Índice

1. C*-álgebras universales

Algunos ejemplos iniciales.

1. C*-álgebra universal de un elemento unitario.

2. No existe una C*-álgebra universal generada por un elemento autoadjunto.

3. C*-álgebra universal con unidad de una contracción normal.

Formalización [Blackadar, 1985]. Siempre partimos de:

1. Un conjunto de ***generadores,*** $\mathcal{G} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Dado dicho conjunto, $\mathcal{G}^*$ indicará un conjunto disjunto con $\mathcal{G}$, que está en biyección con $\mathcal{G}$ a través de un mapa que simbolizaremos $x \mapsto x^*$, al igual que a su inversa.

2. Un conjunto $\mathcal{R}$ de ***relaciones*** entre los elementos de $\mathcal{G}$, cada una de las cuales se expresa como

$$\|p(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}, x^*_{\alpha_1}, \dots, x^*_{\alpha_n})\| \leq \eta, \tag{1}$$

donde $x_{\alpha_1} \dots, x_{\alpha_n} \in \mathcal{G}$, $n \in \mathbb{N}$, $\eta \geq 0$, y p es un polinomio con coeficientes complejos en $2n$ variables no conmutativas. Si $\eta = 0$, la relación puede ser reescrita en forma puramente algebraica como $p(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}, x^*_{\alpha_1}, \dots, x^*_{\alpha_n}) = 0$.

Deseamos definir una C*-álgebra “universal” sobre un tal conjunto de generadores $\mathcal{G} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sometido a un conjunto de relaciones $\mathcal{R}$ como las de más arriba.

Definición 1. *Una representación de* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *es un conjunto de operadores* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *que satisface:*

$$\|p(T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_n}, T^*_{\alpha_1}, \ldots, T^*_{\alpha_n})\| \leq \eta$$

siempre que $\|p(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}, x^*_{\alpha_1}, \ldots, x^*_{\alpha_n})\| \leq \eta \in \mathcal{R}$.

Más en general, diremos que una familia $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de elementos de una* C^**-álgebra* A *representa al par* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *si* $\|p(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}, a^*_{\alpha_1}, \ldots, a^*_{\alpha_n})\| \leq \eta$ *siempre que* $\|p(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}, x^*_{\alpha_1}, \ldots, x^*_{\alpha_n})\| \leq \eta \in \mathcal{R}$.

Obsérvese que si $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}, a^*_{\alpha_1}, \ldots, a^*_{\alpha_n}$ son elementos de una C*-álgebra A que satisfacen la relación (1), y $\phi : A \to B$ es un homomorfismo, entonces $\phi(a_{\alpha_1}), \ldots, \phi(a_{\alpha_n}), \phi(a_{\alpha_1})^*, \ldots, \phi(a_{\alpha_n})^*$ también satisfacen (1). Luego si $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ representa al par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, entonces $\{\phi(a_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ también lo representa.

Pasamos ahora a discutir la existencia, y en caso positivo la construcción, de la C*-álgebra libre generada por generadores y relaciones. Sea $\mathcal{F}^*(\mathcal{G}) := \mathcal{F}(\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*)$, la $*$-álgebra libre generada por $\mathcal{G}$. Entonces dada una función cualquiera $f : \mathcal{G} \to B$, donde B es una $*$-álgebra con unidad, f se extiende de forma única a un homomorfismo $\tilde{f} : \mathcal{F}^*(\mathcal{G}) \to B$. En particular se tiene:

Proposición 1. *Toda representación* ρ *de* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *en el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *se extiende de forma única a un* $*$*-homomorfismo*

$$\rho_0 : \mathcal{F}^*(\mathcal{G}) \to C^*(\rho(\mathcal{G})) \subseteq \mathsf{B}(\mathcal{H}).$$

Definición 2. *Un par* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *es llamado admisible si:*

(a) *Existe una representación de* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

(b) *Siempre que* $\{T^\beta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es una representación de* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *sobre* $\mathcal{H}^\beta$ *para cada* $\beta \in J$*, entonces* $S_\alpha := \bigoplus_{\beta \in J} T^\beta_\alpha \in \mathsf{B}\left(\bigoplus_{\beta \in J} \mathcal{H}^\beta\right)$ *para cada* α. *En otras palabras, para todo* $\alpha \in I$ *se tiene* $\sup_{\beta \in J} \|T^\beta_\alpha\| < \infty$.

- Obsérvese que si se satisface (b), entonces $\left\{\bigoplus_{\beta \in J} T^\beta_\alpha\right\}_{\alpha \in I}$ es también una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ sobre $\mathcal{H} := \bigoplus_{\beta \in J} \mathcal{H}^\beta$.
- La condición (a) asegura que las relaciones en $\mathcal{R}$ no son inconsistentes entre ellas o con los axiomas de C*-álgebras.

- Como cualquier elemento de $\mathcal{F}^*(\mathcal{G})$ es un polinomio en los x_α, x_α^*, la condición (b) equivale a

$$\sup\{\|\rho_0(z)\| : \rho \text{ es una representación de } (\mathcal{G},\mathcal{R})\} < \infty, \ \forall z \in \mathcal{F}^*(\mathcal{G}).$$

- Por la condición (a) podemos definir

$$\|z\|_{\mathsf{M}} := \mathsf{sup}\{\|\rho_0(z)\| : \ \rho \ \text{ es una representación de } (\mathcal{G},\mathcal{R})\}.$$

  Como acaba de ser señalado, la condición (b) asegura que este número es finito, $\forall z \in \mathcal{F}^*(\mathcal{G})$. Como $z \mapsto \|\rho_0(z)\|$ es una C*-seminorma para cada ρ, se deduce que $\| \ \|_{\mathsf{M}}$ también es una C*-seminorma en $\mathcal{F}^*(\mathcal{G})$.

Definición 3. *La C*-álgebra universal del par admisible $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ es la completación de Hausdorff de $\mathcal{F}^*(\mathcal{G})$ con respecto a $\| \ \|_{\mathsf{M}}$, es decir, la completación de $\frac{\mathcal{F}^*(\mathcal{G})}{\{z :\, \|\|z\|\|=0\}}$ con respecto a la norma inducida en ese cociente por $\| \ \|_{\mathsf{M}}$. Esta C*-álgebra será denotada por $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.*

Proposición 2 (Propiedad universal de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$)**.** *Sean B una C*-álgebra y $\{b_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq B$ tal que $\{b_\alpha\}_{\alpha\in I}$ verifica $\mathcal{R}$, es decir, representa a $(\mathcal{G},\mathcal{R})$. Entonces existe un único morfismo de C*-álgebras*

$$\pi : C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \to B,$$

tal que $\pi(\dot{x}_\alpha) = b_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, donde $\dot{x}_\alpha$ es la clase de x_α en $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

Demostración. Como la unicidad de π es clara, nos concentramos en su existencia. Consideremos cualquier representación fiel $\tau : B \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ de B. Para cada $\alpha \in I$ sea $\rho(x_\alpha) := \tau(b_\alpha)$. Entonces ρ es una representación de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ en $\mathcal{H}$. Esta representación induce un único homomorfismo $\rho_0 : \mathcal{F}^*(\mathcal{G}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$, tal que $\rho_0(x_\alpha) = \rho(x_\alpha)$, $\forall \alpha \in I$. Como ρ_0 es $\| \ \|_{\mathsf{M}}$-continuo, induce a su vez un homomorfismo $\bar{\rho} : C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ de C*-álgebras, tal que $\bar{\rho}(\dot{x}_\alpha) = \rho_0(x_\alpha) = \tau(b_\alpha)$, $\forall \alpha \in I$. Como $\mathsf{Im}(\bar{\rho}) \subseteq \mathsf{Im}(\tau)$, podemos definir π como la composición de $\bar{\rho}$ con la inversa de τ co-restringida a $\tau(B)$. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] & & B \arrow[d, "\tau", "\cong"'] \\
 & \mathsf{Im}(\pi) \subseteq \mathsf{B}(\mathcal{H}) &
\end{tikzcd}$$

Luego para todo $\alpha \in I$ se tiene $\tau\pi(\dot{x}_\alpha) = \bar{\rho}(\dot{x}_\alpha) = \rho_0(x_\alpha) = \tau(b_\alpha)$, de modo que $\pi(\dot{x}_\alpha) = b_\alpha$, pues τ es inyectiva. $\square$

Algunos ejemplos más.

1. *C*-álgebra de un grupo discreto.*

   Si G es un grupo discreto, y tomamos

   $$\mathcal{G} := G, \quad \mathcal{R} := \{ \text{ todas las relaciones de } G,\, t^* = t^{-1},\, \forall t \in G\},$$

   entonces $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) = C^*(G)$.

2. *Productos cruzados.*

   Supongamos que G es un grupo discreto, y que $\alpha : G \times A \to A$ es una acción por automorfismos de G en una C*-álgebra con unidad A (se dice que (A, G, α) es un C*-sistema dinámico). Queremos codificar esta acción en una C*-álgebra de manera similar a como una acción de un grupo en otro por automorfismos da lugar al correspondiente producto semidirecto. A tales efectos consideramos:

   $$\mathcal{G} := G \uplus A$$

   $$\mathcal{R} = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_G \cup \{e = 1_A, t^* = t^{-1} \forall t \in G,\, tat^* = \alpha_t(a),\, \forall a \in A,\, t \in G\},$$

   donde $\mathcal{R}_A$ = todas las relaciones de A, $\mathcal{R}_G$ = todas las relaciones de G.

   No lo haremos aquí, pero se puede probar que $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ es admisible.

   Entonces $A \rtimes_\alpha G := C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ se llama producto cruzado de A por α.

   Obsérvese que si $\rho : (\mathcal{G}, \mathcal{R}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es una representación, entonces $Q := \rho(e) = \rho(1_A)$ es una proyección en $\mathsf{B}(\mathcal{H})$, tal que $Q\rho(x) = \rho(x) = \rho(x)Q$, $\forall x \in \mathcal{G}$, por lo que podemos suponer que ρ es no degenerada, es decir, $Q = Id_{\mathcal{H}}$. Entonces podemos descomponer ρ en dos representaciones, una de G y otra de A. Más precisamente, $\rho|_G$ resulta ser una representación unitaria $U : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, y $\rho|_A$ resulta ser una representación no degenerada $\pi : A \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$. Debido a la última clase de relaciones consideradas se tiene que el par (π, U) es una ***representación covariante*** del sistema (A, G, α), es decir:

   $$\pi(\alpha_t(a)) = U_t \pi(a) U_t^*, \qquad \forall a \in A, t \in G. \tag{2}$$

   Recíprocamente, si (π, U) es una representación covariante de (A, G, α) (es decir que U es una representación unitaria de G en $\mathcal{H}$, y π una representación no degenerada de A en $\mathcal{H}$ que satisfacen (2)), entonces podemos combinar π y U definiendo

$$(\pi \rtimes U)_0 : (\mathcal{G}, \mathcal{R}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$$

como $(\pi \rtimes U)_0(t) := U_t$ y $(\pi \rtimes U)_0(a) := \pi(a)$, lo que claramente resulta en una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. De esta forma se obtiene una biyección entre representaciones no degeneradas de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ y representaciones covariantes del sistema (A, G, α). A su vez, cualquiera de estas familias está en biyección con las representaciones no degeneradas del producto cruzado $A \rtimes_\alpha G$.

