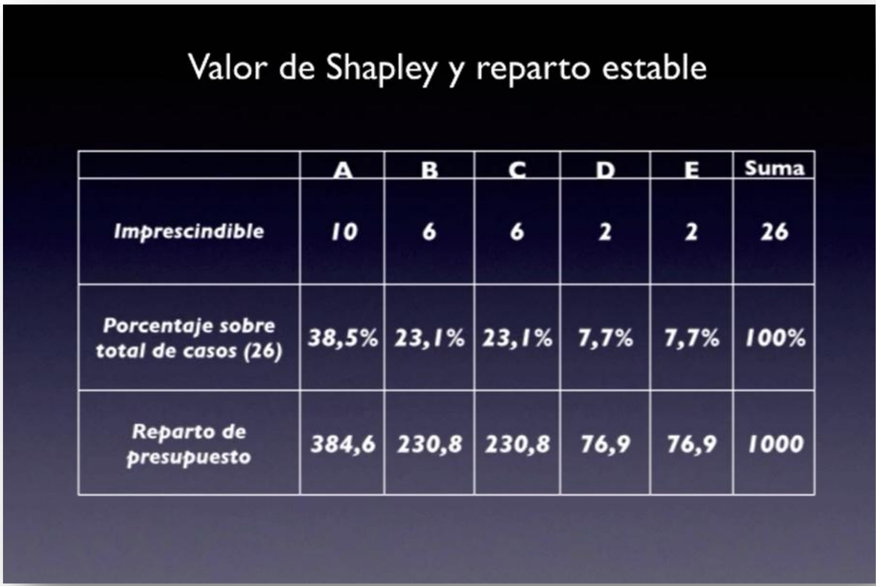
Los cinco partidos se pueden coaligar de 31 maneras distintas, de las que 16 son capaces de formar gobierno (al menos suman 14 escaños).

Un socio puede ser o no necesario para alcanzar la mayoría de gobierno; no lo será si al eliminarlo la coalición sigue sumando al menos 14 escaños→ coaliciones suficientes e insuficientes. Dentro de las insuficientes, habrán socios prescindibles (que van entre paréntesis) y socios imprescindibles.



	Miembros (prescindibles)
Suficientes para gobernar	***(ABCDE), (ABCD), (ABCE), A(BDE), A(CDE), BC(DE), A(BC), AB(D), AC(D), BCD, AB(E), AC(E), BCE, ADE, AB, AC***
Insuficientes para gobernar	***CDE, BDE, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, A, B, C, D, E***

El valor de Shapley establecía un criterio de reparto. En este caso, los partidos aparecen como imprescindibles en 26 veces: 10/26, 6/26, 6/26, 2/26 y 2/26

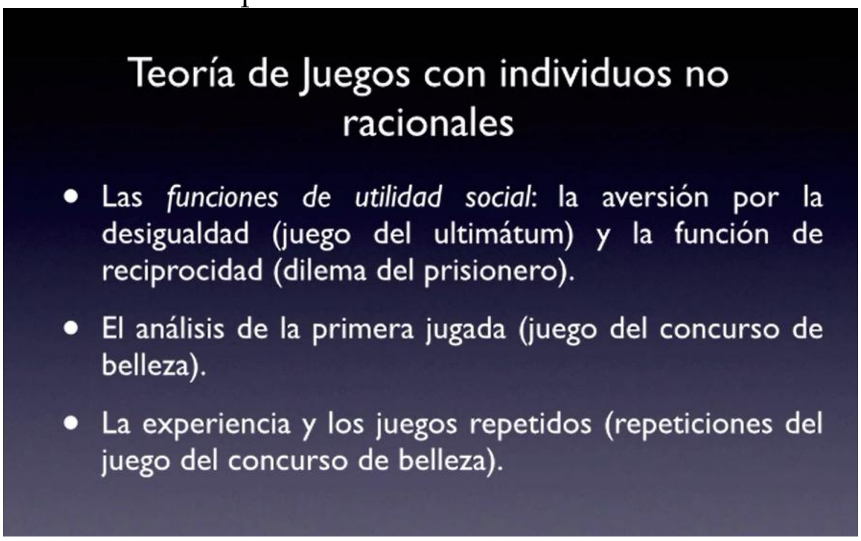


Valor de Shapley y reparto estable

	A	B	C	D	E	Suma
Imprescindible	10	6	6	2	2	26
Porcentaje sobre total de casos (26)	38,5%	23,1%	23,1%	7,7%	7,7%	100%
Reparto de presupuesto	384,6	230,8	230,8	76,9	76,9	1000

Cada partido, sea cual sea la coalición, no deberá jamás aceptar una cantidad inferior a la correspondiente según el reparto anterior.

Si los jugadores no son racionales la teoría de juegos puede cambiar mucho: Sería el caso de los siguientes juegos: Las ofertas por debajo del 30% suelen ser rechazadas por el segundo jugador→ suele ofrecerse el 50% por funciones de utilidad social.



Las funciones de utilidad social por aversión a la desigualdad son aquellas en que cada jugador valora positivamente lo que ha recibido el otro jugador.

Las de reciprocidad, valoran positivamente el buen trato recibido y negativamente el mal trato recibido.

Esto explica el dilema del prisionero→cooperación entre prisioneros.

El juego de concurso de belleza tiene el equilibrio de Nash en cero pero los números que más se repiten son el 33 y 22, dentro de un grupo a elegir entre cero y 100. Gana quién más se acerca a 2/3 de la media de todos los números→quien piensa que haya una media aleatoria esperará al 50 y 2/3 de 50 son 33. Los que piensan que será así, elegirán 2/3 de 33, que es 22.

Repitiendo el juego varias veces, los jugadores aprenderán la mecánica y el resultado convergerá a cero, que es la situación de equilibrio.

1.3.- Juegos con un solo jugador e información perfecta

El solitario es el caso más simple

Son **juegos degenerados → tomar decisiones estratégicas**, sin **interdependencia estratégica** entre jugadores.

Un jugador tiene **información perfecta** si conoce exactamente lo que ocurre cada vez que tiene que tomar una decisión.

Un juego tiene **información perfecta** si cada jugador tiene información perfecta→Ajedrez (viendo el tablero) y jugador a punto de entrar en el laberinto (este es el paradigma de jugador con información perfecta).

Un juego con **información imperfecta** es en el que algún jugador no tiene información perfecta→Póquer (un jugador sin hacer trampas no sabe las cartas del otro jugador).

Jugador a punto de entrar en el laberinto:

- *El jugador 1 debe llegar al caldero sin chocar con los muros*
- *El caldero tiene un valor D*

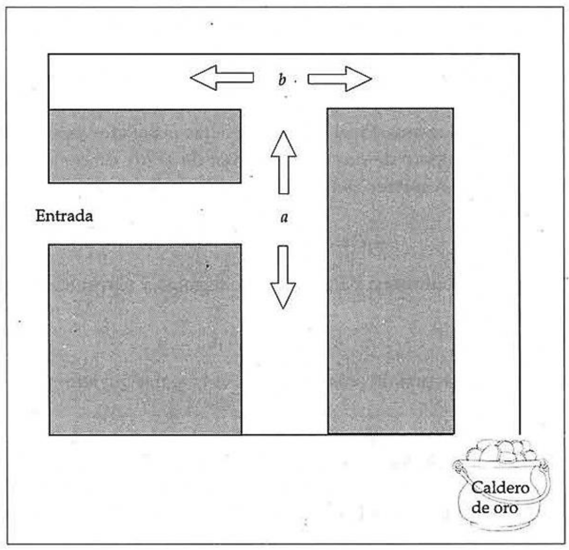


Figura 1.1. El laberinto.

- *Si el jugador lo consigue, el resultado del juego es D, el jugador gana la cantidad D:*

$$u_1(\text{caldero de oro}) = D$$

- *Si choca con una pared, el juego termina y el resultado es cero:*

$$u_1(\text{pared}) = 0$$

- *En la mayoría de los casos el jugador preferirá cuanto más dinero mejor:*

$$u_1(\text{caldero de oro}) = D > 0 = u_1(\text{pared})$$

- *Al entrar al laberinto, el jugador encuentra un punto a de decisión con dos opciones: dcha.. (pared = fin = 0) e izda.. (seguir hasta punto decisión b).*

- *En el punto b, nuevamente punto de decisión con dos opciones: izda.. (muro = fin = 0) y dcha.. (caldero de oro = gana =1)*

Hay varias **formas para describir** (plasmar visualmente) **un juego**:

I. **Forma extensiva** (descripción básica de un juego):

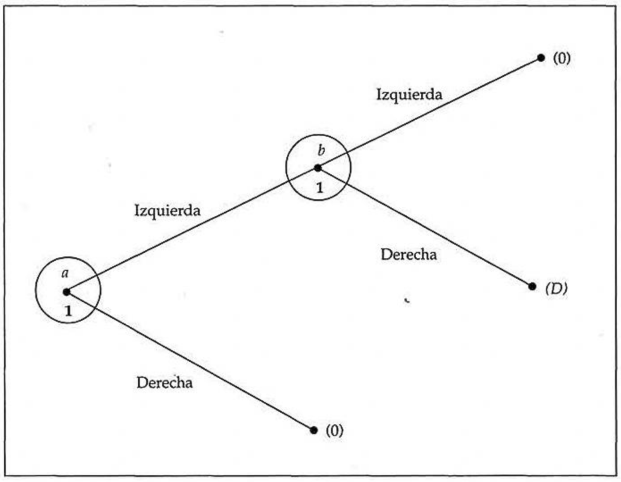


Figura 1.2. Caldero de oro, forma extensiva.

Diagrama de árbol, con:

- **Nodos** o puntos (el **inicial** es de comienzo del juego y **terminal,** al final del juego)→ nodo con un círculo alrededor y el número de un jugador en su interior indica a qué jugador le corresponde jugar y qué es lo que el jugador sabe en ese momento.
- **Círculos** (puntos de decisión),
- **Números en los círculos** (jugador al que le toca decidir),
- **Ramas** (líneas rectas que salen de cada nodo e indican las opciones del jugador), nodo inicial y puntos terminales.
- **Conjunto de información**

Inducción hacia atrás: procedimiento para resolver cualquier juego de un jugador con información perfecta empezando por el final hasta llegar al principio.

- Se empieza en el último punto de decisión (nodo b)→ el jugador gana si va a la derecha (ponemos una flecha sobre esa rama), ganancia D porque si hubiera ido a la izda.. la ganancia sería cero.

- El jugador debería esforzarse por llegar al nodo b→ solo lo conseguirá yendo a la izda.. desde el nodo a (ponemos una flecha en esa rama)

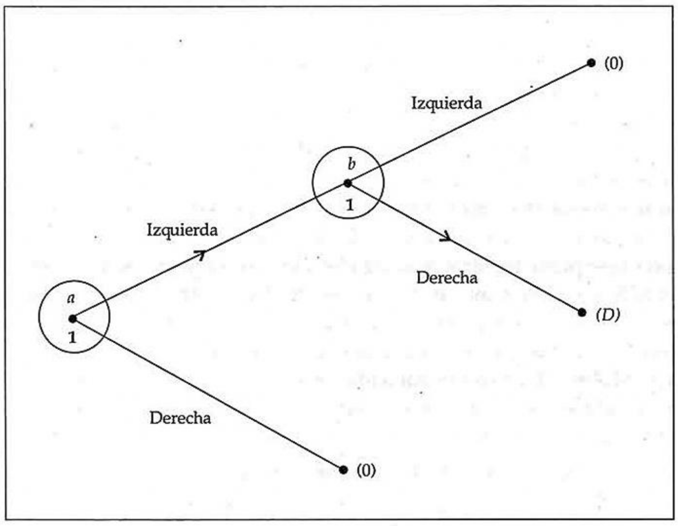


Figura 1.3. Caldero de oro, inducción hacia atrás.

- Con esto tenemos la trayectoria completa desde el nodo inicial, a, hasta el final (caldero de oro)→ la estrategia buena que resuelve el juego y consigue la ganancia D, será:

ir a la izquierda en a, ir a la derecha en b

<u>**Estrategia:**</u>

Plan de acción completo en un juego determinado.

Clase estrategias: **buenas** (D) y **malas** (0).

Para construir una estrategia→**identificar primero cada una de las decisiones que un jugador debe tomar:**

__ en a, __ en b

En el caldero de oro:

- *Hay dos posibilidades de llenar el espacio en blanco de la estrategia en a y otros dos en b → existe (2)*(2)=4 estrategias.*

***La buena** era:*

ir a la izquierda en a, ir a la derecha en b

*y **las malas** (que evitarán una buena jugada) serán:*

ir a la derecha en a, ir a la derecha en b

ir a la izquierda en a, ir a la izquierda en b

ir a la derecha en a, ir a la izquierda en b

II. <u>Forma normal</u>: descripción que se basa sólo en estrategias.

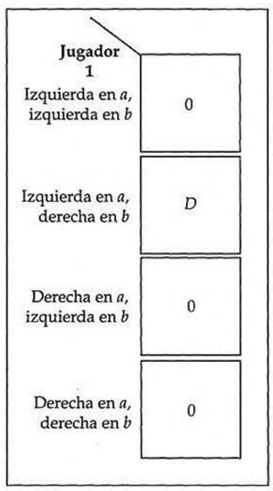


Figura 1.4. Caldero de oro, forma normal.

Esta forma de un juego con un jugador **es un listado de cada una de las estrategias del jugador con su correspondiente ganancia,** codificando toda la información de la forma extensiva en una matriz.

*En el **caldero de oro,** se listan las estrategias del jugador 1 con su ganancia, 0 (si es mala estrategia) o D (si es buena estrategia)→ **matriz de 4 filas y 1 columna**.*

Normalmente la forma normal es **más fácil de resolver** <u>pero si viene en extensiva y es más fácil, se resuelve de manera pragmática y ya está.</u>

En juegos de un jugador con información perfecta, se obtiene la <u>misma solución tanto en la forma normal como en la extensiva.</u>

1.4. Utilidad

Indica cómo **comparar dos cosas diferentes, "manzanas con naranjas"** →Si se trata de comparar otras cosas, compararemos la distribución de probabilidad de la acción X con la distribución de probabilidad de la acción Y.

