Licenciatura en matemática
Universidad de la república
Montevideo, Uruguay

Trabajo monográfico

Modelos booleanos de la teoría de conjuntos

Francisco Carballal

Orientador:

Alexandre Miquel
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Resumen

El objetivo de esta monografía es presentar los modelos booleanos de la teoría de conjuntos y usarlos para probar la independencia de la hipótesis del continuo.

Para ello, primero recordamos las bases de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) y particularmente la noción de conjunto constructible (Gödel 1938), que permite demostrar la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis del continuo (con respecto a ZF).

Luego introducimos los modelos booleanos de ZF (Solovay, Vopěnka 1965, Scott 1967), que generalizan la noción usual de modelo de Tarski, permitiendo que las fórmulas de ZF estén interpretadas por valores de verdad más generales que « verdadero » o « falso », tomadas en un álgebra booleana completa cualquiera.

Luego de haber estudiado las propiedades de dichos modelos, introducimos la relación de forcing (Cohen 1963), y con ésta terminamos la prueba de independencia, probando la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo (con respecto a ZF).

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Esta monografía trata sobre la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel y su relación con posibles extensiones. Nos interesa responder preguntas como las siguientes: ¿Si la teoría de conjuntos de ZF es consistente, también lo es agregando el axioma de elección? En la teoría de conjuntos de ZF ¿se puede demostrar la hipótesis del contínuo o su negación?

En el resto de esta sección recordaremos lo necesario para entender los conceptos mencionados previamente y el resto del trabajo.

1.1. Teoría de conjuntos de ZF

La teoría de conjuntos es el primer marco unificador de la matemática presentado; en otras palabras, es una teoría dentro de la cual se puede formalizar la matemática. Lleva ese nombre porque todos los objetos son conjuntos. Unifica la matemática porque los objetos matemáticos (números, tuplas, funciones, etc) se pueden definir como conjuntos particulares y sus propiedades se pueden deducir de las que gobiernan a dichos conjuntos.

La primera presentación fue por Frege [1]. Posteriormente, Russell encontró una inconsistencia [2], por lo que se debió reformular. Esto fue comenzado por Zermelo [3] y completado independientemente por Fraenkel [4] y Skolem [5]. La teoría pasó a ser llamada de Zermelo Fraenkel, o ZF, abreviando.

Formalmente, la teoría de conjuntos tiene el siguiente lenguaje:

Definición 1.1.1 (fórmulas de la teoría de conjuntos)**.** *Las fórmulas de la teoría de conjuntos se definen recursivamente con las siguientes reglas:*

$$\begin{aligned} \phi, \psi \ := \ & x = y \mid x \in y && (1.1) \\ & \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi && (1.2) \\ & \mid \forall x\ \phi \mid \exists x\ \phi && (1.3) \end{aligned}$$

donde x e y son símbolos de variable.

A los dos casos de la línea (1.1) se les llama *fórmulas atómicas*. Respecto a los símbolos de variable solamente se asume que tenemos a disposición una cantidad numerable de ellos.

A los cuatro casos de la línea (1.2) se les llama *conectivas*. Repasamos el significado de los que menos se usan en matemáticas.

- $\neg\phi$ representa la negación de ϕ.
- $\phi \wedge \psi$ representa la conjunción de ϕ con ψ, es decir: « ϕ y ψ »
- $\phi \vee \psi$ representa la disyunción de ϕ con ψ, es decir: « ϕ o ψ »

A los dos casos de la línea (1.3) se les llama *cuantificadores*: $\forall x\ \phi$ es una cuantificación *universal* y $\exists x\ \phi$ es *existencial*.

Es necesario realizar algunas definiciones y observaciones respecto a las variables.

Def (Variables libres y sentencias)**.** *Dada una fórmula ϕ, sus variables libres son las que no están dentro del alcance de ningún cuantificador ($\forall$ o $\exists$). Las variables ligadas son las que no son libres. Denotaremos $FV(\phi)$ a la familia de las variables libres de ϕ. Si $FV(\phi)$ es vacío, diremos que ϕ es una fórmula cerrada o una sentencia.*

En algunos casos en que cierta fórmula ϕ pueda tener libre la variable x, la escribiremos $\phi(x)$. En este caso, $\phi(y)$ es la fórmula obtenida sustituyendo la variable x por la variable y en ϕ. Como es usual en matemáticas, no distinguiremos entre fórmulas que solo difieren en nombres de variables ligadas. Por ejemplo, si tomamos $\phi_1 \equiv \forall x\ x = x$ y $\phi_2 \equiv \forall y\ y = y$, consideraremos que ϕ_1 y ϕ_2 son la misma fórmula.

Pasamos a listar algunas abreviaturas sintácticas que utilizaremos frecuentemente.

- $\top \ \equiv\ \forall x\ x = x$ Es una fórmula trivialmente verdadera.
- $\bot \ \equiv\ \neg\top$ Es una fórmula trivialmente falsa; representa el absurdo.
- $\phi \Leftrightarrow \psi \ \equiv\ (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$ (Equivalencia lógica)
- $x \notin y \ \equiv\ \neg\ x \in y$
- $x \neq y \ \equiv\ \neg\ x = y$
- $x \subseteq y \ \equiv\ \forall z\ (z \in x \Rightarrow x \in y)$ (Inclusión de conjuntos)

- $\exists! x\ \phi(x) \ \equiv\ \exists x\ (\phi(x) \wedge \forall y\ (\phi(y) \Rightarrow x = y))$
- $\forall x \in y\ \phi(x) \ \equiv\ \forall x\ (x \in y \Rightarrow \phi(x))$ (Cuantificación universal acotada)
- $\exists x \in y\ \phi(x) \ \equiv\ \exists x\ (x \in y \wedge \phi(x))$ (Cuantificación existencial acotada)
- $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ \phi \ \equiv\ \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\ \phi$
  Ídem con cuantificaciones existenciales o acotadas.

Cabe destacar que el lenguaje oficial de la teoría de conjuntos es un lenguaje mínimo en que los únicos términos son las variables. Normalmente en matemática se trabaja con muchos más símbolos (y esta monografía no será la excepción), pero eso no es un problema porque las fórmulas resultantes siempre se pueden traducir al lenguaje presentado de forma equivalente, agregando nuevas variables. Veamos ejemplos con dos casos: el uso de $\varnothing$ para el conjunto vacío y el uso de $\mathcal{P}(x)$ para el conjunto potencia de x[1].

$$\begin{aligned} \exists x\ \varnothing \in x \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \exists y\ ((\forall z\ z \notin y) \wedge y \in x) \\ \forall x\ \mathcal{P}(x) \neq x \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \exists y\ (\forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x) \wedge y \neq x) \end{aligned}$$

En ambos casos se agregó una nueva variable, y, y una subfórmula en azul que implica que y cumple la definición del conjunto deseado. En el primer caso, la subfórmula azul afirma que y es el conjunto vacío, mientras que en el segundo afirma que es el conjunto potencia de x.

Detallar lo anterior en su totalidad supera el marco de la presente monografía; como referencia se recomienda [6].

Conjuntos y clases

En teoría de conjuntos, los elementos de los conjuntos necesariamente son (otros) conjuntos, sin embargo, existen «colecciones» de conjuntos que no constituyen conjuntos. Un ejemplo de esto proviene de la *paradoja de Russell* [2].

Definición 1.1.2 (clase). *En teoría de conjuntos diremos que una clase es una fórmula $C(x)$ abstraída con respecto a una de sus variables libres x. Diremos que un elemento a pertenece a la clase C y escribiremos $a \in C$ si se cumple $C(a)$.*

El concepto de clase recién introducido implica cierta ambigüedad en el uso del símbolo $\in$, pues puede tratar sobre pertenencia de un conjunto a

[1]El conjunto de todos los subconjuntos de x, es decir los y tales que $y \subseteq x$.

otro, o sobre pertenencia de un conjunto a una clase. Otra notación para la clase C es: $\{x \;/\; C(x)\}$.

Hay clases que conforman un conjunto y otras que no. La clase dada por $C_1(x) \equiv x \neq x$ es la clase vacía; ésta conforma el conjunto vacío $\varnothing$, cuya existencia sigue del esquema de comprensión, que presentaremos pronto. Por otra parte, dada la clase $C_2(x) \equiv x \notin x$, si asumimos que es un conjunto, llegamos a la paradoja de Russell. Intuitivamente, las clases que no son conjuntos son más grandes de lo que puede ser cualquier conjunto. Por el esquema de comprensión (que veremos pronto), si una clase es más chica que un conjunto, entonces es un conjunto.

Axiomas de la teoría de ZF

Los axiomas de la teoría de conjuntos de ZF son los siguientes:

$$\forall x, y \; (\forall z (z \in y \;\Leftrightarrow z \in x) \Rightarrow x = y) \tag{Ext}$$

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \psi(z)) \tag{Esq. Comp}$$

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \;\Leftrightarrow\; (\exists x \in u \; y \in x)) \tag{Uni}$$

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \Leftrightarrow \forall x \in y,\; x \in u) \tag{Pot}$$

$$\exists u (\varnothing \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u,\; x \in y) \tag{Inf}$$

$$\forall a \; (a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \in a \; (b \cap a = \varnothing)) \tag{Reg}$$

$$\forall u (\forall x \in u \exists! y \; \phi(x, y) \;\Rightarrow\; \exists v \forall x \in u \exists y \in v \; \phi(x, y)) \tag{Esq. Remp}$$

El axioma de *extensionalidad* afirma que si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, son el mismo conjunto. Intuitivamente, con la analogía de ver conjuntos como «paquetes» con cierto contenido, este axioma dice que el envase no importa, solamente interesa el contenido.

El *esquema de comprensión* [2] es en realidad una familia infinita de axiomas, parametrizada por la fórmula $\psi(z)$. Es decir, para cada fórmula de primer orden $\psi(z)$, tenemos un axioma de comprensión asociado, que nos permite, dado un conjunto x, quedarnos con el subconjunto que cumple ψ. La fórmula $\psi(z)$ no puede tener libre la variable y, sino se puede llegar nuevamente a la paradoja de Russell [3].

El axioma de *unión* nos permite construir uniones arbitrarias. Se suele

[2] La formulación más completa permite que la fórmula ψ tenga parámetros, es decir otras variables que son cuantificadas universalmente. De esta forma el esquema queda $\forall \vec{a} \forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \psi(\vec{a}, z))$, donde $\vec{a}$ son los parámetros. Esta aclaración vale para todos los esquemas de axiomas o teoremas que se presentarán.

[3] Con $x = \{\varnothing\}$ y $\psi(z) \equiv z \notin y$, instanciando $z = \varnothing$ llegamos a $\varnothing \in y \Leftrightarrow \varnothing \notin y$

utilizar la siguiente notación:

$$\bigcup A \;=\; \{x \;/\; \exists a \in A\ (x \in a)\}$$

Usamos notación de clase por comodidad; la unión es de hecho un conjunto.

El axioma de *potencia* nos habilita a tomar el conjunto de todos los subconjuntos. La notación es la siguiente:

$$\mathcal{P}(a) \;=\; \{x \;/\; x \subseteq a\}$$

Análogamente al axioma de unión, usamos notación de clase pero es un conjunto.

El axioma del *infinito* afirma la existencia de algún conjunto infinito. La formulación que utilizamos asume que $\in$ es una relación acíclica[4], lo cual proviene del axioma de regularidad. Si no lo tuviéramos (hay presentaciones de la teoría de conjuntos sin axioma de regularidad) habría que usar otra formulación, como la existencia de un conjunto *Dedekind-infinito*[5].

El axioma de *regularidad* implica que la pertenencia está bien fundada. Esto significa que no existe una sucesión infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \in x_n$. Esto en particular excluye conjuntos como un X tal que $X \in X$, o $X_1, \ldots X_n$ tales que $X_1 \in X_2, X_2 \in X_3, \ldots, X_n \in X_1$.

El *esquema de remplazo*, al igual que el de comprensión, es una familia infinita de axiomas parametrizada por una fórmula de primer orden $\phi(x, y)$. Cada axioma nos dice que si $\phi(x, y)$ es una relación funcional con dominio u ($\forall x \in u \exists! y\ \phi(x, y)$), entonces podemos tomar un conjunto v que sea su codominio. En otras palabras, la imagen de un conjunto por una relación funcional es también un conjunto. Análogamente al axioma de comprensión, se requiere que la variable v no esté libre en $\phi(x, y)$.

Los axiomas presentados hasta ahora conforman la teoría de conjuntos de ZF, la cual alcanza para formalizar la mayoría de la matemática. Sin embargo, en algunos casos se necesita extenderlo con el *axioma de elección*, que se presenta en la siguiente sección, con el cual tenemos la teoría de conjuntos de ZFC (C por el nombre en inglés: "choice").

Axioma de elección

El *axioma de elección* tiene muchos enunciados equivalentes. Uno de los más elementales es que cada conjunto A tiene una función de elección, es

[4] Si la pertenencia fuera cíclica, el conjunto $a = \{\varnothing, a\}$ cumpliría la propiedad sin ser infinito.

[5] Un conjunto X es Dedekind infinito si existe $f : X \to X$ inyectiva pero no sobreyectiva

decir: una función $f : (\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}) \to A$ tal que $\forall X \in (\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\})$, se cumple $f(X) \in X$. Como ya se mencionó, a la teoría de conjuntos de ZF con axioma de elección se le llama ZFC.

Otros enunciados equivalentes al axioma de elección, menos sencillos, son el teorema 1.1.3 y el lema 1.1.4. Para el enunciado del primero, recordamos lo siguiente: un *buen orden* es un orden en el que todo conjunto no vacío tiene mínimo.

Teorema 1.1.3 (de Zermelo)**.** *Todo conjunto admite un buen orden.*

Recordamos que dado un conjunto ordenado $(P, \leq)$, decimos que un subconjunto $A \subseteq P$ es una cadena si y solo si la restricción del orden $\leq$ a A es total $(\forall x, y \in A,\ x \leq y \vee y \leq x)$.

Lema 1.1.4 (de Zorn)**.** *Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado. Si toda cadena tiene cota superior, entonces hay en P al menos un elemento maximal.*

Observar que si se cumplen las hipótesis del lema de Zorn, el conjunto P es no vacío. Esto es porque la cadena vacía tiene supremo.

Ordinales, sucesiones transfinitas y cardinales

En esta sección se presentan definiciones y enunciados relacionados a los ordinales, los cuales tendrán un papel central en la monografía. Para los detalles, se recomienda [6].

Recordamos que un buen orden sobre un conjunto X es un orden tal que todo subconjunto no vacío de X tiene mínimo. Un ejemplo conocido es el orden usual de los números naturales, pero hay muchos más. Los ordinales son ciertos conjuntos bien ordenados, que se usan para representar a todos los otros, a menos de isomorfismo (ver teorema 1.1.7). Comenzaremos definiéndolos y luego listaremos ejemplos y propiedades.

Para definirlos, necesitamos la noción de conjunto *transitivo*. Diremos que x es transitivo si $\forall y \in x\ y \subseteq x$, o equivalentemente $\forall y \in x \forall z \in y\ z \in x$.

Definición 1.1.5 (ordinal)**.** *Un ordinal es un conjunto transitivo en que la relación de pertenencia $\in$ es un buen orden estricto* [6]*. Formalmente, la clase de los ordinales, escrita On, es dada por la fórmula:*

[6]Un *buen orden estricto* es un orden estricto (relación irreflexiba y transitiva) en la que todo conjunto no vacío tiene mínimo

$$
\begin{aligned}
On(x) \;:=\; & \forall y \in x \forall z \in y,\ z \in x \\
& \forall y \in x\ y \notin y \\
& \forall y, z, w \in x,\ y \in z \wedge z \in w \Rightarrow y \in w \\
& \forall X \subseteq x,\ X \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \in X \forall z \in X\ (y \in z \vee y = z)
\end{aligned}
$$

Al trabajar con ordinales, la relación de pertenencia tiene dos sentidos semánticos. En la fórmula On usamos colores para diferenciarlos. Está en negro cuando la usamos del mismo modo que con cualquier otro conjunto y en azul cuando la usamos como buen orden estricto.

Listaremos algunas propiedades de los ordinales (para las pruebas se recomienda [6]):

- $\varnothing$ es un ordinal.
- Definiendo inductivamente $0 = \varnothing$ y $n + 1 = n \cup \{n\}$, estamos representando cada natural intuitivo n con un ordinal. Como ejemplos, $1 = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$. En general tenemos $n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Estos son los ordinales que representan los buenos órdenes finitos.
- Definiendo ω como el conjunto de todos los n definidos en el ítem anterior, tenemos que ω es un ordinal. Diremos que ω es el conjunto de los *números naturales*.
- Si $x \in \mathrm{On}$ y $y \in x$, entonces $y \in \mathrm{On}$.
- Los ordinales son una clase propia, es decir, no existe el conjunto de todos los ordinales.
- Para cualquer $x, y \in \mathrm{On}$ tenemos $x \in y \vee x = y \vee y \in x$ (tricotomía).

En base al último ítem anterior, tenemos la siguiente relación de orden total entre los ordinales.

Definición 1.1.6. *Dados $x, y \in On$, definimos el orden estricto:*

$$x < y \;:=\; x \in y$$

Como los ordinales son transitivos, su orden no estricto asociado es:

$$x \leq y \;:=\; x \subseteq y$$

- El orden $\leq$ definido sobre los ordinales, además de total es un buen orden. Es decir cualquier conjunto o clase de ordinales tiene mínimo respecto a $\leq$.
- Para cada ordinal α, tenemos que $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ es otro ordinal, llamado el sucesor de α. Decimos que es el sucesor porque se cumple que $\forall x \in \mathrm{On}\ (x \leq \alpha \Leftrightarrow x < s(\alpha))$. Esto es equivalente a que $s(\alpha)$ es el mínimo de los ordinales mayores a α.
- Para cualquier conjunto A de ordinales, tenemos que $\bigcup A$ es un ordinal. Este es el supremo de A en el sentido de $\leq$.
- Para cada ordinal α, si existe otro ordinal x tal que $\alpha = s(x)$, diremos que α es un *sucesor*. Si α no es sucesor ni vacío, diremos que es *límite*. El primer ordinal límite (el menor respecto a $<$) es ω.

El siguiente teorema (1.1.7) nos dice que cualquier conjunto bien ordenado es representado por un único ordinal. Es una de las principales propiedades por las que usamos los ordinales.

Teorema 1.1.7. *Cada conjunto bien ordenado $(X, \leq_X)$ es isomorfo a un único ordinal α con isomorfismo (es decir $f : X \to \alpha$ biyectiva tal que $\forall x, y \in X,\ x \leq_X y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$) único.*

Para hacer demostraciones sobre los ordinales disponemos de la *inducción transfinita*. Esta proviene de que $<$ es un buen orden estricto.

Teorema 1.1.8 (inducción transfinita)**.** *Para cada fórmula $\phi(x)$ tenemos:*

$$\forall \alpha \in On\ ((\forall \beta < \alpha\ \phi(\beta)) \Rightarrow \phi(\alpha)) \Rightarrow \forall \alpha \in On\ \phi(\alpha)$$

En palabras, el teorema 1.1.8 dice que **si** asumiendo que ϕ se cumple para cada $\beta < \alpha$ podemos probar que también se cumple para α, **entonces** tenemos que ϕ se cumple para todo ordinal. Comúnmente la demostración se separa en 3 casos:

1. Caso base: $\alpha = 0$
2. Caso sucesor: existe α' tal que $\alpha = s(\alpha')$
3. Caso límite: en este caso, para cada $\beta < \alpha$ tenemos que $s(\beta) < \alpha$, lo cual suele ser de utilidad.

Gracias a la inducción transfinita, podemos definir *sucesiones transfinitas*, escritas $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$. Como On es una clase propia (no un conjunto), las sucesiones transfinitas no serán conjuntos, sino clases funcionales. Con esto, queremos decir que cada sucesión transfinita está dada por una fórmula $\phi_A(B,\alpha)$ tal que:

$$\phi_A(B,\alpha) \;\equiv\; B = A_\alpha$$

donde se demuestra que $\forall\alpha\in\mathrm{On}\exists!B\ \phi_A(B,\alpha)$. Lo usual es definir la fórmula $\phi_A(B,\alpha)$ de forma implícita dando reglas recursivas; esto es, dar una fórmula para calcular A_α tomando como dados todos los A_β con $\beta<\alpha$. Un ejemplo común, que usaremos en este trabajo, es la *jerarquía acumulativa*, definida de la siguiente forma:

$$V_\alpha \;:=\; \bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{P}(V_\beta)$$

o, equivalentemente:

$$V_\alpha = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \alpha = 0 \\ \mathcal{P}(V_\beta) & \text{si } \alpha = s(\beta) \\ \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

Utilizando lo anterior, se define la clase $V(x)\equiv\exists\alpha\in\mathrm{On}\ x\in V_\alpha$. Gracias al axioma de regularidad y al esquema de remplazo, podemos probar que $\forall x\ x\in V$. De este modo, la sucesión transfinita $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ estratifica el universo de los conjuntos, como se representa en la figura 1.1.

Para finalizar esta sección, nos encaminamos a definir la noción de *cardinal*. Decimos que dos conjuntos son *equipotentes* si existe una función biyectiva entre ellos, es decir, si sus elementos están correlacionados uno a uno. Intuitivamente, dos conjuntos equipotentes tienen el mismo tamaño.

De mismo modo que los ordinales representan los buenos órdenes a menos de isomorfismo (teorema 1.1.7), se definen los cardinales como representantes de los conjuntos a menos de equipotencia. Observar antes que los ordinales no pueden cumplir esa función, porque hay ordinales distintos que son equipotentes. Un ejemplo son ω y $s(\omega)$, pues ω es infinito numerable y $s(\omega)$ solamente agrega un elemento.

