Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$ *y* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(c) $h(a^*) = \overline{h(a)}$, *para todo homomorfismo de álgebras* $h : A \to \mathbb{C}$ *y para todo* $a \in A$

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ *es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces* ϕ *es un homomorfismo de* C^**-álgebras.*

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A *una* C^**-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand* $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ *es un isomorfismo de* C^**-álgebras.*

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ *es un hm inyectivo de* C^**-álgebras, entonces* ϕ *es isométrico.*

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ *es un isomorfismo de functores.*

Teorema

Los functores contravariantes $\mathrm{C}_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{C}_c^*$ *y* $\widehat{\ } : \mathscr{C}_c^* \to \mathscr{T}_{lch}$ *establecen una dualidad entre las categorías de* C^**-álgebras conmutativas y sus homomorfismos no degenerados y la categoría de espacios de Hausdorff localmente compactos y las funciones continuas propias.*

Diccionario de la dualidad de Gelfand.

La dualidad entre las categorías $\mathscr{C}_c^*$ y $\mathscr{T}_{lch}$ permite establecer un diccionario entre conceptos topológicos y conceptos C^*-algebraicos:

Topología: X	**Álgebra: $\mathbf{A} = \mathbf{C_0}(\mathbf{X})$**
función propia	homomorfismo
homeomorfismo	automorfismo
compacto	unital
abierto	ideal
abierto denso	ideal esencial
cerrado	cociente
compactificación	unitización
αX	$\tilde{A}$
βX	$M(A)$
conexo	sin proyecciones no triviales
base numerable	separable
medida regular compleja	funcional lineal positiva

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.*

(3) *Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Cálculo funcional continuo

Proposición

(1) *Sea $a \in A$ (C^*-álgebra unital) tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son hms. unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.*

(2) *En particular si $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z \ \forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.*

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota_a) = a$, donde $\iota_a : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1, a)$.

Demostración. La unicidad de τ_a sigue del Corolario anterior. En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$\begin{tikzcd} C(\sigma(a)) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_a)_*", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\tau_a"'] & & C(\widehat{C^*(1,a)}), \arrow[dl, "\cong"', "\mathcal{G}^{-1}"] \\ & A \supseteq C^*(1,a) & \end{tikzcd}$$

Entonces τ_a es un homomorfismo unital inyectivo de C^*-álgebras, (y por lo tanto isométrico), cuya imagen es $C^*(1,a)$. Además

$$\mathrm{ev}_{a_*}(\iota_a) = \iota_a \circ \mathrm{ev}_a = \widehat{a},$$

y por lo tanto $\tau_a(\iota_a) = \mathcal{G}^{-1}(\widehat{a}) = a$.

Definición

El homomorfismo τ_a dado por el teorema previo se llama cálculo funcional (continuo) sobre el elemento normal a. En lugar de $\tau_a(f)$ se escribe en general $f(a)$.

Ejemplo

Sea $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Entonces* $\exp$ *es el límite uniforme sobre compactos de la sucesión de polinomios* $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.
Si a *es normal, entonces* $\tau_a(\exp) = e^a$:
$\tau_a(\exp) = \tau_a(\lim_n p_n) = \lim_n \tau_a(p_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_a(z^k)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

Teorema (El cálculo funcional "conmuta" con homomorfismos.)

Sea $\phi : A \to B$ *un homomorfismo unital de* C^**-álgebras, y sea* $a \in A$ *un elemento normal. Entonces* $\phi(a)$ *es normal,* $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)$, *y*

$$f(\phi(a)) = \phi(f(a)), \qquad \forall f \in C(\sigma(a))$$

Demostración. Se tiene: $\phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a) = \phi(aa^*) = \phi(a)\phi(a)^*$.
Sea $\mathrm{r} : C(\sigma(a)) \to C(\sigma(\phi(a)))$ el hm. restricción: $\mathrm{r}(f) = f|_{\sigma(\phi(a))}$.
Entonces, para ser precisos, $f(\phi(a))$ significa $\mathrm{r}(f)(\phi(a))$. Nótese que $\mathrm{r}(1) = 1$ (la segunda es la función 1 definida en $\sigma(\phi(a))$), y $\mathrm{r}(\iota_a) = \iota_{\phi(a)}$.