La utilidad de una distribución de probabilidad es la **Utilidad Esperada.**

Escoger una acción de bolsa *puede depender de tres sucesos,*

que suba (p$2),
que no varíe (p$1) o
que baje (p$0)

y cada uno de estos sucesos puede tener una probabilidad de suceder:1/4, 3/20 y 3/5,

Por tanto, la distribución de probabilidad p:

$$\mathbf{p} = [p(\$2), p(\$1), p(\$0)]$$

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{3}{5}\right)$$

p= (5/20, 3/20, 12/20)

Es decir, **cualquier vector p cuyos componentes sean no negativos y sumen 1** *(5/20+3/20+12/20=1)* **será una distribución de probabilidad** *y podrá representar una acción de bolsa.*

La distribución de probabilidad forma un triángulo equilátero en cuyos vértices están la tres acciones seguras:

$(1,0,0)$: la acción sube a 2 dólares con probabilidad 1
$(0,1,0)$: la acción se queda en 1 dólar con probabilidad 1
$(0,0,1)$: la acción baja a 0 dólares con probabilidad 1

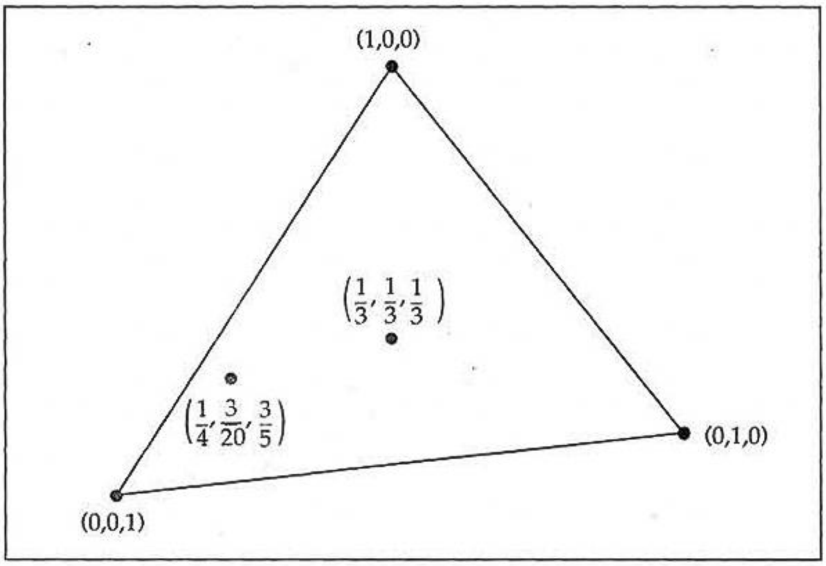


Figura 1.5. Triángulo equilátero de distribuciones de probabilidad.

Y el centro de gravedad del triángulo es la acción en que cada posible valor tiene la misma probabilidad:

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Si representamos una acción cercana a ésta, ***p*****= (5/20, 3/20, 12/20**)*,* cada punto del triangulo equilátero corresponde a una distribución de probabilidad *y queremos asociar* una utilidad a cada distribución de probabilidad→ **asignamos utilidades a las acciones seguras**, de manera que

$$u(2) > u(1) > u(0)$$

La **utilidad esperada** de la función de probabilidad p, $Eu(\mathbf{p})$, será:

$$Eu(\mathbf{p}) = p(\$2)u(2) + p(\$1)u(1) + p(\$0)u(0)$$

ésta extiende la ordenación de las acciones seguras:

$$Eu(1,0,0) = 1u(2) + 0 + 0 > Eu(0,1,0) = 0 + 1u(1) + 0 > 0 + 0 + 1u(0)$$

La utilidad esperada que, como ordenación de distribuciones de probabilidad, tiene <u>tres propiedades:</u>

1. **Las curvas de indiferencia nunca se cortan**, por lo que la ordenación es racional →La utilidad esperada muestra que **las curvas de indiferencia de las distribuciones** de probabilidad son **paralelas.**

   Suponiendo que:

   u(2)=2
   u(1)=1
   u(0)=0

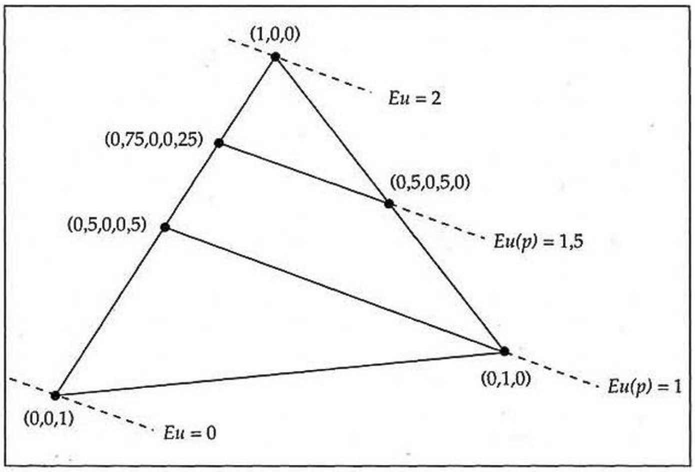
   

   Figura 1.6. Utilidad esperada, curvas de indiferencia.

   Todas las acciones con $Eu(\mathbf{p}) = 1$ *están sobre la línea recta que conecta las distribuciones de probabilidad* $(0,1,0), (1/3,1/3,1/3)$ y $(1/2,0,1/2)$

   Todas las acciones con $Eu(\mathbf{p}) = 1{,}5$ *están sobre la línea recta que conecta las distribuciones de probabilidad* $(1/2,1/2,0)$ y $(3/4,0,1/4)$.

   Ambas rectas son paralelas

2. Las curvas de indiferencia **crecen hacia la derecha →Cuanto más cerca esté una distribución de probabilidad de la mejor acción "segura", mayor será su utilidad**.

3. Las curvas de indiferencia y la ordenación que representan **son invariantes ante transformaciones lineales positivas <u>de la utilidad de las acciones "seguras"</u>** → Si añadimos una constante a las utilidades de las acciones "seguras" o si multiplicamos todas por la misma constante, las curvas de indiferencia no varían.

Si: $$u(1) = 0{,}5u(2) + 0{,}5u(0)$$

entonces: $u(1) + 1 = 0{,}5[u(2) + 1] + 0{,}5[u(0) + 1] = 0{,}5u(2) + 0{,}5u(0) + 1$ *después de transformar la utilidad de las acciones "seguras" añadiendo 1*

y $2u(1) = 0{,}5[2u(2)] + 0{,}5[2u(0)] = 2[0{,}5u(2) + 0{,}5u(0)]$ *después de transformarlas multiplicando por 2.*

Es decir: **Las utilidades esperadas son utilidades medibles**.

Si fijamos el cero y el uno en la escala de utilidad,

$$u(0) = 0,$$

$$u(1) = 1$$

para medir u(2), hallaremos la distribución de probabilidad $\mathbf{p} = [p(\$2), 0, p(\$0)]$ *tal que:*

$$p(\$2)u(2) + p(\$0)u(0) = u(1)$$

y sustituyendo el cero y el uno en la escala de utilidad tendremos:

$$p(\$2)u(2) = u(1) = 1$$

luego la medida de utilidad buscada será:

$$u(2) = \frac{1}{p(\$2)}$$

Si un jugador es indiferente entre tener un dólar seguro, o tener dos dólares con probabilidad $p(\$2)$*, o cero dólares con probabilidad* $p(\$0)$*, → el ratio* $\frac{1}{p(\$2)}$ *mide la utilidad que para este jugador representa tener dos dólares.*

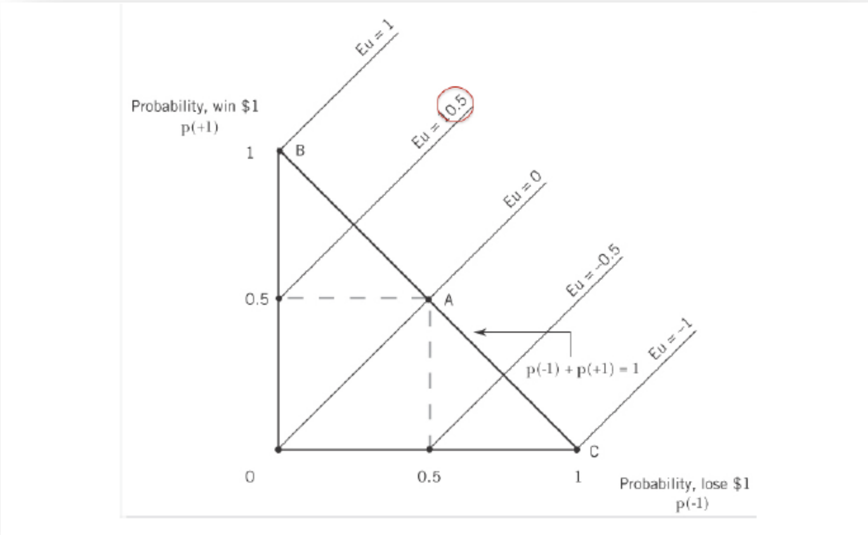
Estas tres propiedades nos ayudan a enfrentarnos a juegos de un jugador con información imperfecta.

Los individuos pueden reducir una situación con alternativas y azar (probabilidades) a un único número, mediante el cálculo de la utilidad esperada.

Al hacer esto estaremos ordenando una distribución de probabilidades, que es un conjunto de resultados con las probabilidades de que ocurran. Ante la pregunta ¿qué prefieres, un dólar seguro ahora o dos dólares mañana con una probabilidad de 0,75?, las personas tienen que responder a partir de un orden de preferencias sobre las probabilidades. Vamos a verlo.

Se pueden estudiar las curvas de indiferencia asociadas a esa distribución de probabilidades, que reciben el nombre de diagramas de **Marshak-Machina**.

Imaginemos un jugador neutral ante el riesgo que afronta esta situación: premio de 1 dólar con probabilidad p(+1), 0 dólares con probabilidad p(0) y -1 dólar con probabilidad p(-1).



El valor esperado sirve para evaluar (asignar un valor) a esta situación de riesgo. También sirve para ordenar distribuciones de probabilidad, de la más preferida a la menos preferida. Vamos a ver en qué consiste esto:

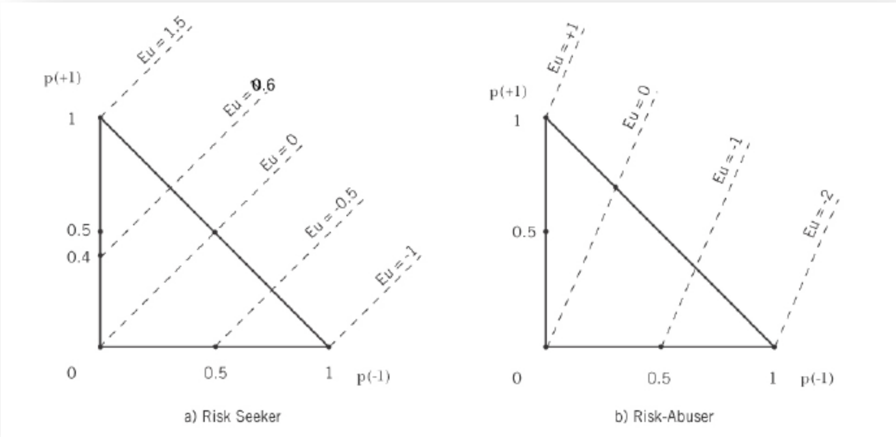
En el eje horizontal está la probabilidad de perder 1 euro, es decir, p(-1), y va de 0 a 1. En el eje vertical tenemos la probabilidad de ganar un dólar p(+1). La tercera probabilidad se deduce de esas dos, porque las tres deben sumar 1. En efecto, $p(+1) + p(-1) + p(0) = 1$. El valor esperado sería $Eu = (+1)p(+1) + (0)p(0) + (-1)p(-1)$. Obviamente, si $p(+1) = p(-1)$ tendremos que necesariamente $p(+1) = p(-1) = 0{,}5$, $p(0) = 0$ y $Eu = 0$. Es el punto A del gráfico. En el origen de coordenadas tendríamos $p(+1) = p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ y $Eu = 0$. La línea que une el origen de coordenadas y el punto A tiene una inclinación de 45 grados. Esa línea es la curva de indiferencia para un jugador neutral ante el riesgo que se enfrenta a 3 posibles resultados con distintas probabilidades y un valor esperado de cero.

En las tres esquinas del triángulo tenemos dos resultados que no ocurren (probabilidad cero) y uno que ocurre seguro (probabilidad igual a 1).

Ahora podemos ver cómo ordena el jugador neutral ante el riesgo sus preferencias. Lo más preferido por él será tener un dólar seguro, y por tanto el punto del ángulo superior del triángulo, el punto B. El valor esperado es 1, con $p(+1) = 1$, y $p(0)=p(-1)=0$. Por ese punto B pasa por tanto la curva de indiferencia más alta posible, correspondiente a $Eu = 1$ y paralela a $Eu=0$. Lo menos preferido por él será perder con seguridad un dólar. Es el punto C, que corresponde al ángulo inferior derecho del triángulo, donde $p(-1) = 1$ y $p(+1)=p(0)=0$, con $Eu = -1$.

Por tanto, los valores esperados se mueven entre +1 y -1 y la ecuación para el valor esperado es $Eu = (+1)p(+1) + (0)p(0) + (-1)p(-1) = p(+1) - p(-1)$ de donde deducimos que $p(+1) = Eu + p(-1)$. Dando valores a Eu vamos trazando todas las posibles curvas de indiferencia, todas líneas rectas paralelas con pendiente igual a 45 grados.

Vale. Esto es cierto para una persona neutral ante el riesgo. Pero ¿y si la persona es aversa al riesgo o amante del riesgo? En ese caso las curvas de indiferencia tienen que cambiar. Vamos a ver primero el *amante del riesgo*. Es el gráfico de la izquierda:



La ecuación para el valor esperado es la misma, pero sólo para los neutrales ante el riesgo la utilidad del dinero equivale a la cantidad de dinero, y ganar un dólar y perder un dólar tienen el mismo valor (con signos contrarios), de forma que $u(+1) = -u(-1)$. Imaginemos ahora un *amante del riesgo* para el que $u(+1) = 1{,}5$, $u(0) = 0$ y $u(-1) = -1$. La ecuación para el valor esperado *general* es esta:

$$Eu = u(+1)p(+1) + u(0)p(0) + u(-1)p(-1)$$

Para el neutral tendremos:

$$Eu = (1)p(+1) + (0)p(0) + (-1)p(-1)$$

Pero para el amante al riesgo:

$$Eu = (1{,}5)p(+1) + (0)p(0) + (-1)p(-1)$$

$$Eu = (1{,}5)p(+1) - p(-1)$$

Si despejamos p(+1) nos quedará:

$$p(+1) = Eu/1{,}5 + p(-1)/1{,}5$$

Esa expresión es la curva de indiferencia, que es una familia de rectas cuyos puntos de corte con el eje vertical es Eu/1,5 y cuyas pendientes son 1/1,5.

La utilidad esperada Eu puede moverse entre 1,5 (cuando p(+1) es uno) y -1 (cuando p(-1) es uno). Es el caso del gráfico de la izquierda, dibujado para valores de Eu iguales a -1, -0,5, 0, +0,6 y +1,5. La pendiente de cada recta es 1/1,5, que es 0,75, cuando para el neutral era 1.

En el gráfico de la derecha tenemos al *averso al riesgo*. Imaginemos que u(+1) = 1, u(0) = 0 y u(-1) = -2. Repetimos los cálculos para él:

$$Eu = (1)p(+1) + (0)p(0) + (-2)p(-1)$$

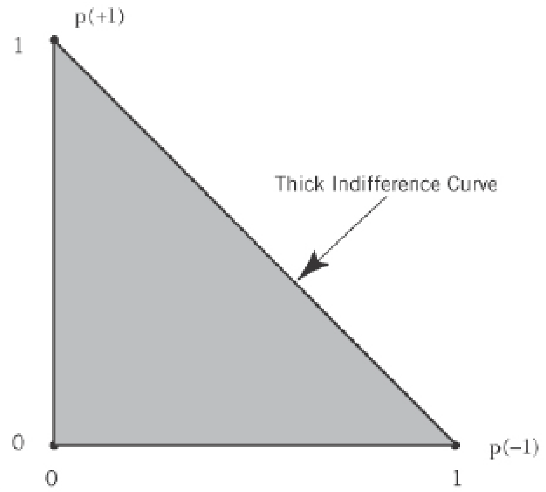
$$Eu = p(+1) - 2p(-1)$$

$$p(+1) = Eu + 2p(-1)$$

La pendiente de la curva de indiferencia será 2, mayor que en el caso del neutral ante el riesgo.