Como acabamos de ver, pueden haber varios ordinales equipotentes a cierto conjunto. No obstante, también podemos afirmar que cada conjunto tiene ordinales equipotentes, gracias a los teoremas 1.1.3 y 1.1.7. Por ende, si buscamos representantes entre los ordinales no tenemos problemas de existencia, pero sí de *unicidad*. Sin embargo, esto se puede solucionar por el hecho de

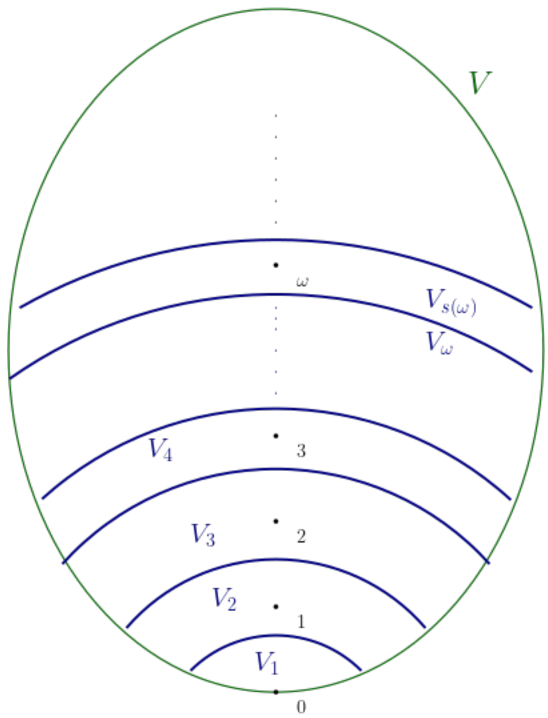

Figura 1.1: Ilustración de la jerarquía acumulativa.

que los ordinales están *bien ordenados*, lo cual siempre nos permite tomar mínimo. La intuición es que vamos a asociar a cada conjunto el mínimo ordinal equipotente a dicho conjunto[7]. Esto justifica la siguiente definición formal.

Definición 1.1.9 (cardinal)**.** *Diremos que κ es un cardinal, o $\kappa \in Cn$, si es un ordinal que no es equipotente con ningún ordinal anterior. Formalmente:*

$$\kappa \in Cn \quad \equiv \quad \kappa \in On \wedge \forall \alpha < \kappa (\neg \exists f : \alpha \to \kappa \text{ biyectiva})$$

Primero que nada, algunas observaciones: al igual que los ordinales, los cardinales son una clase propia. Todos los $n \in \omega$ son cardinales. Además, ω también es cardinal, el primer cardinal infinito, que como tal se escribe $\aleph_0$. Por otra parte, $s(\omega)$ es el primer ordinal que no es cardinal, pues es equipotente con ω, como ya se mencionó.

Análogamente a lo que se mencionó antes, gracias al teorema de Zermelo 1.1.3 y al teorema 1.1.7, tenemos que cada conjunto es equipotente a un cardinal, que por definición debe ser único (dos cardinales equipotentes son necesariamente el mismo). De esto proviene la siguiente definición:

[7]Si dado un conjunto x tomamos el mínimo de $\{\beta \in \mathrm{On} \ / \ \beta \text{ es equipotente con } x\ \}$, este es un cardinal, según la definición 1.1.9.

Definición 1.1.10 (cardinal de un conjunto)**.** *Dado un conjunto x, denotaremos $|x|$ al único cardinal equipotente con x.*

Los últimos comentarios respecto a cardinales están en la siguiente sección, que trata de la *hipótesis del continuo.*

Hipótesis del continuo

Se puede demostrar en ZF, con un argumento diagonal de Cantor, que el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (que es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) es *estríctamente mayor* al de los naturales. En la práctica, los subconjuntos infinitos de $\mathbb{R}$ que sabemos construir son o bien numerables (como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o el conjunto $\mathbb{A}$ de los números algebraicos), o bien son equipotentes a $\mathbb{R}$ (como $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ - $\mathbb{A}$, etc). Surge naturalmente la siguiente pregunta:

¿Existirá algún cardinal intermedio, entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$?

La *hipótesis del continuo*, debida a Cantor, afirma que la respuesta a dicha pregunta es *no*. Este fue considerado un problema central de la matemática; en particular, fue el primero de los *Problemas de Hilbert* [7].

Utilizando la maquinaria desarrollada en la sección anterior, vamos a darle otra formulación, que utilizaremos en el resto de la monografía. En ZF se puede demostrar la existencia de la sucesión transfinita de los cardinales infinitos. Esta se define como

$$\aleph_\alpha := \min\{\kappa \in \mathrm{Cn} \;/\; \kappa \geq \omega \wedge \forall \beta < \alpha,\ \kappa \neq \aleph_\beta\}.$$

En particular, $\aleph_0 = \omega$. La *hipótesis del continuo* se puede reformular afirmando $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, o equivalentemente, $|\mathcal{P}(\aleph_0)| = \aleph_1$, pues $\aleph_0 = \omega$ y $\mathbb{R}$ está en biyección con $\mathcal{P}(\omega)$.

Por otra parte, la *hipótesis generalizada del continuo* (que, como su nombre sugiere, tiene a la anterior como caso particular), afirma:

$$\text{(HGC)} \quad \forall \alpha \in \mathrm{On},\ |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$$

Esta fue probada independiente, parcialmente por Gödel en 1938 [8] y completada por Cohen en 1963 y 1964 [9] [10], lo cual le valió la medalla Fields en 1966.

1.2. Conceptos de lógica

En las secciones anteriores realizamos un repaso de ZF. Ahora nos enfocaremos en ciertos conceptos lógicos, los cuales serán igualmente importantes para entender el trabajo y nos permitirán precisar sus objetivos, terminando la introducción.

Deducción natural

En las secciones anteriores de la introducción se ha hablado intuitivamente de fórmulas que se pueden demostrar en ZF, pensando en el razonamiento deductivo que solemos usar en matemática. Esto se puede formalizar con varios sistemas formales; en esta monografía usaremos la deducción natural, la cual recordaremos en esta sección de la introducción. Comenzamos definiendo los *secuentes*.

Definición 1.2.1 (secuentes). *Un secuente es un par escrito* $\Gamma \vdash \phi$*, donde* Γ *es un conjunto de fórmulas, llamado contexto, y* ϕ *es una fórmula (que puede o no estar en* Γ*).*

La interpretación de $\Gamma \vdash \phi$ es « de Γ se deduce ϕ ». Diremos que un secuente $\Gamma \vdash \phi$ se cumple si se lo puede inferir con las reglas de la deducción natural, que son las siguientes:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \phi}\ \phi \in \Gamma \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash x = x} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash x = y \qquad \Gamma \vdash \phi(x)}{\Gamma \vdash \phi(y)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \qquad \Gamma, \phi \vdash \xi \qquad \Gamma, \psi \vdash \xi}{\Gamma \vdash \xi}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \qquad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi(x)}{\Gamma \vdash \forall x\ \phi(x)}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \phi(x)}{\Gamma \vdash \phi(t)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ \phi(x)} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \phi(x) \qquad \Gamma, \phi(x) \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \psi)$$

En las reglas, ϕ, ψ y ξ pueden ser cualquier fórmula, mientra que x e y pueden ser cualquier variable. Algunas reglas tienen una condición a la derecha de la raya, como la primera, que solamente puede usarse si $\phi \in \Gamma$. En la primera fila tenemos la regla *axioma* y la *reducción al absurdo*. Por debajo, en la columna de la izquierda están las reglas de *introducción* y en la de la derecha, las de *eliminación*. Esta denominación es porque las primeras se usan para demostrar una conectiva o cuantificador, mientras que con las segundas se usa una conectiva o cuantificador que ya se demostró para probar otra cosa.

Las reglas presentadas anteriormente representan pasos puntuales de razonamiento deductivo. Para representar razonamientos completos, como puede ser la prueba de un teorema, se utilizan las *derivaciones*:

Definición 1.2.2 (derivación)**.** *Llamaremos* derivación *de* $\Gamma \vdash \phi$ *a todo árbol (finito) de secuentes cuya raíz es* $\Gamma \vdash \phi$ *y cuyos nodos son reglas de la deducción natural.*

Lo siguiente es una derivación de $\vdash (\forall x\ \phi(x)) \Rightarrow (\exists x\ \phi(x))$, secuente en el que $\Gamma = \varnothing$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x\ \phi(x) \vdash \forall x \phi(x)}}{\forall x\ \phi(x) \vdash \phi(x)}}{\forall x\ \phi(x) \vdash \exists x\ \phi(x)}}{\vdash (\forall x\ \phi(x)) \Rightarrow (\exists x\ \phi(x))}$$

Comúnmente vamos a escribir $\Gamma \vdash \phi$ refiriéndonos a que existe una derivación de dicho secuente.

Lo que acabamos de presentar es la deducción natural *clásica*, caracterizada por la presencia de la reducción al absurdo. Si quitáramos dicha regla tendríamos la deducción natural *intuicionista*, en la que menos secuentes son derivables. En esta monografía trabajaremos siempre en un marco clásico.

Culminamos esta sección con la siguiente definición, que aporta notaciones útiles.

Definición 1.2.3 (teoremas de lógica clásica y de ZF). *Diremos que una fórmula ϕ es un teorema de la lógica clásica o de la deducción natural, si se cumple (tiene una derivación) el secuente $\vdash \phi$, con contexto vacío. Lo denotaremos NK $\vdash \phi$.*

Diremos que una fórmula ϕ es un teorema de ZF(C) si existen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ axiomas de ZF(C) tal que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$. Lo denotaremos ZF(C) $\vdash \phi$.

Jerarquía de Lévy

La jerarquía de Lévy organiza las fórmulas de la teoría de conjuntos en clases de complejidad (utilizando la palabra "clase" de forma intuitiva). Comenzamos definiendo la clase más elemental.

Definición 1.2.4 (Fórmulas restringidas). *Decimos que una fórmula ϕ es restringida si todas sus cuantificaciones son acotadas. En otras palabras, las fórmulas restringidas están dadas por la siguiente definición recursiva:*

$$\begin{aligned} \phi, \psi \ := \ & x = y \mid x \in y \\ & \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi \\ & \mid \forall x \in y\ \phi \mid \exists x \in y\ \phi \end{aligned}$$

Las fórmulas restringidas son las más sencillas porque no dependen de todo el universo conjuntista, sino solamente de los conjuntos (y de sus elementos) mencionados por las variables libres de dichas fórmulas. En el resto de la jerarquía hay cuantificaciones no acotadas, que sí dependen de todo el universo conjuntista. El nivel de complejidad está dado por la cantidad de cuantificaciones no acotadas *alternadas*, como se ve en la siguiente definición.

Definición 1.2.5 (Jerarquía de Lévy). *Se definen las siguientes clases de fórmulas de modo recursivo. Las definiciones son a menos de equivalencia lógica.*

- $\Sigma_0 = \Pi_0$ *es la familia de las fórmulas equivalentes a alguna fórmula restringida.*
- $\phi \in \Sigma_{n+1}$ *si y solo si* $\phi = \exists x_1, \ldots, x_k\ \psi$ *donde* ψ *es* Π_n
- $\phi \in \Pi_{n+1}$ *si y solo si* $\phi = \forall x_1, \ldots, x_k\ \psi$ *donde* ψ *es* Σ_n

De este modo, por ejemplo $\exists u(\varnothing \in u \land \forall x \in u \exists y \in u,\ x \in y)$, el axioma del infinito[8], es Σ_1. Por otra parte, $\forall u \exists v \forall y(y \in v \Leftrightarrow \forall x \in y,\ x \in u)$, el axioma de potencia, es Π_3.

Observar que la jerarquía depende de una noción de fórmulas *lógicamente equivalentes*. Dicha equivalencia puede definirse de distintas formas, dando lugar a jerarquías distintas. En los ejemplos anteriores utilizamos *equivalencia en deducción natural*, es decir:

$$\phi \sim \psi \ \text{ si y solo si } \ \mathrm{NK} \vdash \phi \Leftrightarrow \psi$$

También se puede considerar la jerarquía de Lévy bajo *equivalencia en ZF(C)*, o sea:

$$\phi \sim \psi \ \text{ si y solo si } \ \mathrm{ZF(C)} \vdash \phi \Leftrightarrow \psi$$

En el cuerpo del trabajo, cada vez que se mencione la jerarquía se especificará la equivalencia que se está utilizando.

Consistencia relativa e independencia

En esta última sección de la introducción, definiremos los conceptos necesarios para hablar de extensiones de la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel, con lo cual podremos precisar exactamente los objetivos de la monografía.

Recordamos, brevemente, lo que son las teorías en general, de las cuales ya presentemos un caso particular: la teoría de conjuntos de ZF.

Definición 1.2.6 (teoría axiomática). *Una teoría $\mathcal{T}$ viene dada por un conjunto de fórmulas, $Ax(\mathcal{T})$, que llamaremos* axiomas. *Diremos que ϕ es un teorema de $\mathcal{T}$ (notación: $\mathcal{T} \vdash \phi$), si existen $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Ax(\mathcal{T})$ tales que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$.*

Diremos que $\mathcal{T}$ es consistente si $\mathcal{T} \nvdash \bot$

[8] Al traducir la fórmula al lenguaje mínimo se agrega otra variable cuantificada existencialmente, lo cual no cambia la clase de complejidad.

Cuando mencionamos que estudiaríamos la *relación* de la teoría de conjuntos de ZF con posibles extensiones, estábamos apuntando a los siguientes conceptos:

Definición 1.2.7 (consistencia relativa e independencia)**.** *Diremos que una fórmula ϕ es consistente relativamente a una teoría $\mathcal{T}$ si la consistencia de $\mathcal{T}$ implica la de $\mathcal{T} + \phi$, donde $\mathcal{T} + \phi$ es la teoría que proviene de agregar ϕ a los axiomas de $\mathcal{T}$.*

Diremos que ϕ es independiente de $\mathcal{T}$ si tanto ϕ como $\neg\phi$ son consistentes relativamente a $\mathcal{T}$.

En el siguiente capítulo, veremos que AC y HGC son consistentes relativamente a ZF usando el método de los constructibles, introducido por Gödel en 1938 [8]. En los dos restantes, probaremos que ¬HGC es consistente relativamente a ZF, utilizando los *modelos booleanos*: una presentación equivalente al forcing de Cohen [9][10], desarrollada por Scott [11], Solovay [12] y Vopěnka [13].

En suma, demostraremos la independencia de HGC y la consistencia relativa del axioma de elección respecto a ZF. Completar la prueba de independencia del axioma de elección excede el alcance de esta monografía; para esto recomendamos [14].

Capítulo 2

Constructibles de Gödel

Un aspecto paradójico de la actividad matemática, especialmente en teoría de conjuntos, es que se habla sobre objetos de cardinal arbitrariamente grande usando solamente sentencias finitas; intuitivamente, hay más objetos que los que podemos referenciar con el lenguaje. El concepto de los *conjuntos constructibles* (Gödel 1938 [8]) proviene de esta paradoja: la motivación es restringir el universo a los conjuntos que se pueden construir con el lenguaje.

Utilizando los conjuntos constructibles, podremos probar la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo respecto a ZF. Como el objetivo central de la monografía son los modelos booleanos, en esta sección varios resultados están sin demostrar o con poco detalle; para profundizar se recomienda [6].

2.1. Formalización del lenguaje de ZF dentro de ZF

Recordamos el lenguaje de ZF, dado por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \phi, \psi \ := \ & x = y \mid x \in y \\ & \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi \\ & \mid \forall x\ \phi \mid \exists x\ \phi \end{aligned}$$

Para esta sección vamos a simplificarlo, usando que en base a la negación, la disyunción y la cuantificación existencial, se pueden definir todas las otras construcciones de la lógica.

$$\phi, \psi \ := \ x = y \mid x \in y \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \exists x\ \phi$$

Las fórmulas de ZF, que acabamos de recordar, son externas a la teoría (pertenecen a la *meta-teoría*). Para obtener los conjuntos constructibles, lo primero que necesitaremos es formalizar las fórmulas *dentro* de ZF, es decir, construir un conjunto conformado por representaciones de las fórmulas. Que eso sea posible es poco sorprendente, ya que la complejidad del lenguaje es mucho menor a la de los objetos matemáticos que se definen en dicha teoría (de hecho, con una teoría capaz de representar los números naturales alcanzaría). Puede haber muchas representaciones distintas del lenguaje y es indiferente cuál se use; realizaremos una con el fin de entender cómo se hace.

Para representar las variables usaremos los enteros naturales y escribiremos $Var := \omega$. Cuando usemos enteros naturales con esa semántica les llamaremos "códigos de variables" o "variables internas" y utilizaremos las letras i, j y k.

Para representar las fórmulas usaremos la siguiente codificación recursiva. Los primeros dos ítems son casos bases, mientras que los otros 3 son recursivos.

- $(0,(i,j))$ representa $x_i = x_j$, donde x_i y x_j son las variables externas asociadas a las variables internas i y j.
- $(1,(i,j))$ representa $x_i \in x_j$.
- $(2,f)$ representa $\neg\phi$, suponiendo que f representa ϕ.
- $(3,(f_1,f_2))$ representa $\phi \vee \psi$, suponiendo que f_1 representa ϕ y f_2 representa ψ.
- $(4,(i,f))$ representa $\exists x_i,\ \phi$, suponiendo que f representa ϕ y x_i es la variable representada por i.

Por ejemplo, la fórmula $\exists x,\ x{=}x$ se representaría $(4,(0,(0,(0,0))))$, suponiendo que el código de la variable x es 0.

Vamos a definir el conjunto de las representaciones de fórmulas (o fórmulas internas) – *Form*. Lo haremos intersectando conjuntos definidos mediante comprensión, por lo que necesitaremos un conjunto más grande en el que todas las fórmulas internas estén contenidas. Para eso vamos a utilizar V_ω, que es el conjunto de todos los conjuntos *hereditariamente finitos*, es decir conjuntos finitos de conjuntos hereditariamente finitos (un conjunto hereditariamente finito tiene finitos elementos, sus elementos tienen finitos elementos, los elementos de sus elementos tienen finitos elementos, etc).

Definición 2.1.1 (*Form*)**.** *Definimos el conjunto Form, de las representaciones de fórmulas o fórmulas internas, como:*

$$Form = \bigcap \{X \in V_\omega \ / \ \Phi(X)\}$$

donde la fórmula $\Phi(X)$ significa que el conjunto X contiene las representaciones de igualdades y pertenencias y que es cerrado por la representación de negación, la de disyunción y la de cuantificación existencial. Formalmente:

$$\begin{aligned}\Phi(X) \;:=\; & \forall i, j \in \mathrm{Var}, (0,(i,j)) \in X \\ & \forall i, j \in \mathrm{Var}, (1,(i,j)) \in X \\ & \forall f \in X,\ (2, f) \in X \\ & \forall f_1, f_2 \in X,\ (3,(f_1, f_2)) \in X \\ & \forall i \in \mathrm{Var}\ \forall f \in X,\ (4,(i, f)) \in X\end{aligned}$$

Podemos definir una función FV : *Form* $\to \mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(\mathit{Var})$ que asocia a cada fórmula interna el conjunto finito de sus variables internas libres. En base a eso, para cada entero natural n, definimos el conjunto Form_n de las fórmulas con variables libres incluidas entre las primeras n, o sea $\{0, 1, \ldots, n-1\}$; en particular, Form_0 es el conjunto de las fórmulas cerradas.

Ya construimos una representación interna de la sintaxis del lenguaje. Para representar la semántica, nos enfocamos ahora en cómo asignar a las fórmulas valores de verdad. Para esto fijamos un conjunto X a ser tomado como universo de discurso. Llamaremos *valuación* en X a cualquier $\rho \in X^{\mathit{Var}}$, es decir, cualquier función que a cada variable le asigna un elemento de X. Definiremos recursivamente la función $\mathrm{Val}_X : \mathit{Form} \to \mathcal{P}(X^{\mathit{Var}})$, de modo que $\mathrm{Val}_X(f)$ sea el conjunto de las valuaciones que hacen verdadera a f en X.

Para esclarecer la notación hacemos las siguientes identificaciones dentro de *Form*:

$$\begin{aligned} i = j \;&:=\; (0,(i,j)) & \qquad i \in j \;&:=\; (1,(i,j)) \\ \neg f \;&:=\; (2, f) & f_1 \vee f_2 \;&:=\; (3,(f_1, f_2)) \\ \exists i,\ f \;&:=\; (4,(i, f)) \end{aligned}$$

La definición recursiva de Val_X es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}_X(i = j) \;&:=\; \{\rho \in X^{\mathit{Var}} \ /\ \rho(i) = \rho(j)\} \\ \mathrm{Val}_X(i \in j) \;&:=\; \{\rho \in X^{\mathit{Var}} \ /\ \rho(i) \in \rho(j)\} \\ \mathrm{Val}_X(\neg f) \;&:=\; \mathrm{Val}_X(f)^C \\ \mathrm{Val}_X(f_1 \vee f_2) \;&:=\; \mathrm{Val}_X(f_1) \cup \mathrm{Val}_X(f_2) \\ \mathrm{Val}_X(\exists i, f) \;&:=\; \{\rho \in X^{\mathit{Var}} \ /\ \exists x \in X,\ (\rho, i \leftarrow x) \in \mathrm{Val}_X(f)\}\end{aligned}$$

donde

$$(\rho, i \leftarrow x)(j) = \begin{cases} x & \text{si i=j} \\ \rho(j) & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente, definiremos una noción de fórmula interna verdadera en un conjunto.

Definición 2.1.2. *Dada una fórmula interna* $f(i_1,\ldots,i_n) \in \mathrm{Form}$ *con variables internas libres* $i_1,\ldots,i_n$ *y dados* $x_1,\ldots,x_n \in X$*, definimos:*

$$X \models f(x_1,\ldots,x_n) \;:=\; (\exists \rho \in \mathit{Val}_X(f))(\rho(i_1) = x_1 \wedge \cdots \wedge \rho(i_n) = x_n)$$

Esta definición culmina la formalización del lenguaje de ZF dentro de dicha teoría. La corrección viene del siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *Dada cualquier fórmula* $\phi(x_1,\ldots,x_n)$*, cuyas variables libres son* $x_1,\ldots,x_n$ *y su representación interna es* $f \in \mathrm{Form}$*:*

$$ZF \vdash (\forall X)(\forall x_1,\ldots,x_n \in X)((X \models f(x_1,\ldots,x_n)) \Leftrightarrow \phi^X(x_1,\ldots,x_n))$$

siendo ϕ^X *la fórmula que se obtiene a partir de* ϕ *relativizando las cuantificaciones a* X [1]*.*

Lo anterior es precisamente un teorema de la metateoría; se trata de un esquema de teoremas de ZF, parametrizados por la fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$. Se prueba que para cada $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ existe una derivación del secuente correspondiente.