Ahora, los homomorfismos $\phi \circ \tau_a$ y $\tau_{\phi(a)} \circ \mathrm{r}$ satisfacen

$$\phi(\tau_a(1)) = \phi(1) = 1 = \tau_{\phi(a)}(\mathrm{r}(1)),$$

$$\phi(\tau_a(\iota_a)) = \phi(a) = \tau_{\phi(a)}(\iota_{\phi(a)}) = \tau_{\phi(a)}(\mathrm{r}(\iota_a)).$$

Luego es $\phi \circ \tau_a = \tau_{\phi(a)} \circ \mathrm{r}$, porque ambos son homomorfismos unitales definidos en $C(\sigma(a))$ que coinciden en el generador a.

Corolario (Teorema de la transformación espectral)

Si a es un elemento normal de $A \ni 1$ y $f \in C(\sigma(a))$. Entonces

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Demostración.

$$f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} = \{f(h(a)) : h \in \widehat{C^*(1,a)}\}$$

$$= \{h(f(a)) : h \in \widehat{C^*(1,a)}\} = \sigma(f(a)),$$

porque $f(a) \in C^*(1, a)$. $\square$

Observaciones

- *Como* $C^*(1,a)$ *es conmutativa,* $f(a)$ *siempre es normal.*
- $f(a)$ *es autoadjunto si y sólo si* f *es real:*
  $f(a)^* - f(a) = \tau_a(f)^* - \tau_a(f) = \tau_a(\bar{f} - f)$, *que es nulo sii* $f = \bar{f}$, *ya que* τ_a *es isométrica.*
- $f(a)$ *es unitario si y sólo si* $f(\sigma(a)) \subseteq S^1$*:*
  $f(a)\bar{f}(a) - 1 = \tau_a(f)\tau_a(f)^* - \tau_a(1) = \tau_a(f\bar{f} - 1) = 0$ *sii* $|f|^2 - 1 = 0$.

Proposición

Si $f \in C(\sigma(a))$ *y* $g \in C(\sigma(f(a)))$, *entonces* $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Demostración. Notar que $C(\sigma(f(a))) = C(f(\sigma(a)))$. Hay que ver que $\tau_{f(a)}(g) = \tau_a(g \circ f)$.
Sea $f_* : C(f(\sigma(a))) \to C(\sigma(a))$, dada por $f_*(g) = g \circ f$; entonces

$$\tau_a(g \circ f) = \tau_a \circ f_*(g).$$

Entonces basta ver que $\tau_a \circ f_*(1) = 1$ y que $\tau_a \circ f_*(\iota_{f(a)}) = f(a)$.

Tanto τ_a como f_* son unitales, así que $\tau_a \circ f_*$ también lo es. Por otro lado

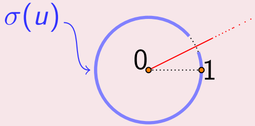
$$\tau_a \circ f_*(\iota_{f(a)}) = \tau_a(f_*(\iota_{f(a)})) = \tau_a(\iota_{f(a)} \circ f) = \tau_a(f) = f(a).$$

Teorema

Sea $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $\sigma(u) \neq S^1$. Entonces existe $a \in A_{sa}$ tal que $u = e^{ia}$.

Demostración.

Como $\sigma(u) \neq S^1$ existe un logaritmo continuo f sobre $\sigma(u)$, es decir $f : \sigma(u) \to \mathbb{C}$ continua tal que $e^f = \iota_u$. El elemento $a := -if(u)$, a es autoadjunto, porque $-if$ es real:



$$-if(z) = -i(\ln|z| + i\arg(z)) = \arg(z) \in \mathbb{R},$$

porque $\ln|z| = 0$. Entonces

$$e^{ia} = e^{i(-if(u))} = e^{f(u)} = \mathrm{inc}(u) = u.$$

□

Proposición

Sea $a \in A \ni 1$ autoadjunto y supóngase que $b \in A$ es tal que $ab = ba$. Entonces $f(a)b = bf(a)$ para todo $f \in C(\sigma(a))$.