El libro habla (p. 25) de *teorías alternativas a la de la utilidad esperada*, de la que se derivan los diagramas de Marshak-Machina (curvas de indiferencia de líneas rectas paralelas). Estas teorías alternativas surgen porque la observación y los experimentos han mostrado que la teoría de la utilidad esperada no predice bien el comportamiento de las personas en el mundo real cuando se ordenan distribuciones de probabilidad. En realidad este tema se trata en el final del programa de esta asignatura, pero podemos adelantar aquí algo para aprovechar lo que hemos visto de los diagramas de Marshak-Machina (curvas de indiferencia).

Se han observado las siguientes inconsistencias. Primero, *desviación de probabilidades* (*probability bias*), que consiste en el error sistemático cuando calculamos probabilidades. Por ejemplo, se sabe que las personas manejan bien probabilidades cercanas a 0,5, pero sobreestiman las probabilidades cercanas a cero y subestiman las probabilidades cercanas a uno, y los cálculos mentales que se derivan de ahí son erróneos, claro. Veamos un ejemplo extremo de esta desviación en las probabilidades en el que el individuo considera que todas las probabilidades son 0,5, sean altas o bajas. En ese caso p(+1)=p(-1)=p(0)=0,5 y obviamente la suma de las tres no sumará 1, sino 1,5, lo que es una violación de la ley de la probabilidad. La consecuencia es que el individuo considera equivalentes todas las distribuciones de probabilidad, es decir, que para él todas las opciones que combinan resultados seguros e inciertos valen lo mismo. En vez de líneas rectas paralelas en el diagrama de Marshak-Machina tendremos un área que cubre todo el triángulo (un *área de indiferencia*), y dentro de ese área todo punto es valorado igual a cualquier otro punto. Es el caso del siguiente gráfico:



Un ejemplo del mundo real: la lotería. Lo más probable es que se pierda la cantidad apostada en la lotería, es decir, que su valor esperado es negativo (positivo para el Estado, que la promueve, y lo mismo ocurre con todos los juegos en los casinos).

Pero sin embargo la gente juega. ¿Por qué? Una posible explicación es que son amantes del riesgo, pero otra explicación es que la gente calcula mal las probabilidades. En general la gente se justifica diciendo que "ganar un millón de dólares cambiaría mi vida pero perder un dólar en el billete de lotería no me afecta", lo que implica que para la persona ambas cosas valen lo mismo. Si la probabilidad de que te toque es de 1 entre dos millones tendremos que p= 1/2000000, y si el precio del billete es de un dólar y el premio es de un millón de dólares, vamos a ver qué ocurre si fallamos al manejar mentalmente probabilidades y asumimos que p = 0,5. Es obvio que con las probabilidades correctas Eu = 1000000*p – 1*(1-p) = 0,5 – 1 < 0, aunque hemos tomado (1-p), la probabilidad de que no toque, como un valor tan cercano a 1 que podemos asumir que es igual. Sin embargo, con las probabilidades incorrectas (p=0,5) tendríamos lo siguiente: Eu = 500000 – 0,5 = > 0.

El otro problema de la teoría de la utilidad esperada es el de los *efectos presentación* (*framing effects*), y que es el cambio de opinión de una persona en función de cómo plantees una pregunta. Estos problemas se detectan en experimentos psicológicos y son muy frecuentes. Vamos a ver un ejemplo. Imaginemos que nos plantean dos alternativas de un determinado modo, para elegir una, y después se plantea otro problema de elección entre dos opciones ligeramente distinto:

1. Empezamos con 4 dólares. ¿Te quedas con esos 4 dólares o juegas a la siguiente lotería?: a), ganas 1 dólar con probabilidad 0,6; b), ganas 7 dólares con probabilidad 0,4.
2. Empezamos con 10 dólares. ¿Pierdes 6 dólares de esos 10 y te quedas con 4, o bien juegas a la siguiente lotería?: a), pierdes 3 dólares con una probabilidad de 0,4; b), pierdes 9 dólares con una probabilidad de 0,6.

Ambas problemas de elección son idénticos. En ambas te puedes quedar con 4 dólares con probabilidad uno, que es una de las alternativas. En ambas tienes 1 dólar con probabilidad 0,6 o 7 dólares con probabilidad 0,4.

¿Qué resultados ofrecen los experimentos psicológicos de laboratorio? La gente, en general, se queda con los 4 dólares ofrecidos en las condiciones de (1), pero ante (2) prefieren jugar la lotería. Según la teoría de la utilidad esperada, si se eligen los 4 dólares en (1) se debería hacer lo mismo en (2), rechazando la lotería en ambos casos, y no es así. El juego (1) se presenta como alternativas de ganancias, seguras frente a probables, mientras que el juego (2), con idénticos resultados, se presenta como alternativas de pérdidas, seguras frente a probables. Esto provoca unos *efectos presentación* en la persona sometida al experimento, pues en general la gente se comporta de forma diferente frente a las ganancias y frente a las pérdidas, aunque conduzcan al mismo resultado final. La *prospect theory* de Kahnemann y Tversky que menciona el libro (p. 25) está diseñada para tener en cuenta esto y ofrecer una explicación, pero es sólo una de las muchas alternativas que se han barajado y que se discuten aún hoy.

El tercer problema que cuestiona la teoría de la utilidad esperada es el de las *no linealidades*. En la teoría de la utilidad esperada las probabilidades entran en la función de utilidad linealmente, sumándose, lo que explica que las curvas de indiferencia fueran líneas rectas paralelas. Ocurría lo mismo con los bienes sustitutos perfectos, cuyas funciones de utilidad eran lineales, del tipo $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, y que generaban curvas de indiferencia que eran también rectas paralelas. No habría ningún problema si esto representara bien el comportamiento de la gente, pero no es así. La gente se comporta como si tuviera curvas de indiferencia rectas, pero no paralelas. Es lo que se conoce como *paradoja de Allais* (por economista francés Maurice Allais). Esa paradoja surge al responder a un cuestionario como este:

Pregunta 1. Ordene usted las dos siguientes distribuciones de probabilidad:

A: Ganar 500 millones con probabilidad 0,1; Ganar 500 millones con probabilidad 0,01; Ganar 500 con probabilidad 0,89.

B: Ganar 2500 millones con probabilidad 0,1; Ganar 0 millones con probabilidad 0,01; Ganar 500 con probabilidad 0,89.

Pregunta 2: Ordene usted las dos siguientes distribuciones de probabilidad:

C: Ganar 500 millones con probabilidad 0,1; Ganar 500 millones con probabilidad 0,01; Ganar 0 con probabilidad 0,89.

D: Ganar 2500 millones con probabilidad 0,1; Ganar 0 millones con probabilidad 0,1; Ganar 0 con probabilidad 0,89.

Vamos a resumirlo en una tabla:

	Opción	0,1	0,01	0,89
Propuesta 1	A	500	500	500
	B	2500	0	500
Propuesta 2	C	500	500	0
	D	2500	0	0

Para A y B el tercer resultado que puede materializarse las consecuencias son idénticas, por lo que para elegir entre ellas sólo son relevantes los dos primeros posibles resultados, con probabilidades de 0,1 y 0,01. Lo mismo se puede decir de C y D. Si eliminamos pues la última columna descubrimos que la elección entre A y B es idéntica a la elección entre C y D. Es una elección entre conseguir 500 con una probabilidad de 0,11 y 2500 con una probabilidad de 0,1. Si A es preferido a B, C debería ser preferido a D, pero ocurre que cuando se presenta a la gente este juego son muchos los que prefieren A sobre B y D sobre C.

Aunque en el libro se usa profusamente la teoría de la utilidad esperada, pero la verdad es que hoy se piensa que no es una buena teoría explicativa del comportamiento de la gente. Se han propuesto muchas alternativas, pero no las vamos a ver en esta asignatura. En la siguiente tabla presento una lista no exhaustiva de inconsistencias empíricas encontradas entre la teoría de la utilidad esperada y los resultados experimentales o la observación del mundo real:

Nombre del efecto	Ámbito	Descripción	Posible causa
Equity Premium	Bolsa	El rendimiento en bolsa es muy alto relativo al de los bonos	Aversión al riesgo
Disposition effect	Bolsa	Mantener acciones con pérdidas demasiado tiempo, y vender las que tienen beneficio demasiado pronto	Aversión al riesgo y puntos de referencia
Oferta de trabajo con pendiente decreciente (más salario menos horas ofrecidas por los trabajadores)	Mercado trabajo	Los taxistas de NYC se retiran una vez alcanzado los ingresos diarios que consideran necesarios	Aversión al riesgo
Elasticidades-precio asimétricas	Bienes de consumo	Compras más sensibles a los incrementos de precio que a las bajadas	Aversión al riesgo
Insensibilidad a malas noticias que afectan a nuestros ingresos	Macroeconomía	Los consumidores no reducen el consumo tras una mala noticia sobre la evolución de los ingresos	Aversión al riesgo y puntos de referencia
Status quo bias	Elección del consumidor	Los consumidores no cambian de seguro médico	Aversión al riesgo
Favorite bias	Apuestas en carreras de caballos	Se tiende a apostar menos por los caballos favoritos	Se sobrevaloran las bajas probabilidades
Contratación de seguros por teléfono	Seguros	La gente contrata seguros demasiado caros si se les ofrece por teléfono	Se sobrevaloran las bajas probabilidades
Apuestas de lotería	Compra de décimos de lotería	Se venden más billetes cuanto más grande es el premio gordo	Se sobrevaloran las bajas probabilidades

1.5.- Juegos de un jugador con información imperfecta

Cuando en el momento de tomar una decisión, **el jugador no sabe dónde está** en el juego y **juega a ciegas** (azar).

Para representar el azar y sus efectos en el juego:

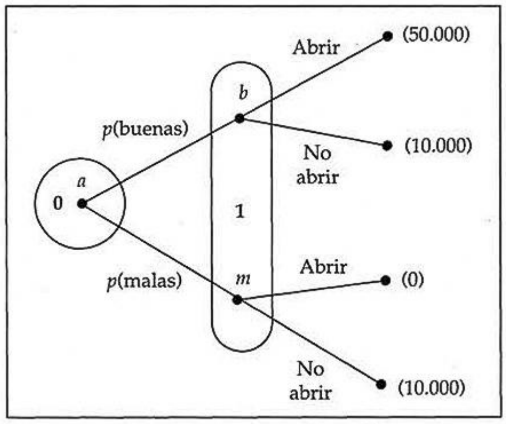


Figura 1.7. Pequeño negocio, información imperfecta.

En el interior del círculo del nodo inicial a tenemos **un 0,** ese jugador cero siempre **representa el azar**.

Un conjunto de información asignado al azar significa que **el azar es quien debe realizar jugada**→ el azar crea una distribución de probabilidad

Las ramas que parten del nodo a son **las direcciones que puede tomar el azar**, las probabilidades: **p(buenas)** y **p(malas);** en este caso condiciones buenas o malas para los negocios.

El jugador 1 (cuando le toca), **no sabe qué es lo que hizo el azar**: la información que tiene es imperfecta→ **Cualquier conjunto de información que contiene más de un nodo** refleja que el jugador al que le corresponde tomar decisión tiene **información imperfecta.**

El jugador 1 no sabe si está en el nodo "bueno" o en el "malo" cuando le corresponde hacer su jugada. Lo único que conoce son las probabilidades con las que se llega a cada uno de esos nodos, p(buenas) y p(malas). No sabe qué circunstancias se dan en el momento en que tiene que decidir.

Debe tomar la decisión de abrir o no abrir , ramas que parten de los nodos b y m, contando con probabilidades buenas y malas.

El jugador 1 tiene 10.000 dólares. Si abre y prospera el negocio obtendrá 50.000$ pero si abre y fracasa ganará 0$ →la rama abrir del nodo b conduce a la máxima ganancia y la abrir del nodo m conduce a la peor ganancia. Ambas ramas se denominan igual porque son consecuencia de idéntica decisión, abrir. Las ramas No abrir conducen a la ganancia 10.000$ (su ganancia no se ve afectada por el azar).

Suponiendo que las probabilidades p(buenas)=0,2 y p(malas)=0,8, similares a las tasas de éxito y fracaso de los pequeños negocios en USA. El jugador 1 para solucionar debe preguntarse si 10.000$ con certeza son preferibles o no a la distribución:

50.000 dólares con probabilidad 0,2
0 dólares con probabilidad 0,8

Que prefiera o no abrir depende de las utilidades que asigne a las cantidades ciertas 0$, 10.000$ y 50.000$

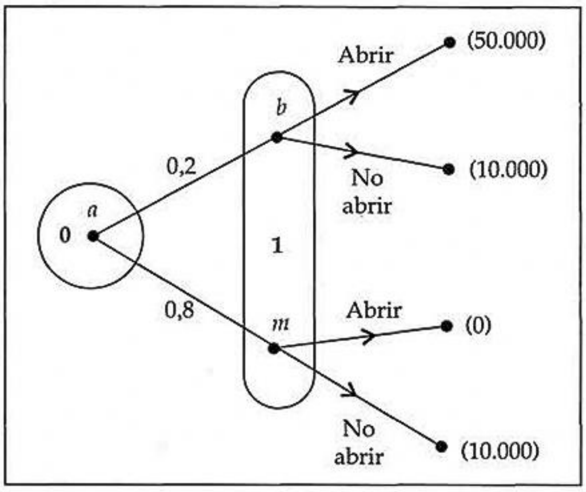


Figura 1.8. Pequeño negocio, jugador neutral ante el riesgo.

La utilidad del dinero es el dinero en sí:

$$u_1(d_1) = d_1$$

u_1 es la función de utilidad del jugador 1
d_1 es la cantidad de dinero que el jugador 1 recibe

u_1(10.000)=10.000$ es la utilidad de no abrir el negocio

Si lo comparamos con la utilidad esperada de abrir, $Eu_1(\text{abrir})$*:*

$$\begin{aligned} Eu_1(\text{abrir}) &= p(\text{buenas})u_1(50.000) + p(\text{malas})u_1(0) \\ &= (0{,}2)(50.000) + (0{,}8)(0) \\ &= 10.000 \end{aligned}$$

abrir y no abrir estarán en la misma curva de indiferencia, con utilidad igual a 10.000$ en cada caso→ tendremos flechas en ambas ramas (solución a Pequeño negocio, con las probabilidades dadas, cuando la utilidad coincide con el dinero).

No todos los jugadores tienen el mismo orden de preferencia respecto a abrir o no un pequeño negocio. **Las preferencias (estrategias) de un jugador depende de las utilidades que asigne a las cantidades ciertas** de dinero **y de su actitud ante el riesgo.**

Las **decisiones del jugador dependerán** **<u>de la utilidad que asigne al dinero</u>, que pueda perder o ganar, y de <u>su aversión o no al riesgo</u>**.