2.2. Subconjuntos definibles

Definición 2.2.1 (subconjuntos definibles)**.** *Dado un conjunto* X*, decimos que un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es definible cuando:*

$$\begin{gathered}(\exists n \in \omega)(\exists f \in \mathrm{Form}_{n+1})(\exists (x_1,\ldots,x_n) \in X^n)\\ (\forall x \in X)(x \in Y \;\Leftrightarrow\; X \models f(x,x_1,\ldots,x_n))\end{gathered}$$

Intuitivamente, significa que Y se puede construir aplicando el esquema de comprensión en X, con la fórmula representada por f y usando los parámetros $x_1,\ldots,x_n$.

En lo que sigue, escribiremos $\mathrm{Def}(X)$ para el conjunto de todos los subconjuntos definibles de X:

$$\mathrm{Def}(X) \;:=\; \{Y \in \mathcal{P}(X) \;/\; Y \text{ subconjunto definible de } X\}$$

Por construcción, $\mathrm{Def}(X)$ es un subconjunto del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$. Las siguientes son algunas propiedades:

[1] Se sustituye $\forall x\ \psi(x)$ por $\forall x \in X\ \psi(x)$ y $\exists x\ \psi(x)$ por $\exists x \in X\ \psi(x)$.

- $\mathrm{Def}(X)$ es subálgebra booleana de $\mathcal{P}(x)$ (cerrado por intersecciones, uniones y complementos).
- $\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(X) \cup \mathcal{P}^{\mathrm{cof}}(X) \subseteq \mathrm{Def}(X)$[2]
- $\mathrm{Def}(X) = \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow X$ es finito
- (Usando el axioma de elección) X es infinito $\Rightarrow |\mathrm{Def}(X)| = |X|$
- (Sin usar el axioma de elección) Si X es bien ordenable, entonces $\mathrm{Def}(X)$ también lo es.
- $X \subseteq Y \wedge X \in Y \Rightarrow \mathrm{Def}(X) \subseteq \mathrm{Def}(Y)$

  (la condición de pertenencia es necesaria para que la operación sea monótona)

2.3. Conjuntos constructibles

De modo análogo a la jerarquía acumulativa, $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$, se define la *jerarquía de los conjuntos constructibles* $(L_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ por:

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}(L_\beta)$$

En esencia, es la jerarquía acumulativa tomando *solamente* los subconjuntos definibles en cada paso.

Definición 2.3.1 (conjuntos constructibles)**.** *Definimos la clase de los conjuntos constructibles como la siguiente fórmula $L(x)$.*

$$x \in L \ (\equiv L(x)\ ) \ := \ (\exists \alpha \in On)(x \in L_\alpha)$$

Definición 2.3.2 (axioma de constructibilidad)**.** *Definimos el* axioma de constructibilidad*, el cual escribiremos $V = L$, como:* $\forall x,\ x \in L$

Ya terminamos de introducir los conceptos necesarios de este capítulo. Ahora mencionaremos cómo se usa el axioma de constructibilidad para demostrar la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo respecto a ZF.

La forma de utilizar el axioma de constructibilidad es mediante la *relativización* de ZF a L. En el anexo A se recuerda lo que es la relativización de una teoría de conjuntos a una clase y se presentan los resultados principales. Recordamos que la teoría resultante de relativizar ZF a L se denota ZF^L.

[2] $\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(X)$ está formado por los subconjuntos finitos de X, mientras que $\mathcal{P}^{\mathrm{cof}}(X)$ está formado por los cofinitos, o de complemento finito.

Teorema 2.3.3. *En la teoría ZF^L se cumplen todos los axiomas de ZF y además el axioma de constructibilidad, es decir: para cada axioma ϕ de ZF, tenemos $ZF^L \vdash \phi$ y además, $ZF^L \vdash (V = L)$.*

Gracias al teorema anterior y a la equiconsistencia [3] de ZF con ZF^L (que proviene del corolario A.0.5), concluimos que ZF y ZF $+$ $(V = L)$ son equiconsistentes.

Finalmente, veamos cómo lo anterior permite probar las consistencias relativas buscadas. Lo central son los dos siguientes teoremas, cuyas demostraciones exceden el alcance de la presente monografía, la cual tiene como objetivo principal los modelos booleanos. Para los detalles se recomienda [6].

Teorema 2.3.4.

$$ZF \ + \ (V = L) \vdash Ax.\ elección$$

Teorema 2.3.5.

$$ZF \ + \ (V = L) \vdash HGC$$

Corolario 2.3.6. *El axioma de elección es consistente relativamente a ZF*

Demostración. Vamos a probar el contrarecíproco: si ZFC es inconsistente, también lo es ZF.

Supongamos que ZFC es inconsistente. Como ZF $+$ $(V = L)$ implica el axioma de elección, esa teoría incluye ZFC, por lo que también es inconsistente. Como ZF y ZF $+$ $(V = L)$ son equiconsistentes, concluimos la inconsistencia de ZF. □

Corolario 2.3.7. *La hipótesis generalizada del continuo es consistente relativamente a ZF*

Demostración. Análoga a la anterior. □

[3]Dos teorías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son *equiconsistentes* si: $\mathcal{T}_1 \nvdash \perp$ si y solo si $\mathcal{T}_2 \nvdash \perp$

Capítulo 3

Modelos booleanos de la teoría de conjuntos

Los modelos de Tarski – que constituyen la noción más usual de modelo en lógica de primer orden – se caracterizan por el hecho de que interpretan las fórmulas de la teoría considerada con solo dos valores de verdad: verdadero o falso. El objetivo de este capitulo es introducir los modelos booleanos de la teoría de conjuntos, que generalizan los modelos de Tarski de la misma teoría, interpretando las correspondientes fórmulas con más valores de verdad, los cuales están dados por un álgebra booleana (sección 3.1). Los modelos booleanos nos permitirán probar la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo respecto a ZF, lo cual haremos en el siguiente capítulo.

Los modelos booleanos son una presentación equivalente al forcing de Cohen [9][10], desarrollada por Scott [11], Solovay [12] y Vopěnka [13].

3.1. Álgebras booleanas

En esta sección introducimos las *álgebras booleanas*, con el objetivo de formalizar la noción intuitiva de *valores de verdad*.

A modo de motivación y primer ejemplo, los valores básicos de verdad – *falso* y *verdadero* – representados por 0 y 1 respectivamente, conforman un álgebra booleana (a la que llamaremos *trivial*). Las principales operaciones que solemos usar son: la conjunción (y), denotada $a \wedge b$; la disyunción (o), denotada $a \vee b$ y la negación, denotada a^*.

Los elementos destacados y operaciones que definen las álgebras booleanas son los presentados en el ejemplo anterior: 0, 1, $a \wedge b$, $a \vee b$ y a^*. Como se mencionó, el álgebra booleana trivial está conformada solamente por 0 y 1; lo que agregan otras álgebras booleanas son valores de verdad *intermedios*.

Nos encaminamos a definir con precisión las álgebras booleanas. Lograremos esto con una secuencia de definiciones, que culminará en la 3.1.2. Comenzamos con los *retículos*.

Definición 3.1.1. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leq)$ *es un retículo si cada par* $\{a, b\} \subseteq L$ *tiene ínfimo y supremo, denotados* $a \wedge b$ *y* $a \vee b$*, respectivamente.*

Cuando vinculemos las álgebras booleanas con las fórmulas de la lógica, las operaciones $\wedge$ y $\vee$ servirán para interpretar las conjunciones y disyunciones, respectivamente. En base a la definición anterior, se deduce que cada subconjunto finito *no vacío* tiene ínfimo y supremo, sin embargo, no se puede asegurar la existencia de ínfimo o supremo del conjunto vacío.

Def. *Diremos que* $(L, \leq)$ *es* ***acotado*** *si tiene mínimo y máximo, denotados* 0 *y* 1*, respectivamente.*

Si el retículo es acotado, todo conjunto finito tiene ínfimo y supremo, pues el conjunto vacío también tiene ínfimo y supremo (respectivamente: 1 y 0).

Def. *Diremos que* $(L, \leq)$ *es* ***completo*** *si existen ínfimos y supremos de subconjuntos* $A \subseteq L$ *arbitrarios, denotados* $\bigwedge A$ *y* $\bigvee A$*, respectivamente.*

Los ínfimos arbitrarios y los supremos arbitrarios servirán para representar las cuantificaciones universales y las existenciales, respectivamente. Cuando $A = \{a_i \ / \ i \in I\}$, denotaremos:

$$\bigwedge A \ = \ \bigwedge_{i \in I} a_i \qquad \bigvee A \ = \ \bigvee_{i \in I} a_i$$

En cualquier retículo se cumplen la desigualdad $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y su dual $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Sin embargo, en general no se pueden afirmar las igualdades.

Def. *Diremos que* $(L, \leq)$ *es* ***distributivo*** *si para cada* $a, b, c \in L$ *se cumplen las siguientes dos ecuaciones:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Mediante una cuenta se prueba que dichas ecuaciones son equivalentes (ver [14]).

Def. *Diremos que* $(L, \leq)$ *es* ***complementado*** *si para cada* $a \in L$ *existe* $b \in L$ *tal que* $a \wedge b = 0$ *y* $a \vee b = 1$*. Si tal* $b \in L$ *es único, lo denotaremos* a^**.*

La operación * servirá para representar la negación lógica. Dado un elemento $a \in L$ de un retículo genérico, éste puede tener, cero, uno o varios complementos. Sin embargo, cuando L es *distributivo*, si a tiene complemento, este necesariamente es único (ver [14]).

Definición 3.1.2. *Diremos que $(B, \leq)$ es un* ***álgebra booleana*** *(o sencillamente que B es un álgebra booleana), si es un retículo acotado, distributivo y complementado.*

Dados $a, b \in B$, se definen:

- $a \Rightarrow b \;:=\; a^* \vee b$
- $a \Leftrightarrow b \;:=\; (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

Diremos que $(B. \leq)$ es un ***álgebra booleana completa*** *si es un retículo completo, distributivo y complementado (notar que la completitud implica la acotación).*

Por otra parte, diremos que un subconjunto $B' \subseteq B$ es una ***subálgebra booleana*** *si contiene al 0 y al 1 y es cerrado por $\wedge$, $\vee$ y *.*

Las siguientes propiedades de la implicación serán de utilidad en el resto del trabajo.

Lema 3.1.3. *Dada un álgebra booleana B y $a, b, c \in B$:*

1. $a \leq b \Rightarrow c$ *si y solo si* $a \wedge b \leq c$
2. $a \Rightarrow b = 1$ *si y solo si* $a \leq b$
3. $a \Leftrightarrow b = 1$ *si y solo si* $a = b$

Demostración. 1. ($\Rightarrow$) Por definición de $\Rightarrow$ tenemos $a \leq b^* \vee c$. Se deduce $a \wedge b \leq (b^* \vee c) \wedge b$. Luego se concluye como sigue.

$$
\begin{aligned}
a \wedge b &\leq (b^* \vee c) \wedge b \\
&= (b^* \wedge b) \vee (c \wedge b) && \text{(distributiva)} \\
&= 0 \vee (c \wedge b) && \text{(complemento)} \\
&= c \wedge b \leq c && \text{(0 es mínimo)}
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Es dual al anterior. Se parte de $a \wedge b \leq c$, se aplica $\vee b^*$ a ambos lados, se utiliza complemento y que 1 es máximo.

2. ($\Rightarrow$) Tenemos $a^* \vee b = 1$. Aplicando $\wedge a$ y propiedades (de forma análoga a lo realizado en el ítem anterior) se llega a $a \wedge b = a$, lo cual es equivalente a $a \leq b$.

($\Leftarrow$) De $a \leq b$ deducimos $a \wedge b = a$. Aplicando $\vee a^*$ y propiedades, llegamos a lo buscado.

3. Se deduce del anterior. □

Las operaciones $\wedge$, $\vee$ y * naturalmente permiten interpretar cualquier fórmula del cálculo proposicional en una álgebra booleana B (fijada una interpretación de las variables proposicionales por valores tomados en B). Se puede demostrar[1] que a través de esta interpretación, todas las tautologías proposicionales valen 1 en B (independientemente de la interpretación de las variables proposicionales). A modo de ejemplo (recordar que $a \Leftrightarrow b = 1$ si y solo si $a = b$), dada un álgebra booleana B y $a, b, c \in B$ se cumple:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= b \wedge a & \qquad a \vee b &= b \vee a \\ a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c & \qquad a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c \\ a \Rightarrow a &= 1 & \qquad a \Rightarrow 1 &= 1 \end{aligned}$$

Finalizaremos esta introducción a las álgebras booleanas presentando algunos ejemplos.

(1). El álgebra booleana *degenerada* está formada por un conjunto unitario, en el que $0 = 1$. Intuitivamente, representa la inconsistencia.

(2). El álgebra booleana *trivial* es $\{0,1\}$ donde $0 \neq 1$. Es la utilizada normalmente para representar los valores de verdad, donde cada fórmula es o bien verdadera o bien falsa. En dicho sentido, se corresponde con los modelos de Tarski.

(3). Dado un conjunto A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un álgebra booleana completa, donde

$$\begin{aligned} & a \wedge b = a \cap b \\ & a \vee b = a \cup b \\ & a^* = a^C \\ & \bigwedge B = \bigcap B \\ & \bigvee B = \bigcup B \end{aligned}$$

Este ejemplo es de particular interés, pues cualquier álgebra booleana $(B, \leq)$ es isomorfa a una subálgebra de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, para algún conjunto A (ver [14]). Por otra parte, las únicas álgebras booleanas finitas (a menos de isomorfismo) son $(\mathcal{P}(F), \subseteq)$ con F conjunto finito (ver [15]).

(4). Dado un espacio topológico X, definimos el conjunto de los *abiertos regulares* como:

$$\mathrm{RO}(X) \ := \ \{A \subseteq X \ / \ A = (\overline{A})^\circ\}$$

Donde $\overline{A}$ es la clausura de A y B° el interior de B. Se puede probar que $(\mathrm{RO}(X), \subseteq)$ es un álgebra booleana completa (ver [15]). Esta álgebra será de

[1] La prueba es por inducción estructural en la derivación, haciendo un caso para cada regla. Un ejemplo de ese tipo de pruebas se encuentra en el apéndice B.

particular utilidad para demostrar la consistencia relativa de la hipótesis del continuo respecto a ZF.

(5). Dado un conjunto A, tenemos que $(\mathcal{P}^{\text{fin}}(A) \cup \mathcal{P}^{\text{cof}}(A), \subseteq)$ es un álgebra booleana. Cuando A es infinito, dicha álgebra booleana es incompleta. Recordamos que $\mathcal{P}^{\text{fin}}$ son los subconjuntos finitos y $\mathcal{P}^{\text{cof}}$ son los cofinitos, es decir, de complemento finito.

(6). Dada una teoría de primer orden T, el *álgebra de Lindenbaum* se construye de la siguiente forma: dadas fórmulas cerradas ϕ, ψ definimos la relación de equivalencia $\phi \sim \psi$ *sii* $T \vdash \phi \Leftrightarrow \psi$. Sea B el conjunto de clases de equivalencia, con el orden $\hat{\phi} \leq \hat{\psi}$ sii $T \vdash \phi \Rightarrow \psi$. Entonces $(B, \leq)$ es una álgebra Booleana, llamada "álgebra de Lindenbaum".

(7). Sea M el conjunto de los *Lebesgue-medibles* en $[0,1]$. Definimos en M la relación de equivalencia $A \sim B$ *sii* $m((A - B) \cup (B - A)) = 0$. Es decir, dos conjuntos son equivalentes si su diferencia simétrica tiene medida nula. Sea B el conjunto de clases de equivalencia. Sorprendentemente, $(B, \subseteq)$ es un álgebra booleana *completa* (ver [11]).

3.2. Construcción del modelo

Comencemos con algunas ideas intuitivas, antes de definir formalmente los modelos booleanos de la teoría de conjuntos. Recordamos que en ZF, la jerarquía acumulativa es la sucesión transfinita $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{On}}$ definida de modo transfinito por la relación:

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$$

En base a esto se puede construir una clase V tal que:

$$x \in V \equiv \exists \alpha \in \text{On}, \; x \in V_\alpha$$

Por el axioma de regularidad y el esquema de remplazo, se cumple $\forall x, \; x \in V$, por lo que la jerarquía acumulativa *estratifica* el universo conjuntista (ver figura 1.1). En vistas de esto, comúnmente nos referiremos al universo de todos los conjuntos como V.

Los modelos booleanos surgen de modificar la sucesión transfinita V_α. Lo primero que haremos es cambiar los conjuntos potencia por conjuntos de funciones. Recordemos que para cualquier conjunto A, existe una biyección natural entre su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ y el espacio de funciones 2^A, que asocia a cada subconjunto $B \subseteq A$ su función característica $I_B : A \to 2$ [2] definida por $I_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$. Por ende, surge la siguiente sucesión

[2] Recordar que usamos la convención $2 = \{0, 1\}$.

transfinita V'_α, que utiliza la biyección mencionada para cambiar subconjuntos por funciones características.

$$V'_\alpha \ := \ \bigcup_{\beta<\alpha} 2^{V'_\beta}$$

Por construcción de esta jerarquía acumulativa alternativa, cada elemento $x \in V'_\alpha$ es una función f cuyo domino es V'_β para algún $\beta < \alpha$ y cuyo codominio es 2. Dado $y \in V'_\beta$, tenemos las dos siguientes posibilidades (recordar la biyección entre $\mathcal{P}(V'_\beta)$ y $2^{V'_\beta}$):

- $x(y)$ toma el valor 0, lo que corresponde con "$y \notin x$"
- $x(y)$ toma el valor 1, lo que corresponde con "$y \in x$"

En otras palabras, $x(y)$ se corresponde con el valor de verdad de la pertenencia de y a x. Por ende, es natural que en lugar de considerar a 2 como solamente un conjunto, lo tomemos como el *álgebra booleana trivial* 2. En base a esto, surge la idea de sustituirla por otra álgebra booleana B. En este caso $x(y)$ será un elemento de B, que funcionará como valor de verdad generalizado de la pertenencia de y a x, o si se quiere, la *probabilidad* de que y pertenezca a x. Esa es la intuición de lo que sigue; no obstante, es necesario realizar un cambio técnico a la sucesión transfinita. El resultado es el siguiente.

$$V^{(2)}_\alpha \ := \ \{x \text{ función } / \ \mathrm{im}(x) \subseteq 2 \ \wedge \ \exists\beta < \alpha, \mathrm{dom}(x) \subseteq V^{(2)}_\beta\}$$

Es la misma definición de antes, solo que en lugar de tomar funciones con dominio $V^{(2)}_\beta$ y codominio 2, se toman funciones con dominio *incluido* en $V^{(2)}_\beta$ y codominio 2. Ahora sí, definamos formalmente los modelos booleanos de la teoría de conjuntos.

Definición 3.2.1 (modelos booleanos)**.** *Sea B un álgebra booleana* completa. *Por analogía a lo presentado anteriormente, asociamos al álgebra booleana B la sucesión transfinita $(V^B_\alpha)_{\alpha\in On}$ definida recursivamente como:*

$$V^{(B)}_\alpha \ := \ \{x \textit{ función } / \ im(x) \subseteq B \ \wedge \ \exists\beta < \alpha, dom(x) \subseteq V^{(B)}_\beta\}$$

Se llama modelo booleano asociado al álgebra B a la clase propia $V^{(B)}$ (que intuitivamente es la unión transfinita de los $V^{(B)}_\alpha$) definida por la fórmula:

$$x \in V^{(B)} \ \equiv \ \exists\alpha \in On, \ x \in V^{(B)}_\alpha$$

De la definición y el esquema de remplazo surge la siguiente equivalencia, que caracteriza los elementos de $V^{(B)}$:

$$x \in V^{(B)} \;\Leftrightarrow\; x \text{ función } \wedge \operatorname{im}(x) \subseteq B \wedge \operatorname{dom}(f) \subseteq V^{(B)}$$

En base a dicha equivalencia, $V^{(B)}$ consiste en *funciones características recursivas*, en las que los valores de verdad pertenecen al álgebra booleana B. Decimos que son recursivas porque todos los elementos de su dominio son del mismo tipo.

Fijamos un álgebra booleana B genérica, con la cual trabajaremos en el resto del capítulo.

Mediante inducción transfinita se puede demostrar el siguiente cómodo principio de inducción en $V^{(B)}$.

Lema 3.2.2 (Principio de inducción para $V^{(B)}$)**.** *Dada una fórmula $\phi(x)$, se cumple lo siguiente:*

$$\forall x \in V^{(B)} \left((\forall y \in dom(x)\ \phi(y)) \;\Rightarrow\; \phi(x) \right) \Rightarrow \forall x \in V^{(B)}\ \phi(x)$$

La construcción que acabamos de realizar nos será útil de la siguiente forma. Por un lado, $V^{(2)}$ es equivalente al universo V (en un sentido que precisaremos en el teorema 3.4.4), pero si tomamos B un álgebra booleana más compleja, tendremos que $V^{(B)}$ es más grande que $V^{(2)}$, por lo que identificando V con $V^{(2)}$ tendremos que $V^{(B)}$ es un “agrandamiento"del modelo original, en el que se agregan más conjuntos (figura 3.1). Para que esto tenga sentido, será necesario demostrar que, en cierta forma, $V^{(B)}$ también verifica los axiomas de ZF, lo cual haremos en la sección 3.6. En conclusión, tendremos un método con el cual agrandar un modelo de la teoría de conjuntos y eligiendo correctamente el álgebra booleana B, podremos hacer que en el modelo agrandado no se cumpla la hipótesis del continuo, entre otras aplicaciones.

Tomaremos la siguiente convención de nomenclatura:

- A los $x \in V$ les llamaremos *puntos*.
- A los $u \in V^{(B)}$ les llamaremos *nombres*. Esto se debe a que puede haber elementos distintos de $V^{(B)}$ que representan el mismo conjunto (según la noción que desarrollaremos en la siguiente sección).