Demostración.

Como $ab = ba$, entonces $bp(a) = p(a)b$ para todo $p \in \mathbb{C}[X]$. Como $\{p(a) : \ p \in \mathbb{C}[X]\}$ es denso en $C^*(1, a)$ y el cálculo funcional es continuo, se tiene $f(a)b = bf(a)$ para todo $f \in C^*(1, a)$. □

Corolario

Si a y b son autoadjuntos y conmutan, entonces $f(a)g(b) = g(b)f(a)$, para todo $f \in C(\sigma(a))$, $g \in C(\sigma(b))$.

Observación

Sean A una C^*-álgebra y $a \in A$ un elemento normal. La C^*-álgebra generada por a en A es la menor C^*-subálgebra de A que contiene a:

$$C^*(a) := \overline{\{p(a, a^*) : p \in x\mathbb{C}[x, y] + y\mathbb{C}[x, y]\}}.$$

Posiblemente $C^*(a)$ no tenga unidad. En ese caso es claro que $\widetilde{C^*(a)} \cong C^*(a, 1) \subseteq \tilde{A}$. Recuérdese que la restricción $\mathrm{r} : \widehat{C^*(a, 1)} \to \widehat{C^*(a)} \cup \{0\}$ es un homeomorfismo. Sea ϵ el elemento de $\widehat{C^*(a, 1)}$ tal que $\mathrm{r}(\epsilon) = 0$ (o sea: $\epsilon(a + \lambda) = \lambda$). Entonces

$$C^*(a) \overset{\mathcal{G}}{\cong} C_0(\widehat{C^*(a)}) \cong \{f \in C(\widehat{C^*(a, 1)}) : f(\epsilon) = 0\}.$$

Por otro lado, la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(a, 1)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo tal que $ev_a(\epsilon) = \epsilon(a) = 0$. Entonces $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, y por lo tanto

$$C^*(a) = \{f(a) : f \in C(\sigma(a)) \text{ y } f(0) = 0\}.$$

Definición

Sean A una C^*-álgebra y $a \in A$. Se dice que a es positivo ($a \in A_+$) si a es autoadjunto y $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

Teorema

Sea $a \in A$ un elemento positivo. Entonces existe un único $b \in A_+$ tal que $b^2 = a$.

Demostración. *Existencia*. Sea $f : \sigma(a) \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(t) = \sqrt{t}$. Como f es continua en $\sigma(a)$ y $f(0) = 0$, entonces $b := f(a) \in A$. Además b es autoadjunto porque f es real, y b es positivo porque

$$\sigma(b) = \sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) \subseteq [0, \infty).$$

Por otro lado $f^2 = \iota$, entonces

$$b^2 = f^2(a) = \iota(a) = a.$$

Unicidad. Si $c \in A_+$ cumple que $c^2 = a$, entonces $ca = cc^2 = c^2c = ac$, así que $cb = bc$. Sea $B = C^*(1, b, c) \subset \widetilde{A}$. Entonces B es conmutativa con unidad. Luego $B \cong C(X)$, donde $X = \widehat{C^*(1, b, c)}$. Entonces $\hat{c}\,(x)^2 = \hat{a}\,(x) = \hat{b}\,(x)^2$. Luego, como $\hat{b}$ y $\hat{c}$ son positivos, se tiene que $\hat{c} = \hat{b} = \sqrt{\hat{a}}$. Como $\mathcal{G}$ es un isomorfismo, se tiene $c = b$.

Observación

Si $a \in A_{sa}$: $\|a\| \leq 1$, entonces $\sigma(a) \subseteq [-1, 1]$, y $a^2 \geq 0$ y $1 - a^2 \geq 0$ pues

$\sigma(a^2) = \sigma(a)^2 \subseteq [0, 1] \subseteq [0, \infty)$ *y* $\sigma(1-a^2) = 1-\sigma(a)^2 \subseteq [0, 1] \subseteq [0, \infty)$.