1.6.- Las tres actitudes ante el riesgo:

Pueden identificarse con la curvatura de la función de utilidad del dinero seguro que posee el jugador, **ui(di).**

a. **Jugador neutral ante riesgo → la utilidad del dinero es el dinero** u(d)=d.

   Para esa persona u(10$) = 10$.

   Un dólar con certeza es equivalente a un dólar esperado.

   "Abrir un negocio o no" está en su **misma curva de indiferencia**. Este resultado se indica con las dos flechas asociadas a las dos ramas.

   El riesgo no afecta el proceso de toma de decisiones de este jugador si no afecta el valor esperado.

   Las **funciones de utilidad son lineales** →cualquier transformación lineal positiva entre ellas:

   $$\mathbf{u_1(d_1) = d_1}$$

   Solo los jugadores neutrales ante el riesgo representan directamente las ganancias en dólares como utilidades cuando evalúan los resultados en un árbol de decisión. (Los demás jugadores transforman dólares a una medida diferente, y estas transformaciones no son lineales).

b. Jugador **con aversión al riesgo → un dólar con certeza es mejor que un dólar esperado.**

   Este tipo de jugadores evitan el riesgo, a no ser que las probabilidades estén lo suficientemente a su favor.

   Su **función de utilidad** es **cóncava**, **$f(d)'' < 0$**, (la segunda derivada es **negativa)**.

c. Jugador **amante del riesgo → un dólar esperado es mejor que un dólar seguro**

   Corre el riesgo, a no ser que las probabilidades estén lo suficientemente en contra.

   Su **función de utilidad** es **convexa → $f(d)'' > 0$**, (la segunda derivada es **positiva**).

Las funciones de utilidad que engloban los tres tipos de actitudes ante el riesgo como casos particulares:

$$u_1(d_1) = \frac{d_1^a}{a} \qquad \text{cuando } a \neq 0$$

$$u_1(d_1) = \qquad \log(d_1) \quad \text{cuando } a = 0$$

cuando a =1 → el jugador es neutral ante el riesgo
cuando a >1 → es amante del riesgo
cuando a < 1 → es averso al riesgo

Si a=2; u(d) = $d^2/2$ *→ f(d)´´ = 1 → función convexa: el jugador es amante del riesgo → prefiere abrir un pequeño negocio*

Si a=0,5; u(d) = $d^{0,5}/0,5 = 2d^{0,5}$ *→ función cóncava: el jugador es averso al riesgo → prefiere no abrir*

u(d) = log(d) cuando a = 0

El parámetro **a** refleja la **actitud del jugador ante el riesgo**. Cuanto mayor sea a, menos averso al riesgo es el jugador.

Un jugador averso al riesgo, con a=0,5, ve así el juego:

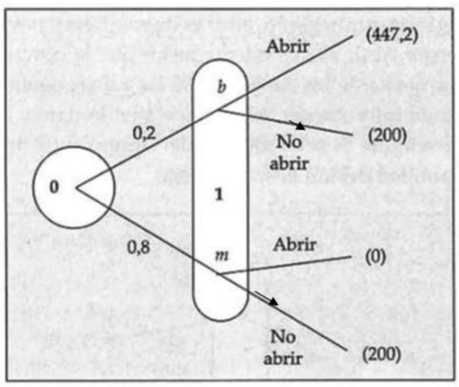


Figura 1.9. Pequeño negocio, jugador averso al riesgo.

Las ganancias han sido transformadas de dólares a utilidad; por ejemplo,

$$u(50.000) = 2(50.000)^{0,5} = 447,2.$$

Al calcular la utilidad esperada por el jugador 1 de la estrategia Abrir, $Eu_1(\text{abrir})$, *obtenemos:*

$$Eu_1(\text{abrir}) = 0,2(447,2) + 0,8(0) = 89,4$$

y la utilidad esperada por el mismo, por NO Abrir, será:

$$Eu_1(\text{no abrir}) = 2(10.000)^{0,5} = 200$$

Como 200>89,4 , la estrategia No abrir es mejor que la abrir →flechas sobre las ramas No Abrir de la figura 19→ No abrimos un negocio con un riesgo de fracaso tan alto.

Un amante del riesgo con a=2, lo verá así:

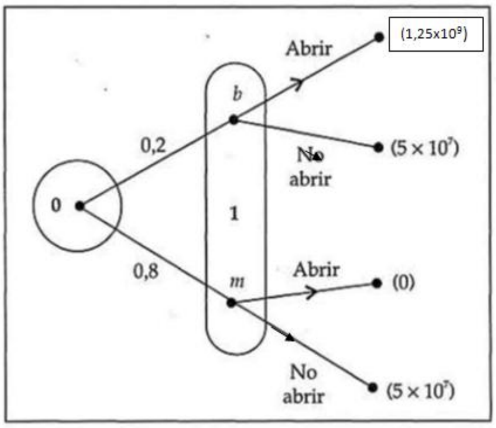


Figura 1.10. Pequeño negocio, jugador amante del riesgo.

Transformamos las ganancias de dólares a utilidad:

$$u(50.000) = 2(50.000)^{0,5} = 447,2.$$

La utilidad esperada de Abrir del jugador 1 será:

$$Eu_1(abrir) = 0,2(1.250 \text{ millones})+0,8(0) =250 \text{ millones}$$

porque la utilidad esperada de No abrir es de sólo 50 millones y la utilidad de 50.000 es:

$$u(50.000)=50.000^2/2= 1.250 \text{ millones}$$

Por tanto, para este amante del riesgo, la estrategia Abrir es mejor que la No abrir → ver flechas sobre las ramas abrir → le da más morbo.

La mayoría de las veces **suponemos que los agentes son neutrales** ante el riesgo y **ven el juego igual que cuando las ganancias están en dólares.**

En algunos casos coinciden las tres actitudes ante el riesgo en que una decisión es mejor que otra.

En **pequeño negocio subvencionado**:

a) Cuando el entorno no es propicio para los negocios y el Estado compensa totalmente el fracaso del pequeño negocio la estrategia **No Abrir nunca puede ser mejor que** la estrategia **abrir.**

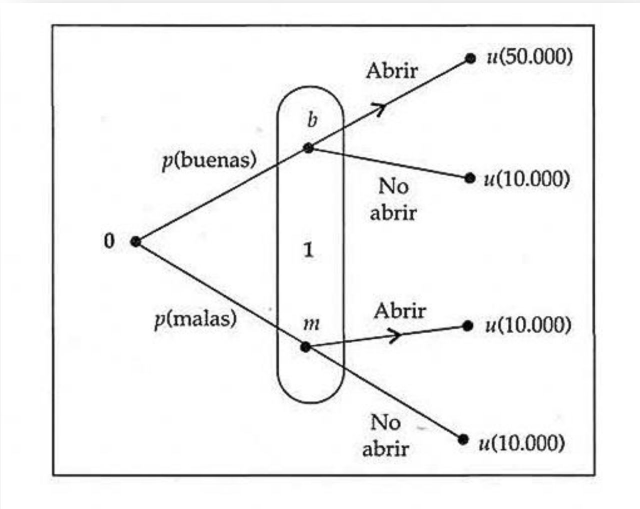


Figura 1.11. Pequeño negocio subvencionado.

Si las circunstancias son malas, ambas producirán las mismas ganancias; y si son propicias para los negocios, ***Abrir será más beneficiosa que No Abrir****:*

Se trata de comparar:

$$Eu_1(\text{abrir}) = p(\text{buenas})u(50.000) + p(\text{malas})u(10.000)$$

con

$$Eu_1(\text{no abrir}) = u(10.000)$$

Para cualquier función de utilidad y distribución de probabilidades,

$$Eu_1(\text{abrir}) \geq Eu_1(\text{no abrir})$$

y solo son iguales cuando p(malas)=1.

Si hay una remota posibilidad de que el pequeño negocio tenga éxito, **la solución** para cualquiera que juegue Pequeño Negocio Subvencionado **será abrir**.

Las distribuciones de probabilidad se pueden ordenar en términos de preferencias por el método de a utilidad esperada y por otros métodos, como la Teoría Prospectiva. Pero **todas ellas coinciden en un punto.**

Si una distribución de probabilidad asigna mayor probabilidad a ganancias altas y menor probabilidad a ganancias bajas que otra distribución de probabilidad, la **primera domina estocásticamente a la segunda.**

Un ejemplo sería ***Pequeño Negocio subvencionado*** ***→ la probabilidad asociada a abrir domina estocásticamente a la distribución de probabilidad (certeza) de no abrir****.*

Nunca proporciona ganancia inferior a 10.000$ y con probabilidad de p(buenas) proporciona ganancia mayor.

Cualquier ordenación razonable de distribuciones de probabilidad coincide con la dominancia estocástica.

Recordar que 0,5 = 1/2, y que

$$x^{1/2} = x^{0,5} = \sqrt{x}$$

Si u(d) = d^a *y a < 1 → u(d) < d, y por eso el individuo es* ***averso al riesgo****.*

Sin embargo, cuando a>1 → que u(d) > d, y por eso el individuo es ***adicto al riesgo.***

Las funciones de utilidad generan números índice que reflejan un orden de preferencias.

Si se prefiere una cantidad del bien A a una cantidad del bien B → **u(A) > u(B),** es decir, el número índice que la función u() genera para A será mayor que el que genera para B.

Pero A y B pueden ser cantidades de dinero d.

Si **u(d) = d**→ el individuo es **neutral ante el riesgo**. Eso quiere decir que valoramos cada unidad monetaria, cada euro, tal cual, es decir, **u(d) = d.**

ATENCIÓN: las funciones de utilidad son personales e intransferibles, porque reflejan las preferencias de cada persona.

Si **$u(d) = d^2$** → **u(d) > d**, el individuo es **amante del riesgo**, pues **valora subjetivamente más el dinero de lo que este vale realmente, lo que nos lleva a soportar más riesgos por conseguirlo**.

Si **$u(d) = d^{1/2}$ $=d^{0,5}$ = $\sqrt{d}$** (raíz de d) → **u(d) < d**, el individuo es **averso al riesgo**, y **valora subjetivamente el dinero menos de lo que vale objetivamente**, lo que le lleva a **aceptar menos riesgos** a cambio de conseguirlo.

1.7.- Juegos de dos jugadores con información perfecta: El Caldero de oro con dos jugadores

Se utilizan como alegoria de cuestiones más complejas.

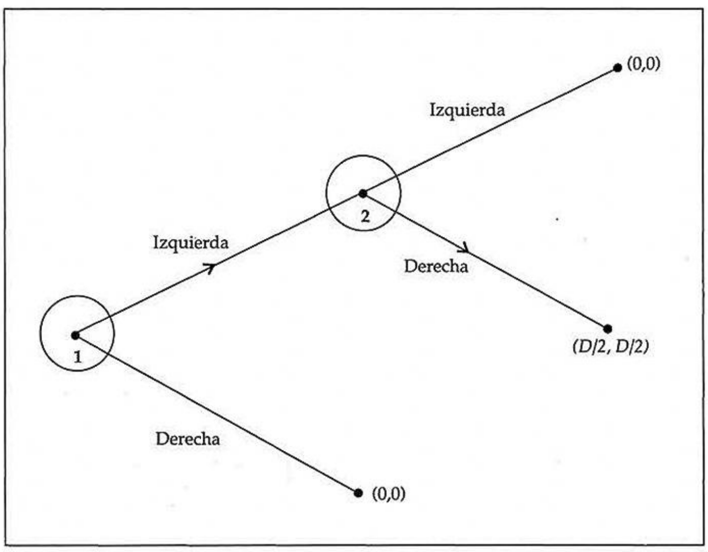


Figura 1.12. Caldero de oro para dos jugadores, forma extensiva.

Primero juega el jugador 1. Puede ir a la izquierda o a la derecha. A la derecha el juego termina y en el nodo Terminal hay asociado un vector de ganancias u dado por:

$$u=(u_1,u_2)=(0,0)$$

que indica que en este punto terminal cada jugador obtendrá 0 ganancias.

Si el 1 fuera a la izquierda, le tocaría el turno al jugador 2, quien podrá ir a la izquierda {terminando el juego también con ganancia 0 para ambos; mismo vector de ganancias $u=(u_1,u_2)=(0,0)$} y a la derecha, donde también terminaría el juego, pero como ambos jugadores han encontrado el caldero de oro se repartirían las ganancias:

$$u=(u_1,u_2)=(D/2, D/2)$$

La resolución de **El Caldero de Oro con dos jugadores** no es diferente de la resolución con un jugador. **Es una alegoría de que cualquier acuerdo entre las partes es beneficioso para ambos; hay que encontrar el camino para llegar a ese acuerdo→trayectoria de solución.** En el Caldero de oro con dos jugadores **solo existe una solución**.

Utilizamos la **inducción hacía atrás** →trayectoria de solución (que existe una única):

- *Empezamos por el jugador 2, el último en jugar, quien prefiere la mitad del caldero a nada→juega a la derecha, llevándonos a la jugada del jugador 1*

- *El jugador 1 también prefiere medio caldero a nada→juega izquierda.*

Esta resolución se refleja en la figura mediante las dos flechas en las dos ramas jugadas.

La forma extensiva de Caldero de oro c**on dos jugadores se parece mucho a la forma extensiva de un jugador.** Ver figuras 1.2 y 1.12.

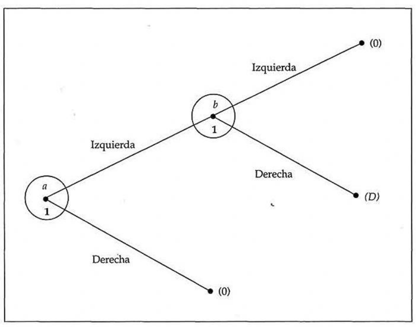


Figura 1.2. Caldero de oro, forma extensiva.

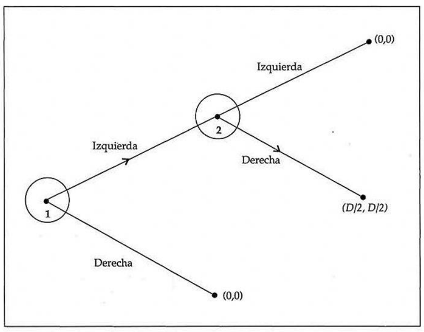


Figura 1.12. Caldero de oro para dos jugadores, forma extensiva.

La <u>forma normal</u>, sin embargo, difiere mucho entre ambos juegos. Ver figuras 1.4 y 1.13:

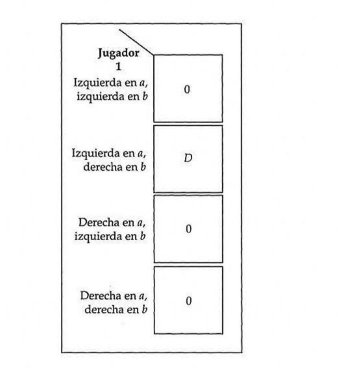


Figura 1.4. Caldero de oro, forma normal.

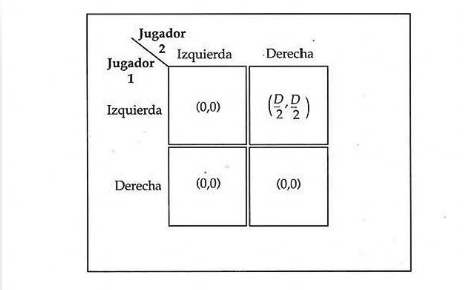


Figura 1.13. Caldero de oro para dos jugadores, forma normal.