3.3. Interpretación de las fórmulas

En la sección anterior construimos los modelos booleanos de la teoría de conjuntos, que por ahora no son más que ciertas clases con una estructura dada. Lo siguiente es poder hacer afirmaciones sobre dichos modelos y

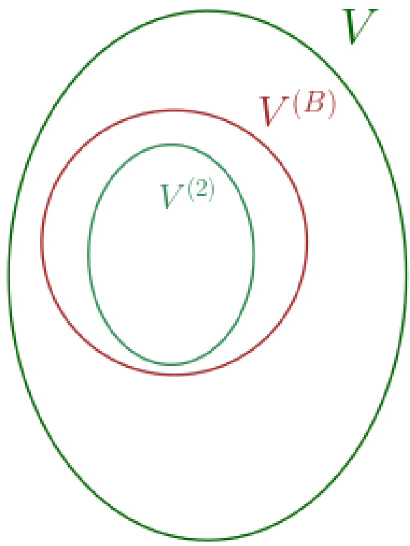

Figura 3.1: Esquema de inclusión de modelos.

asociar a estas afirmaciones valores booleanos de verdad. Por ende, vamos a introducir un lenguaje apropiado y luego definir un mecanismo que a cada sentencia de dicho lenguaje le asocie un elemento de B: su valor booleano de verdad.

Trabajaremos en un lenguaje de primer orden extendido con un símbolo de constante para cada nombre de $V^{(B)}$. En el lenguaje base de ZF la única forma de referenciar elementos es mediante variables; con esta extensión tenemos cada nombre de $V^{(B)}$ representado por un símbolo del lenguaje. A cada fórmula del nuevo lenguaje le llamaremos *B-fórmula* y a cada sentencia (fórmula cerrada), *B-sentencia*. La definición formal es la siguiente:

Definición 3.3.1. *Los B-términos están dados por la siguiente definición:*

$$t \;:=\; x \mid u$$

donde x es una variable y $u \in V^{(B)}$. En palabras, los términos son o bien variables o bien constantes asociadas a nombres de $V^{(B)}$. Utilizando los B-términos, definimos las B-fórmulas como sigue:

$$\begin{aligned} \phi, \psi \;:=\; & t_1 = t_2 \mid t_1 \in t_2 \\ & \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi \\ & \mid \forall x\ \phi \mid \exists x\ \phi \end{aligned}$$

Cabe aclarar que las B-fórmulas son objetos *externos* a la teoría, es decir: pertenecen a la metateoría. Es posible construir representaciones internas de las B-fórmulas, análogamente a como se hizo en la sección 2.1, pero no nos sería de utilidad.

Usualmente utilizaremos σ y τ para referirnos a sentencias, en contraposición a ϕ y ψ, que en general representarán fórmulas. Vamos a asociar a cada B-sentencia σ su valor booleano de verdad, $[\![\sigma]\!]^B \in B$. Como las B-fórmulas son objetos de la metateoría, la asignación de valores de verdad que construiremos también pertenecerá a la metateoría.

Definición 3.3.2 (interpretación de B-sentencias)**.** *Se define por recursión externa en la estructura de σ. Los casos no atómicos son los siguientes:*

$$
\begin{aligned}
[\![\sigma \wedge \tau]\!]^B &:= [\![\sigma]\!]^B \wedge [\![\tau]\!]^B \\
[\![\sigma \vee \tau]\!]^B &:= [\![\sigma]\!]^B \vee [\![\tau]\!]^B \\
[\![\sigma \Rightarrow \tau]\!]^B &:= [\![\sigma]\!]^B \Rightarrow [\![\tau]\!]^B \\
[\![\sigma \Leftrightarrow \tau]\!]^B &:= [\![\sigma]\!]^B \Leftrightarrow [\![\tau]\!]^B \\
[\![\neg\sigma]\!]^B &:= ([\![\sigma]\!]^B)^* \\
[\![\exists x \phi(x)]\!]^B &:= \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]^B \\
[\![\forall x \phi(x)]\!]^B &:= \bigwedge_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]^B
\end{aligned}
$$

Observar que en los primeros casos, a la izquierda de la igualdad tenemos conectivas y a la derecha operaciones booleanas, aunque los símbolos coincidan. Por otra parte, notar que usamos que B es completa en las interpretaciones de cuantificadores. En estos últimos casos, la notación usada es una abreviación de lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
[\![\exists x \phi(x)]\!]^B &:= \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]^B = \bigvee \{b \in B \ / \ \exists u \in V^{(B)} \ b = [\![\phi(u)]\!]^B\} \\
[\![\forall x \phi(x)]\!]^B &:= \bigwedge_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]^B = \bigwedge \{b \in B \ / \ \exists u \in V^{(B)} \ b = [\![\phi(u)]\!]^B\}
\end{aligned}
$$

Nos enfocamos ahora en las interpretaciones de sentencias atómicas. Dado que una fórmula atómica con variables no puede ser cerrada, las sentencias atómicas son de la forma $[\![u \in v]\!]^B$ y $[\![u = v]\!]^B$, con $u, v \in V^{(B)}$.

Analogía informática: Para representar conjuntos finitos en un lenguaje de programación, es posible utilizar listas recursivas: es decir, listas cuyas entradas también son listas. A modo de ejemplos, el conjunto vacío $\varnothing$ es representado por la lista vacía [ ], el conjunto $\{\varnothing\}$ es representado por la lista [[ ]] y el conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ es representado por la lista [[ ] , [[ ]]].

No obstante, distintas listas pueden definir el mismo conjunto, pues pueden haber elementos repetidos o en distinto orden. Por ejemplo:

$$[\,[\,]\,,\,[\,[\,]\,]\,] \qquad [\,[\,[\,]\,]\,,\,[\,]\,] \qquad [\,[\,]\,,\,[\,]\,,\,[\,[\,]\,]\,]$$

son listas distintas que representan al conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Queremos definir las relaciones de igualdad y pertenencia sobre dicha representación. Para lograrlo, debemos definirlas de modo mutuamente recursivo. Asumimos dadas funciones list_exists y list_forall que toman como parámetros una lista y una condición; la primera retorna «verdadero» si y solo si alguna entrada de la lista cumple la condición, mientras que la segunda retorna «verdadero» si y solo si todas las entradas de la lista cumplen la condición.

$$\begin{aligned}
\text{set_mem}(l_1, l_2) &:= \text{list_exists}(l_2,\ \lambda x.\ \text{set_eq}(l_1, x)) \\
\text{set_eq}(l_1, l_2) &:= \text{list_forall}(l_2,\ \lambda x.\ \text{set_mem}(x, l_1))\ \textbf{and} \\
&\ \ \text{list_forall}(l_1,\ \lambda x.\ \text{set_mem}(x, l_2))
\end{aligned}$$

En palabras: l_1 pertenece a l_2 si existe una entrada de l_2 que sea igual a l_1, mientras que l_1 es igual a l_2 si todas las entradas de l_2 pertenecen a l_1 y todas las entradas de l_1 pertenecen a l_2. Se puede observar que la definición de la igualdad es por mutua inclusión.

Volvemos al problema de asignar valores de verdad a $[\![u \in v]\!]^B$ y $[\![u = v]\!]^B$. En este caso, los conjuntos son representados por funciones con codominio B, en lugar de listas, pero la estructura de la solución es igual. La principal diferencia es que con las listas, cada entrada representa un conjunto que pertenece con valor de verdad 1, mientras que en este caso, dados $u \in V^{(B)}$ y $x \in \mathrm{dom}(u)$, x representa un conjunto que pertenece con valor de verdad $u(x)$.

Definición 3.3.3 (interpretación de B-sentencias; continuación)**.** *Para sentencias atómicas se define de modo mutuamente recursivo.*

$$[\![u \in v]\!]^B := \bigvee_{y \in dom(v)} v(y) \wedge [\![u = y]\!]^B \tag{3.1}$$

$$[\![u = v]\!]^B := \left(\bigwedge_{x \in dom(u)} u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]^B \right) \wedge \left(\bigwedge_{y \in dom(v)} v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!]^B \right) \tag{3.2}$$

La recursión se basa en la relación bien fundada:

$$(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y \in dom(v)) \vee (x \in dom(u) \wedge y = v)$$

Dados $u \in V^{(B)}$ y $x \in \mathrm{dom}(u)$, es importante remarcar la diferencia entre $u(x)$ y $[\![x \in u]\!]^B$. En efecto, $u(x)$ solamente tiene sentido porque suponemos $x \in \mathrm{dom}(u)$, mientras que $[\![x \in u]\!]^B$ está definido para cualquier par de nombres de $V^{(B)}$. Además, incluso en el caso de que $x \in \mathrm{dom}(u)$, esas dos nociones de pertenencia pueden dar valores booleanos distintos (en el lema 3.3.5 veremos $u(x) \leq [\![x \in u]\!]^B$, pero no se puede afirmar más que eso). Hay que considerar a $u(x)$ como una noción *primitiva* de pertenencia, en base a la cual definimos las interpretaciones de fórmulas atómicas de igualdad y pertenencia.

Dado que las B-sentencias son objetos de la metateoría, lo que hicimos implícitamente en las definiciones anteriores es: para cada B-sentencia σ construir una fórmula $\psi_\sigma(x)$ con la semántica:

$$b = [\![\sigma]\!]^B \;\equiv\; \psi_\sigma(b)$$

tal que ZFC $\vdash \exists! b \in B \; \psi_\sigma(b)$.

Si bien, dada una B-sentencia, σ, su valor de verdad booleano $[\![\sigma]\!]^B$ puede ser cualquier elemento del álgebra booleana B, nos interesan particularmente los casos en que es 1 (el máximo de B), pues representa la verdad (en contraposición a 0, que representa la falsedad). En base a esto, hacemos la siguiente definición.

Definición 3.3.4. *Diremos que una B-sentencia σ es verdadera en $V^{(B)}$ y lo escribiremos $V^{(B)} \models \sigma$, cuando $[\![\sigma]\!]^B = 1$.*

Una B-fórmula cualquiera, ϕ, es verdadera en $V^{(B)}$, lo cual denotaremos $V^{(B)} \models \phi$, si su clausura universal (que se obtiene de agregar una cuantificación universal para cada variable libre, lo que resulta en una B-sentencia) es verdadera en $V^{(B)}$.

En este punto podemos esclarecer más el hecho de que a los elementos de $V^{(B)}$ les llamemos “nombres”. Existen $u, v \in V^{(B)}$ distintos tales que tenemos $V^{(B)} \models u = v$, lo cual interpretaremos como: “u y v representan el mismo conjunto”. Veamos un ejemplo. Si tomamos $u_1 = \varnothing$ y $u_2 = \{(\varnothing, 0)\}$, se cumple que $V^{(B)} \models u_1 = u_2$ (de hecho ambos representan al conjunto vacío), lo cual se puede ver aplicando (3.2) y también intuitivamente. Por una parte, u_1 representa el conjunto vacío por ser la función vacía. Por otra, u_2 también lo representa porque está construido de modo que $\varnothing$ pertenece con valor de verdad 0, lo cual es equivalente a que no pertenezca. La intuición es que los elementos del modelo booleano son *clases de equivalencia* bajo la relación $u \sim v \Leftrightarrow V^{(B)} \models u = v$.

De aquí en más, en algunos casos omitiremos el supraíndice B en $[\![\sigma]\!]^B$.

Para que tenga sentido tratar a $V^{(B)} \models \phi$ como una noción de verdad, esta debe ser compatible con la deducción natural. Por eso, nos encaminamos a probar que para cualquier B-fórmula ϕ, si $LK \vdash \phi$ entonces $V^{(B)} \models \phi$. Para eso primero nos enfocaremos en el siguiente lema, necesario para probar que las reglas de la igualdad son admisibles.

Lema 3.3.5. *Se cumple lo siguiente para cualquier $u, v, w \in V^{(B)}$*

1. $[\![u = u]\!] = 1$
2. $u(x) \leq [\![x \in u]\!]$ *para cada* $x \in dom(u)$
3. $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$
4. $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!]$
5. $[\![u = v]\!] \wedge [\![u \in w]\!] \leq [\![v \in w]\!]$
6. $[\![v = w]\!] \wedge [\![u \in v]\!] \leq [\![u \in w]\!]$
7. $[\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(u)]\!] \leq [\![\phi(v)]\!]$ *para cualquier B-fórmula $\phi(x)$, cuya única variable libre es x.*

Demostración. **(1)** Se demuestra utilizando el principio de inducción 3.2.2. Supongamos que para cada $x \in \text{dom}(u)$ se cumple $[\![x = x]\!] = 1$. Queremos probar:

$$[\![u = u]\!] = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \Rightarrow [\![x \in u]\!]) \stackrel{?}{=} 1$$

Alcanza verificar que dado $x \in \text{dom}(u)$ tenemos $u(x) \leq [\![x \in u]\!]$. Veámoslo.

$$[\![x \in u]\!] = \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge [\![x = y]\!]) \;\geq\; u(x) \wedge [\![x = x]\!] \;\stackrel{\text{HI}}{=}\; u(x)$$

(2) Se probó en la parte anterior dentro de la inducción.

(3) Es directo de la definición de $[\![u = v]\!]$ y de la simetría del operador $\wedge$.

(4) Se demuestra utilizando el principio de inducción 3.2.2 en u. El predicado es el siguiente:

$$P(u) \;:=\; \forall v, w \in V^{(B)}([\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!])$$

Tomamos $u \in V^{(B)}$ y supongamos $P(x)$ para cada $x \in \text{dom}(u)$.

Queremos probar:

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq \left(\bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!] \right) \wedge \left(\bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(w)} w(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!] \right)$$

Esto es equivalente a probar las siguientes dos desigualdades:

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!] \tag{3.3}$$

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(w)} w(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!] \tag{3.4}$$

Vamos a probar (3.3) en detalle y luego veremos que (3.4) es análoga. Utilizando propiedades del álgebra booleana:

$$\begin{aligned} & [\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} (u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!]) \\ \Leftrightarrow \quad & [\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!] \quad \text{para cada } x \in \mathrm{dom}(u) \\ \Leftrightarrow \quad & [\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \wedge u(x) \leq [\![x \in w]\!] \quad \text{para cada } x \in \mathrm{dom}(u) \end{aligned}$$

Fijamos un $x \in \mathrm{dom}(u)$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!] \wedge u(x) \; = \; & \left(\bigwedge_{x' \in \mathrm{dom}(u)} u(x') \Rightarrow [\![x' \in v]\!] \right) \\ & \wedge \left(\bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!] \right) \wedge u(x) \\ \leq \; & \left(\bigwedge_{x' \in \mathrm{dom}(u)} u(x') \Rightarrow [\![x' \in v]\!] \right) \wedge u(x) \\ \leq \; & (u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]) \wedge u(x) \; \leq \; [\![x \in v]\!] \qquad \textbf{(*)} \end{aligned}$$

Por ende, alcanza probar:

$$[\![x \in v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![x \in w]\!] \tag{3.5}$$

Para llegar a 3.5 vamos a utilizar la hipótesis inductiva. Sean $y \in \mathrm{dom}(v)$ y $z \in \mathrm{dom}(w)$. Aplicando la hipótesis inductiva $(P(x))$ tenemos:

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![x = z]\!]$$

Aplicamos conjunción con $w(z)$ a ambos lados.

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \wedge w(z) \leq [\![x = z]\!] \wedge w(z)$$

Como z puede ser cualquier elemento de $\mathrm{dom}(w)$, podemos tomar supremo a ambos lados. Por la definición de interpretación de pertenencia (3.2) tenemos lo siguiente:

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y \in w]\!] \leq [\![x \in w]\!]$$

Por la cuenta realizada arriba **(*)**, tenemos $[\![v = w]\!] \wedge v(y) \leq [\![y \in w]\!]$. Por ende, llegamos a:

$$[\![v = w]\!] \wedge [\![x = y]\!] \wedge v(y) \leq [\![x \in w]\!]$$

Análogamente al razonamiento que se hizo con z, tenemos que y puede ser cualquier elemento de $\mathrm{dom}(v)$, por lo que tomamos supremo y obtenemos:

$$[\![v = w]\!] \wedge [\![x \in v]\!] \leq [\![x \in w]\!]$$

Llegamos a 3.5, que era nuestro objetivo, por lo que demostramos (3.3). Solo resta justificar que (3.4) se deduce del mismo argumento. Como probamos la conmutatividad de $[\![\cdot = \cdot]\!]$, podemos reescribir (3.4) como:

$$[\![w = v]\!] \wedge [\![v = u]\!] \leq \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(w)} w(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!]$$

Por otra parte, de la hipótesis inductiva deducimos (utilizando conmutatividad nuevamente) que:

$$[\![z = y]\!] \wedge [\![y = x]\!] \leq [\![z = x]\!]$$

Para cualquier $z \in \mathrm{dom}(w)$, $y \in \mathrm{dom}(v)$ y $x \in \mathrm{dom}(u)$. Si intercambiamos u con w y x con z en el argumento que hicimos, obtenemos (3.4).

(5) Sea $z \in \mathrm{dom}(w)$. Por la parte anterior tenemos:

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = z]\!] \leq [\![u = z]\!]$$

Aplicamos conjunción con $w(z)$ a ambos lados.

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = z]\!] \wedge w(z) \leq [\![u = z]\!] \wedge w(z)$$

Tomamos supremo en $z \in \mathrm{dom}(w)$, con lo que obtenemos el resultado.

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v \in w]\!] \leq [\![u \in w]\!]$$

(6) Sea $y \in \mathrm{dom}(v)$. Por la definición de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ (con un razonamiento que ya hicimos) tenemos:

$$[\![v = w]\!] \wedge v(y) \leq [\![y \in w]\!]$$

Aplicamos conjunción con $[\![u = y]\!]$ a ambos lados y utilizamos la parte anterior:

$$[\![v = w]\!] \wedge [\![u = y]\!] \wedge v(y) \ \leq \ [\![u = y]\!] \wedge [\![y \in w]\!] \ \overset{(5)}{\leq} \ [\![u \in w]\!]$$

Tomando supremo en y y utilizando la definición de $[\![\cdot \in \cdot]\!]$, llegamos a lo buscado.

(7) Se demuestra por inducción estructural en la B-fórmula $\phi(x)$. Los pasos base son consecuencia directa de los ítems anteriores. Lo demostraremos para un conjunto completo de conectivas y cuantificadores; específicamente $\neg$, $\vee$ y $\exists$. Los otros casos son análogos. La propiedad de inducción es explícitamente:

$$P(\phi) \ := \ \forall u, v \in V^{(B)}, \ [\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(u)]\!] \leq [\![\phi(v)]\!]$$

Caso $\neg\phi(x)$. Hay que probar $[\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(u)]\!]^* \leq [\![\phi(v)]\!]^*$.

$$\begin{array}{cc} & [\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(u)]\!]^* \leq [\![\phi(v)]\!]^* \\ \Leftrightarrow & ([\![u = v]\!] \Rightarrow [\![\phi(u)]\!])^* \leq [\![\phi(v)]\!]^* \\ \Leftrightarrow & [\![\phi(v)]\!] \leq [\![u = v]\!] \Rightarrow [\![\phi(u)]\!] \\ \Leftrightarrow & [\![\phi(v)]\!] \wedge [\![u = v]\!] \leq [\![\phi(u)]\!] \end{array}$$

La última línea se cumple por hipótesis inductiva (intercambiando los papeles de u y v; podemos hacer esto porque son variables cuantificadas adentro de la inducción).

Caso $\phi(x) \vee \psi(x)$. Hay que probar $[\![u = v]\!] \wedge ([\![\phi(u)]\!] \vee [\![\psi(u)]\!]) \leq [\![\phi(v)]\!] \vee [\![\psi(v)]\!]$. Se deduce directamente de aplicar distributividad y la hipótesis inductiva.

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!] \wedge ([\![\phi(u)]\!] \vee [\![\psi(u)]\!]) \ &= \ ([\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(u)]\!]) \vee ([\![u = v]\!] \wedge [\![\psi(u)]\!]) \\ &\overset{\mathrm{HI}}{\leq} \ [\![\phi(v)]\!] \vee [\![\psi(v)]\!] \end{aligned}$$

Caso $\exists x\ \phi(x)$. El razonamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}
[\![u = v]\!] \wedge [\![\exists x\ \phi(x,u)]\!] &= [\![u = v]\!] \wedge \bigvee_{w \in V^{(B)}} [\![\phi(w,u)]\!] \\
&= \bigvee_{w \in V^{(B)}} ([\![u = v]\!] \wedge [\![\phi(w,u)]\!]) \\
&\overset{\text{HI}}{\leq} \bigvee_{w \in V^{(B)}} [\![\phi(w,v)]\!] \ = \ [\![\exists x\ \phi(x,v)]\!]
\end{aligned}$$

Para cada $w \in V^{(B)}$ usamos la hipótesis inductiva con $\psi(x) \equiv \phi(w,x)$.
$\square$

El segundo ítem del lema 3.3.5 no es necesario en este punto, pero será muy útil subsiguientemente. Ahora enunciamos el siguiente teorema, que tiene como corolario que si LK $\vdash \phi$ entonces $V^{(B)} \models \phi$.