Sean

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2} \quad y \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}$$

Entonces $a = \frac{1}{2}(u + v)$, y además u y v son unitarios:

$$u^* = v \quad y \quad uv = a^2 + 1 - a^2 = 1 = vu.$$

Conclusión: *Si A es una C^*-álgebra con unidad, entonces todo elemento se puede escribir como combinación lineal de cuatro elementos unitarios.*

Lema

Sean A una C^*-álgebra con unidad y $a \in A_{sa}$. Entonces

(1) *Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $\|a - t\| \leq t$, entonces $a \in A_+$.*

(2) *Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $t \geq \|a\|$ y $a \in A^+$, entonces $\|a - t\| \leq t$.*

Demostración.

Sustituyendo A por $C^*(1, a)$ se puede suponer que $A = C(X)$ (vía la transformada de Gelfand).

(1) $\|a - t\| \leq t$ si y sólo si $|a(x) - t| \leq t$ para todo $x \in X$. Entonces $t - a(x) \leq t$ para todo $x \in X$. Luego $a(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Entonces $a \in A_+$.

(2) $\|a - t\| \leq t$ si y sólo si $|a(x) - t| \leq t$ para todo $x \in X$. Como $\|a\| \leq t$ y $a \geq 0$ se tiene que $0 \leq a(x) \leq t$ para todo $x \in X$. Entonces $|a(x) - t| = t - a(x) \leq t$, para todo $x \in X$. Luego $\|a - t\| \leq t$.

$\square$

Lema

Si $a, b \in A_+$, entonces $a + b \in A_+$.

Demostración. Podemos suponer que $1 \in A$. Aplicando la parte (2) del lema previo:

$$\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\| \leq \|a - \|a\|\,\| + \|b - \|b\|\,\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Entonces $a + b \in A_+$ por la parte (1) del lema anterior.

Teorema

A_+ es un cono cerrado en A.

Demostración. Por el lema previo sabemos que $A_+ + A_+ \subseteq A_+$.
Si $\alpha \geq 0$, $a \in A_+$, entonces $\alpha a \in A_{sa}$ y $\sigma(\alpha a) = \alpha\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.
Por último, es $\overline{A}_+ = A_+$: si $(a_n) \subseteq A_+$ es tal que $a_n \to a \in A$, entonces

$$\|a - \|a\|\,\| = \lim_n \|a_n - \|a_n\|\,\| \leq \lim_n \|a_n\| = \|a\|.$$

Entonces $\|a - \|a\|\,\| \leq \|a\|$. Por el lema previo al previo es $a \in A_+$.

Definición

Sean $a, b \in A$. Se dice que $a \leq b$ (o $b \geq a$) si $b - a \in A_+$. Esta relación es un orden parcial en A. En general este orden se considera sólo sobre A_{sa}.

Proposición

Sea $a \in A_{sa}$. Entonces existen únicos $a_+, a_- \in A_+$ tales que $a = a_+ - a_-$ y $a_+ a_- = 0 = a_- a_+$ (notar que $aa_- = -a_-^2 = a_- a$, $aa_+ = a_+^2 = a_+ a$).

Demostración.

Se puede suponer que $1 \in A$. Vía la transformada de Gelfand aplicada a $C^*(1, a)$ podemos suponer que $A = C(X)$ (X Hausdorff y compacto). Definamos $a_+ := \max\{a, 0\} \in C(X)$ y $a_- := \max\{0, -a\} \in C(X)$. Entonces $a = a_+ - a_-$ y $a_+ a_- = 0 = a_- a_+$. Si $a = b_+ - b_-$ es otra tal descomposición, entonces b_+ y b_- conmutan con a, y por lo tanto con a_+ y a_-. Podemos suponer que son todas funciones definidas en cierto Y compacto y de Hausdorff. Se tiene $a_+^2 = a_+ a = a_+ b_+ - a_+ b_- \leq a_+ b_+$, de donde $a_+(y) \leq b_+(y)$ $\forall y \in Y$, es decir $a_+ \leq b_+$. De forma simétrica es $b_+ \leq a_+$, y por lo tanto $a_+ = b_+$, $a_- = b_-$. $\square$

Teorema

Si $a \in A$ entonces $a^*a \in A_+$.