3. *Toros no conmutativos.* [Rieffel, 1981].

   Sea $\theta \in (0, 1)$. Consideremos el homeomorfismo $\varphi_\theta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ dado por la rotación de un ángulo θ, es decir: $\varphi_\theta(z) := e^{2\pi i\theta} z$. Este homeomorfismo induce un automorfismo de la C*-álgebra $C(\mathbb{T})$: $\mathsf{R}_\theta : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ dado por $\mathsf{R}_\theta(g)(z) := g(e^{2\pi i\theta} z)$. Dicho mapa se extiende a un operador unitario en $\mathsf{B}(L^2(\mathbb{T}))$ con $\mathsf{R}_\theta^* = \mathsf{R}_{-\theta}$.

   Consideremos la representación $M : C(\mathbb{T}) \to \mathsf{B}(L^2(\mathbb{T}))$ dada por multiplicación en $L^2(\mathbb{T})$, es decir: $f \mapsto M_f$, donde $M_f(g) = gf$, $\forall g \in L^2(\mathbb{T})$. La representación M es fiel.

   Consideremos también la C*-subálgebra de $\mathsf{B}(L^2(\mathbb{T}))$ generada por R_θ y M_{id}. Obsérvese que se verifica la relación:

$$R_\theta M_{id} = e^{2\pi i\theta} M_{id} R_\theta \tag{3}$$

   En efecto:

$$(R_\theta M_{id})(f)(z) = R_\theta(f\, id)(z) = e^{2\pi i\theta} z (f id)(e^{2\pi i\theta} z) = e^{2\pi i\theta} M_{id} R_\theta(z)$$

   Consideramos el conjunto de generadores $\mathcal{G} := \{x, y, x^*.y^*\}$ y relaciones $\mathcal{R} := \{x^*x - 1, xx^* - 1, y^*y - 1, yy^* - 1, yx - e^{2\pi i\theta} xy\}$. Los cálculos anteriores muestran que $x \mapsto M_{id}$, $y \mapsto R_\theta$ es una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. Por otro lado, si ρ es una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, entoces $\rho(x)$ y $\rho(y)$ son unitarios. Este par de observaciones implican que $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ es admisible.

Definición 4. *La C^*-álgebra $A_\theta = C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ se llama toro no conmutativo o álgebra de rotación correspondiente a θ.*

Repasemos la construcción de $A_\theta = C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

Sea $\mathcal{P}_4$ el anillo de polinomios en cuatro variables no conmutativas llamadas x, x^*, y e y^*. $\mathcal{P}_4$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra naturalmente. Además es una $*$-álgebra, pues utilizando adecuadamente su propiedad universal encontramos un único anti-isomorfismo, conjugado lineal, tal que $x \mapsto x^* \mapsto x$ y $y \mapsto y^* \mapsto y$. Esta $*$-álgebra es precisamente la $*$-álgebra libre generada por los elementos x e y, que denotamos $\mathcal{F}^*(\{x, y\})$.

Consideremos ahora el $*$-ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{F}^*(\{x, y\})$ generado por las relaciones $x^*x - 1, xx^* - 1, y^*y - 1, yy^* - 1, yx - e^{2\pi i\theta}xy$, simbolicemos por $A_\theta^0 := \mathcal{P}_4/\mathcal{J}$ su cociente, que es una $*$-álgebra.

Indiquemos por u la clase de x y por v la clase de y. Obsérvese que u y v son invertibles en A_θ^0, y que $u^{-1} = u^*$ y $v^{-1} = v^*$. De este hecho, agregado a que $vu = e^{2\pi i\theta}uv$, se puede ver fácilmente que todo elemento $a \in A_\theta^0$ es de la forma

$$a = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c_{nm} u^n v^m,$$

donde sólo una cantidad finita de c_{nm} son no nulos.

Entonces A_θ es la completación de Hausdorff de A_θ^0 con respecto a la seminorma:

$$\|x\|_{\mathsf{M}} := \mathsf{sup}\{\|\pi(x)\| : \ \pi \text{ es una representación de } A_\theta^0\}.$$

Especializando la situación general al caso de A_θ se tiene:

Teorema 2 (Propiedad universal)**.** *Sea B una C^*-álgebra con elementos unitarios u', v' tales que $v'u' = e^{2\pi i\theta}u'v'$. Entonces el $*$-homomorfismo universal $\phi^0 : A_\theta^0 \to B$ se extiende por continuidad a un morfismo de C^*-álgebras $\phi : A_\theta \to B$. Además si θ es irracional, $\phi : A_\theta \to C^*(u', v') \subset B$ es un isomorfismo.*

En particular podemos tomar $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$ y los operadores $v' = R_\theta$ y $u' = M_{id}$ en $\mathsf{B}(\mathcal{H})$. Observar que la representación correspondiente

$\phi^\theta : A_\theta \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ no es fiel cuando $\theta = \frac{p}{q}$ racional, porque $\left(R_{\frac{p}{q}}\right)^q = I$ pero $v^q \neq 1$. Sin embargo ϕ^θ sí es fiel cuando θ es irracional, pues como probaremos a continuación, A_θ es simple en ese caso.

Teorema 3. *Si θ es irracional, entonces A_θ es simple.*

Demostración. Dado $(\lambda, \mu) \in \mathbb{T}^2$, la propiedad universal de A_θ implica que existe un único homomorfismo $\alpha_{\lambda,\mu} : A_\theta \to A_\theta$ tal que $u \mapsto \lambda u$ y $v \mapsto \mu v$. En realidad $\alpha_{\lambda,\mu}$ es un isomorfismo, pues es evidente que $\alpha_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}$ es su inverso. El mapa $\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathsf{Aut}(A_\theta)$ tal que $(\lambda, \mu) \mapsto \alpha_{\alpha,\mu}$ es un homomorfismo de grupos. Y es continuo en el sentido de que si $a \in A_\theta$ y $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda, \mu)$, entonces $\alpha_{\lambda_n,\mu_n}(a) \to \alpha_{\lambda,\mu}(a)$. Esto se ve directamente sin dificultades para elementos en A_θ^0, y luego para todo $a \in A_\theta$ aproximándolo por elementos de A_θ^0 y utilizando que cada $\alpha_{\lambda,\mu}$ tiene norma uno.

Como u y v satisfacen la relación (3), se tiene, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$:

$$v^n u v^{-n} = e^{2\pi i n\theta} u, \;\; v^n v v^{-n} = v \tag{4}$$
$$u^{-m} v u^m = e^{2\pi i m\theta} v, \;\; u^{-m} u u^m = u \tag{5}$$

Si $w \in A_\theta$ es un elemento unitario, indicamos por $\mathsf{Ad}_w \in \mathsf{Aut}(A_\theta)$ al automorfismo interno dado por conjugación por w: $\mathsf{Ad}_w(a) = waw^*$, $\forall a \in A_\theta$. Entonces (4)–(5) muestran que $\alpha_{e^{2\pi i n\theta}, e^{2\pi i m\theta}} = \mathsf{Ad}_{v^n u^{-m}}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Fijemos un ideal $I \lhd A_\theta$, y supongamos que $I \neq A_\theta$. Como todo ideal es invariante por automorfismos internos, lo que acabamos de ver implica que $\alpha_{e^{2\pi i n\theta}, e^{2\pi i m\theta}}(I) \subseteq I$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Ahora, si θ es irracional, el conjunto $\{(e^{2\pi i n\theta}, e^{2\pi i m\theta}) : \; n, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{T}^2$, y por lo tanto se tiene que $\alpha_{\lambda,\mu}(I) = I$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{T}^2$. Sea $E : A_\theta \to A_\theta$ el mapa dado por

$$E(a) = \int_{\mathbb{T}^2} \alpha_{\lambda,\mu}(a) d(\lambda, \mu).$$

Si $a = \sum_{n,m} c_{n,m} u^n v^m$, entonces

$$E(a) = \sum_{n,m} c_{n,m} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \mu^m u^n v^m d\mu \, d\lambda = c_{0,0} 1_{A_\theta},$$

pues $\int_{\mathbb{T}} z^n dz = \delta_{n,0}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Entonces $E(A_\theta) = \mathbb{C}1_{A_\theta}$. En particular, si $a \in I$, el integrando $\alpha_{\lambda,\mu}(a)$ toma todos sus valores en I, y como I es cerrado se tendrá $E(a) \in I \cap \mathbb{C}1_{A_\theta}$. Pero como I no puede contener elementos invertibles, deducimos que $E(I) = 0$. En particular

$$0 = E(a^*a) = \int_{\mathbb{T}^2} \alpha_{\lambda,\mu}(a^*a) d\lambda\, d\mu,$$

y por lo tanto el integrando debe ser la función nula, ya que es no negativo y continuo. Pero entonces $a^*a = 0$, y por lo tanto $a = 0$. Esto muestra que $I = 0$. $\square$

Ejercicio. Probar que si $\theta \in \mathbb{Q}$, entonces A_θ no es simple.

3.1. C*-álgebras generadas por isometrías parciales.

C*-álgebra de Toeplitz.

Sean $\mathcal{G} = \{s\}$ y $\mathcal{R} = \{s^*s - 1\}$. Sabemos que el par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ tiene una representación: si $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ es el shift unilateral, entonces $s \mapsto S$ es una tal representación. Por otro lado, si ρ es una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, entonces $\rho(s)$ necesariamente es una isometría, y por lo tanto $\|\rho(s)\| = 1$. Luego $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ es un par admisble, y por lo tanto $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ está definido. De hecho, del teorema de Coburn sigue que $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ es precisamente el álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

C*-álgebras de Cuntz.