Teorema 3.3.6. *Para cualquier B-fórmula ϕ y cualquier conjunto finito de B-fórmulas Γ tales que $\Gamma \vdash \phi$, se cumple $V^{(B)} \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \phi$*

La demostración del teorema 3.3.6 se encuentra en el anexo B. Terminaremos la sección con un resultado respecto a las interpretaciones de cuantificaciones acotadas; recordamos que son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\exists x \in u\ \phi(x) &\equiv \exists x\ (x \in u \wedge \phi(x)) \\
\forall x \in u\ \phi(x) &\equiv \forall x\ (x \in u \Rightarrow \phi(x))
\end{aligned}$$

Aplicando las definiciones directamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
[\![\exists x \in u\ \phi(x)]\!] &= \bigvee_{x \in V^{(B)}} ([\![x \in u]\!] \wedge [\![\phi(x)]\!]) \\
[\![\forall x \in u\ \phi(x)]\!] &= \bigwedge_{x \in V^{(B)}} ([\![x \in u]\!] \Rightarrow [\![\phi(x)]\!])
\end{aligned}$$

Por ende, tenemos el problema de que para calcular los valores de verdad de cuantificaciones acotadas, debemos calcular supremos o ínfimos en todo $V^{(B)}$. Con el siguiente corolario se obtienen fórmulas mejores, en las que, por ejemplo, $[\![\forall x \in u\ \phi(x)]\!]$ depende solamente de los elementos de u. Usaremos fuertemente que los teoremas de LK se cumplen en $V^{(B)}$, en particular si LK $\vdash \phi \Leftrightarrow \psi$ entonces $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$. Esto es porque $[\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!] = [\![\phi]\!] \Leftrightarrow [\![\psi]\!]$ y $[\![\phi]\!] \Leftrightarrow [\![\psi]\!] = 1$ si y solo si $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Corolario 3.3.7. *Para cada B-fórmula $\phi(x)$ y para cada $u \in V^{(B)}$:*

1.
$$[\![\exists x \in u\ \phi(x)]\!] \;=\; \bigvee_{x\in dom(u)} (u(x) \wedge [\![\phi(x)]\!])$$

2.
$$[\![\forall x \in u\ \phi(x)]\!] \;=\; \bigwedge_{x\in dom(u)} (u(x) \Rightarrow [\![\phi(x)]\!])$$

Demostración. Alcanza demostrar **(1)**, pues podemos deducir **(2)** utilizando De Morgan, es decir:

$$[\![\forall x \in u\ \phi(x)]\!] \;=\; [\![\neg\exists x \in u\ \neg\phi(x)]\!]$$

Para deducir **(1)** razonamos de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
[\![\exists x\ (x \in u \wedge \phi(x))]\!] &= \bigvee_{x\in V^{(B)}} ([\![x \in u]\!] \wedge [\![\phi(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{x\in V^{(B)}} \bigvee_{y\in \mathrm{dom}(u)} (u(y) \wedge [\![y = x]\!] \wedge [\![\phi(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{y\in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{x\in V^{(B)}} (u(y) \wedge [\![y = x]\!] \wedge [\![\phi(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{y\in \mathrm{dom}(u)} \left(u(y) \wedge \bigvee_{x\in V^{(B)}} ([\![y = x]\!] \wedge [\![\phi(x)]\!]) \right) \\
&= \bigvee_{y\in \mathrm{dom}(u)} (u(y) \wedge [\![\exists x\ (y = x \wedge \phi(x))]\!]) \\
&= \bigvee_{y\in \mathrm{dom}(u)} (u(y) \wedge [\![\phi(y)]\!])
\end{aligned}$$

En el último paso usamos que LK $\vdash \exists x\ (y = x \wedge \phi(x)) \Leftrightarrow \phi(y)$ □

3.4. Subálgebras y sus modelos; nombres estándar

Definición 3.4.1 (Subálgebra completa)**.** *Sean B y B' álgebras booleanas completas. Decimos que B' es una subálgebra completa de B si es una subálgebra y además, para cada $X \subseteq B'$, su supremo (ínfimo) en B coincide con su supremo (ínfimo) en B'.*

El siguiente teorema vincula $V^{(B')}$ y $V^{(B)}$ cuando B' es una subálgebra completa de B.

Teorema 3.4.2. *Sea B' una subálgebra completa de B. Entonces:*

1. $V^{(B')} \subseteq V^{(B)}$.

   Además para cada $u, v \in V^{(B')}$

2. $[\![u \in v]\!]^{B'} = [\![u \in v]\!]^{B}$

3. $[\![u = v]\!]^{B'} = [\![u = v]\!]^{B}$

Demostración. **(1).** Usando que $B' \subseteq B$, es directo por inducción transfinita con la definición de $V^{(B)}$ y la de $V^{(B')}$.

(2) y **(3)** se prueban simultáneamente por inducción. El predicado de inducción es:

$$\begin{aligned} P(v) \; := \; \forall u \in V^{(B')}(\quad & [\![u \in v]\!]^{B'} = [\![u \in v]\!]^{B} \wedge \\ & [\![u = v]\!]^{B'} = [\![u = v]\!]^{B} \wedge \\ & [\![v \in u]\!]^{B'} = [\![v \in u]\!]^{B} \quad) \end{aligned}$$

La tercera igualdad será necesaria porque en la definición de la igualdad (3.2) aparecen pertenencias en ambos sentidos.

Supongamos $\forall y \in \mathrm{dom}(v)\ P(y)$ y probemos $P(v)$. El orden en que probaremos las igualdades será importante, pues las iremos reutilizando.

Veamos $\forall u \in V^{(B)}\ [\![u \in v]\!]^{B'} = [\![u \in v]\!]^{B}$.

$$\begin{aligned} [\![u \in v]\!]^{B'} &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)}^{B'} v(y) \wedge [\![u = y]\!]^{B'} \\ &\overset{*}{=} \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)}^{B'} v(y) \wedge [\![u = y]\!]^{B} \\ &\overset{**}{=} \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)}^{B} v(y) \wedge [\![u = y]\!]^{B} \\ &= [\![u \in v]\!]^{B} \end{aligned}$$

El paso * es por hipótesis inductiva y el ** es porque B' es subálgebra completa de B.

Veamos $\forall u \in V^{(B)}\ [\![u = v]\!]^{B'} = [\![u = v]\!]^{B}$.

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!]^{B'} = & \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)}^{B'} (v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!]^{B'}) \wedge \\ & \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)}^{B'} (u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]^{B'}) \end{aligned}$$

Tenemos $[\![y \in u]\!]^{B'} = [\![y \in u]\!]^B$ por la hipótesis inductiva. Por otra parte, como demostramos $\forall u \in V^{(B)}$ $[\![u \in v]\!]^{B'} = [\![u \in v]\!]^B$, aplicándolo a x tenemos $[\![x \in v]\!]^{B'} = [\![x \in v]\!]^B$. Finalmente, usando que B' es subálgebra completa de B, podemos cambiar lo supremos en B' por supremos en B y tenemos lo buscado.

Finalmente, veamos $[\![v \in u]\!]^{B'} = [\![v \in u]\!]^B$.

$$[\![v \in u]\!]^{B'} \;=\; \bigvee_{x\in \mathrm{dom}(u)}^{B'} (u(x) \wedge [\![v = x]\!]^{B'})$$

Como demostramos $\forall u \in V^{(B)}$ $[\![u = v]\!]^{B'} = [\![u = v]\!]^B$, tenemos que $[\![v = x]\!]^{B'} = [\![v = x]\!]^B$. Nuevamente, usamos que B' es subálgebra completa de B para concluir. $\square$

Corolario 3.4.3. *Si B' es una subálgebra completa de B, entonces para cualquier fórmula de clase Π_0 con equivalencia en deducción natural $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ (ver la sección 1.2, Jerarquía de Levy) y cualquier $u_1, \ldots, u_n \in V^{(B')}$ (parámetros) tenemos:*

$$[\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{B'} = [\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^B$$

Demostración. Como la adecuación de la deducción natural en $V^{(B)}$ se deduce del teorema 3.3.6 y $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ es equivalente en deducción natural a una fórmula restringida, basta probarlo para fórmulas con solamente cuantificaciones acotadas. Razonemos por inducción en ϕ, fórmula con todas sus cuantificaciones acotadas. Para fórmulas atómicas son los dos últimos ítems del teorema 3.4.2. Los pasos inductivos asociados a las conectivas son directos. Veremos el de una cuantificación acotada.

$$\begin{aligned}
[\![\exists x \in u\ \phi(x, u_1, \ldots, u_n)]\!]^{B'} &= \bigvee_{x\in \mathrm{dom}(u)}^{B'} (u(x) \wedge [\![\phi(x, u_1, \ldots, u_n)]\!]^{B'}) \\
&= \bigvee_{x\in \mathrm{dom}(u)}^{B} (u(x) \wedge [\![\phi(x, u_1, \ldots, u_n)]\!]^{B'}) \\
&= \bigvee_{x\in \mathrm{dom}(u)}^{B} (u(x) \wedge [\![\phi(x, u_1, \ldots, u_n)]\!]^{B}) \\
&= [\![\exists x \in u\ \phi(x, u_1, \ldots, u_n)]\!]^B
\end{aligned}$$
$\square$

En el resultado anterior, que las cuantificaciones sean acotadas es indispensable. Considerando el razonamiento que se hizo con la cuantificación acotada $\exists x \in u\ \phi(x)$ (vamos a omitir los parámetros), gracias a que la cuantificación es acotada, todos los supremos se toman sobre elementos de dom(u). Si, en cambio, consideramos la cuantificación no acotada $\exists x\ \phi(x)$, ocurre lo siguiente:

$$[\![\exists x \phi(x)]\!]^{B'} = \bigvee_{u \in V^{(B')}} [\![\phi(u)]\!]^{B'} \qquad [\![\exists x \phi(x)]\!]^{B} = \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]^{B}$$

En ese caso el razonamiento anterior deja de ser válido, porque los supremos se toman sobre diferentes clases.

Con la noción que acabamos de desarrollar, podemos formalizar el esquema dado en la figura 3.1. Observamos que $2 = \{0, 1\}$ es subálgebra completa de cualquier B, por lo que el teorema y el corolario anteriores siempre se aplican para $V^{(2)}$. Teniendo esto en cuenta, asociaremos a cada punto de V un nombre de $V^{(2)} \subseteq V^{(B)}$. Específicamente, a cada $x \in V$ le asociamos:

$$\hat{x} \ := \ \{(\hat{y}, 1) \ / \ y \in x\}$$

Es una definición por recursión en la relación bien fundada $y \in x$ [3]. Observemos que por el teorema 3.4.2, para cada $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} [\![\hat{x} \in \hat{y}]\!]^B &= [\![\hat{x} \in \hat{y}]\!]^2 \in 2 \\ [\![\hat{x} = \hat{y}]\!]^B &= [\![\hat{x} = \hat{y}]\!]^2 \in 2 \end{aligned}$$

A los nombres de $V^{(B)}$ que son $\hat{x}$ para algún $x \in V$ les llamamos *estándar*. El siguiente teorema es sobre propiedades de los nombres estándar.

Teorema 3.4.4. *1. Dados $x \in V$ y $u \in V^{(B)}$,*

$$[\![u \in \hat{x}]\!] \ = \ \bigvee_{z \in x} [\![u = \hat{z}]\!]$$

2. Dados $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} x \in y \ &\Leftrightarrow \ V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y} \\ x = y \ &\Leftrightarrow \ V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y} \end{aligned}$$

3. El mapa $x \mapsto \hat{x}$ es inyectivo de V en $V^{(2)}$.

[3] Una relación R es bien fundada si no existe una secuencia infinita $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que $x_{n+1} R x_n$ para cada $n \in \omega$

4. $\forall u \in V^{(2)}\ \exists! x \in V,\ V^{(B)} \models u = \hat{x}$

5. Para cada $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ *y* $x_1, \ldots, x_n \in V$*,*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow V^{(2)} \models \phi(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$$

y si ϕ *es de clase* Π_0 *(con equivalencia en deducción natural):*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow V^{(B)} \models \phi(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$$

Demostración. **(1).** Sean $x \in V$ y $u \in V^{(B)}$.

$$[\![u \in \hat{x}]\!] = \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(\hat{x})} (\hat{x}(y) \wedge [\![u = y]\!]) = \bigwedge_{z \in x} (1 \wedge [\![u = \hat{z}]\!])$$

Pues $\hat{x}$ es función constante 1 con dominio $\{\hat{z} \ / \ z \in x\}$

(2). $x \in y \ \Rightarrow \ V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y}$ se deduce del ítem (1). Por otra parte, $x = y \ \Rightarrow \ V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y}$ se deduce de que $V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{x}$ y sustitución de los iguales. Para probar los recíprocos usaremos inducción en V, sobre la relación bien fundada $\in$. El predicado de inducción es el siguiente:

$$\begin{aligned} P(y) \ := \ \forall x \in V(\quad & V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y} \ \Rightarrow x \in y \ \wedge \\ & V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y} \ \Rightarrow x = y \ \wedge \\ & V^{(B)} \models \hat{y} \in \hat{x} \ \Rightarrow y \in x \quad) \end{aligned}$$

Supongamos $\forall z \in y \ P(z)$. Queremos probar $P(y)$. Probaremos las implicaciones una a una.

Dado $x \in V$, supongamos $V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y}$. Queremos probar $x \in y$. Usando el ítem (1) y que $V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y}$, tenemos:

$$\bigvee_{z \in y} [\![\hat{x} = \hat{z}]\!] = 1$$

Como $[\![\hat{x} = \hat{z}]\!] \in \{0, 1\}$, la única forma de que el supremos sea 1 es que exista $z \in y$ tal que $[\![\hat{x} = \hat{z}]\!] = 1$. Usando la hipótesis inductiva con z, tenemos $z = x$. Por ende, $x \in y$.

Dado $x \in V$, supongamos $V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y}$. Queremos probar $x = y$. Como $V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y}$, tenemos:

$$\bigwedge_{z \in x} [\![\hat{z} \in \hat{y}]\!] = 1 \quad \text{y} \quad \bigwedge_{z \in y} [\![\hat{z} \in \hat{x}]\!] = 1$$

Equivalentemente,

$$\forall z \in x \ V^{(B)} \models \hat{z} \in \hat{y} \tag{3.6}$$

$$\forall z \in y \ V^{(B)} \models \hat{z} \in \hat{x} \tag{3.7}$$

Acabamos de probar $\forall x \ (V^{(B)} \models \hat{x} \in \hat{y} \ \Rightarrow x \in y)$. Podemos instanciarlo con cada $z \in x$, y junto con 3.6 afirmar que $\forall z \in x, \ z \in y$. Por otra parte, usando la tercer implicación de la hipótesis inductiva junto con 3.7 tenemos $\forall z \in y, \ z \in x$. Por extensionalidad, $y = x$.

Dado $x \in V$, supongamos $V^{(B)} \models \hat{y} \in \hat{x}$. Queremos probar $y \in x$. Análogamente a la primera implicación, tenemos:

$$\bigvee_{z \in x} [\![\hat{y} = \hat{z}]\!] = 1$$

Del mismo modo que hicimos para la primera implicación, obtenemos $z \in x$ tal que $[\![\hat{y} = \hat{z}]\!] = 1$. Como probamos $\forall x \ (V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y} \ \Rightarrow x = y)$, podemos instanciarlo en z y concluir, obteniendo $z = y$, por lo que $y \in x$.

(3). Se trata de $(V^{(B)} \models \hat{x} = \hat{y}) \Rightarrow x = y$, lo cual acabamos de probar.

(4). La unicidad se deduce del ítem (2). Probaremos la existencia con el principio de inducción de $V^{(2)}$.

Supongamos $\forall v \in \mathrm{dom}(u) \exists x_v \in V \ [\![\hat{x_v} = v]\!] = 1$, donde usamos el esquema de remplazo. Definimos el siguiente $x \in V$:

$$x \ := \ \{x_v \ / \ u(v) = 1\}$$

Debemos probar $[\![u = \hat{x}]\!] = 1$.

$$[\![u = \hat{x}]\!] = \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} (u(v) \Rightarrow [\![v \in \hat{x}]\!]) \wedge \bigwedge_{y \in x} [\![\hat{y} \in u]\!]$$

Hay que probar que ambos ínfimos valen 1. Veamos el primero. Sea $v \in \mathrm{dom}(u)$ tal que $u(v) = 1$ (si es 0, es claro que la implicación vale 1). Hay que probar $[\![v \in \hat{x}]\!] = 1$.

$$[\![v \in \hat{x}]\!] = \bigvee_{y \in x} [\![v = \hat{y}]\!] = \bigvee_{u(w)=1} [\![v = \hat{x_w}]\!] \geq [\![v = \hat{x_v}]\!] = 1$$

Veamos que el segundo ínfimo también vale 1. Sea $y \in x$. Existe un $v \in \mathrm{dom}(u)$ tal que $u(v) = 1$ y $y = x_v$.

$$[\![\hat{y} \in u]\!] = [\![\hat{x_v} \in u]\!] = \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(u)} (u(w) \wedge [\![\hat{x_v} = w]\!]) \geq u(v) \wedge [\![\hat{x_v} = v]\!] = 1$$

(5). Se prueba por inducción en ϕ. Los casos base se deducen de los ítems (2) y (4) y del corolario 3.4.3. Los casos de conectivas son directos, por lo que veremos una cuantificación.

Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \exists x\ \psi(x, x_z, \ldots, x_n)$ y sean $x_1, \ldots, x_n \in V$. Para probar el directo, asumimos que se cumple $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Por ende, tenemos $x \in V$ tal que se cumple $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $V^{(2)} \models \psi(\hat{x}, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$, de lo que se deduce $V^{(2)} \models \exists x\ \psi(x, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$.

Para el recíproco observamos lo siguiente.

$$[\![\exists x \psi(x, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})]\!] = \bigvee_{x \in V} [\![\psi(\hat{x}, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})]\!] = 1$$

Como $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})]\!] \in \{0, 1\}$, podemos afirmar que existe un $x \in V$ tal que $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})]\!] = 1$. Por hipótesis inductiva, $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y por lo tanto $\exists x\ \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$.

El caso de la fórmula restringida se deduce del corolario 3.4.3. $\square$

3.5. Mezclas y el principio del máximo

En esta sección vamos a introducir el concepto de mezcla de B-nombres, que se puede ver como el análogo de la noción de combinación lineal en álgebra lineal. Una buena intuición es considerar a las mezclas de B-nombres como combinaciones booleanas de dichos B-nombres.

Definición 3.5.1 (Mezcla). *Dados $\{a_i \ /\ i \in I\} \subseteq B$ y $\{u_i \ /\ i \in I\} \subseteq V^{(B)}$, definimos:*

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i$$

como el $u \in V^{(B)}$ cuyo dominio es:

$$dom(u) \ = \ \bigcup_{i \in I} dom(u_i)$$

y para cada $z \in dom(u)$,

$$u(z) \ = \ \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge [\![z \in u_i]\!])$$

Cuando la mezcla es de dos elementos, escribimos $a \cdot u + b \cdot v$. Nos interesará hacer mezclas con ciertas familias $\{a_i\} \subseteq B$ particulares. Para eso haremos las siguientes definiciones.

Definición 3.5.2 (anticadenas y particiones de la unidad)**.** *Decimos que* $A \subseteq B$ *es una* ***anticadena*** *si y solo si para cada* $a, b \in A$ *distintos, tenemos* $a \wedge b = 0$.

Decimos que $A \subseteq B$ *es una* ***partición de la unidad*** *si y solo si es una anticadena y* $\bigvee A = 1$.

El siguiente lema justifica el uso de la palabra "mezcla", bajo ciertas condiciones que se cumplen en particular para anticadenas. Intuitivamente, $\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i$ se comporta como mezclar los u_i, cada uno con proporción al menos a_i, en el sentido de que $[\![\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i = u_i]\!] \geq a_i$

Lema 3.5.3 (de mezclas)**.** *Sean* $\{u_i \ / \ i \in I\} \subseteq V^{(B)}$ *y* $\{a_i \ / \ i \in I\} \subseteq B$ *tal que para cada* $i, j \in I$*, se cumple* $a_i \wedge a_j \leq [\![u_i = u_j]\!]$*. Si tomamos* $u = \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i$*, entonces para cada* $i \in I$*,*

$$a_i \leq [\![u = u_i]\!]$$

Demostración. Recordando la definición de interpretación de igualdad (3.2), tenemos que probar dos cosas:

1. $a_i \leq \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} (u(z) \Rightarrow [\![z \in u_i]\!])$
2. $a_i \leq \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u_i)} (u_i(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!])$

(1) Sea $z \in \mathrm{dom}(u)$, queremos probar $a_i \leq u(z) \Rightarrow [\![z \in u_i]\!]$, o equivalentemente, $a_i \wedge u(z) \leq [\![z \in u_i]\!]$

$$\begin{aligned} a_i \wedge u(z) &= a_i \wedge \bigvee_{j \in I} (a_j \wedge [\![z \in u_j]\!]) \\ &= \bigvee_{j \in I} (a_i \wedge a_j \wedge [\![z \in u_j]\!]) \\ &\leq \bigvee_{j \in I} ([\![u_i = u_j]\!] \wedge [\![z \in u_j]\!]) \\ &\leq \bigvee_{j \in I} ([\![z \in u_i]\!]) \ = \ [\![z \in u_i]\!] \end{aligned}$$

En la primera desigualdad se utilizó la hipótesis que cumple la familia $\{a_i \ / \ i \in I\}$.

(2) Sea $z \in \mathrm{dom}(u_i)$, queremos probar $a_i \leq u_i(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!]$, o equivalentemente, $a_i \wedge u_i(z) \leq [\![z \in u]\!]$

$$[\![z \in u]\!] \ \geq \ u(z) = \bigvee_{j \in I} (a_j \wedge [\![z \in u_j]\!]) \ \geq \ a_i \wedge [\![z \in u_i]\!] \ \geq \ a_i \wedge u_i(z) \quad \square$$

Recordemos que la interpretación de las cuantificaciones existenciales no acotadas es:

$$[\![\exists x \phi(x)]\!] \;=\; \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(u)]\!]$$

Utilizando mezclas, probaremos que tales supremos siempre son máximos (se alcanzan por algún elemento de $V^{(B)}$).

Teorema 3.5.4 (principio del máximo)**.** *Para cualquier B-fórmula $\phi(x)$ existe un $u \in V^{(B)}$ tal que*

$$[\![\exists x\ \phi(x)]\!] \;=\; [\![\phi(u)]\!]$$

Demostración. Recordar que $[\![\exists x\ \phi(x)]\!] = \sup\{[\![\phi(u)]\!] \ / \ u \in V^{(B)}\}$. Dado que $\{[\![\phi(u)]\!] \ / \ u \in V^{(B)}\}$ es un conjunto (está incluido en B), utilizando el teorema de Zermelo (teorema 1.1.3) tenemos un ordinal α tal que:

$$\{[\![\phi(u)]\!] \ / \ u \in V^{(B)}\} \;=\; \{[\![\phi(u_\beta)]\!] \ / \ \beta < \alpha\}$$

Por ende,

$$[\![\exists x\ \phi(x)]\!] \;=\; \bigvee_{\beta<\alpha} [\![\phi(u_\beta)]\!]$$

Definimos la siguiente familia de elementos de B.

$$a_\beta \;:=\; [\![\phi(u_\beta)]\!] \;-\; \bigvee_{\gamma<\beta} [\![\phi(u_\gamma)]\!]$$

Donde $x - y \;\equiv\; x \wedge y^*$. Tenemos que $\{a_\beta \ / \ \beta < \alpha\}$ es una anticadena y cumple $a_\beta < [\![\phi(u_\beta)]\!]$ para cada $\beta < \alpha$.