Demostración. Sea $a = b + ic$, donde $b, c \in A_{sa}$. Entonces

$$a^*a = (b - ic)(b + ic) = b^2 + c^2 + i(bc - cb).$$
$$aa^* = (b + ic)(b - ic) = b^2 + c^2 - i(bc - cb).$$
$$a^*a + aa^* = 2(b^2 + c^2) \in A_+.$$

Supongamos que $-aa^* \in A_+$. Entonces $a^*a = 2(b^2 + c^2) + (-aa^*) \in A_+$, de modo que $\sigma(a^*a) \subseteq [0, \infty)$. Por otro lado $\sigma(-aa^*) \subseteq [0, \infty)$, porque $-aa^* \in A_+$. Entonces $\sigma(aa^*) \subseteq (-\infty, 0]$. Como $\sigma(aa^*) \cup \{0\} = \sigma(a^*a) \cup \{0\}$ debe ser $\sigma(aa^*) = \{0\}$. Entonces $0 = \sigma(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2$ ya que $aa^* \in A_{sa}$. Luego es $a = 0$, de donde $-aa^* \in A_+$ si y sólo si $a = 0$.

Sea $a^*a = d_+ - d_-$, con $d_+, d_- \in A_+$ y $d_+d_- = 0 = d_-d_+$. Notar que

$$-(ad_-)^*(ad_-) = -d_-a^*ad_- = -d_-(d_+ - d_-)d_- = d_-^3 \in A_+.$$

Por lo visto anteriormente se tiene $ad_- = 0$, de modo que

$$0 = a^*ad_- = (d_+ - d_-)d_- = -d_-^2.$$

Luego es $d_-^2 = 0$, y $d_- = 0$. Esto prueba que $a^*a = d_+ \in A_+$.

Teorema

Sea A una C^*-álgebra. Entonces

(a) $A_+ = \{a^*a : \ a \in A\}$.

(b) *Si* $a, b, c \in A$ *y* $a \leq b$. *Entonces* $c^*ac \leq c^*bc$.

(c) *Si* $0 \leq a \leq b$, *entonces* $\|a\| \leq \|b\|$.

(d) *Si* $1 \in A$ *y* $0 \leq a \leq b$ *con* $a \in \mathrm{Inv}(A)$, *entonces* $b \in \mathrm{Inv}(A)$ *y* $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Demostración.

(a) Ya lo vimos.

(b) Como $a \leq b$, existe $d \in A$ tal que $b - a = d^*d \in A_+$. Entonces $c^*bc - c^*ac = c^*(b-a)c = c^*d^*dc = (dc)^*dc \in A_+$.

(c) Podemos suponer que $1 \in A$. Entonces $\|b\| - b \in A_{sa}$ y $\sigma(\|b\| - b) = \|b\| - \sigma(b) \subseteq [0, \|b\|]$. Luego $\|b\| - b \in A_+$ y por lo tanto $b \leq \|b\|$. Entonces se tiene que $a \leq b \leq \|b\|$, de manera que $\sigma(a) \subseteq [0, \|b\|]$. Sigue de esto que $\|a\| = r(a) \leq \|b\|$, y por lo tanto $\|a\| \leq \|b\|$.

(d) Si $a \in \mathrm{Inv}(A) \cap A_+$, entonces $a^{-1} \in A_+$ porque es autoadjunto y $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$. Como $a \leq b$ se tiene

$$1 = a^{-\frac{1}{2}} a a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}.$$

Entonces $1 \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}$. Luego $a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}} \in \mathrm{Inv}(A)$, y $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Por otro lado, si $1 \leq c$, se tiene

$$c^{-1} = c^{-\frac{1}{2}} 1 c^{-\frac{1}{2}} \leq c^{-\frac{1}{2}} c c^{-\frac{1}{2}} = 1,$$

así que $c^{-1} \leq 1$. Entonces $(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}})^{-1} \leq 1$, es decir $a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Luego $a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} 1 a^{-\frac{1}{2}}$, y por lo tanto $b^{-1} \leq a^{-1}$.