Definición 5. *El álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ es la C^*-álgebra universal generada por $n > 1$ elementos $s_1, \ldots, s_n$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1, \tag{6}$$

$$s_i^* s_i = 1. \tag{7}$$

Por lo tanto si los operadores $T_1, \ldots, T_n \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ constituyen una representación del par $(\{s_1, \ldots, s_n\}, \{(6) \text{ y } (7)\})$, entonces las T_i son isometrías cuyos espacios finales son mutuamente ortogonales y su suma es $\mathcal{H}$. Esto implica que la condición (b) de la definición de par admisible se satisface. También la primera: sean $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $S_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que

$$S_i(x_0, x_1, \ldots) := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}, x_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, \ldots).$$

Entonces cada S_i es una isometría, y es claro que los espacios finales de los S_i son mutuamente ortogonales y su suma es todo el espacio $\mathcal{H}$. Luego el par $(\{s_1, \ldots, s_n\}, \{(6) \text{ y } (7)\})$ es admisible, de modo que si $T_1, \ldots, T_n$ son operadores en un espacio de Hilbert que satisfacen las propiedades (6) y (7), entonces existe un único homomorfismo $\phi : \mathcal{O}_n \to C^*(T_1, \ldots, T_n)$ tal que $\phi(s_i) = T_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Para estudiar $\mathcal{O}_n$ es conveniente trabajar con palabras en los generadores. Sea $\mathsf{n}^\mathsf{k} := \{1, \ldots, n\}^k$. Si $\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathsf{n}^\mathsf{k}$, llamamos $s_\mu := s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$, y decimos que $|\mu| := k$ es la longitud de la palabra s_μ.

Obsérvese que $s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1$. Si $i = j$ esto es simplemente (7). Si $i \neq j$, entonces:

$$1 = s_j^* s_j = s_j^* \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* s_j = s_j^* s_j s_j^* s_j + \sum_{i \neq j}^{n} s_j^* s_i (s_j^* s_i)^* = 1 + \sum_{i \neq j}^{n} s_j^* s_i (s_j^* s_i)^*,$$

y por lo tanto $\sum_{i \neq j}^{n} s_j^* s_i (s_j^* s_i)^* = 0$. Como los sumandos son elementos positivos, cada uno de ellos debe ser nulo, como queríamos probar.

Lema 1. *Sean* $\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathsf{n}^\mathsf{k}$ *y* $\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_l) \in \mathsf{n}^\mathsf{l}$. *Si* $s_\mu^* s_\nu \neq 0$, *entonces:*

(i) *Si* $|\mu| = |\nu|$, *es* $\mu = \nu$ *y* $s_\mu^* s_\nu = 1$.

(ii) *Si* $|\mu| < |\nu|$, *existe* $\nu' \in \mathsf{n}^{\mathsf{l}-\mathsf{k}}$ *tal que* $\nu = \mu\nu'$ *y* $s_\mu^* s_\nu = s_{\nu'}$.

(iii) *Si* $|\mu| > |\nu|$, *existe* $\mu' \in \mathsf{n}^{\mathsf{k}-\mathsf{l}}$ *tal que* $\mu = \nu\mu'$ *y* $s_\mu^* s_\nu = s_{\mu'}^*$.

Demostración.

(i) $0 \neq s_\mu^* s_\nu = s_{i_k}^* \ldots s_{i_1}^* s_{j_1} \ldots s_{j_k}$. Entonces $i_1 = j_1$ y $s_{i_1}^* s_{j_1} = 1$. Luego tenemos que $i_2 = j_2$ y $s_{i_2}^* s_{j_2} = 1$. Así se sigue hasta agotar los $k = l$ índices. Entonces $\mu = \nu$, y además $s_\mu^* s_\nu = 1$.

(ii) Igual que en el caso anterior, tenemos que $i_s = j_s$ para $s = 1, \ldots, k$, porque $k < l$. Entonces $s_\mu^* s_\nu = s_{j_{k+1}} \ldots s_{j-l}$. Entonces si $\nu' = (j_{k+1}, \ldots, j_l) \in \mathsf{n}^{\mathsf{l}-\mathsf{k}}$ se tiene que $\nu = \mu\nu'$, ya que $\mu = (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k)$ y $\nu = (j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots j_l) = \mu\nu'$. En particular tenemos que $s_\mu^* s_\nu = s_{\nu'}$.

(iii) Como $s_\mu^* s_\nu \neq 0$, igual que en los casos anteriores se tiene que $i_s = j_s$ para todo $s = 1, \ldots, l$. Entonces $s_\mu^* s_\nu = s_{i_k}^* \ldots s_{i_{l+1}}^*$. Sea $\mu' = i_{l+1} \ldots, i_k \in \mathsf{n}^{\mathsf{k-l}}$. Entonces $s_\mu^* s_\nu = s_{\mu'}^*$, donde $\mu = (i_1, \ldots, i_k) = (i_1, \ldots, i_l)(i_{l+1} \ldots, i_k) = \nu\mu'$.

$\square$

Proposición 3. *Cualquier palabra no nula en $\{s_i, s_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ tiene una expresión de la forma $s_\mu s_\nu^*$.*

Demostración. La demostración se hace por inducción en la longitud de la palabra, utilizando el resultado anterior. $\square$

Definición 6. *Sea W_k^n el conjunto de las palabras en n^k, es decir las palabras de longitud k y n generadores; y sea $W^n = \cup_{k\geq 0} W_k^n$. Entonces definimos*

$$\mathcal{F}_k^n = \mathsf{span}\{s_\mu s_\nu^* : |\mu| = |\nu| = k\} \text{ y}$$

$$\mathcal{F}^n = \overline{\cup_{k\geq 1} \mathcal{F}_k^n}.$$

Definición 7. *Una C^*-álgebra es uniformemente hiperfinita o UHF si es la clausura de una unión creciente de subálgebras unitales isomorfas a álgebras de matrices M_{α_k}; y se dice que es tipo n^∞ si $\alpha_k = n^k$ y la inyección $j_k : M_{n^k} \hookrightarrow M_{n^{k+1}}$ es de la forma*

$$M_{n^k} \overset{j_k}{\hookrightarrow} M_{n^{k+1}} \quad \text{tal que} \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}.$$

Proposición 4. *$\mathcal{F}_k^n$ es isomorfo a M_{n^k} y $\mathcal{F}^n$ es una UHF de tipo n^∞.*

Demostración. Definimos $\varphi_k : \mathcal{F}_k^n \to M_{n^k}$ tal que $s_\mu s_\nu^* \mapsto E_{\mu\nu}$. Como $\{E_{\mu\nu}\}$ es una base de M_{n^k} y $\mathsf{dim}\mathcal{F}_k^n \leq n^k$, entonces φ_k se extiende a un isomorfismo lineal. De hecho es un isomorfismo de C*-álgebras, porque es multiplicativa y preserva la adjunción:

$$\varphi_k((s_\mu s_\nu^*)(s_{\mu'} s_{\nu'}^*)) = \varphi_k(\delta_{\nu\mu'} s_\mu s_{\nu'}^*) = \delta_{\nu\mu'} E_{\mu\nu'} = E_{\mu\nu} E_{\mu'\nu'} = \varphi_k(s_\mu s_\nu^*)\varphi(s_{\mu'} s_{\nu'}^*).$$

$$\varphi_k((s_\mu s_\nu^*)^*) = \varphi_k(s_\nu s_\mu^*) = E_{\nu\mu} = E_{\mu\nu}^* = \varphi_k(s_\mu s_\nu^*)^*.$$

La inclusión natural $\mathcal{F}_k^n \overset{\iota_k}{\hookrightarrow} \mathcal{F}_{k+1}^n$ se puede escribir $s_\mu s_\nu^* \overset{\iota_k}{\mapsto} \sum_{i=1}^n s_{\mu i} s_{\nu i}^* \in \mathcal{F}_{k+1}^n$:

$$\sum_{i=1}^n s_{\mu i} s_{\nu i}^* = \sum_i s_\mu s_i s_i^* s_\nu^* = s_\mu \sum_i s_i s_i^* s_\nu^* = s_\mu s_\nu^*.$$

Por inducción en k es fácil ver que $\mathcal{F}_k^n$ es una subálgebra unital de $\mathcal{O}_n$. En efecto, si $k = 1$ se tiene $1_{\mathcal{F}_1^n} = \sum_{|\mu|=1} s_\mu s_\mu^*$, y por lo tanto $1_{\mathcal{F}_1^n} = 1$ por (7). Supongamos que para $k > 1$ se tiene $1_{\mathcal{F}_{k-1}^n} = 1$, es decir $\sum_{|\mu|=k-1} s_\mu s_\mu^* = 1$. Entonces :

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{F}_k^n} \;=\; \sum_{|\mu|=k} s_\mu s_\mu^* &= \sum_{i_1,\ldots i_k \in \mathsf{n}^1} s_{i_1} \ldots s_{i_k} s_{i_k}^* \ldots s_{i_1}^* \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \in \mathsf{n}^1} s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} \left(\sum_{i_k \in \mathsf{n}^1} s_{i_k} s_{i_k}^*\right) s_{i_{k-1}}^* \ldots s_{i_1}^* \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \in \mathsf{n}^1} s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} s_{i_{k-1}}^* \ldots s_{i_1}^* \\ &= \sum_{|\mu|=k-1} s_\mu s_\mu^* \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalmente, es rutinario verificar que los diagramas

$$\begin{tikzcd} M_{n^k} \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "j_k"'] & \mathcal{F}_k^n \arrow[d, "\iota_k"] \\ M_{n^{k+1}} \arrow[r, "\varphi_{k+1}"'] & \mathcal{F}_{k+1}^n \end{tikzcd}$$

son conmutativos, $\forall k$, de donde se concluye que $\mathcal{F}^n$ es UHF de tipo n^∞. $\square$

Definición 8. *Sea B una C^*-subálgebra de la C^*-álgebra A. Se dice que un mapa $E : A \to A$ es una* **`esperanza condicional`** *sobre B si Ees positivo, unital e idempotente, y su imagen es B. Se dice que E es fiel si $E(a^*a) = 0$ implica $a = 0$.*

Teorema 4. *Existe una esperanza condicional fiel $\phi_0 : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ con imagen $\mathcal{F}_n$.*

Demostración. Para todo $\lambda \in \mathbb{T}$, consideremos el conjunto $\{\lambda s_i\}_{1 \le i \le n}$. Obsérvese que los elementos $\lambda s_1, \ldots, \lambda_n s_n$ verifican las relaciones de Cuntz (6)–(7):

$$\sum_{i=1}^n (\lambda s_i)(\lambda s_i)^* = \sum_{i=1}^n \lambda s_i \overline{\lambda} s_i^* = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n s_i s_i^* = |\lambda|^2 1 = 1,$$

$$(\lambda s_i)^* \lambda s_i = \overline{\lambda} \lambda s_i^* s_i = |\lambda|^2 s_i^* s_i = 1.$$

Consideremos el mapa $f_\lambda : \{s_1, \ldots, s_n\} \to \mathcal{O}_n$ dado por $f_\lambda(s_i) = \lambda s_i$. La propiedad universal de $\mathcal{O}_n$ implica que este mapa se extiende a un morfismo de C*-álgebras $\rho_\lambda : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$, que de hecho es un automorfismo pues $\rho_{\bar{\lambda}}$ es su inversa. Como $\rho_\lambda(s_i^*) = \rho_\lambda(s_i)^* = \overline{\lambda} s_i^*$ para todo i, se tiene:

$$\rho_\lambda(s_\mu s_\nu^*) = \lambda^{|\mu|} s_\mu \lambda^{-|\nu|} s_\nu^* = \lambda^{|\mu|} \lambda^{-|\nu|} s_\mu s_\nu^* = \lambda^{|\mu|-|\nu|} s_\mu s_\nu^*. \tag{8}$$

Sea $g_x : \mathbb{T} \to \mathcal{O}_n$ tal que $g_x(\lambda) = \rho_\lambda(x)$ para todo $x \in \mathcal{O}_n$. Veamos que la función g_x es continua.