Definimos

$$u \;:=\; \sum_{\beta<\alpha} a_\beta \cdot u_\beta$$

Por el lema 3.5.3, para cada $\beta < \alpha$ tenemos que $a_\beta \leq [\![u = u_\beta]\!]$ Veamos que $[\![\exists x\ \phi(x)]\!] \;=\; [\![\phi(u)]\!]$.

La desigualdad $[\![\exists x\ \phi(x)]\!] \;\geq\; [\![\phi(u)]\!]$ es directa, por la definición de $[\![\exists x\ \phi(x)]\!]$. Veamos la otra. Tomamos un $\beta < \alpha$ genérico.

$$[\![\phi(u)]\!] \geq [\![u = u_\beta]\!] \wedge [\![\phi(u_\beta)]\!] \geq a_\beta \wedge a_\beta = a_\beta$$

Por ende

$$[\![\phi(u)]\!] \geq \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \overset{*}{=} \bigvee_{\beta<\alpha} [\![\phi(u_\beta)]\!] = [\![\exists x\ \phi(x)]\!]$$

Resta justificar la igualdad *, lo que haremos por inducción transfinita con predicado de inducción:

$$\mathrm{P}(\eta) \; := \; \bigvee_{\beta<\eta} a_\beta = \bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!]$$

Caso 0. Es directo porque ambos lados de la igualdad dan vacío.
Caso sucesor.

$$\bigvee_{\beta<\eta+1} a_\beta = a_\eta \vee \bigvee_{\beta<\eta} a_\beta \overset{\mathrm{HI}}{=} a_\eta \vee \bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!] = \left([\![\phi(u_\eta)]\!] \wedge (\bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!])^* \right) \vee \bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!]$$

Utilizando la definición de a_η se llega a:

$$\left([\![\phi(u_\eta)]\!] \wedge (\bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!])^* \right) \vee \bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!]$$

Aplicando propiedades de las operaciones de álgebras booleanas se llega a:

$$[\![\phi(u_\eta)]\!] \wedge (\bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\beta)]\!]) \; = \; \bigvee_{\beta<\eta+1} [\![\phi(u_\beta)]\!]$$

Caso límite. Se deduce de la siguiente cadena de igualdades:

$$\bigvee_{\beta<\eta} a_\beta \; = \; \bigvee_{\beta<\eta} \bigvee_{\gamma<\beta} a_\gamma \; \overset{\mathrm{HI}}{=} \; \bigvee_{\beta<\eta} \bigvee_{\gamma<\beta} [\![\phi(u_\gamma)]\!] \; = \; \bigvee_{\beta<\eta} [\![\phi(u_\gamma)]\!] \qquad \square$$

El siguiente es un corolario técnico que será útil en la próxima sección.

Corolario 3.5.5. *Sea ϕ una B-fórmula tal que $V^{(B)} \models \exists x \phi(x)$.*

1. *Para cada $v \in V^{(B)}$ existe un $u \in V^{(B)}$ tal que cumple $[\![\phi(u)]\!] = 1$ y $[\![\phi(v)]\!] = [\![u = v]\!]$*

2. *Si $\psi(x)$ es otra B-fórmula tal que para cada $u \in V^{(B)}$ tenemos que $V^{(B)} \models \phi(u)$ implica $V^{(B)} \models \psi(u)$, entonces*

$$V^{(B)} \models \forall x(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$$

Demostración. **(1).** Mediante el principio del máximo obtenemos $w \in V^{(B)}$ tal que $[\![\phi(w)]\!] = 1$. Definamos $b := [\![\phi(v)]\!]$ y $u := b \cdot v + b^* \cdot w$. Usando el lema 3.5.3 tenemos:

$$[\![u = v \vee u = w]\!] = [\![u = v]\!] \vee [\![u = w]\!] \geq b \vee b^* = 1$$

por lo que

$$[\![\phi(u)]\!] = ([\![\phi(v)]\!] \wedge [\![u = v]\!]) \vee ([\![u = w]\!] \wedge [\![\phi(w)]\!]) = b \vee b^* = 1$$

Resta ver $[\![u = v]\!] = [\![\phi(v)]\!]$. Ya tenemos $[\![u = v]\!] \geq [\![\phi(v)]\!]$ nuevamente por el lema 3.5.3. La otra desigualdad es por lo siguiente:

$$[\![u = v]\!] = [\![u = v \wedge \phi(u)]\!] \leq [\![\phi(v)]\!]$$

(2). Sea $v \in V^{(B)}$. Queremos probar $\phi(u) \leq \psi(u)$. Utilizando el ítem (1), tomamos $u \in V^{(B)}$ tal que $[\![\phi(u)]\!] = 1$ y $[\![u = v[\![= [\![\phi(v)]\!]$. Por hipótesis, tenemos $[\![\psi(v)]\!] = 1$. Usando esto, tenemos:

$$[\![\phi(v)]\!] = [\![u = v]\!] = [\![u = v \wedge \psi(v)]\!] \leq [\![\psi(v)]\!] \qquad \square$$

Terminaremos esta sección con la siguiente definición, que será de utilidad más adelante (en particular, para probar que el axioma de elección se cumple en $V^{(B)}$).

Definición 3.5.6 (núcleo)**.** *Sea $u \in V^{(B)}$. Decimos que un conjunto de B-nombres $U \subseteq V^{(B)}$ es un* núcleo *de u si*

1. *Para cada $y \in U$, tenemos $[\![y \in u]\!] = 1$.*
2. *Para cada $x \in V^{(B)}$ tal que $[\![x \in u]\!] = 1$, existe un único $y \in U$ tal que $[\![x = y]\!] = 1$*

Lema 3.5.7. *Cada $u \in V^{(B)}$ tiene núcleo.*

Demostración. Sea $u \in V^{(B)}$. Dado $y \in V^{(B)}$ definimos:

$$f_y \ := \ \{(z, [\![z = y]\!]) \ / \ z \in \mathrm{dom}(u)\}$$

Como para cada $y \in V^{(B)}$ tenemos $f_y \in B^{\mathrm{dom}(u)}$. Intuitivamente, es una relación funcional entre $V^{(B)}$ y $B^{\mathrm{dom}(u)}$. Podemos tomar la relación inversa y aplicar el axioma de remplazo, para obtener $w \subseteq V^{(B)}$ tal que para cada $y \in V^{(B)}$ existe $x \in w$ tal que $f_y = f_x$, es decir:

$$\forall z \in \mathrm{dom}(u), \ [\![z = y]\!] = [\![z = x]\!] \qquad (3.8)$$

Definimos $U \subseteq V^{(B)}$ como una conjunto de representantes de la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow [\![x = y]\!] = 1$ en $\{x \in w \ / \ [\![x \in u]\!] = 1\}$. Por el conjunto del cual se toma la relación de equivalencia, tenemos el punto (1) de la definición de núcleo. Para ver el punto (2), tomemos $y \in V^{(B)}$ tal que $[\![y \in u]\!] = 1$. Tenemos $x \in w$ que cumple 3.8. Observamos lo siguiente:

$$[\![y \in u]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} (u(z) \wedge [\![z = y]\!]) = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} (u(z) \wedge [\![z = x]\!]) = [\![x \in u]\!]$$

Por ende, $[\![x \in u]\!] = 1$ y existe $x' \in U$ tal que $[\![x = x']\!] = 1$. Si probamos $[\![x = y]\!] = 1$ terminamos la demostración. Observemos lo siguiente:

$$[\![\forall z \in u(z = y \Leftrightarrow z = x)]\!] = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \Rightarrow ([\![z = y]\!] \Leftrightarrow [\![z = x]\!])$$

Por (3.8) tenemos que $[\![z = y]\!] \Leftrightarrow [\![z = x]\!] = 1$ para cada $z \in \mathrm{dom}(u)$, por lo que $[\![\forall z \in u(z = y \Leftrightarrow z = x)]\!] = 1$. Instanciando por ejemplo $z = y$, tenemos $[\![y = x]\!] = 1$. □

Dado $u \in V^{(B)}$ hay una biyección entre cada par de núcleos de u. Por otra parte, debido al principio del máximo, tenemos que si $V^{(B)} \models u \neq \varnothing$ entonces cualquier núcleo de u es no vacío.

El siguiente lema será de utilidad más adelante (específicamente, en la prueba de que el axioma de elección es válido en $V^{(B)}$).

Lema 3.5.8. *Sea $u \in V^{(B)}$ tal que $V^{(B)} \models u \neq \emptyset$ y sea U un núcleo de u. Para cada $x \in V^{(B)}$ hay un $y \in U$ tal que $[\![x = y]\!] = [\![x \in u]\!]$*

Demostración. Se deduce del corolario 3.5.5 con $\phi(y) \equiv y \in u$ y del ítem (2) de la definición de núcleo. □

3.6. Adecuación de los axiomas de ZFC

El objetivo de esta sección es demostrar que todos los teoremas de ZFC se cumplen en $V^{(B)}$, es decir: demostrar que si ZFC $\vdash \phi$, entonces $V^{(B)} \models \phi$. Como si LK $\vdash \phi$, entonces $V^{(B)} \models \phi$ (por el teorema 3.3.6), basta con demostrar que todos los axiomas de ZFC se cumplen en $V^{(B)}$.

Lema 3.6.1 (Axioma de extensionalidad). *El axioma de extensionalidad:*

$$\forall x, y\ (\forall z(z \in y \ \Leftrightarrow z \in x) \Rightarrow x = y)$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Usamos la siguiente formulación equivalente:

$$\forall x, y\ ((\forall z \in x\ (z \in y)\ \wedge \forall z \in y\ (z \in x)) \Rightarrow x = y)$$

Con esa formulación, se deduce directamente de (3.2) y el corolario 3.3.7. □

Lema 3.6.2 (Esquema de comprensión). *El esquema de comprensión*[4]*:*

$$\forall x \exists y (\forall z \in y\ (z \in x \wedge \psi(z))\ \wedge\ \forall z \in x\ (\psi(z) \Rightarrow z \in y))$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Tomemos una fórmula $\psi(z)$ y probemos al axioma de comprensión correspondiente.

Sea $u \in V^{(B)}$. Buscamos $v \in V^{(B)}$ tal que lo siguiente vale 1.

$$\bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} (v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!] \wedge [\![\psi(y)]\!])\ \wedge \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} (u(x) \Rightarrow ([\![\psi(x)]\!] \Rightarrow [\![x \in v]\!])) \tag{3.9}$$

Definimos $v \in V^{(B)}$ con $\mathrm{dom}(v) = \mathrm{dom}(u)$ y para cada $y \in \mathrm{dom}(v)$:

$$v(y)\ :=\ u(y) \wedge [\![\psi(y)]\!]$$

Tenemos que ver que los dos supremos de 3.9 son 1. Comencemos por el primero.

Sea $y \in \mathrm{dom}(v)$. Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!] \wedge [\![\psi(y)]\!] = 1 &\ \Leftrightarrow \\ v(y) \leq [\![y \in u]\!] \wedge [\![\psi(y)]\!] &\ \Leftrightarrow \\ u(y) \wedge [\![\psi(y)]\!] \leq [\![y \in u]\!] \wedge [\![\psi(y)]\!] & \end{aligned}$$

Concluímos usando que $u(y) \leq [\![y \in u]\!]$ por el ítem dos del lema 3.3.5.

Probemos ahora que el otro supremo de 3.9 es 1. Sea $x \in \mathrm{dom}(u)$. Observar que $u(x) \Rightarrow ([\![\psi(x)]\!] \Rightarrow [\![x \in v]\!]) = u(x) \wedge [\![\psi(x)]\!] \Rightarrow [\![x \in v]\!]$. Concluimos con lo siguiente: $u(x) \wedge [\![\psi(x)]\!] = v(x) \leq [\![x \in v]\!]$. □

Lema 3.6.3 (Esquema de remplazo). *El esquema de remplazo*[5]*:*

$$\forall u (\forall x \in u \exists y\ \phi(x, y)\ \Rightarrow\ \exists v \forall x \in u \exists y \in v\ \phi(x, y))$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Tomemos una fórmula $\phi(x, y)$ y probemos el axioma de remplazo correspondiente.

[4]Recordar que los esquemas son conjuntos de axiomas, en este caso parametrizados por fórmulas.

[5]Notar que esta presentación es más fuerte que la de la introducción. No obstante, considerando el axioma de elección son equivalentes.

Sea $u \in V^{(B)}$. Queremos probar:

$$[\![\forall x \in u \exists y\ \phi(x,y)]\!] \ \leq\ [\![\exists v \forall x \in u \exists y \in v\ \phi(x,y)]\!]$$

Observemos que:

$$[\![\forall x \in u \exists y\ \phi(x,y)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![\exists y\ \phi(x,y)]\!]$$

Para cada $x \in \mathrm{dom}(u)$ tenemos que $[\![\exists y\ \phi(x,y)]\!] = [\![\phi(x,v_x)]\!]$, usando el principio del máximo (3.5.4) y el esquema de remplazo (de V) para construir $x \mapsto v_x$. Definimos el siguiente $v \in V^{(B)}$:

$$v \ :=\ \{v_x \ / \ x \in \mathrm{dom}(u)\} \times \{1\}$$

Observamos lo siguiente, dado $x \in \mathrm{dom}(u)$:

$$[\![\exists y \in v\ \phi(x,y)]\!] = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(y) \wedge [\![\phi(x,y)]\!] \geq v(v_x) \wedge [\![\phi(x,v_x)]\!] = [\![\phi(x,v_x)]\!]$$

por lo que tenemos la siguiente cadena de desigualdades, con la que terminamos la demostración:

$$\begin{aligned}
[\![\forall x \in u \exists y\ \phi(x,y)]\!] \ &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![\phi(x,v_x)]\!] \\
&\leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![\exists y \in v\ \phi(x,y)]\!] \\
&= [\![\forall x \in u \exists y \in v\ \phi(x,y)]\!] \\
&(\leq [\![\exists v \forall x \in u \exists y \in v\ \phi(x,y)]\!])
\end{aligned}$$ □

Lema 3.6.4 (Axioma de unión)**.** *El axioma de unión:*

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \ \Leftrightarrow\ (\exists x \in u\ y \in x))$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Sea $u \in V^{(B)}$. Definimos $v \in V^{(B)}$ con:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom(v)} \ &:= \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(u)} \mathrm{dom}(x) \\
v(y) \ &:= [\![\exists x \in u\ y \in x]\!] \quad \text{con } y \in \mathrm{dom}(v)
\end{aligned}$$

Tenemos que probar lo siguiente:

1. $[\![\forall y \in v \exists x \in u,\ y \in x]\!] = 1$

2. $[\![\forall x \in u \forall y \in x,\ y \in v]\!] = 1$

Donde usamos que $(\exists x \in u\ \phi(x) \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \forall x \in u(\phi(x) \Rightarrow \psi)$ es cierto en la lógica clásica.

1.

$$[\![\forall y \in v \exists x \in u,\ y \in x]\!] = \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(y) \Rightarrow [\![\exists x \in u\ y \in x]\!]$$

Se cumple por la definición de $v(y)$.

2.

$$\begin{aligned}
[\![\forall x \in u \forall y \in x,\ y \in v]\!] &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} (x(y) \Rightarrow [\![y \in v]\!]) \\
&= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} u(x) \wedge x(y) \Rightarrow [\![y \in v]\!]
\end{aligned}$$

Sean $x \in \mathrm{dom}(u)$ e $y \in \mathrm{dom}(x)$. Queremos $u(x) \wedge x(y) \leq [\![y \in v]\!]$. Observemos que por la definición de $\mathrm{dom}(v)$, tenemos $y \in \mathrm{dom}(v)$, por lo que podemos razonar de la siguiente forma:

$$[\![y \in v]\!] \geq v(y) = \bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(u)} u(x') \wedge [\![y \in x']\!] \geq u(x) \wedge [\![y \in x]\!] \geq u(x) \wedge x(y)$$

□

Lema 3.6.5 (Axioma de potencia)**.** *El axioma de potencia:*

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \Leftrightarrow \forall x \in y,\ x \in u)$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. El axioma de potencia es una fórmula de clase Π_3 (bajo equivalencia en deducción natural), lo cual puede ser una causa de que la prueba sea más sutil. Tomamos $u \in V^{(B)}$. Definimos $v \in V^{(B)}$ con:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom(v)} &:= B^{\mathrm{dom}(u)} \\
v(y) &:= [\![\forall x \in y\ x \in u]\!] = [\![y \subseteq u]\!] \quad \text{para cada } y \in \mathrm{dom}(v)
\end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior, tenemos que probar dos igualdades:

1. $[\![\forall y \in v,\ y \subseteq u]\!] = 1$

2. $[\![\forall y(y \subseteq u \Rightarrow y \in v)]\!] = 1$

La primera se demuestra de forma análoga a como se hizo para el axioma de unión. Sin embargo, para la segunda no será el caso, pues para el axioma de unión pudimos acotar la cuantificación $\forall y$, lo cual no podremos hacer aquí; nos vemos obligados a trabajar con un $y \in V^{(B)}$ genérico. Por ende, fijemos $y \in V^{(B)}$ cualquiera. Queremos probar $[\![y \subseteq u]\!] \leq [\![y \in v]\!]$.

A partir de y y u vamos a construir un $y' \in V^{(B)}$ que nos será de utilidad.

$$\begin{aligned} \text{dom(y')} &:= \text{dom}(u) \\ y'(x) &:= [\![x \in y]\!] \quad \text{con } x \in \text{dom}(y') \end{aligned}$$

Intuitivamente, y' sería $u \cap y$. Esta intuición se ve justificada también por la siguiente cuenta. Sea $x \in V^{(B)}$

$$\begin{aligned} [\![x \in u \wedge x \in y]\!] &= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (u(z) \wedge [\![x = z]\!] \wedge [\![x \in y]\!]) \\ &\leq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} ([\![x = z]\!] \wedge [\![x \in y]\!]) \\ &\leq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} ([\![x = z]\!] \wedge [\![z \in y]\!]) \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} ([\![x = z]\!] \wedge y'(z)) \;=\; [\![x \in y']\!] \end{aligned}$$

por ende tenemos:

$$[\![\forall x \; (x \in u \wedge x \in y \Rightarrow x \in y')]\!] = 1 \tag{3.10}$$

La forma como queremos usar y' es probando las siguientes dos desigualdades, que implican $[\![y \subseteq u]\!] \leq [\![y \in v]\!]$.

(a) $[\![y \subseteq u]\!] \leq [\![y = y']\!]$

(b) $[\![y \subseteq u]\!] \leq [\![y' \in v]\!]$

Para probar **(a)** vamos a tener que demostrar antes $[\![y' \subseteq y]\!] = 1$, lo cual también concuerda con la intuición de que y' es la intersección de y con u. Sea $x \in V^{(B)}$.

$$\begin{aligned} [\![x \in y']\!] &= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (y'(z) \wedge [\![z = x]\!]) \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} ([\![z \in y]\!] \wedge [\![z = x]\!]) \\ &\leq [\![x \in y]\!] \end{aligned}$$

Con eso probamos que $[\![y' \subseteq y]\!] = 1$. Usando eso y (3.10), vamos a probar **(a)**.

$$\begin{aligned} [\![y \in u]\!] &\leq [\![\forall x \ (x \in u \wedge x \in y \Rightarrow x \in y') \wedge y' \subseteq y \wedge y \subseteq u]\!] \\ &\leq [\![y = y']\!] \end{aligned}$$

Donde usamos la adecuación del axioma de extensionalidad y de la deducción natural. Solo resta probar **(b)**, donde usaremos la definición del nombre v.

$$\begin{aligned} [\![y \subseteq u]\!] &= [\![\forall x(x \in y \Rightarrow x \in u)]\!] \\ &= \bigwedge_{x \in V^{(B)}} ([\![x \in y]\!] \Rightarrow [\![x \in u]\!]) \\ &\leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(y')} (y'(x) \Rightarrow [\![x \in u]\!]) \\ &= [\![\forall x \in y', \ x \in u]\!] \ = \ [\![y' \subseteq u]\!] \ = \ v(y') \ \leq \ [\![y' \in v]\!] \end{aligned}$$

□

En la demostración del lema anterior construimos el nombre potencia v de un $u \in V^{(B)}$. Vamos a llamarlo $\mathcal{P}^{(B)}(u)$ Por ende tenemos que $\mathcal{P}^{(B)}(u)$ es el $v \in V^{(B)}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{dom(v)} &:= B^{\mathrm{dom}(u)} \\ v(y) &:= [\![y \subseteq u]\!] \quad \text{con } y \in \mathrm{dom}(v) \end{aligned}$$

Lema 3.6.6 (Axioma del infinito)**.**

$$\exists u \phi(u) \quad \textit{donde} \quad \phi(u) \equiv \varnothing \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u, \ x \in y$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Utilizamos la siguiente formulación lógicamente equivalente (considerando el significado de $\varnothing$).

$$\exists u \phi(u) \quad \text{donde} \quad \phi(u) \equiv (\exists x \in u \forall y \in x \ y \neq y) \wedge \forall x \in u \exists y \in u, \ x \in y$$

Con esa formulación tenemos que $\phi(u)$ es una fórmula restringida, bajo equivalencia en deducción natural.

Tenemos $\phi(\omega)$, por lo que el ítem 5 del teorema 3.4.4 nos da $V^{(B)} \models \phi(\hat{\omega})$. Consecuentemente, $V^{(B)} \models \exists u \ \phi(u)$ □

Lema 3.6.7 (Axioma de regularidad)**.** *El axioma de regularidad:*

$$\forall a \ (a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \in a \ (b \cap a = \varnothing))$$

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Utilizaremos el siguiente esquema de inducción conjuntista, que es equivalente al axioma de regularidad:

$$\forall x(\forall y \in x\ \phi(y) \ \Rightarrow\ \phi(x)) \ \Rightarrow\ \forall x\ \phi(x)$$

Fijamos ϕ y definimos $b := [\![\forall x(\forall y \in x\ \phi(y) \ \Rightarrow\ \phi(x))]\!]$. Dado $x \in V^{(B)}$ genérico, queremos probar que $b \leq [\![\phi(x)]\!]$. Lo probaremos por el principio de inducción (lema 3.2.2).