Primero **listamos las estrategias de ambos jugadores**:

- Jugador 1: solo tiene un conjunto de información con dos estrategias, izquierda y derecha

$$(1) \times (2) = 2 \text{ estrategias.}$$

- Jugador 2: También tiene dos estrategias, izquierda y derecha

$$(1) \times (2) = 2 \text{ estrategias.}$$

Colocamos estas estrategias en una matriz 2x2 (dos filas, por las dos estrategias del 1 y dos columnas, por las dos estrategias del 2)

Situamos los vectores de ganancias de los puntos terminales de la forma extensiva en las casillas de la matriz de forma normal

El par de estrategias: ***1 va a la izquierda, 2 va a la derecha*** **conduce al vector de ganancias (D/2, D/2), que aparece en la fila 1 (jugador 1 va a la izda..) y columna 2 (jugador 2 va a la dcha..) de la matriz**

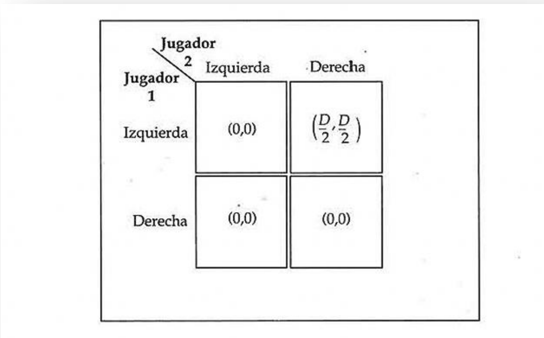


Figura 1.13. Caldero de oro para dos jugadores, forma normal.

1. 8.- **<u>Juegos tipo Ajedrez</u>**

Un juego de **dos jugadores** con **información perfecta es tipo Ajedrez si satisface** los cuatro **requisitos** siguientes:

1. Los jugadores **juegan de forma alternada**

2. Cada jugador tiene **como máximo un número finito** de estrategias

3. **Los resultados posibles** se limitan a ganar **(g, p)**, perder **(e, e)** o empatar **(p, g)**

4. Que los jugadores tengan **información perfecta** (que puedan <u>ver el tablero en todo momento)</u>

Solo esto permitiría a los jugadores garantizarse un resultado.

Teorema sobre Juegos tipo Ajedrez: <u>En juegos tipo Ajedrez</u>, **una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:**

- el jugador 1 puede garantizarse la victoria,
- el jugador 2 puede garantizarse la victoria o
- cada jugador puede garantizarse un empate (Zermelo 1911).

Demostración: *…los vectores de ganancias u,v y x pueden adoptar cualquier de las sig. Formas:*

(g,p) (e,e) (p,g)

Como cada posible vector de ganancias puede adoptar solo una de esas tres formas y hay tres vectores de ganancia, existen 3^3*= 27 posibles juegos.*

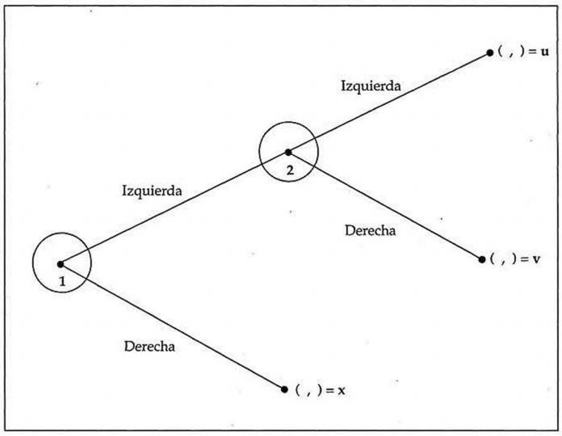


Figura 1.14. Juegos tipo Ajedrez.

La demostración se efectúa para cada uno de estos 27 juegos, utilizando inducción hacia atrás.

Empezaremos con el jugador 2 al final del juego. Este, dados los vectores de ganancias u y v, maximiza su utilidad. Para él existen tres posibles casos:

Caso 1.

- *El jugador 2 puede conseguir la victoria en al menos uno de los vectores u o v.*
- *En este caso, si el juego llega al jugador 2, éste puede garantizarse la victoria.*
- *Si x=(p, g), el jugador 1 pierde haga lo que haga y el jugador 2 tendrá la victoria garantizada.*
- *Si x=(e, e), el jugador 1 se asegura el empate eligiendo ir a la derecha.*
- *Si x=(g, p), el jugador 1 tiene la victoria segura.*

Caso 2.

- *El jugador 2 no puede conseguir la victoria en ningún caso, pero puede conseguir un empate en al menos uno de los vectores u o v.*
- *Si el juego llega al jugador 2, éste puede garantizarse un empate.*
- *Lo peor para el jugador 1 es obtener el empate. Si el vector de ganancias es x=(g,p), el jugador 1 elegirá ir a la derecha y garantizarse la victoria; en caso contrario irá a la izda.. y se garantizará el empate.*

Caso 3.

- *El jugador 2 se enfrenta a una derrota haga lo que haga: u = v = (g,p). Los vectores u y v son iguales y se da una única solución: el ganador es el jugador 1 haga lo que haga el jugador 2.*
- *Es el jugador 1 el que puede garantizarse la victoria escogiendo ir a la izquierda.*
- *El juego llegará al jugador 2, que seguro que pierde.*

Existen muchos juegos tipo Ajedrez; como el Tres en Raya, donde cada jugador puede garantizarse el empate.

El **ajedrez** es más complicado:

- El jugador 1 tiene **20 aperturas** posibles
- El 2 tiene **20 respuestas** posibles
- Su forma extensiva precisa **un gráfico de 10^{30} nodos**
- Aunque **mover primero es una ventaja**, realmente **no se sabe si blancas puede garantizarse la victoria**

Estos juegos demuestran la **importancia de una estrategia**. Si se es el jugador 1 y se sabe que puede garantizarse la victoria pero se pierde, no hay excusa pues **no interviene el azar**, la **información** que se tiene es **perfecta** → el único motivo por el que **se habrá perdido** es **por haber elegido una mala estrategia.**

Estos juegos fueron **los primeros a los que pudieron jugar las máquinas programables**; la estrategia es lo único que importa. Con un plan de juego completo está lista para jugar.

1.9.- Forma extensiva, forma normal y forma función de coalición

Algunas veces, **la frontera entre un juego tipo Ajedrez y juegos que no lo son no está muy clara.**

El juego **1.16a es tipo Ajedrez** (el jugador 1 puede asegurarse el empate si escoge izquierda); el **1.16b no lo es** ya que tiene **info imperfecta**.

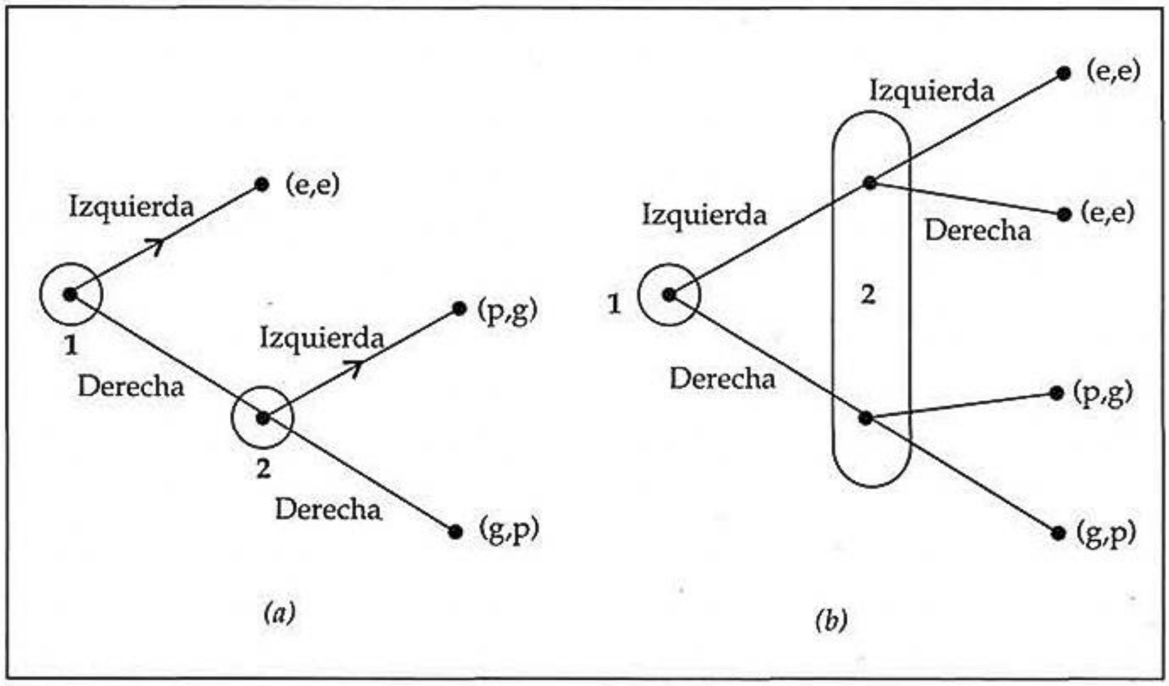


Figura 1.16. Juegos casi tipo Ajedrez.

Pero **sus formas normales son exactamente iguales**:

Jugador 1 \ Jugador 2	Izquierda	Derecha
Izquierda	(e,e)	(e,e)
Derecha	(p,g)	(g,p)

Figura 1.17. Juegos en forma normal.

Cada jugador tiene un conjunto de **información con dos estrategias disponibles, matriz 2x2**.

Cuando ambos van a la izda., el resultado **es empate (e, e)** y así sucesivamente. Luego **sus ganancias coinciden** <u>en ambos juegos</u>.

Ocurre a menudo que **juegos con formas extensivas diferentes tienen la misma forma normal**; esto es debido a que **la forma normal suprime algo de la información** disponible en la forma extensiva. **El juego de la 1.16a tiene info perfecta, lo que no se refleja en formar normal.**

Cada forma extensiva tiene **una única representación en forma normal.**

Sin embargo, **para cada juego en forma normal existen** habitualmente **varios juegos en forma extensiva** que podrían dar lugar a esa forma normal → **Lo que es verdad para juegos tipo Ajedrez también podría ser verdad para juegos casi tipo Ajedrez**.

En ambas 1.16 a y b, **el jugador 1 puede asegurarse un empate si va a la izda.**.

En la forma normal, en cambio, si el 1 escoge la estrategia izda., alcanzará un empate en cualquiera de las casillas de la fila correspondiente en la matriz. **Si el 1 escogiera derecha y después el jugador 2 escogiera derecha, lo lógico, el jugador 1 perdería →** obtenemos el mismo resultado que en la forma extensiva pero con otro razonamiento.

Existe una **tercera forma de representar juegos →forma <u>función de coalición</u>**, muy útil **para juegos que poseen un alto carácter cooperativo**. En ella sólo **se necesita responder** las **dos cuestiones** siguientes:

1. ¿**Cuál es <u>el mínimo</u> que puede conseguir <u>cada jugador por sí mismo</u>**?
2. ¿**Cuál es <u>el mínimo</u> que pueden conseguir los dos jugadores <u>actuando juntos</u>?**

Para un juego en el que se gana, se empate o se pierde, figura 1.16a, **la forma función de coalición dice que tanto el jugador 1 como el 2 pueden asegurarse el empate; si actúan conjuntamente no pueden garantizarse un resultado mejor que éste.**

Esta forma se utiliza principalmente para estudiar cómo se reparten las ganancias de la cooperación entre los participantes en el acuerdo (cap 12).

La mayoría de las veces si **un juego** es **de información imperfecta no se parecerá al Ajedrez**. Por lo que **podremos construir contraejemplos** a este relajando alguna de sus hipótesis.

Para el **Caldero de Oro de dos jugadores**, la forma **función de coalición** dice que:

- j1 puede conseguir como mínimo 0 (si 2 se va a la izda.) y
- j2 puede conseguir como mínimo 0 (si 1 se va a la derecha),
- Pero juntos j1 y j2 pueden obtener D (si 1 va a la izda. y 2 va a la dcha.):

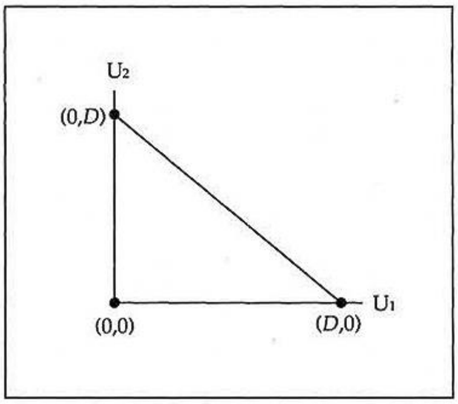


Figura 1.18. Caldero de oro con dos jugadores, forma función de coalición.

¿Cómo se interpreta la función de coalición de la Figura 1.18?

Las funciones de "coalición", como su propio nombre indica, se emplean en los juegos cooperativos. Esta es una presentación temprana de la misma. Interpreten esa figura de la siguiente forma:

En el eje vertical (jugador 2) se señala el punto con el resultado mínimo del jugador 1 y el máximo del jugador 2, es decir, el jugador 2 puede conseguir como mucho D cuando el jugador 1 consigue 0.

En el eje horizontal (jugador 1) se señala el punto con el resultado mínimo del jugador 2 y el máximo del jugador 1, es decir, el jugador 1 puede conseguir D cuando el jugador 2 no consigue nada.

La línea recta que une esos dos puntos representa las combinaciones lineales de uno y otro resultado, es decir, cada uno de sus puntos implica un reparto distinto del premio, y por tanto es el espacio para la negociación. Los jugadores 1 y 2 podrían optar por no competir y cooperar, en cuyo caso se tendrían que repartir el premio, y ese reparto acordado es un punto de la línea inclinada que une los dos puntos extremos comentados (que serían los resultados sin cooperación de ninguna clase).

Es un caso muy elemental porque en el mundo real (el gráfico no lo permite) podría ocurrir esto: que cooperando dos jugadores pudieran conseguir un resultado mejor que no cooperando. En ese caso ya no hablaríamos de una línea recta, sino de una forma diferente (podría ser una función cóncava que pase por los dos puntos extremos, o dos rectas que unen los puntos extremos cruzándose en un punto alejado, etc. También podría ocurrir que el premio que pueden asegurarse para sí cada uno de los jugadores sin cooperar no sea el mismo para uno y para otro. Etc. Puede haber muchos casos más que requerirían gráficos específicos, distintos.

Pero básicamente la función de coalición muestra las posibilidades de reparto del premio que pueden conseguir cooperando.