Si $0 \neq y \in \mathsf{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W^n\}$, entonces $y = \sum_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*$ (donde μ_i y ν_i pueden tener longitudes diferentes), y $g_y = g_{\sum_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*} = \sum_i g_{s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*}$. Luego para ver que g_y es continua basta ver que cada $g_{s_\mu s_\nu^*}$ lo es, lo cual sigue inmediatamente de (8).

Si $x \in \mathcal{O}_n$ es cualquiera, como $\overline{\mathsf{span}}\{s_\mu s_\nu^*\} = \mathcal{O}_n$, existe $y \in \mathsf{span}\{s_\mu s_\nu^*\}$ tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces $\|g_x - g_y\|_\infty < \epsilon/3$:

$$\|g_x(\lambda) - g_y(\lambda)\| = \|\rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(y)\| = \|\rho_\lambda(x - y)\| \leq \|\rho_\lambda\| \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, si $\delta > 0$ es tal que $\|g_y(\lambda) - g_y(\lambda')| < \epsilon/3$ si $|\lambda - \lambda'|$, entonces:

$$\begin{aligned} \|g_x(\lambda) - g_x(\lambda')\| &\leq \|g_x(\lambda) - g_y(\lambda)\| + \|g_y(\lambda) - g_y(\lambda')| + \|g_y(\lambda') - g_x(\lambda')\| \\ &< \epsilon/3 + \|g_y(\lambda) - g_y(\lambda')| + \epsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces g_x es continua.

Ahora sí estamos en condiciones de definir ϕ_0. Dado $x \in \mathcal{O}_n$, sea

$$\phi_0(x) := \int_0^1 g_x(e^{2\pi i t}) dt = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t}}(x) dt \quad \text{(integral de Riemman)}.$$

Entonces

$$\phi_0(s_\mu s_\nu^*) = \int_0^1 e^{2\pi i t(|\mu|-|\nu|)} s_\mu s_\nu^* dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |\mu| \neq |\nu|, \\ s_\mu s_\nu^* & \text{si } |\mu| = |\nu|. \end{cases}$$

Por lo tanto $\phi_0|_{\mathcal{F}_n} = Id_{\mathcal{F}^n}$ y $\phi_0(\mathcal{O}_n) \subseteq \mathcal{F}^n$, y por lo tanto $\phi_0^2 = \phi_0$, es decir ϕ_0 es idempotente y unital. Además es contractivo:

$$\|\phi_0(x)\| = \left| \int_0^1 g_x(e^{2\pi i t}) dt \right| \leq \int_0^1 |g_x(e^{2\pi i t})| dt \leq \|x\|.$$

Por otro lado, si x es positivo y $x \neq 0$, entonces $\rho_{e^{2\pi i t}}(x)$ tambieén es positivo y no nulo para todo t, y en consecuencia $\phi_0(x)$ también es positivo y no nulo. Entonces ϕ_0 es positivo y fiel. $\square$

El siguiente resultado, que se incluye sin demostración, permite probar que $\mathcal{O}_n$ es simple, y a la postre que cada representación de las relaciones de Cuntz (6)–(7) genera una C*-álgebra isomorfa a la de Cuntz. Una demostración puede verse en el el artículo original de Cuntz [Cuntz, 1977] o en [Davidson, 1996].

Teorema 5. *Si $x \neq 0$, $x \in \mathcal{O}_n$. Entonces existen $a, b \in \mathcal{O}_n$ tales que $axb = 1$.*

Corolario 1. *$\mathcal{O}_n$ es simple.*

Demostración. Si $0 \neq x \in I$ ideal de $\mathcal{O}_n$, entonces por el teorema previo, existen $a, b \in \mathcal{O}_n$ tales que $axb = 1$. Luego $1 \in I$. Es decir $\mathcal{O}_n = I$. □

Corolario 2. *Si $T_1, \dots, T_n$ son isometrías tales que $\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = 1$. Entonces*

$$C^*(T_1, \dots, T_n) \cong \mathcal{O}_n.$$

Demostración. Por la propiedad universal, existe $\rho : \mathcal{O}_n \to C^*(T_1, \dots, T_n)$ tal que $\rho(s_i) = T_i$, lo que implica que ρ es sobreyectiva. Además, como $\mathcal{O}_n$ es simple, se tiene que $\mathsf{ker}(\rho) = 0$.

Por otro lado es fácil ver que $\mathcal{O}_n$ tiene una representación. Basta tomar el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ y los operadores $S_1, \dots, S_n \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ tales que $S_i(x_1, \dots, x_n, \dots) = (y_1, \dots y_n, \dots)$, donde $y_j = x_j$ si $j = i(\mathsf{mod} n)$ y cero en otro caso. Entonces $\mathcal{O}_n \neq 0$. Luego es isomorfa a $C^*(T_1, \dots T_n)$. □

C*-álgebras de Cuntz-Krieger.

Sea $\mathsf{A} = (a_{ij}) \in M_n$ tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Definamos

$$K := \{(k_j) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} : a_{k_j, k_{j+1}} = 1 \forall j\}$$

Entonces K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff. El shift bilateral es homeomorfismo en K. El psistema dinámico (K, h) es una cadena de Markov topológica.

Sean $\mathcal{G} = \{s_1, \dots, s_n\}$ con las relaciones

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{ll} a) & s_i s_i^* s_i = s_i, \ \forall i = 1, \dots, n. \\ b) & \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1 \\ c) & s_i^* s_j = 0, \ \forall i \neq j. \\ d) & s_i^* s_i = \sum_{j : a_{ij} = 1} s_j s_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j^* s_j, \ \forall i = 1, \dots, n. \end{array} \right\}$$

Por ejemplo la relaciones que definen las álgebras de Cuntz $\mathcal{O}_n$ son las relaciones de Cuntz-Krieger correspondientes a la matriz $\mathsf{A} = (a_{ij}) \in M_n$ tal que $a_{ij} = 1 \ \forall i, j = 1, \ldots, n$. En este caso es $K = \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{Z}}$.

Siempre se puede encontrar una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. Por otro lado si ρ es una tal representación, se tiene $\rho(s_i) \leq 1 \ \forall i$, porque $\rho(s_i)$ es una isometría parcial. Entonces existe $\mathcal{O}_{\mathsf{A}} := C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. la C*-álgebra $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$ se llama álgebra de Cuntz-Krieger de la matriz A. Se tiene el siguiente

Teorema 6. *Si K no tiene puntos aislados, y $\{S_1, \ldots, S_n\}$ es una representación de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, entonces $\mathcal{O}_{\mathsf{A}} \cong C^*(S_1, \ldots, S_n)$. Además $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$ es simple, y es un invariante completo del sistema (K, h), es decir, si B es otra matriz del tipo descrito arriba, entonces $\mathcal{O}_{\mathsf{A}} \cong \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ vía un isomorfismo que satisface (P) si y sólo si $(K_{\mathsf{A}}, h_{\mathsf{A}})$ y $(K_{\mathsf{B}}, h_{\mathsf{B}})$ son sistemas dinámicos conjugados.*

7. C*-álgebras de grafos

Las C*-álgebras de grafos son C*-álgebras universales generadas por isometrías parciales asociadas a las aristas de grafos dirigidos. Las álgebras de Toeplitz, de Cuntz y de Cuntz-Krieger se pueden describir como álgebras de grafos.

Un ***grafo dirigido*** es una cuaterna $E = (E^0, E^1, r, s)$ formada por dos conjuntos numerables E^0 (los "vértices") y E^1 (las "aristas") y dos mapas $r : E^1 \to E^0$ ("range") y $s : E^1 \to E^0$ ("source"). Si $s(e) = v$ y $r(e) = w$, se dice que v emite a e y w recibe a e, y que e va de v a w.

Se dice que un vértice v es una fuente de E si $r^{-1}(v) = \emptyset$, y se dice que es un pozo de E si $s^{-1}(v) = \emptyset$. Si una arista e es tal que $s(e) = v = r(e)$, se dice que e es un loop basado en v.

Por razones técnicas sólo consideraremos grafos de "filas finitas", es decir, tales que cada vértice recibe sólo una cantidad finita de aristas.

Un isomorfismo $\phi : E \to F$ entre los grafos dirigidos $E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$ y $F = (F^0, F^1, r_F, s_F)$ es un par de mapas biyectivos $\phi^0 : E^0 \to F^0$ $\phi^1 : E^1 \to F^1$ tales que $r_F \circ \phi^1 = \phi^0 \circ r_E$ y $s_F \circ \phi^1 = \phi^0 \circ s_E$

Ejemplos.

(A) En este caso es $s(e) = v = r(e)$, $s(f) = w$, $r(f) = v$: $\quad e \circlearrowright v \xleftarrow{\;f\;} w$

(B) Aquí es $r(e) = s(e) = r(f) = s(f) = v$: $\quad e \circlearrowright v \circlearrowleft f$.

Definición 9. *Sea $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo dirigido. Una familia de Cuntz-Krieger para E en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un par $\{S, P\}$ formado por un conjunto $P = \{P_v : v \in E^0\} \subseteq \mathsf{B}(\mathcal{H})$ de proyecciones mutuamente ortogonales y un conjunto $S = \{S_e : e \in E^1\} \subseteq \mathsf{B}(\mathcal{H})$ de isometrías parciales tales que:*

(CK1) $S_e^* S_e = P_{s(e)}$, $\forall e \in E^1$, *y*

(CK2) $P_v = \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*$, $\forall v \in E^0$ *que no sea una fuente.*

La C^*-subálgebra de $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ generada por $S \cup P$ será denotada $C^*(S, P)$, y diremos que es la C^*-álgebra de la familia $\{S, P\}$.

Para cada $v \in E^0$, sea $\mathcal{H}_v = P_v \mathcal{H}$. La condición (CK1) dice que S_e es una isometría parcial con espacio inicial $P_{s(e)}\mathcal{H}$, y que

$$S_e = S_e S_e^* S_e = S_e P_{s(e)}.$$

Luego si $s(e) \neq s(f)$, se tiene $S_e S_f^* = S_e P_{s(e)} P_{s(f)} S_f^* = 0$.