Supongamos que $\forall y \in \mathrm{dom}(x),\ b \leq [\![\phi(y)]\!]$. Entonces:

$$b \leq \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} [\![\phi(y)]\!] \leq \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} (x(y) \Rightarrow [\![\phi(y)]\!]) = [\![\forall y \in x\ \phi(y)]\!]$$

Por ende tenemos

$$b \leq [\![\forall y \in x\ \phi(y)]\!]$$

Sin embargo, por la definición de b tenemos

$$b \leq [\![\forall y \in x\ \phi(y) \ \Rightarrow\ \phi(x)]\!]$$

Juntando ambas desigualdades llegamos a lo buscado:

$$b \leq [\![\phi(x)]\!]$$ □

Solo queda demostrar que se cumple el axioma de elección. Por más que parezca la más compleja de sus formulaciones equivalentes, vamos a utilizar el lema de Zorn (1.1.4).

Lema 3.6.8 (Axioma de elección)**.** *El axioma de elección:*

Todo conjunto A tiene función de elección

se cumple en $V^{(B)}$.

Demostración. Como se mencionó, utilizaremos el Lema de Zorn (1.1.4). Para simplificar el enunciado diremos que un conjunto parcialmente ordenado es *inductivo* si toda cadena está acotada superiormente. De esta forma el enunciado del lema de Zorn es:

Si $(X, \leq_X)$ *es un conjunto parcialmente ordenado inductivo, entonces tiene elemento maximal*

Por el ítem dos del corolario 3.5.5, alcanza con tomar $X, \leq_X \in V^{(B)}$ y probar que «$V^{(B)} \models (X, \leq_X)$ *es un conjunto parcialmente ordenado inductivo* *no vacío*» implica «$V^{(B)} \models (X, \leq_X)$ *tiene elemento maximal*». Supongamos el antecedente.

Tomamos $Y \subseteq V^{(B)}$ núcleo de X. Definimos el siguiente orden en Y:

$$y \leq_Y y' \;\Leftrightarrow\; [\![y \leq_X y']\!] = 1$$

Vamos a probar que es inductivo, para lo cual tomamos C una cadena en Y. Definimos $C' := C \times \{1\} \in V^{(B)}$. Tenemos:

$$V^{(B)} \models C' \textit{ es una cadena en } X$$

Como $(X, \leq_X)$ es inductiva, $V^{(B)} \models \exists u \in X$ *u es cota superior de C'*. Por el principio del máximo, tenemos $u \in V^{(B)}$ cota superior de C' en X. Tomando $w \in Y$ tal que $[\![w = u]\!] = 1$, tenemos que w es cota superior de C en Y.

Acabamos de probar que $(Y, \leq_Y)$ es inductiva. Aplicamos el lema de Zorn de V para tomar un $c \in Y$ elemento maximal de $(Y, \leq_Y)$. Por definición de núcleo, tenemos $[\![c \in X]\!] = 1$. Terminaremos la demostración probando:

$$V^{(B)} \models c \textit{ es elemento maximal de } X$$

Es decir, $V^{(B)} \models \forall x(x \in X \wedge c \leq_X x \Rightarrow x = c)$. Sea $x \in V^{(B)}$. Mediante el lema 3.5.8 obtenemos $y \in Y$ tal que $[\![x \in X]\!] = [\![x = y]\!]$. Tomamos $a := [\![c \leq_X y]\!]$ y definimos:

$$v \;:=\; a \cdot y + a^* \cdot c$$

Por el lema de mezclas (3.5.3) tenemos lo siguiente:

$$[\![v = y \vee v = c]\!] = [\![v = y]\!] \vee [\![v = c]\!] \geq a \vee a^* = 1$$

Como además $[\![y \in X]\!] = [\![c \in X]\!] = 1$, concluimos $[\![v \in X]\!] = 1$. Por ende podemos tomar $z \in Y$ tal que $[\![v = z]\!] = 1$. Veamos que $[\![c \leq_X v]\!] = 1$.

Por una parte, tenemos $[\![v = y]\!] \wedge [\![c \leq_X y]\!] \leq [\![c \leq_X v]\!]$. Por otra parte, tenemos $[\![v = c]\!] \leq [\![c \leq_X v]\!]$ y por ende $[\![v = c]\!] \wedge [\![c \leq_X y]\!]^* \leq [\![c \leq_X v]\!]$. Juntando tenemos:

$$([\![v = y]\!] \wedge [\![c \leq_X y]\!]) \vee ([\![v = c]\!] \wedge [\![c \leq_X y]\!]^*) \leq [\![c \leq_X v]\!]$$

Por el lema 3.5.3, ambas conjunciones dan el segundo operando y queda:

$$[\![c \leq_X y]\!] \vee [\![c \leq_X y]\!]^* \leq [\![c \leq_X v]\!]$$

Con lo que tenemos que $[\![c \leq_X v]\!] = 1$.

De $\leq [\![c \leq_X v]\!] = 1$ y $[\![v = z]\!] = 1$, concluimos $[\![c \leq_X y]\!] = 1$, por lo que $c \leq_Y z$ y $c = z$ (sabiendo que c es maximal en $\leq_Y$). Veamos que se cumple $[\![c \leq_X y]\!] \leq [\![y = c]\!]$.

$$[\![c \leq_X y]\!] = a \leq [\![y = v]\!] = [\![y = v]\!] \wedge [\![v = z]\!] \leq [\![y = z]\!] = [\![y = c]\!]$$

Finalmente, observamos lo siguiente:

$$[\![c \leq_X x \wedge x \in X]\!] \leq [\![y = c]\!] \wedge [\![x \in X]\!] = [\![y = c]\!] \wedge [\![x = y]\!] \leq [\![x = c]\!]$$

Con la desigualdad anterior probamos que c es elemento maximal. $\square$

3.7. Ordinales y cardinales

Ordinales

En la sección anterior probamos que todos los teoremas de ZFC son válidos en los modelos booleanos. Esto nos permite mejorar el ítem 5 del teorema 3.4.4, sustituyendo la equivalencia en deducción natural por la equivalencia en ZFC (ver la sección 1.2, Jerarquía de Levy).

Corolario 3.7.1. *Para cada $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ y $x_1, \ldots, x_n \in V$,*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow V^{(2)} \models \phi(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$$

*y si ϕ es de clase Π_0 (con equivalencia en **ZFC**):*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow V^{(B)} \models \phi(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$$

Recordamos que la fórmula $\mathrm{On}(x)$ está definida como:

$$\begin{aligned} \mathrm{On}(x) \ := \ & x \text{ es transitivo} \\ & \text{y la pertenencia es un buen orden estricto en } x \end{aligned}$$

Bajo equivalencia en deducción natural, la fórmula no es restringida. Esto se debe al buen orden; es necesario hacer referencia al conjunto potencia, lo cual solo se puede hacer con cuantificaciones no acotadas, en el lenguaje base de ZFC. No obstante, bajo equivalencia en ZFC sí es restringida. Para esto necesitamos el siguiente lema. Recordamos que una relación R sobre un conjunto A es *conexa* si cumple:

$$\forall x, y \in A \ (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$$

Por otra parte, R es bien fundada si:

$$\forall P \subseteq A \ (\forall x \in A \ ((\forall y \in A \ yRx \Rightarrow y \in P) \Rightarrow x \in P) \Rightarrow P = A)$$

Lema 3.7.2. *En ZF, una relación es un buen orden estricto si y solo si es conexa y bien fundada.*

Para una prueba citamos [6]. Usando lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} ZFC \vdash \mathrm{On}(x) \;&\Leftrightarrow\; x \text{ es transitivo} \\ &\;\; \text{y la pertenencia es conexa y bien fundada en } x \\ &\Leftrightarrow\; x \text{ es transitivo} \\ &\;\; \text{y la pertenencia es conexa en } x \end{aligned}$$

donde quitamos la buena fundación de la pertenencia porque el axioma de regularidad la implica. Entonces, probamos que $\mathrm{On}(x)$ es restringida bajo equivalencia en ZFC, por lo que debido al corolario 3.7.1, tenemos que $[\![\mathrm{On}(\hat{\alpha})]\!] = 1$ para cada α ordinal. Concluimos que los representantes estándar de los ordinales de V, son ordinales en $V^{(B)}$; es decir, no se pierden ordinales al pasar a $V^{(B)}$.

A los nombres de la forma $\hat{\alpha}$, con α ordinal, les llamaremos *ordinales estándar*. En $V^{(B)}$ pueden haber otros ordinales; el siguiente teorema permite vincularlos con los ordinales estándar.

Teorema 3.7.3. *Para cada $u \in V^{(B)}$*

$$[\![On(u)]\!] \;=\; \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \hat{\alpha}]\!]$$

Demostración. Veamos que se cumplen ambas desigualdades.

$$[\![\mathrm{On}(u)]\!] \;\geq\; \bigvee_{\alpha \in \mathrm{On}} [\![u = \hat{\alpha}]\!] \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in \mathrm{On},\; [\![u = \hat{\alpha}]\!] \leq [\![\mathrm{On}(u)]\!]$$

Sea $\alpha \in \mathrm{On}$. La desigualdad buscada se obtiene de la siguiente forma, usando $[\![\mathrm{On}(\hat{\alpha})]\!] = 1$.

$$[\![u = \hat{\alpha}]\!] = [\![u = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{On}(\hat{\alpha})]\!] \leq \mathrm{On}(u)$$

Ahora debemos probar la otra desigualdad. Sea $x \in \mathrm{dom}(u)$. Definimos:

$$D_x \;:=\; \{\xi \in \mathrm{On} \;/\; [\![x = \hat{\xi}]\!] \neq 0\}$$

Queremos ver que el mapa $\xi \mapsto [\![x = \hat{\xi}]\!]$ es inyectivo de D_x en B. Sean $\xi, \eta \in D_x$ tal que $[\![x = \hat{\xi}]\!] = [\![x = \hat{\eta}]\!]$.

$$0 < [\![x = \hat{\xi}]\!] = [\![x = \hat{\xi}]\!] \wedge [\![x = \hat{\eta}]\!] \leq [\![\hat{\xi} = \hat{\eta}]\!]$$

Concluimos que $\xi = \eta$, por el ítem 2 de 3.4.4. Como B es un conjunto, también debe serlo D_x. Definimos el siguiente conjunto de ordinales:

$$D := \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(u)} D_x$$

Tomamos $\alpha_0 = \sup(D) + 1$. Tenemos $\forall x \in \mathrm{dom}(u)$ $[\![x = \hat{\alpha_0}]\!] = 0$. Por ende:

$$[\![\hat{\alpha_0} \in u]\!] = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} (u(x) \wedge [\![\hat{\alpha_0} = x]\!]) = 0$$

Por ser un teorema de ZF se cumple lo siguiente:

$$[\![\mathrm{On}(u)]\!] \leq [\![\hat{\alpha_0} \in u]\!] \vee [\![\hat{\alpha_0} = u]\!] \vee [\![u \in \hat{\alpha_0}]\!]$$

Como $[\![\hat{\alpha_0} \in u]\!] = 0$, tenemos:

$$[\![\mathrm{On}(u)]\!] \leq [\![\hat{\alpha_0} = u]\!] \vee [\![u \in \hat{\alpha_0}]\!] = (\bigvee_{\alpha < \alpha_0} [\![u = \hat{\alpha}]\!]) \vee [\![u = \hat{\alpha_0}]\!] \leq \bigvee_{\alpha \in \mathrm{On}} [\![u = \hat{\alpha}]\!]$$

□

Utilizando el teorema anterior se puede deducir que los ordinales generales de $V^{(B)}$ son mezclas de ordinales estándar con coeficientes que constituyen una partición de la unidad (ver [14]).

Cardinales

Recordamos que los cardinales son, por definición, ordinales que no están en biyección con ningún ordinal anterior:

$$\mathrm{Cn}(\kappa) \quad \equiv \quad \kappa \in \mathrm{On} \wedge \forall \alpha < \kappa (\neg \exists f : \alpha \to \kappa \text{ biyectiva})$$

Para cada $x \in V$ escribiremos $|x|$ para referirnos a su cardinal. Como la fórmula $|x| = |y|$ es Σ_1 bajo equivalencia en deducción natural[6], tenemos lo siguiente:

$$|x| = |y| \Rightarrow V^{(B)} \models |\hat{x}| = |\hat{y}| \tag{3.11}$$

Esto se deduce del ítem (5) de 3.4.4. Dada $\exists y\ \phi(y)$ una fórmula Σ_1 (donde $\phi(y)$ es restringida), asumamos que se cumple y tomemos un testigo $y \in V$. Por la propiedad mencionada podemos afirmar $V^{(B)} \models \phi(\hat{y})$ y por ende $V^{(B)} \models \exists y\ \phi(y)$.

[6] Es la existencia de una función biyectiva entre x e y.

Los siguientes dos teoremas vinculan la jerarquía de cardinales de V con la de $V^{(B)}$ para B genérico. Luego veremos una condición de B con la que tenemos una vinculación más fuerte.

Cuando escribimos $V^{(B)} \models u = \aleph_\alpha$ significa $V^{(B)} \models \phi_\aleph(u, \alpha)$, donde $\phi_\aleph(x, \alpha)$ es la fórmula que define la sucesión transfinita $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$.

Teorema 3.7.4. *1.* $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_0 = \aleph_0$

2. Para cada $\alpha \in On$
$$V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$$

Demostración. **(1)** Como la fórmula $x = \aleph_0$ es restringida bajo equivalencia en ZFC, se deduce del corolario 3.7.1. La forma de escribirla con cuantificaciones acotadas es la siguiente:

$$\begin{array}{rcll} \phi(x) & \equiv & \mathrm{On}(x) & \wedge \\ & & 0 \in x \wedge \forall y \in x \exists z \in x \ (y \in z) & \wedge \\ & & \forall y \in x (y = 0 \vee \exists z \in x \ (y = s(z))) & \end{array}$$

Estamos afirmando que x es un ordinal límite que solo contiene al 0 y a sucesores. Solo ω cumple esas propiedades.

(2) La probamos por inducción. El paso base es el ítem (1). Para el paso inductivo tomemos $\alpha \in \mathrm{On}$ y supongamos que $\forall \beta < \alpha$:

$$V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\beta \leq \aleph_{\hat{\beta}}$$

Sea $\xi < \aleph_\alpha$. Queremos probar $\hat{\xi} < \aleph_{\hat{\alpha}}$. Si $\xi < \aleph_0$ entonces $V^{(B)} \models \hat{\xi} < \hat{\aleph}_0$. Concluimos este caso observando $\hat{\aleph}_0 = \aleph_0 < \aleph_{\hat{\alpha}}$. Supongamos ahora $\xi \geq \aleph_0$. Tenemos $|\xi| = \aleph_\beta$ con $\beta < \alpha$ (pues α es cardinal). Por (3.11), tenemos que $V^{(B)} \models |\hat{\xi}| = \hat{\aleph}_\beta$. Por HI, $V^{(B)} \models |\hat{\xi}| \leq \aleph_{\hat{\beta}}$. Como $\beta < \alpha$, se cumple $\hat{\beta} < \hat{\alpha}$ y por ende $V^{(B)} \models |\hat{\xi}| < \aleph_{\hat{\alpha}}$. Por ende $V^{(B)} \models |\xi| < \aleph_{\hat{\alpha}}$. En suma, probamos que $\xi < \aleph_\alpha$ implica $\hat{\xi} < \aleph_{\hat{\alpha}}$.

Sea $\eta \in V^{(B)}$. Observamos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} [\![\eta \in \hat{\aleph}_\alpha]\!] & = & \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} [\![\eta = \hat{\xi}]\!] \\ & = & \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} ([\![\eta = \hat{\xi}]\!] \wedge [\![\hat{\xi} < \aleph_{\hat{\alpha}}]\!]) \\ & \leq & \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} [\![\eta < \aleph_{\hat{\alpha}}]\!] \\ & = & [\![\eta \in \aleph_{\hat{\alpha}}]\!] \end{array}$$

Por ende:

$$V^{(B)} \models \forall\eta(\eta \in \hat{\aleph}_\alpha \Rightarrow \eta \in \aleph_{\hat{\alpha}})$$

Finalmente, $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\alpha \subseteq \aleph_{\hat{\alpha}}$, o equivalentemente $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$. □

Teorema 3.7.5. *1. Para todo $\alpha < \omega$, se cumple $V^{(B)} \models Cn(\hat{\alpha})$*

2. Para todo $\alpha \in On$, si $V^{(B)} \models Cn(\hat{\alpha})$ entonces $Cn(\alpha)$

Demostración. **(1).** Por el primer ítem del teorema 3.7.4, se cumple con ω. Por otra parte, como $ZF \models \forall\alpha \in \omega\ \mathrm{Cn}(\alpha)$, tenemos

$$V^{(B)} \models \forall\alpha \in \hat{\omega}\ \mathrm{Cn}(\alpha)$$

Por ende:

$$\bigwedge_{\alpha\in\omega} [\![\mathrm{Cn}(\hat{\alpha})]\!] = 1$$

De lo que se deduce que para cada $\alpha \in \omega$, tenemos $[\![\mathrm{Cn}(\hat{\alpha})]\!] = 1$

(2). $\mathrm{Cn}(\alpha)$ es Π_1, por lo que $\neg\mathrm{Cn}(\alpha)$ es Σ_1. De eso deducimos que:

$$\neg\mathrm{Cn}(\alpha) \Rightarrow \neg V^{(B)} \models \mathrm{Cn}(\hat{\alpha})$$

Por contrarecíproco tenemos lo buscado. □

Con álgebra booleana B genérica no podemos probar el recíproco del ítem (2) del teorema 3.7.5, lo cual significa que algunos cardinales de V pueden perder su estatus de cardinal en el modelo booleano $V^{(B)}$. Esto se debe a que al pasar de V a $V^{(B)}$ se agregan conjuntos, dentro de los cuales se pueden agregar funciones biyectivas entre ordinales. Por ende, puede ocurrir que haya un ordinal α tal que en V no exista ninguna biyección entre α y un ordinal anterior, pero que al pasar a $V^{(B)}$ sí exista una. En ese caso, α sería un cardinal en V pero no en $V^{(B)}$.

La siguiente definición restringe el álgebra booleana B de modo que lo anterior deje de ocurrir. También lograremos la equivalencia en 3.11 y la igualdad en el ítem (2) de 3.7.4.

Definición 3.7.6. *Diremos que B satisface la condición de cadenas numerables (ccc por el ingles) si todas sus anticadenas son numerables.*

Observar que tendría más sentido definirla como *condición de anticadenas numerables*, pero la notación anterior es la que se adoptó. Dado un conjunto I, si consideramos $X = 2^I$ el espacio topológico producto, donde a $2 = \{0, 1\}$ se le asocia la topología discreta, cualquier conjunto de abiertos disjuntos dos a dos es numerable. Por ende, $\mathrm{RO}(2^I)$ es un álgebra booleana (completa) que satisface *ccc* (para los detalles ver [16]).

Teorema 3.7.7. *Supongamos que B satisface* ccc. *Para cualquier $\alpha \in On$ y $x, y \in V$ tenemos:*

1. $Cn(\alpha) \Rightarrow V^{(B)} \models Cn(\hat{\alpha})$

2. $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_{\alpha} = \aleph_{\hat{\alpha}}$

3. *Si* $V^{(B)} \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$ *entonces* $|x| = |y|$

Demostración. **(1).** Sea α un cardinal. Por el ítem (1) del teorema 3.7.5, podemos asumir que α es un cardinal no numerable. Queremos probar

$$V^{(B)} \models \forall \beta < \hat{\alpha}\ \forall f\ \neg(\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{im}(f) = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{dom}(f) = \beta)$$

Recordando $\hat{\alpha} = \{\hat{\beta}\ /\ \beta \in \alpha\}$ y el corolario 3.3.7, debemos probar:

$$\bigwedge_{\beta<\alpha} \bigwedge_{f \in V^{(B)}} [\![\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{im}(f) = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{dom}(f) = \hat{\beta}]\!]^{*} \ = \ 0$$

Es decir, para cada $\beta < \alpha$ y $f \in V^{(B)}$:

$$[\![\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{im}(f) = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{dom}(f) = \hat{\beta}]\!] = 0$$

Supongamos, por absurdo, que existen $\beta < \alpha$ y $f \in V^{(B)}$ tal que no se cumple ($[\![\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{im}(f) = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{dom}(f) = \hat{\beta}]\!] \neq 0$). Por consecuencia lógica, tenemos:

$$[\![\forall \eta \in \hat{\alpha}\ \exists \xi \in \hat{\beta}\ f(\xi) = \eta]\!] \ \geq \ [\![\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{im}(f) = \hat{\alpha} \wedge \mathrm{dom}(f) = \hat{\beta}]\!] \ > \ 0$$

Por ende, recordando cuales son los elementos de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, tenemos:

$$\bigwedge_{\eta \in \alpha} \bigvee_{\xi \in \beta} [\![f(\hat{\xi}) = \hat{\eta}]\!] > 0$$

Concluimos que para cada $\eta \in \alpha$ hay al menos un $\xi_{\eta} \in \beta$ tal que se cumple $[\![f(\hat{\xi_{\eta}}) = \eta]\!] > 0$. Como α es un cardinal no numerable y $\beta < \alpha$, debe existir $\gamma < \beta$ tal que el siguiente conjunto X es no numerable.

$$X \ := \ \{\eta \in \alpha\ /\ \xi_{\eta} = \gamma\}$$

Vamos a llegar al absurdo demostrando que $\{[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}]\!]\ /\ \eta \in X\}$ es una anticadena no numerable (lo cual contradice *ccc*). Dados $\eta_1 \neq \eta_2 \in X$, tenemos $[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}_1]\!] \wedge [\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}_2]\!] = 0$, pues $[\![\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_2]\!] = 0$. Como $[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}_1]\!]$ y $[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}_2]\!]$ son mayores a 0 concluimos que no están relacionados (y en particular no son iguales). Con eso probamos que $\{[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}]\!] \ / \ \eta \in X\}$ es una anticadena y tiene el cardinal de X, por lo que es no numerable.