Resumen

1. Un juego es cualquier situación estratégica gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizada por la interdependencia estratégica entre los jugadores.
2. Existe una gran variedad de juegos en sentido literal: juegos de mesa, juegos de cartas, videojuegos y juegos deportivos. Tanto en la economía como en el mundo empresarial se utilizan los juegos en un sentido amplio del término. Los Chicago Bulls son un ejemplo de ambos sentidos.
3. La teoría de juegos es la ciencia que estudia los juegos con la suficiente profundidad como para resolverlos. La teoría de juegos empezó siendo matemática aplicada, pero ahora es uno de los puntales del pensamiento económico y empresarial.
4. Los juegos sirven como modelos de relaciones empresariales y negociaciones económicas. Las guerras de la cola entre Coca-cola y Pepsi son un ejemplo de un juego en el mundo empresarial; las negociaciones entre los siete países más desarrollados son un ejemplo de un juego en economía.
5. La forma extensiva es la descripción básica de un juego. Una forma extensiva es un diagrama de árbol, con nodos, ramas, nodo inicial, conjuntos de información y puntos terminales.
6. Un juego de un jugador con información perfecta puede ser resuelto por inducción hacia atrás, empezando por el final y retrocediendo hasta el principio.
7. Un juego es de información perfecta si cada conjunto de información contiene un único nodo. Un juego con información imperfecta necesita que un jugador ordene de acuerdo con sus preferencias las distribuciones de probabilidad, lo que requiere una noción ampliada de utilidad.
8. La utilidad esperada ordena según preferencias las distribuciones de probabilidad. En esta teoría, las curvas de indiferencia son líneas rectas paralelas, y existen tres actitudes fundamentales ante el riesgo: neutral ante el riesgo, averso al riesgo y amante del riesgo. Cada actitud representa un modo sistemático de ver el mundo y significa un modo sistemático de jugar, como muestra el juego Pequeño negocio.
9. Una distribución de probabilidad domina estocásticamente a otra cuando nunca paga menos y algunas veces paga más. En este caso, su utilidad esperada es más alta, independientemente de la actitud ante el riesgo.
10. Los juegos de dos jugadores con información perfecta pueden ser resueltos por inducción hacia atrás, como los juegos de un jugador con información perfecta.
11. Para un juego tipo Ajedrez uno y sólo uno de los enunciados siguientes es verdad: el jugador 1 puede garantizarse la victoria, el jugador 2 puede garantizarse la victoria o cada jugador puede garantizarse un empate.

12. Un ordenador puede ahora ganar al campeón mundial de Ajedrez.
13. Existen tres representaciones de los juegos: la forma extensiva, la forma normal y la forma función de coalición. La forma normal se centra en las consecuencias de las diferentes estrategias, en tanto que suprime parte de la minuciosidad de la forma extensiva. La forma función de coalición suprime incluso más detalles que la forma normal y se utiliza principalmente para estudiar la cooperación entre jugadores.

Glosario: una síntesis de la síntesis

1. Los juegos de suma constante pueden ser transformados en juegos de suma cero. Estos juegos no suelen tener equilibrios de Nash en estrategias puras, pero sí en estrategias mixtas. La solución del juego es este equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

2. Los juegos de suma variable simétricos piden una solución simétrica en ganancias. Si hay equilibrios de Nash en estrategias puras que no cumplen con la condición de simetría, hay que buscar la solución en el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, que será simétrico en ganancias porque p = q.

3. Los juegos de suma variable asimétricos pueden tener varios equilibrios de Nash, en estrategias puras o mixtas, que son candidatos a solución del juego. La simetría no es una condición necesaria. En estos casos la clave está en la eficiencia, de manera que el equilibrio más eficiente -el que proporciona las mayores ganancias- será en general la solución del juego.

4. Cuando un jugador tiene una estrategia estrictamente dominante esa estrategia es para él la mejor opción en cualquier caso, por lo que la adoptará siempre. Ese jugador no optará nunca por cualquier otra estrategia -dominada- ni por una combinación de estrategias que incluya alguna dominada. Para él no habrá estrategias mixtas factibles. Si los dos jugadores tienen una estrategia dominante, ninguno de los dos seguirá nunca una estrategia mixta. Por tanto, no habrá equilibrios en estrategias mixtas, y como consecuencia no habrá soluciones que contengan estrategias mixtas.

5. En general, podemos decir que una estrategia dominada nunca formará parte de la solución de un juego. Por tanto, si nos enfrentamos a la forma normal de un juego de dimensión *nxn*, siempre podremos ir seleccionando estrategias dominadas y eliminarlas, con lo que reduciremos el tamaño de la matriz. Esto se puede hacer fila a fila y columna a columna, de manera que al final nos quedemos con una casilla, que sería la solución del juego; o con un conjunto de filas y columnas donde ya no hay estrategias dominadas, y pasaríamos a analizar los equilibrios en ella.

6. En los juegos secuenciales con información perfecta podemos encontrar uno o más *equilibrios de Nash perfectos en subjuegos* (como en el juego de destrucción mutuamente asegurada). Un *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos* contiene un equilibrio en cada subjuego. En algunos juegos hay subjuegos por los que no se pasa, es decir, que no se juegan, pero los equilibrios en ellos forman parte del *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos*. En realidad son respuestas óptimas preparadas para los casos en los que el juego, por lo que sea, se salga de su trayectoria de equilibrios que es la solución del juego.

Se pueden interpretar como amenazas o promesas, y sólo formarán parte del equilibrio perfecto en subjuegos si son creíbles. Así, el *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos* contiene el desarrollo previsible del juego -la solución, que determinará el resultado material del juego- y los equilibrios en desarrollos alternativos posibles. Por eso se dice que la solución de un juego secuencial en forma extensiva con información perfecta es perfecta en subjuegos.

7. Cuando un juego con un único equilibrio se repite, ese equilibrio se repite en cada ronda del juego. Es el *teorema de Selten*. Cuando un juego tiene más de un equilibrio y se repite, surge la posibilidad de pasar de un equilibrio a otro en cada ronda. Tanto en un caso como en otro, cada sucesión de equilibrios es un *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos*. Éstos son secuencias de equilibrios formados por equilibrios de Nash en cada una de las repeticiones. Pero estos juegos de suma variable con múltiples equilibrios de Nash en una sola ronda abren una nueva posibilidad cuando se repiten un número finito de veces: un nuevo tipo de equilibrio que contiene en alguna de las repeticiones posiciones que no son equilibrios de Nash en una sola ronda. Y sin embargo, considerados en su conjunto, son equilibrios, porque esta es la clave: en estos juegos el equilibrio debe considerarse en su conjunto. Por tanto, son equilibrios porque si un jugador se aparta de él, perderá algo, y deseará no haberse salido de la senda. Estrategias como la del disparador permiten jugar estos equilibrios, que pueden ser más eficientes que otros formados por sucesiones de equilibrios de Nash. Cuando el juego se repite un número infinito de veces la posibilidad de alcanzar estos equilibrios supereficientes *no* formados por equilibrios de Nash en cada ronda se abre también en los juegos que sólo tienen uno de esos equilibrios. Decimos posibilidad porque todo dependerá del tipo de descuento R que apliquemos para actualizar los resultados del juego en cada ronda. De todas formas, cuando las repeticiones son infinitas la cooperación es más fácil que cuando son finitas.

8. Cuando el juego es secuencial, como en el punto 6, pero la información no es perfecta, surgen nuevas complicaciones: uno de los jugadores puede tener más información que el otro, y éste tendrá que inferir toda la que pueda de la información disponible y tomar una decisión condicionada a las probabilidades que calcule. Es lo mejor que puede hacer. Para ello se emplea la *regla de Bayes*, que permite calcular la probabilidad de que ocurra un evento una vez sabemos que ha ocurrido otro evento no independiente. Esto quiere decir que las probabilidades de ambos están entrelazadas, y si ocurre uno la probabilidad de que ocurra el otro se modifica.

Conceptos clave

juego
juego empresarial
teoría de juegos
forma extensiva
inducción hacia atrás
forma normal
neutral/averso al riesgo,
amante del riesgo
juegos tipo Ajedrez
interacción estratégica
negociación económica
información perfecta / imperfecta
conjunto de información
estrategia
utilidad esperada
dominancia estocástica
forma función de coalición

Problemas

1. Dé ejemplos de interacción estratégica en cada una de las siguientes industrias: ocio, cervecera, automóvil y servicios financieros.

Es decir empresas que compiten por un nicho de mercado. Unos ejemplos de competencia en mercados oligopolísticos:

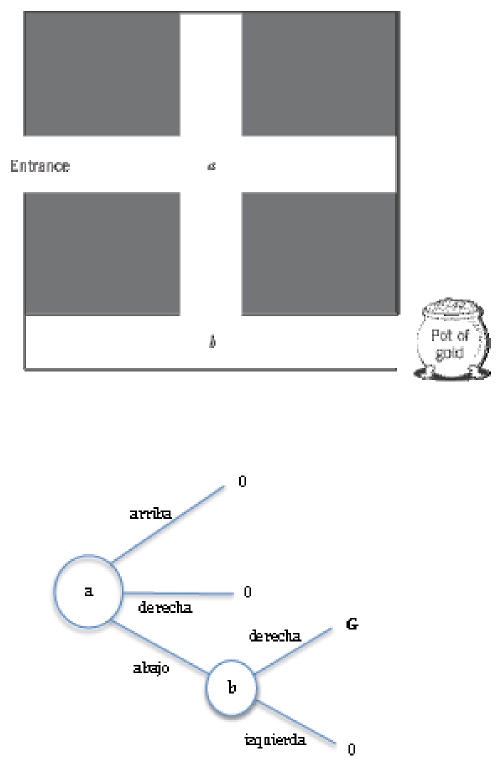
- Ocio: Halcon Viajes y Barcelo
- Cerveceras: Cruzcampo y Mahou
- Automoviles: Nissan y Toyota (Coches híbridos) o Mercedes y BMW (coches lujo)
- Servicios Funerarios: Santa Lucía y el Ocaso

Estos ejemplos de interacción estratégica en el cine le pueden interesar:

http://nadaesgratis.es/admin/y-el-oscar-es-para-la-teoria-de-juegos

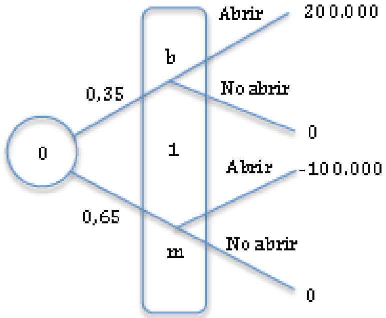
2. Dibuje la forma extensiva del laberinto de la figura 1.19 y a continuación resuélvalo.

Piden la forma extensiva del juego del caldero modificado de la página 37:



3. Está considerando abrir un cine multisalas. Tiene 100.000 dólares para invertir. Si abre el cine, la probabilidad de ganar 300.000 dólares es de 0,35 (incluida la inversión) y la de perder todo el dinero es de 0,65. Si no abre el cine, conserva los 100.000 dólares. El azar juega antes que usted. Dibuje el árbol del juego. ¿Qué debería hacer si es neutral al riesgo? ¿Cambiaría su estrategia si la probabilidad de éxito fuera 0,3 en lugar de 0,35?

La inversión son 100.000 dólares. Se pueden ganar 200.000 con una probabilidad 0,35, pero se puede perder todo con una probabilidad 0,65. Si no se abre el cine se conservan los 100.000. El azar juega antes.



Calculamos la utilidad esperada de abrir el negocio: Eu = (0,35)(200.000)-(0,65)(100.000) = 70.000 – 65.000 = 5.000 > 0

Cualquier persona neutral ante el riesgo abriría el negocio. Obsérvese que al ser neutral los resultados en dinero entran en el cálculo de la utilidad esperada directamente, pues la utilidad de un euro es un euro.

Si la probabilidad de éxito fuera 0,30 en vez de 0,35 tendríamos: Eu = (0,30)(200.000)-(0,70)(100.000) = 60.000 – 70.000 = - 10.000 < 0. La persona neutral ante el riesgo no invertiría.

Las cantidades del árbol muestran las ganancias o pérdidas sobre los 100.000.

Podría abrir al principio del juego una rama con cero 0 como ganancia, pues si se queda con los 100.000 ni pierde ni gana nada.

Eso no cambia nada el análisis.

La utilidad esperada puede tener signo positivo o negativo.

Un ejemplo muy sencillo:

Imaginar que jugamos a esto: lanzamos una moneda, si sale cara, usted me paga G, y si sale cruz yo le pago D.

Si la moneda no está trucada las probabilidades serán 0,5 (para cara y cruz).

Nuestras utilidades esperadas serán:

$$Eu(Marta) = p(cruz)D - p(cara)G$$

y

$$Eu(Rubén) = p(cara)G - p(cruz)D$$

Si G = D las utilidades esperadas son cero para ambos.

Si D > G su utilidad, Marta, esperada será positiva, y la mía negativa→ le interesará a usted jugar. Puede que juegue una partida y pierda, ojo, pero si jugamos 1000 partidas usted ganará y yo perderé dinero.

Si G > D. Suponemos neutralidad, de manera que u(G) = G y u(D) = D.

4. Rehaga el problema 3 de las dos formas siguientes: a) es usted averso al riesgo y su función de utilidad es $u = d^{1/3}$; b) es usted amante del riesgo y su función de utilidad $u = d^3$. Explique la diferencia, si existe, entre los jugadores aversos al riesgo, amantes del riesgo y neutrales al riesgo.

a) El caso de la aversión al riesgo, en que $u = d^{1/3}$.

$u(200.000) = (200.000)^{1/3} \approx 58,5$

$u(100.000) = (100.000)^{1/3} \approx 46,4$

$Eu = (0,35)u(200.000)-(0,65)u(100.000) = 20,5 - 30,2 < 0$

La persona aversa al riesgo no abre el negocio.

b) El caso del amante del riesgo, en que $u = d^3$.

$u(200.000) = (200.000)^3$

$u(100.000) = (100.000)^3$

Los números son tan grandes que podemos dividir y multiplicar todo por $(100.000)^3$ para ver el signo del resultado.

$Eu[(100.000)^3/(100.000)^3] = [(0,35)8-(0,65)]\,(100.000)^3 = (2,8 - 0,65)\,(100.000)^3 > 0$

La persona amante del riesgo abre el negocio.

Los jugadores **Neutrales** transforan los dolares (dinero) con una medida **lineal**, es decir: ui(di)= di. s

Los jugadores **Aversos** al Riesgo transforan los dolares (dinero) con una medida **No lineal**, es decir: ui(di)=di^a/a, (En el caso del ejercicio **Aversos**. **u=d ^1/3**), siendo su f(u) **Concava**, luego d''(2ª derivada) es **Negativa**

Los jugadores **Amantes** al Riesgo transforan los dolares (dinero) con una medida **No lineal**, es decir: ui(di)=di^a/a- (En el caso del ejercicio **Amantes** : **u= d^3**), siendo f(u) **Convexa**, luego d''(2ª derivada) es **Positiva**

La función de utilidad es u = $d^{1/3}$

Por tanto, u(d) = $d^{1/3}$

u(200.000) = $200.000^{1/3}$

Recuerde que:

$$d^{1/3} = \sqrt[3]{d}$$

Eu es un promedio de utilidades.

Para promediar se usan las probabilidades.

Así, en el primer caso:

Eu = (0,35)u(200.000) - (0,65)u(100.000)

Es decir, la probabilidad de ganar 200.000 (que es 0,35, un 35%), por la utilidad que supone esa ganancia, más la probabilidad de ganar 100.000 (que es 0,65, un 65%) por la utilidad de esa ganancia.

¿Cómo llegar a la conclusión de la segunda parte del ejercicio cuando se es amante del riesgo cuya utilidad es d^3?¿Cómo se calcula la utilidad esperada?