La condición (CK2), junto con el hecho de que las P_v son mutuamente ortogonales, expresa que $\mathcal{H}_v$ es la suma dirceta de los espacios finales de las isometrías parciales S_e correspondientes a aristas que llegan a v. Entonces si $r(e) = v$, se tiene $S_e S_e^* = P_v S_e S_e^*$, y por lo tanto

$$S_e = S_e S_e^* S_e = P_v S_e S_e^* S_e = P_{r(v)} S_e.$$

Como las proyecciones P_v son mutuamente ortogonales, la suma $Q = SOT - \sum_{v \in E^0} P_v$ también es una proyección. Como $P_{r(e)} S_e = S_e = S_e P_{s(e)}$, se tiene $S_e P_w = 0$ si $w \neq s(e)$, y $P_w S_e = 0$ si $r(e) \neq w$, de donde se concluye que $S_e Q = S_e = S_e Q$, $\forall e$. Pero entonces, sustituyendo $\mathcal{H}$ por $Q\mathcal{H}$ si fuera necesario, se puede suponer que la familia es no degenerada, es decir, $SOT - \sum_{v \in E^0} P_v = Id_{\mathcal{H}}$.

Volvamos a los ejemplos previos:
Ejemplos.

(A) Una familia de Cuntz-Krieger para el grafo dirigido E

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] & w \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

es $\{S,P\} = (\{S_e, S_f\}, \{P_v, P_w\})$, donde $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y

$$\begin{aligned} P_v(x_0, x_1, x_2, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots), \\ P_w(x_0, x_1, x_2, \ldots) &= (x_0, 0, 0, 0, \ldots), \\ S_f(x_0, x_1, x_2, \ldots) &= (0, x_0, 0, 0, \ldots) \\ S_e(x_0, x_1, x_2, \ldots) &= (0, 0, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

En efecto, si $S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ es el shift unilateral, entonces es fácil ver que $P_v = SS^* = Id_{\mathcal{H}} - P_w$, $S_e = S^2 S^* = SP_v$, y $S_f = SP_w$, de modo que $S_e^* S_e = SP_v S^*$, $S_f^* S_f = P_w S^* S P_w = P_w$, $S_f S_f^* = SP_w S^*$, $S_e S_e^* = SP_v S^*$, y por lo tanto

$$S_e S_e^* + S_f S_f^* = SP_v S^* + SP_w S^* = S(P_v + P_w)S^* = SS^* = P_v.$$

(B) Cualquier familia de Cuntz-Krieger para el grafo dirigido E

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

es de la forma $\{S,P\}$, donde $S = \{S_e, S_f\}$, $P = \{Id_{\mathcal{H}}\}$, con $S_e^* S_e = Id_{\mathcal{H}} = S_f^* S_f$, y $S_e S_e^* + S_f S_f^* = Id_{\mathcal{H}}$. Es decir, $\{S,P\}$ es una familia de Cuntz-Krieger para E si y sólo si $\{S_1, S_2\}$ satisface las relaciones que definen $\mathcal{O}_2$.

Cualquier grafo dirigido E admite una E-familia de Cuntz-Krieger. En efecto, sea $\mathcal{H} := \ell^2(E^*)$. Obsérvese que $\mathcal{H}$ es separable, ya que E^* es numerable. Para $e \in E^1$ y $v \in E^0$ se definen la isometría parcial $S_e \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ y la proyección $P_v \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$, que en la base ortonormal $\{\xi_\mu : \mu \in E^*\}$ están dadas por

$$S_e(\xi_\mu) := \begin{cases} \xi_{e\mu} & \text{si } s(e) = r(e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad P_v \xi_\mu := \begin{cases} \xi_\mu & \text{si } r(e) = v \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $S = \{S_e : e \in E^1\}$ y $P = \{P_v : v \in E^0\}$, entonces el par $\{S,P\}$ es una E-familia de Cuntz-Krieger.

Proposición 5. *Supongamos que E es un grafo dirigido y que $\{S, P\}$ es una familia de Cuntz-Krieger para E en una C^*-álgebra B. Entonces:*

(a) Las proyecciones $S_e S_e^*$, $e \in E^1$, son mutuamente ortogonales.

(b) Si $S_e^* S_f \neq 0$, entonces $e = f$.

(c) Si $S_e S_f \neq 0$, entonces $s(e) = r(f)$.

(d) Si $S_e S_f^* \neq 0$, entonces $s(e) = s(f)$.

Ejemplo. Volvamos a considerar el grafo dirigido E

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] & w \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

y sea $\{S, P\} = \{\,\{S_e, S_f\}, \{P_v, P_w\}\,\}$ una E-familia de Cuntz-Krieger cualquiera. Entonces se tiene:

$$(S_e + S_f)^*(S_e + S_f) = S_e^* S_e + S_f^* S_e + S_e^* S_f + S_f^* S_f = P_v + 0 + 0 + P_w = Id,$$

y por lo tanto $S_e + S_f$ es una isometría. Por otro lado

$$(S_e + S_f)(S_e + S_f)^* = S_e S_e^* + S_f S_e^* + S_e S_f^* + S_f S_f^* = P_v$$

Luego a partir de $S_e + S_f$ podemos recuperar P_v y P_w, y por lo tanto también a $S_e = (S_e + S_f)P_v$ y entonces a $S_f = (S_e + S_f)P_w$. En otras palabras $S_e + S_f$ genera $C^*(E)$, es decir: $C^*(E) = C^*(S_e + S_f)$. Recíprocamente, si V es una isometría, entonces $P_w = 1 - VV^*$, $P_v = VV^*$, $S_e = VP_w$ y $S_f = VP_w$ define una E-familia de Cuntz-Krieger. Por lo tanto dar una E-familia de Cuntz-Krieger equivale a dar una isometría. Recuérdese que el teorema de Coburn dice que todas las C*-álgebras generadas por una isometría no unitaria son isomorfas entre sí, y en particular isomorfas al álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$. Luego $C^*(E) \cong \mathcal{T}$. Ver también el ejemplo siguiente al Teorema 8.

Definición 10. *Un camino de longitud $n \geq 1$ en el grafo dirigido E es una sucesión $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n$ de n aristas de E, tales que $s(\mu_i) = r(\mu_{i+1})$, $\forall i = 1, \dots, n-1$. Indicaremos la longitud del camino μ por $|\mu|$. Los vértices son los caminos de longitud 0.*

Indicaremos por E^n al conjunto de caminos de longitud n, y $E^* := \cup_{n\geq 0} E^n$. Si $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$, se define $r(\mu) = r(\mu_1)$ y $s(\mu) = s(\mu_n)$. Si $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$ y $\nu = \nu_1\nu_2\cdots\nu_m$ $s(\mu) = r(\nu)$, podemos forma el camino $\mu\nu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_m$.

Si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \prod_{i=1}^n E^1$, se define $S_\mu = S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdot sS_{\mu_n}$. La parte (c) de la proposición anterior muestra que $S_\mu = 0$ a menos que $\mu_1\mu_2\cdots\mu_n \in E^n$. En ese caso es fácil ver que $S_\mu^* S_\mu = P_{s(\mu_n)} = P_{s(\mu)}$.

Corolario 3. *Si $\mu, \nu \in E^*$ se tiene:*

(a) Si $|\mu| = |\nu|$ y $\mu \neq \nu$, entonces $(S_\mu S_\mu^*)(S_\nu S_\nu^*) = 0$.

(b) $S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\mu'}^* & \text{si } \mu = \nu\mu' \text{ para algún } \mu' \in E^* \\ S_{\nu'} & \text{si } \nu = \mu\nu' \text{ para algún } \nu' \in E^* \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(c) Si $S_\mu S_\nu \neq 0$, entonces $\mu\nu$ es un camino en E, y $S_\mu S_\nu = S_{\mu\nu}$.

(d) Si $S_\mu S_\nu^* \neq 0$, entonces $s(\mu) = s(\nu)$.

Corolario 4. *Si μ, ν, α y $\beta \in E^*$, entonces*

$$(S_\mu S_\nu^*)(S_\alpha S_\beta^*) = \begin{cases} S_\mu S_{\mu\alpha'} S_\beta^* & \text{si } \alpha = \nu\alpha' \\ S_\mu S_{\beta\nu'} & \text{si } \nu = \alpha\nu' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular todo producto finito no nulo de las isometrías parciales S_e y S_f^* tiene la forma $S_\mu S_\nu^*$ para algunos caminos $\mu, \nu \in E^*$ tales que $s(\mu) = s(\nu)$.

Proposición 6. *Si $\{S, P\}$ es una familia de Cuntz-Krieger para el grafo dirigido E, se tiene $C^*(S, P) := \overline{\mathsf{span}}\{S_\mu S_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}$.*

Dado un grafo dirigido E, considérese el conjunto

$$\mathcal{G}_E := \{d_{\mu,\nu} : \mu, \nu \in E^* \text{ y } s(\mu) = s(\nu)\}$$

con las relaciones

$$\mathcal{R}_E := \left\{ \begin{array}{l} d_{\mu,\nu}^* = d_{\nu,\mu}, \ \forall \mu, \nu \in E^* \text{ con } s(\mu) = s(\nu) \\ \\ d_{\mu,\nu} = \begin{cases} d_{\mu\alpha',\beta} & \text{si } \alpha = \nu\alpha' \\ d_{\mu,\beta\nu'} & \text{si } \nu = \alpha\nu' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array} \right\}$$

Cada familia de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ para E en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ induce una representación de $\pi_{S,P}$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ en $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ a través de $\pi_{S,P}(d_{\mu,\nu}) := S_\mu S_{\nu^*}$. Por otro lado, si ρ es una representación de $(\mathcal{G}_E, \mathcal{R}_E)$, se tiene

$$\|\rho(d_{\nu,\mu})\|^2 = \|\rho(d^*_{\nu,\mu} d_{\nu,\mu})\| = \|\rho(d_{\mu,\nu} d_{\nu,\mu})\| = \|\rho(d_{\mu,\mu})\| \leq 1,$$

pues $\rho(d_{\mu,\mu})$ es una proyección, ya que $d^*_{\mu,\mu} d_{\mu,\mu} = d_{\mu,\mu}$. Por lo tanto el par $(\mathcal{G}_E, \mathcal{R}_E)$ es admisible.

Definición 11. *La C^*-álgebra del grafo dirigido E se define como:*

$$C^*(E) := C^*(\mathcal{G}_E, \mathcal{R}_E).$$

Sean $s_e := d_{e,s(e)}$ y $p_v = d_{v,v}$, $\forall e \in E^1$ y $v \in E^0$. Entonces es fácil ver que $\{s, p\}$ es una familia de Cuntz-Krieger que genera $C^*(E)$, y para toda familia de Cuntz-Krieger para E se tiene $\pi_{S,P}(s_e) = S_e$ y $\pi_{S,P}(p_v) = P_v$, $\forall e \in E^1$ y $v \in E^0$.

7.1. Teoremas de unicidad.

El teorema de Coburn permite obtener muy fácilmente una versión concreta de la C*-álgebra universal generada por una isometría. Del mismo modo, el teorema de Cuntz hace su parte en relacón a las álgebras $\mathcal{O}_n$. En esta última parte veremos que ambos resultados se pueden obtener como consecuencias de resultados generales sobre álgebras de grafos.

En primer lugar hacemos notar en el siguiente resultado que, como en el caso del álgebra de Toeplitz y de las álgebras de Cuntz, en toda C*-álgebra de un grafo dirigido hay una acción continua natural de $\mathbb{T}$. Esta acción acción se conoce como ***gauge action***.

Proposición 7. *Sea E un grafo dirigido. Entonces existe una única acción γ de $\mathbb{T}$ en $C^*(E)$ tal que $\gamma_\lambda(s_e) = \lambda s_e$ y $\gamma_\lambda(p_v) = p_v$, $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, $e \in E^1$ y $v \in E^0$. Además γ es continua.*

Demostración. La unicidad es clara porque $\{s_e, p_v : e \in E^1, v \in E^0\}$ genera $C^*(E)$. Para ver la existencia de γ, nótese que para cada $\lambda \in \mathbb{T}$ se tiene que $\{\lambda s_e, p_v : e \in E^1, v \in E^0\}$ es una familia de Cuntz-Krieger para E, y por lo tanto existe un único homomorfismo $\gamma_\lambda : C^*(E) \to C^*(E)$ tal que $\gamma_\lambda(s_e) = \lambda s_e$ y $\gamma_\lambda(p_v) = p_v$, $\forall e \in E^1, v \in E^0$. Como $\gamma_{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2}(s_e) = \lambda_1\lambda_2 s_e = \gamma_{\lambda_1\lambda_2}$ $\forall \lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{T}$ y $e \in E^1$, y cada p_v es invariante por cada γ_λ, se deduce de la unicidad de estos mapas que $\gamma_{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2} = \gamma_{\lambda_1\lambda_2}$. Luego γ es una acción por automorfismos de $\mathbb{T}$ en $C^*(E)$.

En cuanto a la continuidad, fijemos $\lambda_0 \in \mathbb{T}$, $x \in C^*(E)$ y $y = \sum c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*$ tal que $\|x-y\| < \epsilon/3$. Como $\gamma_\lambda(s_\mu) = \lambda^{|\mu|} s_\mu$, y como el producto por escalares es continuo, también lo es el mapa

$$\lambda \mapsto \gamma_\lambda(y) = \sum c_{\mu,\nu} \lambda^{|\mu|-|\nu|} s_\mu s_\nu^*,$$

así que existe $\delta > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ se tiene $\|\gamma_\lambda(y) - \gamma_{\lambda_0}(y)\| < \epsilon$. Por lo tanto si $|\lambda - \lambda_0|$:

$$\|\gamma_\lambda(x) - \gamma_{\lambda_0}(x)\| \leq \|\gamma_\lambda(x-y)\| + \|\gamma_\lambda(y) - \gamma_{\lambda_0}(y)\| + \|\gamma_{\lambda_0}(x-y)\| < 3(\epsilon/3) = \epsilon,$$

lo que termina la prueba. $\square$

7.1.1. Subespacios espectrales de una acción de $\mathbb{T}$.

Supongamos que γ es una acción continua de $\mathbb{T}$ en una C*-álgebra A.

Definición 12. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. El n-ésimo subespacio espectral para γ es $A_n := \{a \in A : \gamma_z(a) = z^n a, \forall z \in \mathbb{T}\}$. En particular A_0 es una C*-subálgebra de A, llamada subálgebra de puntos fijos de γ y generalmente denotada A^γ.*

Es inmediato verificar que cada A_n es un subespacio cerrado de A, y que

$$A_n^* A_n := \overline{\mathsf{span}}\{a^*b : a, b \in A_n\}$$

es un ideal bilateral cerrado de A^γ, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 8. *Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $P_n : A \to A$ tal que*

$$P_n(a) := \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \gamma_z(a) dz = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \gamma_{e^{2\pi i t}}(a) dt, \quad \forall a \in A.$$

Entonces $P_n^2 = P_n$, $\|P_n\| \leq 1$ y $P_n(A) = A_n$.

Demostración. Es claro que $\|P_n\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}\|P_n(a)\| &= \Big\| \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \gamma_z(a) dz \Big\| = \Big\| \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \gamma_{e^{2\pi i t}}(a) dt \Big\| \\ &\leq \int_0^1 \|e^{-2\pi i n t} \gamma_{e^{2\pi i t}}(a)\| dt = \int_0^1 \|a\|\, dt = \|a\|.\end{aligned}$$

Veamos a continuación que $P_n|_{A_n} = Id_{A_n}$. Si $a \in A_n$, entonces

$$P_n(a) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}\gamma_z(a)dz = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}z^n a dz = \int_{\mathbb{T}} adz = a$$

Para terminar la demostración basta probar que $P_n(A) \subseteq A_n$. Sean $a \in A$ y $w \in \mathbb{T}$. Como la medida en $\mathbb{T}$ es invariante por rotaciones:

$$\gamma_w(P_n(a)) = \gamma_w\Big(\int_{\mathbb{T}} z^{-n}\gamma_z(a)dz\Big) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}\gamma_{wz}(a)dz = \int_{\mathbb{T}} w^n(wz)^{-n}\gamma_{wz}(a)dz$$
$$= w^n\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n}\gamma_\zeta(a)d\zeta = w^nP_n(a).$$

□

Corolario 5. *P_0 es una esperanza condicional fiel con imagen A^γ.*

Demostración. Ya vimos que $P_0^2 = P_0$, y que su imagen es $A_0 = A^\gamma$. Supongamos que $a \in A$. Entonces

$$P_0(a^*a) = \int_{\mathbb{T}} \gamma_z(a^*a)dz = \int_0^1 \gamma_{e^{2\pi it}}(a^*a)dt.$$

Como el integrando es no negativo, se tiene $P_0(a^*a) \in A_+^\gamma$. Como además el integrando es continuo, $P_0(a^*a) = 0 \iff a = 0$. □

Proposición 9. *Sea $a \in A$. Entonces:*

(a) Si $P_n(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $a = 0$.

(b) (Teorema de Fejér) Si $n \geq 0$ y $s_n, \sigma_n : A \to A$ están dadan por $s_n(a) := \sum_{k=-n}^{n} P_k(a)$ y $\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} s_j$, entonces $\sigma_n(a) \to a$.

En conclusión se tiene $A = \overline{\oplus_{n\in\mathbb{Z}}A_n}$.

Demostración. Sea ψ un estado de A. Si $P_n(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$0 = \psi\big(P_n(a)\big) = \psi\big(\int_{\mathbb{T}} z^{-n}\gamma_z(a)dz\big) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}\psi(\gamma_z(a))dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto la función continua compleja $z \mapsto \psi(\gamma_z(a))$ tiene todos sus coeficientes de Fourier nulos, y por lo tanto es nula. Como los estados de A

separan los puntos de A, se deduce que $a = 0$, lo que prueba (a). En cuanto a la parte (b), se tiene:

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} P_k(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-|k|)P_k(a) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)P_k(a).$$

Por lo tanto, si F_n es el núcleo de Fejér:

$$\|a-\sigma_n(a)\| = \Big\|a - \sum_{k=0}^{n-1}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\int_{\mathbb{T}} z^{-n}\gamma_z(a)dz\Big\| = \Big\|\int_{\mathbb{T}} a - F_n(z)\gamma_z(a)dz\Big\|$$
$$= \Big\|\int_0^1 F_n(e^{2\pi it})\big(a-\gamma_{e^{2\pi it}}(a)\big)dt\Big\| \leq \int_0^1 F_n(e^{2\pi it})\|a-\gamma_{e^{2\pi it}}(a)\|dt \to_{n\to\infty} 0.$$

Se deduce de (a) que la suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ es directa, y de (b) su clausura es todo A. $\square$

Corolario 6. *Sean γ la gauge action de $\mathbb{T}$ en $C^*(E)$, y $\Phi : C^*(E) \to C^*(E)$ la esperanza condicional sobre $C^*(E)^\gamma$. Para cada subconjunto finito F de E^* y cada elección de escalares $c_{\mu,\nu}$, se tiene:*

$$\Phi\Big(\sum_{\mu,\nu\in F} c_{\mu,\nu}s_\mu s_\nu^*\Big) = \sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu,\nu}s_\mu s_\nu^*,$$

y

$$C^*(E)^\gamma = \overline{\mathsf{span}}\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu)=s(\nu) \text{ } y \text{ } |\mu|=|\nu|\}$$

Demostración. Sean $\mu,\nu \in E^*$ tales que $s(\mu) = s(\nu)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{T}} \gamma_z(s_\mu s_\nu^*)dz = \int_{\mathbb{T}} z^{|\mu|-|\nu|}s_\mu s_\nu^* dz = \begin{cases} s_\mu s_\nu^* & \text{si } |\mu|=|\nu| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la primera afirmación queda probada, y la segunda sigue inmediatamente de la primera y de que $\Phi(C^*(E)) = C^*(E)^\gamma$. $\square$

Es claro que, razonando como en el corolario anterior, el n-ésimo subespacio espectral de la acción γ es

$$C^*(E)_n = \overline{\mathsf{span}}\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu)=s(\nu) \text{ y } |\mu|-|\nu|=n\}.$$

Analicemos ahora $C^*(E)^\gamma$. Si $k \geq 0$, sea

$$\mathcal{F}_k := \overline{\mathsf{span}}\{s_\mu s_\nu^* : |\mu| = |\nu| = k, s(\mu) = s(\nu)\}.$$

Si μ, ν, α y β son caminos de longitud k, entonces sabemos que

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = \delta_{\nu,\alpha} s_\mu s_\beta^*. \tag{9}$$

Luego, para cada $v \in E^0$, el conjunto $\{s_\mu s_\nu^* : |\mu| = |\nu| = k, s(\mu) = s(\nu) = v\}$ es un sistema de unidades matriciales para

$$\mathcal{F}_k(v) := \overline{\mathsf{span}}\{s_\mu s_\nu^* : |\mu| = |\nu| = k, s(\mu) = s(\nu) = v\},$$

y por lo tanto $\mathcal{F}_k(v) \cong \mathsf{K}(\ell^2(E^k \cap s^{-1}(v)))$ de operadores compactos en el espacio ℓ^2 del conjunto numerable $E^k \cap s^{-1}(v) = \{\mu \in E^k : s(\mu) = v\}$. La igualdad (9) también implica que si v y w son vértices diferentes, entonces $\mathcal{F}_k(v)\mathcal{F}_k(w) = 0$, y por lo tanto la familia $\{\mathcal{F}_k(v)\}_{v \in E^0}$ es linealmente independiente. Se concluye entonces que

$$\mathcal{F}_k = \oplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_k(v) \cong \oplus_{v \in E^0} \mathsf{K}(\ell^2(E^k \cap s^{-1}(v))).$$

Cuando el grafo E no tiene fuentes y $\mu, \nu \in E^k \cap s^{-1}(v)$, entonces la relación de Cuntz-Krieger en v implica que

$$s_\mu s_\nu^* = s_\mu p_v s_\nu^* = s_\mu \sum_{r(e)=v} s_e s_e^* s_\nu^* = \sum_{r(e)=v} s_{\mu e} s_{\nu e}^* \in \mathcal{F}_{k+1},$$

y por lo tanto $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$ $\forall k$.