De igual forma:

Eu [(100.000)3/(100.000)3]=

=[(0,35)8-(0,65)] (100.000)3=

=(2,8– 0,65) (100.000)3 > 0

¿De dónde sale el 8?

Es lo mismo que

$$Eu = (0{,}35)u(200.000) + (0{,}65)u(100.000)$$

Pero aquí las funciones $u(d) = d^3$

$u(100.000) = 100.000^3$

$u(200.000) = 200.000^3 = 2^3 * 100.000^3$

$2^3 = 8$

Se multiplica y divide todo por 100.000^3

5. Muestre en detalle que los tres tipos de actitudes ante el riesgo colocan Abrir un pequeño negocio por delante de No abrir un pequeño negocio, en Pequeño negocio subvencionado.

El juego se refiere a Pequeño negocio subvencionado, que aparece en la figura 1.11 de la página 25. También se refiere a la función de utilidad de la página 22, que es $u(d) = d^a/a$, donde d es una cantidad de dinero. El número a es un parámetro positivo, que puede ser igual (neutral), mayor (amante) o menor (averso) que uno.

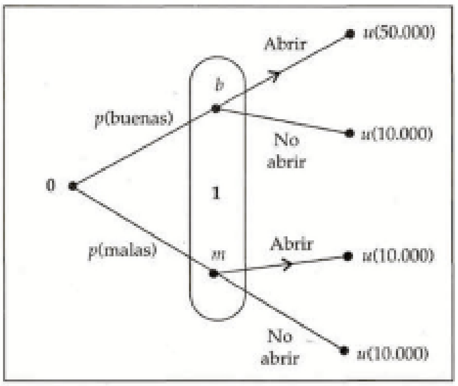


Figura 1.11. Pequeño negocio subvencionado.

Tenemos que calcular, como siempre, las funciones de utilidad esperada. Dado que hay azar en este caso, hay que hacerlo para el caso en que decidimos abrir y el caso en que decidimos no hacerlo. En estadística los "estados" son las situaciones que se materializan con una determinada probabilidad. Aquí son dos, una situación buena para el negocio y una mala. A priori, tienen probabilidades. A posteriori ya no, se habrá materializado un estado u otro. Vamos a verlo en general:

Eu(abrir) = p(buenas)u(50.000)+p(malas)u(10.000)

Eu(no abrir) = p(buenas)u(10.000)+p(malas)u(10.000)

Las restamos y nos queda:

Eu(abrir) - Eu(no abrir) = p(buenas)u(50.000) - p(buenas)u(10.000) > 0

Por tanto:

Eu(abrir) > Eu(no abrir)

Sea cual sea la forma de u( ), siempre resultará rentable abrir.

6. En un casino, el valor esperado de todos los juegos es negativo. ¿Cuál de las actitudes ante el riesgo, si existe alguna, jugará con toda certeza? ¿Cuál no jugará con toda certeza?

En la película "Casino", de Martin Scorsese, un magnate japonés tiene una racha de suerte y gana mucho dinero. Decide marcharse llevándoselo todo. Los valores esperados son promedios, quiere esto decir que si usted juega 100.000 veces a la ruleta, o a las máquinas, perderá seguro, pero si juega 1 veces podría tener suerte. De la misma forma, la probabilidad de sacar un 5 en un dado es de 1/6, pero puede que lo tire 3 veces y salga 5 las tres. Si lo tira 100.000 veces la proporción de 5 estará muy cerca de 1/6 (salvo que el dado esté cargado). Los gángsters que llevan el casino simulan una avería en su avión, e invitan al magnate a una noche de hotel. Este se aburre y baja a jugar, y claro, lo pierde todo.

En el *blackjack* el jugador y el crupier toman cada uno una carta, que mantienen bocabajo. Después van pidiendo más cartas, por turnos, que se ponen bocarriba. Si uno de los dos se pasa de 21 habrá perdido. Si ninguno se pasa ganará quien se quede más cerca de 21. Cualquiera puede plantarse en el momento que desee. Obviamente cada carta tiene una probabilidad de salir del mazo, pero los jugadores pueden ver algunas de las cartas que han salido ya, y eso modifica las probabilidades de salir de las cartas que quedan en el mazo. El profesor de matemáticas norteamericano Edward Oakley Thorp saltó a la fama en 1962 con el libro *Beat the Dealer*, en el que explicaba un método de contar cartas (recalcular probabilidades) que invertía el signo del valor esperado del juego y permitía ganar. Después de probar el funcionamiento del método con un ordenador IBM de la época, se fue a Las Vegas acompañado de estudiantes suyos a jugar. Ganaban, y mucho. Obviamente, los casinos saben que no puedes ganar al *blackjack* si juegas repetidas veces, así que se dieron cuenta y vetaron a Thorp la entrada en sus establecimientos. Thorp llegó a tener problemas legales bastante serios, pero esa es otra historia[1].

Se está planteando aquí por tanto el presente caso:

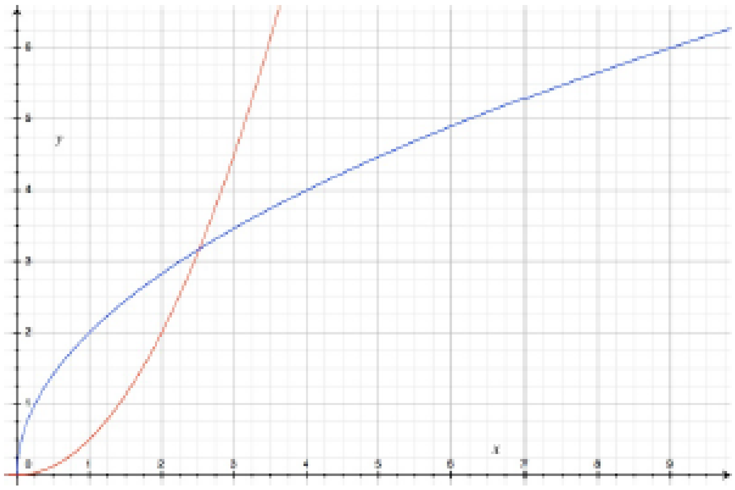
$$VEM(jugar) = p(ganar)d-p(perder)e < 0$$

Donde e es el valor de la apuesta y d es la cantidad que se gana, incluida la apuesta inicial. Se trata del valor monetario esperado. Coincide con la utilidad esperada... sólo para el neutral ante el riesgo. Está claro que éste no jugará en el casino, o la lotería. La expresión general para la utilidad esperada es:

$$Eu(jugar) = p(ganar)u(d)-p(perder)u(e) < 0$$

Ya sabemos que Eu = VEM para el neutral. Para el averso y el amante no lo es. Las funciones de utilidad de éstos no son lineales y $u(d) \neq d$.

Recordamos: una función de utilidad genérica la página 22, que es $u(d) = d^a$, donde d es una cantidad de dinero. El número a es un parámetro positivo, que puede ser igual (neutral), mayor (amante) o menor (averso) que uno. Para a = 2 tenemos un amante del riesgo y para a = 0,5 un averso. Este es el aspecto de sus funciones de utilidad (eje vertical es u y el horizontal d), roja para el amante, azul para el averso:



Al averso (azul) le gusta el dinero, pero más dinero le aumenta la utilidad menos que al amante del riesgo (rojo). Por eso el averso valora relativamente más el dinero (poco) de la apuesta (zona en la que la curva azul queda sobre la roja), y relativamente menos el dinero (mucho) del premio (zona en que la curva roja queda sobre la azul, más a la derecha). Para el neutral la pendiente es constante (su función sería una línea recta que parte del origen).

El caso es que si para el neutral el juego no es interesante, para el averso lo será mucho menos, y para el amante del riesgo puede ser interesante (o no; dependerá de las cantidades y las probabilidades).

Por tanto, con toda certeza no jugará ninguno de los jugadores. Con toda certeza sí sabemos que no jugarán el neutral ante el riesgo ni el averso al riesgo.

7. Considere el esquema de la figura 1.14. Halle los vectores de ganancias **u, v** y **x** tales que a) el jugador 1 pueda asegurarse la victoria, b) el jugador 2 pueda asegurarse la victoria y c) cualquier jugador pueda asegurarse el empate.

Hay tres posibilidades: ganar (g), perder (p) y empatar (e). Los vectores serían (g,p), (p,g) y (e,e). En la página 29 nos dan algunas pistas.

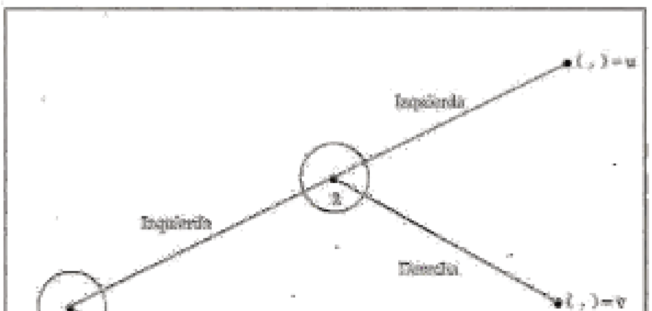


Figura 1.14. Juegos tipo Ajedrez.

a) Que gane el jugador 1 con seguridad. Es suficiente con que x = (g,p), ya que el jugador 1 puede asegurarse la victoria directamente. También si v = u = (g,p), que es el caso 1 de la página 29.

b) Que gane el jugador 2 con seguridad. Es el caso 1 de la página 29, y es suficiente con que el juego llegue al punto en que el jugador 2 puede decir y que u() o v() contengan una posibilidad de victoria para 2. Por tanto, es suficiente con que x = (p,g) y v() o u() sean (p,g). Si x=(e,e) y v() o u() son (p,g), el jugador 1 preferirá mover a la derecha y asegurarse un empate.

c) Cualquier jugador pueda asegurarse un empate. El resultado es necesariamente un empate si x = (p,g), v = (e,e) y u = (g,p); y también si x = (p,g), v = (g,p) y u = (e,e).

En todo caso, las soluciones más simples –hay muchas- serían:

a) u = v = x = (g,p)

b) u = v = x = (p,g)

c) u = v = x = (e,e).

8. Suponga que juega a Tres en raya en un tablero de 2 × 2, como muestra la figura 1.20. Se aplican las reglas habituales. El jugador 1, que empieza, pone una X en una casilla cualquiera. A continuación, el jugador 2 pone una O en una de las casillas restantes. El primer jugador que complete una fila, columna o diagonal gana. Muestre que este juego es tipo Ajedrez. Dibuje su forma extensiva. ¿Qué jugador puede asegurarse la victoria?

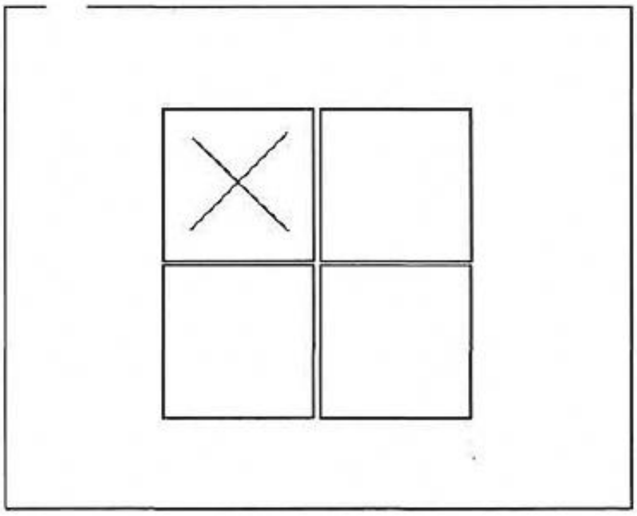
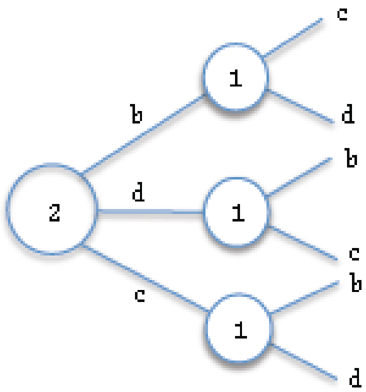


Figura 1.20. Tres en raya en un tablero 2 × 2. El jugador 1 acaba de jugar.

Altere cualquiera de las condiciones que hacen que un juego sea tipo Ajedrez y puede que este juego ya no satisfaga las conclusiones del teorema para juegos tipo Ajedrez. Éste es el tema de las dos preguntas siguientes.

Los juegos de tipo ajedrez son aquellos en los que una sola de las siguientes afirmaciones es verdad: el jugador 1 puede garantizarse la victoria, el jugador 2 puede garantizarse la victoria o cada jugador puede garantizarse un empate.

El juego de la figura 1.20 de la página 38 implica obviamente que el jugador 1 puede garantizarse la victoria haga lo que haga el jugador 2, que no puede garantizarse la victoria ni el empate. Los juegos de tipo ajedrez han de ser siempre: con dos jugadores, información perfecta (los dos jugadores pueden ver el tablero), finito (se acaba), secuenciales y el resultado es ganar/perder/empatar. Es por tanto un juego de tipo ajedrez. La forma extensiva es esta (a partir del momento en que el jugador 1 ya ha seleccionado la casilla de la figura 1.20), y *todas* garantizan la victoria del jugador 1.



9. El juego Elija el número mayor es un juego de dos jugadores con información perfecta en el que se gana, se pierde o se empata. El jugador 1 elige un número cualquiera. El jugador 2 oye el número del jugador 1 y a continuación elige otro número. Si el número del jugador 1 es mayor que el del jugador 2, el juego termina con la victoria del jugador 1. Si el número del jugador 1 es igual al del jugador 2, el juego termina con empate. Si el número del jugador 1 es menor que el del jugador 2, el jugador 1 puede elegir de nuevo. Muestre que Elija el número mayor no es tipo Ajedrez en un aspecto crucial. A continuación, muestre que nunca termina.

Este no es un juego finito. Cada jugador puede dar siempre el número del jugador anterior más uno, de forma que ningún jugador pierde nunca. Dado que no es finito, no puede ser un juego de tipo ajedrez. Los juegos de tipo ajedrez han de ser siempre: con dos jugadores, información perfecta (los dos jugadores pueden ver el tablero), finito (se acaba), y el resultado es ganar/perder.

10. El juego Fuga y evasión que muestra la figura 1.21 es un juego finito de dos jugadores en el que se gana, se pierde o se empata. El jugador 1, el fugitivo, acaba de escaparse de prisión y puede ir hacia arriba o hacia abajo. El jugador 2, el carcelero, también puede ir hacia arriba o hacia abajo, pero no sabe hacia dónde ha ido el fugitivo. Si el carcelero va en el mismo sentido que el fugitivo, lo atrapará, con lo que gana. Si el carcelero va en sentido contrario al fugitivo, éste se escapa y gana. Muestre que Fuga y evasión tiene información imperfecta. A continuación, muestre que ningún jugador puede garantizarse la victoria.