Se deduce entonces que si E no tiene fuentes se tiene

$$C^*(E)^\gamma = \overline{\cup_k \mathcal{F}_k} = \overline{\cup_k \oplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_k(v)},$$

y por lo tanto es una AF-álgebra.

A los efectos de evitar mayores dificultades técnicas, en las demostraciones siguientes supondremos siempre que el grafo E no tiene fuentes, a pesar de que los resultados serán enunciados en general. Las demostraciones completas pueden consultarse en [Raeburn, 2004].

Lema 2. *Supongamos que $\{T, Q\}$ es una E-familia de Cuntz-Krieger en la C^*-álgebra B, tal que $Q_v \neq 0$ para todo $v \in E^0$. Entonces $\pi_{T,Q}$ es isométrico en $C^*(E)^\gamma$.*

Demostración. Si $\mu \in E^k$, se tiene $T_\mu^* T_\mu = Q_{s(\mu)} \neq 0$, de modo que si $s(\mu) = s(\nu)$, entonces $Q_{s(\mu)} = T_\mu^*(T_\mu T_\nu^*)T_\nu \neq 0$, lo que implica que $\pi_{T,Q}(s_\mu s_\nu^*) = T_\mu T_\nu^* \neq 0$. Entonces $\pi_{T,Q}$ es isométrica en cada $\mathcal{F}_k(v)$, y por lo tanto en cada $\mathcal{F}_k$, y entonces en $\cup_k \mathcal{F}_k$, que es denso en $C^*(E)^\gamma$. $\square$

Teorema 8 (Teorema de unicidad de la acción canónica)**.** *Sea E un grafo dirigido, y supongamos que $\{T, Q\}$ es una E-familia de Cuntz-Krieger en una C^*-álgebra B, con cada $Q_v \neq 0$. Si existe una acción continua $\beta : \mathbb{T} \to \mathsf{Aut}(B)$ tal que $\beta_z(T_e) = zT_e$ para cada $e \in E^1$ y $\beta_z(Q_v) = Q_v$ para cada $v \in E^0$, entonces $\pi_{T,Q}$ es un isomorfismo entre $C^*(E)$ y $C^*(T, Q)$.*

Demostración. Se tiene:

$$\|\pi_{T,Q}(\Phi(a))\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|\pi_{T,Q}(\gamma_z(a))\| dz = \int_{\mathbb{T}} \|\beta_z(\pi_{Q,T}(a))\| dz.$$

Como los automorfismos de C*-álgebras son isométricos, lo anterior implica

$$\|\pi_{T,Q}(\Phi(a))\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|\pi_{Q,T}(a)\| dz = \|\pi_{Q,T}(a)\|. \tag{10}$$

Si $\pi_{Q,T}(a) = 0$, entonces $\pi_{Q,T}(a^*a) = 0$, y por lo tanto $\pi_{Q,T}\big(\Phi(a^*a)\big) = 0$ por (10). Pero entonces $\Phi(a^*a) = 0$ porque $\pi_{Q,T}$ es fiel en $C^*(E)^\gamma$, y como Φ es fiel, se deduce que $a = 0$. Luego $\pi_{Q,T}$ es inyectiva, y es sobreyectiva también porque su imagen es cerrada en B y contiene a los generadores T_e, Q_v de $C^*(E)$. $\square$

Ejemplo. Una vez más consideramos el grafo dirigido E

$$e \circlearrowright v \xleftarrow{f} w$$

Sabemos que el shift unilateral $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ define una E-familia de Cuntz-Krieger: $P_w = 1 - SS^*$, $P_v = SS^*$, $S_e = SP_w$ y $S_f = SP_w$. También sabemos que los unitarios $U_z : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ tales que

$$U_z(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_0, zx_1, z^2x_2, \ldots, z^nx_n, \ldots)$$

definen una acción continua β de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{T}$ a través de $T \mapsto U_z T U_z^*$, y es $\beta_z(S) = zS$, $\forall z \in \mathbb{T}$. Entonces es $\beta_z(P_w) = P_w$, $\beta_z(P_v) = P_v$, $\beta_z(S_e) = zS_e$ y $\beta_z(S_f) = zS_f$. Por lo tanto $C^*(E) \cong \mathcal{T}$.

Para terminar enunciamos sin demostración otro teorema de unicidad. Antes necesitamos un par de definiciones. Se dice que un camino $\mu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_n$ $(n \geq 1)$ en un grafo dirigido E es un ***ciclo*** si $s(\mu_n) = r(\mu_1)$ y $s(\mu_i) \neq s(\mu_j)$ si $i \neq j$. Una arista e es una ***entrada*** al ciclo μ si existe i tal que $r(e) = r(\mu_i)$, y $e \neq \mu_i$.

Ejemplo. En el siguiente grafo dirigido E

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, bend right, "e"'] & w \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

ef, fe, y g son ciclos; fge y $efef$ son caminos cerrados pero no son ciclos, porque pasan dos veces por w. Cada ciclo tiene una entrada; por ejemplo g es una entrada a ef, y e es una entrada a g. Por su parte, en el grafo F

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"'] & w \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

el ciclo e no tiene entrada.

Teorema 9 (Teorema de unicidad de Cuntz-Krieger)**.** *Supongamos que E es un grafo dirigido en el cual cada ciclo tiene una entrada, y que $\{T, Q\}$ es una E-familia de Cuntz-Krieger en la C^*-álgebra B tal que $Q_v \neq 0$ $\forall v \in E^0$. Entonces el homomorfismo $\pi_{T,Q} : C^*(E) \to C^*(T, Q)$ es un isomorfismo.*

Ejemplo. En el siguiente grafo dirigido E, que corresponde a las relaciones de $\mathcal{O}_2$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

hay dos ciclos, a saber e y f, y cada uno es una entrada del otro. Por lo tanto cada representación que no se anule en ningún vértice proveerá un isomorfismo con $\mathcal{O}_2$.

Apéndice sobre generadores y relaciones

Monoides y semigrupos libres. Dado un conjunto X, al que llamaremos ***alfabeto***, sea $\mathsf{M}_\mathsf{X} := \bigcup_{n\geq 0} \mathsf{X}^n$, donde $\mathsf{X}^n = \{(X_1, \dots, X_n) : X_i \in \mathsf{X}\}$. Si $\mathsf{X} = \emptyset$, entonces $\mathsf{M}_\emptyset = \{\emptyset\}$ tiene un único elemento.

Supondremos en adelante que $\mathsf{X} \neq \emptyset$, de manera que la unión $\mathsf{M}_\mathsf{X} := \bigcup_{n\geq 0} \mathsf{X}^n$ es disjunta.

Nótese que $\mathsf{X}^0 = \{\emptyset\}$. Diremos que los elementos de X^n son ***palabras de largo*** n en el alfabeto X. En particular la palabra de largo 0 será llamada palabra vacía, y denotada por 1. Escribiremos $X_1 X_2 \cdots X_n$ en lugar de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. En M_X se define el siguiente producto $\mu : \mathsf{M}_\mathsf{X} \times \mathsf{M}_\mathsf{X} \to \mathsf{M}_\mathsf{X}$, llamado concatenación de palabras:

$$\mu(X_1 \cdots X_n, X_1' \cdots X_m') = X_1 \cdots X_n X_1' \cdots X_m' \in \mathsf{X}^{n+m}, \ \forall n, m \geq 1,$$

y

$$\mu(1, X_1 \cdots X_n) = X_1 \cdots X_n = \mu(X_1 \cdots X_n, 1), \ \forall X_1 \cdots X_n \in \mathsf{X}^n.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, pondremos simplemente X^n en lugar de $X_1 X_2 \cdots X_n$. Es rutinario probar que μ es asociativo, y es claro que no es conmutativo a menos que X tenga un solo elemento. Por lo tanto $(\mathsf{M}_\mathsf{X}, \mu)$ es un semigrupo con unidad, es decir, es un monoide. Hay una inclusión natural $j_\mathsf{X} \to S_{\mathsf{M}_\mathsf{X}}$, dada por $X \mapsto X \in \mathsf{X}^1$.

Si M es un monoide y $f : \mathsf{X} \to M$ es un mapa cualquiera, sea $f^{(n)} : \mathsf{X}^n \to M$ tal que $f^{(n)}(X_1 X_2 \cdots X_n) := f(X_1) f(X_2) \cdots f(X_n)$ si $n \geq 1$, y $f^{(0)}(1) = 1_M$, la unidad de M. La colección de dichos mapas define $g_\mathsf{X} : \mathsf{M}_\mathsf{X} \to M$, que claramente es un morfismo de monoides, y de hecho el único que hace el diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X} \arrow[rr, "j_\mathsf{X}"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathsf{M}_\mathsf{X} \arrow[dl, "g_\mathsf{X}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Definición 13. *Se llama monoide libre en el conjunto* X *a todo par* (M, j) *formado por un monoide* M *y una función* $\mathsf{j} : \mathsf{X} \to \mathsf{M}$ *tal que para toda función* $f : \mathsf{X} \to M$ *de* X *en un monoide* M *existe un único homomorfismo* $\tilde{f} : \mathsf{M} \to M$ *tal que* $f = \tilde{f}\mathsf{j}$.

La construcción anterior muestra que $(\mathsf{M}_\mathsf{X}, j_\mathsf{X})$ es un monoide libre en el alfabeto X. El mapa $\mathsf{X} \to (\mathsf{M}_\mathsf{X}, j_\mathsf{X})$ es de hecho parte de un functor. En efecto, si $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{Y} \subseteq \mathsf{M_Y}$ es una función, la propiedad universal de $(\mathsf{M_X}, j_\mathsf{X})$ implica que existe un único homomorfismo $\alpha_\mathsf{M} : \mathsf{M_X} \to \mathsf{M_Y}$ tal que $\alpha = \alpha_\mathsf{M} j_\mathsf{X}$. Es fácil verificar ahora que la correspondencia $\Big(\mathsf{X} \overset{\alpha}{\to} \mathsf{Y}\Big) \longmapsto \Big(\mathsf{M_X} \overset{\alpha_\mathsf{M}}{\to} \mathsf{M_Y}\Big)$. es un functor de la categoría de conjuntos y funciones en la categoría de semigrupos y sus homomorfismos. Obsérvese que en particular toda función biyectiva $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ da lugar a un automorfismo α_M de $\mathsf{M_X}$.

Para $\mathsf{X} \neq \emptyset$, sea $\mathsf{S_X} = \bigcup_{n\geq 1} \mathsf{X^n} = \mathsf{M_X} \setminus \{1\}$. Entonces podemos considerar $j_\mathsf{X} : \mathsf{X} \to \mathsf{S_X}$. Como anteriormente, se ve que para toda función $g : \mathsf{X} \to S$ de X en un semigrupo S existe un único homomorfismo $g_\mathsf{X} : \mathsf{S_X} \to S$ tal que $g = g_\mathsf{X} j_\mathsf{X}$. Es decir que -con una definición similar a la anterior- el par $(\mathsf{S_X}, j_\mathsf{X})$ es un semigrupo libre en X. Como en el caso anterior, es fácil ver que $\mathsf{X} \mapsto \mathsf{S_X}$ es la parte, correspondiente a los objetos, de un functor de la categoría de conjuntos y funciones en la categoría de semigrupos y sus homomorfismos.

Polinomios no conmutativos. Consideremos ahora un anillo R y un conjunto S. Sea RS el R-módulo libre a izquierda con base S, de manera que

$$RS = \Big\{ \sum_{s\in S} r_s s : \ r_s \in \mathbb{R}, \ r_s = 0 \text{ para casi todo } s \in S \Big\},$$

con las operaciones $r(\sum_s r_s s) = \sum_s (r r_s) s$ y $\sum_s r_s s + \sum_s r'_s s = \sum_s (r_s + r'_s) s$.

Si además S es un semigrupo, entonces RS es un anillo con el producto determinado por $(rs)(r's') = (rr')(ss')$. Si S tiene unidad, entonces su unidad es también unidad de RS. Si S' es un subsemigrupo de S, entonces RS' es un subanillo de RS, y si además S' es un subsemigrupo absorbente en el sentido de que $SS' \subseteq S' \supseteq S'S$, entonces RS' es un ideal bilateral de RS.

Finalmente, si R es conmutativo, entonces RS es una R-álgebra.

Definición 14. *Sean R un anillo conmutativo y X un conjunto no vacío. Entonces el álgebra con unidad $R\langle \mathsf{X} \rangle := R\mathsf{M_X}$ se llama álgebra de polinomios no conmutativos en las variables $X \in \mathsf{X}$ y coeficientes en R.*

Nótese que la subálgebra (sin unidad) de $R\langle \mathsf{X} \rangle$ generada por j_X es $R\mathsf{S_X}$, la cual, de acuerdo a los comentarios previos a la definición anterior, es un ideal bilateral de $R\langle \mathsf{X} \rangle$.

Obsérvese que $R\langle \mathsf{X} \rangle$ tiene la siguiente propiedad universal: si A es una R-álgebra con unidad y $f : \mathsf{X} \to A$ es un mapa cualquiera, entonces existe un existe un único homomorfismo de R-álgebras con unidad $g_{\mathsf{X}} : R\langle \mathsf{X}\rangle \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X} \arrow[rr, "j_{\mathsf{X}}"] \arrow[dr, "f"'] & & R\langle \mathsf{X}\rangle \arrow[dl, "g_{\mathsf{X}}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Si A es una R-álgebra sin unidad, podemos adjuntarle una unidad definiendo $\tilde{A} := A \times R$ con las operaciones de suma y producto por escalares definidas coordenada a coordenada, y con la multiplicación dada por

$$(a, r)(a', r') = (aa' + r'a + ra', rr').$$

Entonces $\tilde{A}$ es una R-álgebra con unidad $(0, 1_R)$, que contiene a A como ideal bilateral. Por lo tanto si $f : \mathsf{X} \to A$ es una función cualquiera, existe un único homomorfismo $g_{\mathsf{X}} : R\langle \mathsf{X}\rangle \to \tilde{A}$ tal que $f = g_{\mathsf{X}} j_{\mathsf{X}}$. Como la imagen de j_{X} es $\mathsf{X}^1 \subseteq R\mathsf{S}_{\mathsf{X}}$, se deduce que la subálgebra $g_{\mathsf{X}}(\mathsf{RS}_{\mathsf{X}})$ de $\tilde{A}$ es la subálgebra generada por $f(\mathsf{X})$, y por lo tanto está contenida en A. Podemos ver la correspondencia $(R, \mathsf{X}) \mapsto R\langle \mathsf{X}\rangle$ en términos functoriales. En efecto, consideremos el producto de las categorías de anillos conmutativos y la de conjuntos. Por lo tanto un morfismo en esta categoría, de (R, X) en (R', X') es simplemente un par (ϕ, α), donde $\phi : R \to R'$ es un morfismo de anillos y $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{X}'$ es una función. Entonces se tiene un homomorfismo de álgebras $\phi_\alpha : R\langle \mathsf{X}\rangle \to R'\langle \mathsf{X}'\rangle$ dado por

$$\phi_\alpha(rX_1 \cdots X_n) = \phi(r)\alpha_{\mathsf{M}}(X_1 \cdots X_n) = \phi(r)\alpha(X_1) \cdots \alpha(X_n).$$

$*$-álgebras. Aproximémonos ahora al tipo de situaciones que nos interesan. Supongamos dado un cierto conjunto no vacío, y sean Y e Y^* copias disjuntas de dicho conjunto, y sea $\mathsf{X} := \mathsf{Y} \cup \mathsf{Y}^*$. Entonces $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ tal que $\alpha(Y) = Y^*$ y $\alpha(Y^*) = Y$ $\forall Y, Y^*$, es una biyección. Consideremos también $R = \mathbb{C}$, y sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugación. Entonces $\phi_\alpha : \mathbb{C}\langle \mathsf{X}\rangle \to \mathbb{C}\langle \mathsf{X}\rangle$ es un automorfismo de orden 2, pues (ϕ, α) lo es del par $(\mathbb{C}, \mathsf{X})$. Está claro que ϕ_α es de hecho una involución en $\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\rangle$. La denotaremos simplemente *, como es usual.

Si Z es otro conjunto y $\beta : \mathsf{Y} \to \mathsf{Z}$ es una función, extendamos $\beta : \mathsf{Y} \cup \mathsf{Y}^* \to$

$\mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}^*$ poniendo $\beta(Y^*) = Z^*$. Entonces el cuadrado siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\phi_\beta"'] & \mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle \arrow[d, "\phi_\beta"'] \\
\mathbb{C}\langle \mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}^*\rangle \arrow[r, "*"'] & \mathbb{C}\langle \mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}^*\rangle
\end{tikzcd}$$

En otras palabras: ϕ_β es un homomorfismo de $*$-álgebras. Es rutinario ahora verificar que la correspondencia $\left(\mathsf{Y} \overset{\beta}{\to} \mathsf{Z}\right) \longmapsto \left(\mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle \overset{\phi_\beta}{\to} \mathbb{C}\langle \mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}^*\rangle\right)$ es de hecho un functor.

Supongamos que $f : \mathsf{Y} \to A$ es una función a valores en una $*$-álgebra A sobre $\mathbb{C}$. Entonces podemos extender f a $\mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*$ poniendo $f(Y^*) := f(Y)^*$. Luego por la propiedad universal de $\mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle$ existe un único homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\psi_f : \mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle \to A$ que extiende a f, y por lo tanto ψ_f es un homomorfismo de $*$-álgebras. Por este motivo, diremos que $\mathbb{C}\langle \mathsf{Y}\cup\mathsf{Y}^*\rangle$ es la $*$-álgebra libre (o universal) generada por Y.

Queremos ahora construir *-álgebras a partir, no sólo de un conjunto X, sino también de relaciones entre los elementos de X. Entenderemos por relaciones en X cualquier subconjunto $\mathcal{R}$ de $\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle$, es decir, cualquier colección de polinomios no conmutativos en X y X^* con coeficientes en $\mathbb{C}$. Supongamos que $p \in \mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle$ involucra a los elementos $X_1, \ldots, X_m \in \mathsf{X}$, de modo que $p = \sum \alpha_{i_1,\ldots,i_{n_k}} X_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} X_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots X_{i_{n_k}}^{\epsilon_{i_{n_k}}}$, donde para todo j es $\epsilon_j = 1$ o $\epsilon_j = *$. Si $f : \mathsf{X} \to A$ es una función a valores en la $*$-álgebra A, diremos que los elementos $a_{i_j} := f(X_{i_j})$ satisfacen la relación p si $\sum \alpha_{i_1,\ldots,i_{n_k}} a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} a_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots a_{i_{n_k}}^{\epsilon_{i_{n_k}}} = 0$. Si lo anterior ocurre para todo $p \in \mathcal{R}$, diremos que $f(\mathsf{X})$ satisface las relaciones $\mathcal{R}$. En ese caso, si $I_\mathcal{R}$ es el $*$-ideal de $\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle$ generado por las relaciones $\mathcal{R}$, el homomorfismo $\psi_f : \mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle \to A$ pasa al cociente $\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle/I_\mathcal{R}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{X} \arrow[r, "j_\mathsf{X}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle \arrow[dl, "\psi_f"'] \arrow[d, "\pi_\mathcal{R}"] \\
A & \frac{\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle}{I_\mathcal{R}} \arrow[l, "\bar\psi_f"]
\end{tikzcd}$$

Diremos que el par $(\mathbb{C}\langle \mathsf{X}\cup\mathsf{X}^*\rangle/I_\mathcal{R}, j)$ (o cualquier otro isomorfo a éste) es la $*$-álgebra universal generada por $(\mathsf{X}, \mathcal{R})$, es decir, por el conjunto X y las relaciones $\mathcal{R}$ (aquí es $j := \pi_{\mathcal{R} j_\mathsf{X}}$).

Referencias

[Blackadar, 1985] Blackadar, B., *Shape theory for C*-algebras*, Math. Scand **56**, 249-275.

[Bratteli, 1972] Bratteli, O., *Inductive limits of finite dimensional C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **171**, 195-234.

[Coburn, 1967] Coburn, L., *The C*-algebra of an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 722-726.

[Cuntz, 1977] Cuntz, J., *Simple C*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57**, 173-185.

[Davidson, 1996] Davidson, Kenneth R., *C*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, AMS, 1996.

[Raeburn, 2004] Raeburn, Iain, *Graph Algebras*, CBMS **103**, AMS, 2004.

[Rieffel, 1981] Rieffel M. A.,*C*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. **93**, 415-429.