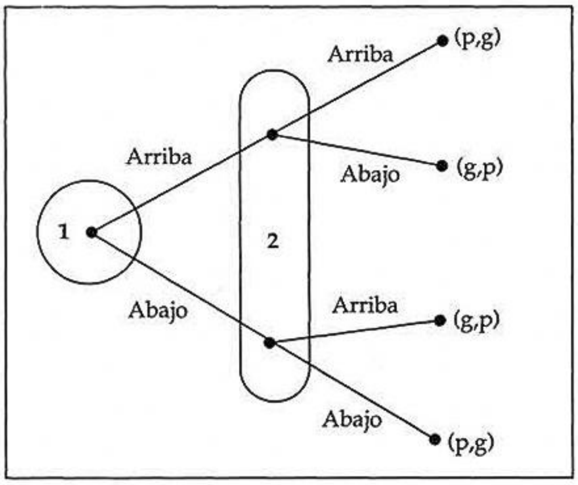
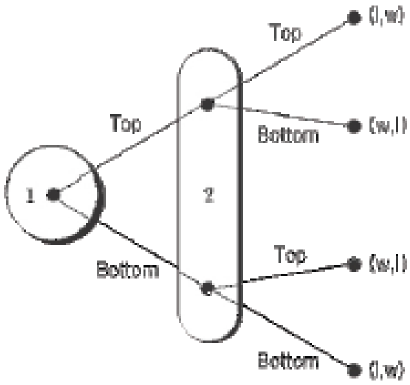


Figura 1.21. Fuga y evasión.

La forma extensiva del juego es esta (w es win, ganar, y l es lose, perder):

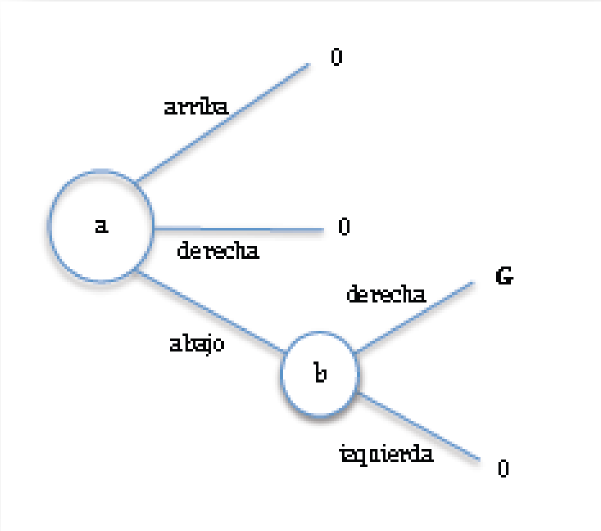


El conjunto de información del jugador 2 tiene dos nodos, por lo que ese jugador tiene información imperfecta (tiene que decidir qué hacer a ciegas, sin saber qué ha hecho el otro). Dados los posibles resultados, el empate no es posible. El jugador 1 no puede garantizarse una victoria. Supongamos que elige Arriba. En ese caso puede ganar o perder, según lo que elija el jugador 2. Lo mismo si el jugador 1 elije Abajo. El jugador 2, por su parte, sin saber qué ha hecho el jugador 1 (información imperfecta) tampoco puede garantizarse una victoria. Si elije Arriba puede ganar o perder, según lo que haya hecho el jugador 1. Lo mismo si elije Abajo. Ningún jugador puede garantizarse con una estrategia adecuada una victoria. El supuesto de información perfecta es fundamental para los juegos tipo ajedrez, pues en otro caso ningún jugador podría garantizarse una victoria.

11. Según la teoría de la utilidad esperada, los mismos criterios rigen en el juego El caldero de oro, tanto si *D* es \$1 o \$1.000.000. Exprese su acuerdo o desacuerdo y explique el porqué.

Es un tema debatible. En principio un error es un error, sean las consecuencias de 1 dólar o de 1 millón. Además, si es una pregunta de examen, da igual que el ejercicio diga que es una cantidad u otra.

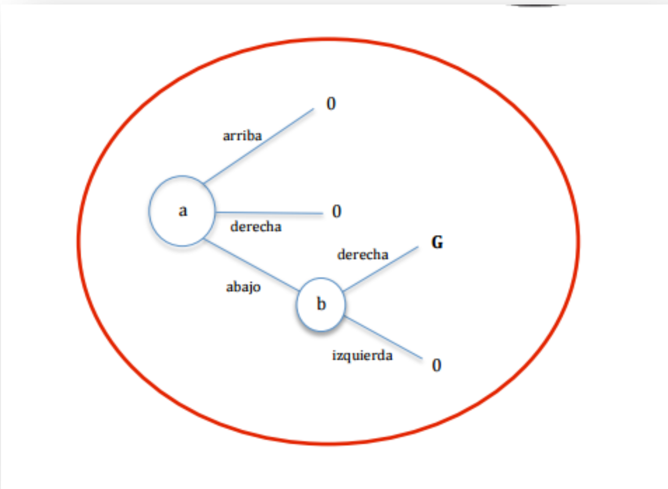
Fíjese en el árbol del problema 2.



Siempre que G sea una cantidad positiva, el juego no cambia de solución, y el análisis es igualmente válido para 1 dólar o para 1 millón, o cualquier otra cantidad G o D.

Esto no **es cierto para** todos **los juegos**, pero sí para los **muy sencillos**.

En juegos más complicados la cantidad que se puede ganar (o perder) suele ser determinante para la solución.



TEORÍA DE LA UTILIDAD:

La *función de demanda* de dos bienes, que explica la cantidad demandada de un bien por un individuo (o un mercado) en función de, sobre todo, el precio de ese bien, el precio de otros bienes y la renta de la persona:

$x_1 = f(p_1, p_2, y)$ Clasificación de bienes:

$\partial x_1/\partial p_1 < 0$ la función de demanda tiene pendiente negativa
$\partial x_1/\partial p_1 > 0$ la función de demanda tiene pendiente positiva (bien Giffen)
$\partial x_1/\partial p_2 < 0$ los bienes 1 y 2 son complementarios
$\partial x_1/\partial p_2 > 0$ los bienes 1 y 2 son sustitutivos
$\partial x_1/\partial p_2 = 0$ los bienes 1 y 2 son independientes
$\partial x_1/\partial y > 0$ el bien 1 es normal
$\partial x_1/\partial y < 1$ el bien 1 es normal y de primera necesidad
$\partial x_1/\partial y > 1$ el bien 1 es normal y de lujo
$\partial x_1/\partial y < 0$ el bien 1 es inferior

$x_2 = f(p_1, p_2, y)$ Lo mismo, pero para x_2

Pero sabemos todavía qué forma concreta tiene esa función "f", ni por qué hay relaciones entre las demandas de ambos bienes (sustituibilidad, complementariedad). El consumidor *no* determina de forma independiente cada función de demanda, sino que resuelve un problema *conjunto* que afecta a las demandas de todos los bienes: cómo repartir el gasto de una determinada renta de forma que el nivel de satisfacción (utilidad) total sea máximo. Se maximiza una función de utilidad respetando la restricción presupuestaria (no podemos gastar más de lo que ganamos). La función "u" asigna un número a cada cesta de bienes (cada una compuesta por cantidades diferentes del bien 1 y 2), de forma que si preferimos la cesta A a la B, la función generará un número mayor para A que para B: u(A) > u(B); y si son indiferentes, u(A) = u(B). Muchas funciones "u" pueden ser igualmente válidas para un mismo orden de preferencias. Lo único importante es que el *orden* de números generados por "u" reproduzca el *orden* de preferencias del individuo para las cestas.

Pero si no sabemos qué forma tiene "f" y para averiguarlo necesitamos "u", resulta que tampoco sabemos qué forma matemática tiene "u". A partir de varios supuestos sobre la racionalidad del individuo en la ordenación de sus preferencias (1 *completitud*, no hay "agujeros" en el mapa de preferencias; 2 *reflexividad*, toda cesta es indiferente a sí misma; 3 *transitividad*, si la cesta A es preferida a B, y B es preferida a C, entonces A debe ser preferida a C; 4 *continuidad*, entre dos cestas indiferentes siempre habrá otra, intermedia, indiferente también) y otros de conveniencia (5 *no saciedad*, más cantidad de un bien siempre aumenta la utilidad total; 6 *convexidad* *estricta*, preferimos la variedad, es decir, las combinaciones de dos cestas indiferentes serán preferidas a éstas), *le damos forma* a la función "u". Veamos cómo.

Cualquier cesta de bienes, como G en el **gráfico 1**, es preferida a todas las del cuadrante III, y todas las del cuadrante II son preferidas a G (propiedad 5). Por tanto, las cestas indiferentes a G deben formar una línea (propiedades 5 y 4) que pase por G (propiedad 2) y por los cuadrantes I y IV, por lo que ya sabemos que tiene pendiente negativa. Además, por cualquier punto del espacio pasará una de esas líneas y sólo una (propiedades 1 y 3). La línea será curva (propiedad 6). Dado que en esa curva (u^0) todas las cestas son indiferentes entre sí, el nivel de utilidad de todas será el mismo e igual a $u(G) = u^0$.

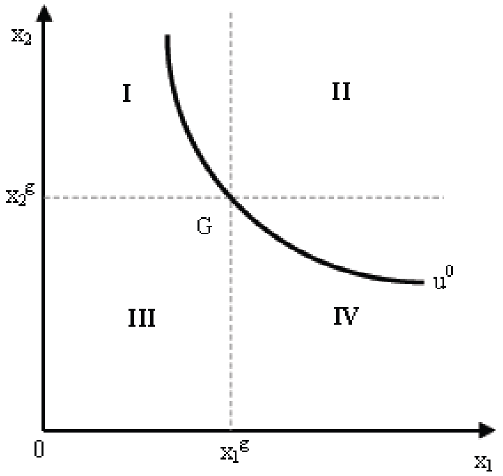


Gráfico 1. Curva de indiferencia $u^0=u(x_1, x_2)$

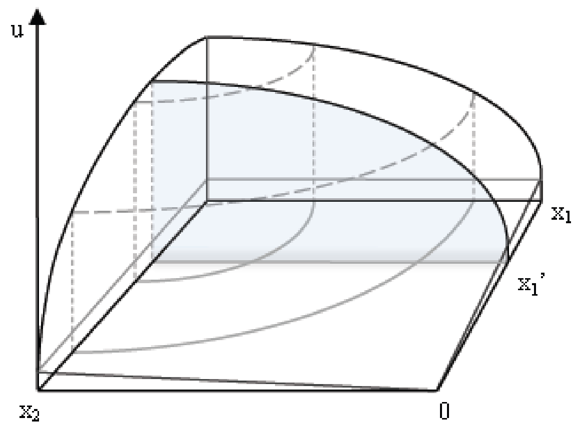


Gráfico 2. Función de utilidad $u=u(x_1, x_2)$

La línea curva de pendiente negativa que pasa por G es una *curva de indiferencia*. Estas curvas nos permiten saber cómo es la función de utilidad "u". Ésta, para dos bienes, es una superficie tridimensional (**gráfico 2**), y cada *curva de indiferencia* es el perfil de un corte *horizontal* a esa superficie. Cuanto más lejos está la curva con forma de U del origen de coordenadas, más alto será el nivel de utilidad. La pendiente en cada punto de la *curva de indiferencia* (llamada *relación marginal de sustitución*, RMS) es la razón de las utilidades marginales de los bienes 1 y 2, que a su vez son las correspondientes derivadas parciales de la función "u" (u_1/u_2). Conocidos pues esos perfiles (curvas de indiferencia), conocemos la superficie de la misma forma que podemos reconstruir la forma de un objeto escaneándolo.

Ya sabemos la forma que tiene la función de utilidad. La restricción presupuestaria es una recta de pendiente negativa igual a $-p_1/p_2$ (basta despejar x_2 para verlo). El problema de maximización condicionada que pusimos más arriba se traduce gráficamente en "tocar" la curva de indiferencia más alta posible con la recta de balance. Allí donde una curva y una recta se tocan tendremos un *punto de tangencia*. En el punto de tangencia la *pendiente* de la recta y de la curva son iguales. Por tanto, resolver aquel problema matemático de optimización equivale a encontrar en qué punto del espacio la recta de balance y la curva de indiferencia tienen la misma pendiente ($u_1/u_2 = p_1/p_2$, o bien $u_1/p_1 = u_2/p_2$). Esa igualdad se obtiene también matemáticamente del problema de maximización que indicamos arriba, sin necesidad de saber que es una igualdad de pendientes. Es la situación representada en el **Gráfico 3** mediante el punto A, que representa una determinada cesta (cantidades del bien 1 y 2).

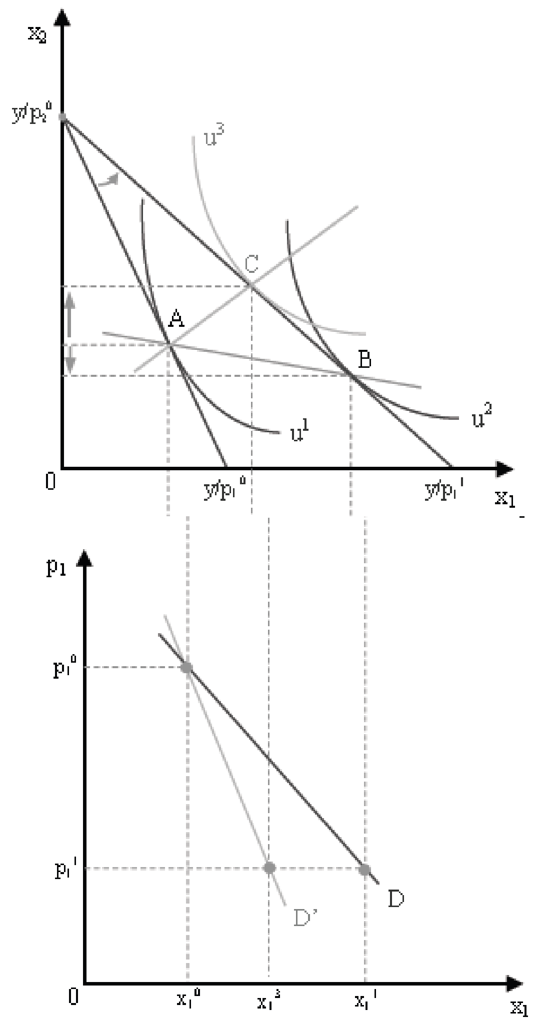


Gráfico 3

¿Qué tiene eso que ver con la función de demanda? Bien, recordamos que la función de demanda, en su forma más simple, relaciona la cantidad de un bien y su precio: $x_1 = f(p_1)$. Si reducimos el precio inicial del bien 1 ($p_1^0 > p_1^1$), bajo el que elegimos la cesta A, la recta de balance perderá inclinación ($-p_1/p_2$), y pasaremos a elegir una cesta como B. Ya tenemos una muestra de cómo cambia la cantidad del bien 1 cuando cambia su precio, y podemos trazar esa relación mediante una función de demanda como D (parte baja del **gráfico 3**). Sabemos además que en este ejemplo el bien 2 es sustitutivo del 1, pues al bajar el precio de éste la demanda de aquél se ha reducido. Eso depende de la distribución en el espacio de las curvas de indiferencia y de sus formas específicas, lo que a su vez depende de las preferencias *del individuo*, que son subjetivas. En el punto C hemos representado una *alternativa* a B, con otras preferencias, en la que la cantidad demandada del bien 2 aumenta con la caída del precio del bien 1, lo que hace que ambos bienes sean complementarios. La curva de demanda asociada sería algo distinta (D' en lugar de D en el gráfico inferior). Esas curvas de demanda se conocen como *curvas marshallianas* (por Alfred Marshall).