(2). Se prueba por inducción en α. Supongamos que se cumple $\forall \beta < \alpha$. Gracias al ítem (2) del teorema 3.7.4, solo debemos probar $V^{(B)} \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha$.

$$[\![\aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha]\!] \geq [\![\mathrm{Card}(\hat{\aleph}_\alpha) \wedge \forall \beta < \hat{\alpha} \ \aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha]\!] = [\![\forall \beta < \hat{\alpha} \ \aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha]\!]$$

En la igualdad usamos el ítem (1) que acabamos de probar. Solo resta probar que para cada $\beta < \alpha$, tenemos $V^{(B)} \models \aleph_{\hat{\beta}} < \hat{\aleph}_\alpha$. Esto último se deduce de que $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\beta < \hat{\aleph}_\alpha$ (por el ítem (2) del teorema 3.4.4) y de la hipótesis inductiva, que nos permite afirmar $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\beta = \aleph_{\hat{\beta}}$.

(3). Supongamos $V^{(B)} \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$. Tenemos $|x| = \aleph_\alpha$ y $|y| = \aleph_\beta$ para algunos $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$. Por 3.11 tenemos $V^{(B)} \models |\hat{x}| = |\hat{\aleph}_\alpha|$ y $V^{(B)} \models |\hat{y}| = |\hat{\aleph}_\beta|$, de donde concluimos que $V^{(B)} \models |\hat{\aleph}_\alpha| = |\hat{\aleph}_\beta|$. Por el ítem (1) que acabamos de probar, $V^{(B)} \models \mathrm{Card}(\hat{\aleph}_\alpha)$ y $V^{(B)} \models \mathrm{Card}(\hat{\aleph}_\beta)$, por lo que tenemos que $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\alpha = \hat{\aleph}_\beta$. Por el ítem (2) del teorema 3.4.4 concluimos que $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ y por ende $|x| = |y|$. $\square$

Finalizaremos el capítulo con un lema que nos será útil para estimar cardinales en $V^{(B)}$; lo utilizaremos en el teorema 4.2.3. Primero definimos la siguiente noción de par. Sean $u, v \in V^{(B)}$.

$$\{u, v\}^{(B)} \ := \ \{(u, 1), (v, 1)\} \ \in V^{(B)}$$

Veamos que para cada $u, v \in V^{(B)}$ tenemos $V^{((B)} \models \{u, v\}^{(B)} = \{u, v\}$. Sabemos que $ZF \vdash \forall x, y \ (z = \{x, y\} \Leftrightarrow \forall t (t \in y \Leftrightarrow t = x \vee t = y))$. Por ende, alcanza probar $V^{(B)} \models \forall x (x \in \{u, v\}^{(B)} \Leftrightarrow x = y \vee x = v)$. Sea $x \in V^{(B)}$.

$$[\![x \in \{u, v\}^{(B)}]\!] = \bigvee_{y \in \{u, v\}} (\{u, v\}^{(B)}(y) \wedge [\![x = y]\!]) = [\![x = u]\!] \vee [\![x = v]\!]$$

De lo que se deduce lo buscado. Ahora definamos par ordenado de la forma usual:

$$(u, v)^{(B)} \ := \ \{\{u, u\}^{(B)}, \{u, v\}^{(B)}\}^{(B)}$$

Como para cada $u, v \in V^{(B)}$ tenemos $V^{((B)} \models \{u, v\}^{(B)} = \{u, v\}$, también tenemos $V^{((B)} \models (u, v)^{(B)} = (u, v)$, pues la definición usual de (x, y) es $\{\{x, x\}, \{x, y\}\}$. Como corolario, para cada $u, v, x, y \in V^{(B)}$ se cumple:

$$V^{(B)} \models \big((u, v)^{(B)} = (x, y)^{(B)} \Leftrightarrow u = x \wedge v = y\big)$$

Lema 3.7.8. *Para cada $u \in V^{(B)}$ existe $f \in V^{(B)}$ tal que*

$$V^{(B)} \models Fun(f) \wedge dom(f) = \hat{dom}(u) \wedge u \subseteq im(f)$$

y por ende tenemos:

$$V^{(B)} \models |u| \leq |\hat{dom}(u)|$$

Demostración. Comenzamos definiendo f de la siguiente forma.

$$f \ := \ \{(\hat{z}, z)^{(B)} \ / \ z \in \mathrm{dom}(u)\} \times \{1\}$$

Veamos que f cumple las propiedades deseadas.

1. $V^{(B)} \models \mathrm{Fun}(f)$. Se deduce de $V^{((B)} \models (u,v)^{(B)} = (u,v)$, recordando $\mathrm{Fun}(f) \equiv \forall u \in f \ \exists x, y \ (u = (x,y))$

2. $V^{(B)} \models \mathrm{dom}(f) = \hat{\mathrm{dom}}(u)$. Veamos:

$$V^{(B)} \models \forall x (x \in \mathrm{dom}(f) \Leftrightarrow x \in \hat{\mathrm{dom}}(u))$$

Sea $x \in V^{(B)}$.

$$\begin{aligned}
[\![x \in \mathrm{dom}(f)]\!] &= [\![\exists y \ (x,y) \in f]\!] = \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![(x,y) \in f]\!] \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![(x,y) = (\hat{z}, z)]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![x = \hat{z}]\!] \wedge [\![y = z]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![x = \hat{z}]\!] \wedge \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![y = z]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![x = \hat{z}]\!] = [\![x \in \hat{\mathrm{dom}}(u)]\!]
\end{aligned}$$

3. $V^{(B)} \models u \subseteq \mathrm{im}(f)$. Queremos probar $V^{(B)} \models \forall x (x \in u \Rightarrow x \in \mathrm{im}(f))$.

Tomemos $x \in V^{(B)}$. Probaremos $[\![x \in \mathrm{im}(f)]\!] \geq [\![x \in z]\!]$

$$
\begin{aligned}
[\![x \in \mathrm{im}(f)]\!] &= [\![\exists y\ (y,x) \in f]\!] = \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![(y,x) \in f]\!] \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![(y,x) = (\hat{z}, z)]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![y = \hat{z}]\!] \wedge [\![x = z]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![x = z]\!] \wedge \bigvee_{y \in V^{(B)}} [\![y = \hat{z}]\!] \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} [\![x = z]\!] \\
&\geq \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \wedge [\![x = z]\!] = [\![x \in z]\!] \qquad \square
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Forcing e independencia de la hipótesis generalizada del continuo

En el capítulo 3, mostramos cómo construir un modelo booleano a partir de cualquier álgebra booleana completa B, y vimos que tal modelo siempre cumple todos los axiomas (y teoremas) de ZFC. El objetivo de este capítulo es construir y estudiar un modelo booleano particular en que se cumpla la negación de la hipótesis del continuo (véase el capítulo 1). Para ello, vamos a introducir el método de *forcing*, que a partir de un conjunto ordenado no vacío $(P, \leq)$ permite inducir y estudiar un álgebra booleana completa. Combinando ambos conceptos (conjunto de condiciones de forcing y álgebra booleana inducida), construiremos un modelo booleano particular que nos permitirá probar la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo con respecto a ZF.

4.1. La relación de forcing

Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío, cuyos elementos serán llamados *condiciones de forcing*, o más sencillamente *condiciones*. Intuitivamente, cada condición $p \in P$ representa un trozo de información, y la relación $p \leq q$, que se lee *p es un refinamiento de q* o *p es más fuerte que q*, expresa que la condición p tiene más información que la condición q.

Si $p, q \in P$ tienen un refinamiento común r, diremos que son *compatibles*. Es decir:

$$\mathrm{Comp}(p, q) \;:=\; \exists r \in P \; (r \leq p \wedge r \leq q)$$

Por otra parte, diremos que un conjunto ordenado $(P, \leq)$ es *refinado* si:

$$\forall p, q \in P \ (q \not\leq p \Rightarrow \exists q' \leq q \ \neg\mathrm{Comp}(p, q'))$$

El interés de los conjuntos ordenados refinados es que estos inducen álgebras booleanas completas, de la forma que veremos a continuación. Para esto necesitaremos la topología del orden en P, que puede definirse con la base conformada por:

$$O_p \ := \ \{q \in P \ / \ q \leq p\}$$

para cada $p \in P$. Recordemos que $\mathrm{RO}(P)$ es el álgebra booleana completa de los abiertos regulares de dicha topología (es decir, los abiertos que son iguales al interior de su clausura). Dado $A \subseteq P$, su interior y su clausura son los siguientes:

$$\begin{aligned} \overline{A} \ &= \ \{p \in P \ / \ \exists a \in A \ a \leq p\} \\ A^\circ \ &= \{p \in P \ / \ O_p \subseteq A\} \end{aligned}$$

Por otra parte, dada un álgebra booleana B, decimos que $X \subseteq B$ es *denso* si:

1. $0 \notin X$
2. $\forall b \in B (b \neq 0 \Rightarrow \exists x \in X \ x \leq b)$

El siguiente lema muestra como los conjuntos ordenados refinados inducen álgebras booleanas completas.

Lema 4.1.1. *1. P es refinado si y solo si $O_p \in RO(P)$ para cada $p \in P$*

2. Si P es refinado, la función $p \mapsto O_p$ es un isomorfismo de conjuntos ordenados de P a un subconjunto denso de $RO(P)$

Demostración. **(1).** Utilizando la forma del interior y la clausura de la topología en P, tenemos que para cada $q \in P$:

$$q \in (\overline{O}_p)^\circ \Leftrightarrow (\exists r \leq p \ r \leq q) \wedge \forall q' \leq q \exists r' \leq p \ r' \leq q'$$

Como $O_p \subseteq (\overline{O}_p)^\circ$ siempre se cumple, $O_p = (\overline{O}_p)^\circ$ si y solo si $(\overline{O}_p)^\circ \subseteq O_p$.

$$\begin{aligned} & \forall p \in P \ O_p \in \mathrm{RO}(P) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall p \in P \ (\overline{O}_p)^\circ \subseteq O_p \\ \Leftrightarrow \quad & \forall p \in P \forall q \in P ((\exists r \leq p \ r \leq q) \wedge (\forall q' \leq q \exists r' \leq p \ r' \leq q') \Rightarrow q \leq p) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall p, q \in P (q \not\leq p \Rightarrow (\forall r \leq p \ r \not\leq q) \vee (\exists q' \leq q \forall r' \leq p \ r' \not\leq q')) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall p, q \in P (q \not\leq p \Rightarrow \neg\mathrm{Comp}(p, q) \vee (\exists q' \leq q \neg\mathrm{Comp}(p, q'))) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall p, q \in P (q \not\leq p \Rightarrow \exists q' \leq q \neg\mathrm{Comp}(p, q')) \\ \Leftrightarrow \quad & P \text{ es refinado} \end{aligned}$$

(2). $p \mapsto O_p$ es monótono pues si $p \leq q$ entonces $O_p \subseteq O_q$ por transitividad. La inyectividad es por antisimetría. La inversa es monótona porque $O_p \subseteq O_q$ implica $p \in O_q$ y por ende $p \leq q$. Llamémosle X a su imagen. Tenemos que $0 \notin X$ porque para cada p, se cumple $O_p \neq \emptyset$. Dado $b \in \mathrm{RO}(P)$, como b es abierto, por la base existe $p \in P$ tal que $O_p \subseteq b$. Como $O_p \in X$, tenemos lo buscado. □

Corolario 4.1.2. $(P, \leq)$ *es refinado si y solo si es isomorfo a un conjunto denso de un álgebra booleana completa.*

Demostración. El ítem (2) del lema anterior prueba el directo. Veamos el recíproco. Supongamos que P es isomorfo a $X \subseteq B$ con isomorfismo e. Sean $p, q \in P$ tal que $q \nleq p$. Queremos hallar un refinamiento q' de q tal que q' y p no sean compatibles.

Tenemos $e(q) \nleq e(p)$, por lo que $e(q) \Rightarrow e(p) \neq 1$. De esto último concluimos $e(q) \wedge e(p)^* \neq 0$. Usando que la imagen de P es densa, tenemos $q' \in P$ tal que $e(q') \leq e(q) \wedge e(p)^*$. Como $e(q') \leq e(q)$, tenemos $q' \leq q$. Para ver que q' y p no son compatibles, observamos que si $r \leq p$ y $r \leq q'$ tenemos que $e(r) \leq e(p)$ y $e(r) \leq e(p)^*$, por lo que $e(r) = 0$, lo cual no puede ser. □

La siguiente definición introduce una terminología que nos será útil para hablar del vínculo que ya demostramos (entre conjuntos parcialmente ordenados refinados y álgebras booleanas completas). Luego estaremos en condiciones de definir la relación de forcing.

Definición 4.1.3. *Diremos que* (B, e) *(o simplemente* B*) es una completación booleana de un conjunto ordenado* P*, o que* P *es una base de* B*, si:*

1. B *es un álgebra booleana completa.*
2. $e : P \to B$ *es un isomorfismo con imagen densa.*

Por el corolario 4.1.2, P tiene completación booleana si y solo si es refinado. Por otra parte, si P es refinado, su completación booleana es única salvo isomorfismo (ver [14]).

Cuando (B, e) es una completación de P, podremos identificar a P con su imagen, $e(P)$, por lo que pensaremos a P como un subconjunto denso de B.

Definición 4.1.4 (Relación de forcing)**.** *Sean* B *un álgebra booleana completa y* P *una base de* B*. Dados una* B*-sentencia* σ *y* $p \in P$*, definimos la relación* p *fuerza* σ *de la siguiente forma:*

$$p \Vdash \sigma \iff p \leq [\![\sigma]\!]$$

El siguiente teorema lista las principales propiedades de la relación de forcing. La presentación histórica del forcing, por Cohen [9][10], asumía su validez. Para los detalles, ver [14].

Teorema 4.1.5. *Sean σ y τ B-sentencias y sea $\phi(x)$ una B-fórmula.*

1. $p \Vdash \neg\sigma$ *sii* $\neg\exists q \leq p\ q \Vdash \sigma$
2. $p \Vdash \sigma \wedge \tau$ *sii* $p \Vdash \sigma$ *y* $p \Vdash \tau$
3. $p \Vdash \sigma \vee \tau$ *sii* $\forall q \leq p \exists r \leq q(r \Vdash \sigma \text{ o } r \Vdash \tau)$
4. $p \Vdash \sigma \Rightarrow \tau$ *sii* $\forall q \leq p(q \Vdash \sigma \Rightarrow q \Vdash \tau)$
5. $p \Vdash \forall x\phi(x)$ *sii* $\forall u \in V^{(B)}\ p \Vdash \phi(u)$
6. $p \Vdash \exists x\phi(x)$ *sii* $\forall q \leq p\exists r \leq q\exists u \in V^{(B)}\ r \Vdash \phi(u)$
7. *Para cada* $a \in V$, $p \Vdash \forall x \in \hat{a}\ \phi(x)$ *sii* $\forall x \in a\ p \Vdash \phi(\hat{x})$
8. *Para cada* $a \in V$, $p \Vdash \exists x \in \hat{a}\phi(x)$ *sii* $\forall q \leq p\exists r \leq q\exists x \in a\ r \Vdash \phi(\hat{x})$
9. $[\![\sigma]\!] = 0$ *sii* $\neg\exists p \in P\ p \Vdash \sigma$
10. $[\![\sigma]\!] = 1$ *sii* $\forall p \in P\ p \Vdash \sigma$
11. $\forall p \in P\ \exists q \leq p(q \Vdash \sigma \text{ o } q \Vdash \neg\sigma)$
12. *Si* $p \Vdash \sigma$ *entonces* $\neg\ p \Vdash \neg\sigma$
13. *Si* $q \leq p$ *y* $p \Vdash \sigma$ *entonces* $q \Vdash \sigma$

4.2. Independencia de la hipótesis del continuo

Finalmente, utilizando lo desarrollado hasta ahora, vamos a probar la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo respecto a ZF. El objetivo es hacer que en el modelo booleano $V^{(B)}$, el conjunto $\mathcal{P}(\omega)$ sea intuitivamente « mucho más grande » que ω, lo cual lograremos con un álgebra booleana B de cardinal bastante alto. Dicha álgebra booleana será de abiertos regulares (es decir, del tipo $\mathrm{RO}(X)$ para cierto espacio topológico X), por lo que comenzaremos con propiedades de las álgebras booleanas de ese tipo.

Lema 4.2.1. *Sea X un espacio topológico que satisface ccc (definición 3.7.6). Supongamos que E es una base de X y sea $B = RO(X)$ el álgebra booleana completa de los abiertos regulares. Entonces:*

$$|B| \leq |E|^{\aleph_0}$$

Demostración. Si probamos que cada $U \in \mathrm{RO}(X)$ está determinado por una unión disjunta de elementos de la base, tenemos el resultado, pues por la *ccc* deben ser uniones numerables y hay a lo sumo $|E|^{\aleph_0}$ uniones numerables de E.

Sea $U \in \mathrm{RO}(X)$. Mediante el lema de Zorn, obtenemos F una familia disjunta maximal de $E \cap \mathcal{P}(U)$ (elementos de la base incluidos en U). Por *ccc*, F es numerable. Definimos $G := \bigcup F$ y afirmamos $U = (\overline{G})^\circ$.

$(\overline{G})^\circ \subseteq U$. Como $G \subseteq U$ tenemos $(\overline{G})^\circ \subseteq (\overline{U})^\circ$. Como U es un abierto regular, tenemos lo buscado.

$U \subseteq (\overline{G})^\circ$. Consideremos $U - \overline{G}$. Es un conjunto abierto, por lo que si no es vacío, hay un $e \in E$ incluido. Tendríamos $e \in E \cap \mathcal{P}(U)$ y que e es disjunto a F, lo cual contradice la maximalidad. Concluimos $U \subseteq \overline{G}$. Por ende, $U = U^\circ \subseteq (\overline{G})^\circ$.

$U \mapsto F$ es una función inyectiva de $\mathrm{RO}(X)$ en los subconjuntos numerables de E, por lo que demostramos lo buscado. $\square$

Corolario 4.2.2. *Dado un conjunto I, sea 2^I el espacio producto, donde 2 tiene asociada la topología discreta. Si $|I| = \aleph_\alpha$ entonces:*

$$\aleph_\alpha \leq |RO(2^I)| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0}$$

Demostración. En la topología producto tenemos una base formada por los siguiente conjuntos:

$$\{f \in 2^I \ / \ f(i_1) = a_1, \ldots, f(i_n) = a_n\}$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots i_n \in I$ y $a_1, \ldots, a_n \in 2$. El cardinal de dicha base es el mismo de I, es decir $\aleph_\alpha$. Gracias al lema anterior, obtenemos la segunda desigualdad. La primera se debe a que cada elemento de la base es abierto y cerrado (el complemento de cada elemento de la base es de hecho otro elemento de la base), por lo que es abierto regular. $\square$

Con el fin de utilizar la relación de forcing, construiremos un conjunto ordenado refinado que induce el álgebra booleana completa $\mathrm{RO}(2^I)$, dado un conjunto I genérico. El conjunto ordenado será isomorfo a la base topológica de 2^I que se utilizó en la demostración del corolario anterior, la cual es además un conjunto denso del álgebra booleana completa $\mathrm{RO}(2^I)$. Definimos el conjunto ordenado $(\mathrm{Fin}(I,2),\supseteq)$, donde:

$$\mathrm{Fin}(I,2) \ := \ \{f : I \rightharpoonup 2 \ / \ \mathrm{dom}(f) \text{ es finito}\}$$

y $\supseteq$ es la inclusión conjuntista inversa. Recordar que $f : I \rightharpoonup 2$ denota una función parcial, es decir: $f : A \to 2$ con $A \subseteq I$. Afirmamos que $(\mathrm{Fin}(I,2),\supseteq)$ es un conjunto ordenado refinado. Esto es porque dadas $p, q \in \mathrm{Fin}(I,2)$ tal que $p \not\supseteq q$, existen $i \in I$ y $a \in 2$ tal que $(i,a) \in q$ y $(i,a) \notin p$. Definiendo la función $r := p \cup \{(i, 1-a)\}$, tenemos $r \supseteq p$ y $\neg\mathrm{Comp}(r,q)$.

Ya probamos que el conjunto ordenado $(\mathrm{Fin}(I,2),\supseteq)$ es refinado; lo que resta es ver que es base de $\mathrm{RO}(2^I)$. Sea $N : \mathrm{Fin}(I,2) \to \mathrm{RO}(2^I)$ definido como:

$$N(p) \ := \ \{f \in 2^I \ / \ p \subseteq f\}$$

Observar que $\{N(p) \ / \ p \in \mathrm{Fin}(I,2)\}$ es la base de 2^I utilizada en la demostración del corolario anterior, la cual es además un conjunto denso del álgebra booleana completa $\mathrm{RO}(2^I)$ (lo cual se deduce de la definición de base topológica y de que cada elemento de la base es abierto regular).

Solo resta vez que N es un isomorfismo de conjuntos ordenados entre $\mathrm{Fin}(I,2)$ y su imagen. La inyectividad es clara. Por otra parte hay que ver que $p \supseteq q$ implica $N(p) \subseteq N(q)$, pero esto también es claro, pues $p \subseteq f$ implica $q \subseteq f$ por la transitividad de la relación $\subseteq$.

Habiendo probado que $\mathrm{Fin}(I,2)$ es una base de $\mathrm{RO}(2^I)$, pasamos al siguiente teorema, que tendrá como corolario la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo respecto a ZF. Utilizamos exponenciación de cardinales: dados $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathrm{Cn}$, escribiremos $\kappa_1^{\kappa_2}$ para el cardinal del espacio de funciones asociado.

Teorema 4.2.3. *Sea α un ordinal (del modelo base) tal que $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. En el modelo booleano inducido por el álgebra booleana $B = RO(2^{\omega\times\aleph_\alpha})$ tenemos que:*

$$V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}}$$

Demostración. Probaremos: $V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$ y $V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_{\hat{\alpha}}$. Para la primera desigualdad utilizaremos los resultados de la última sección del capítulo 3, mientras que para la segunda utilizaremos la relación de forcing. Comenzamos con la primera.

Gracias al corolario anterior y las hipótesis del teorema, se cumple que $|B| = \aleph_\alpha$. Entonces (recordando la definición de $\mathcal{P}^{(B)}(\hat{\omega})$ enseguida después de la prueba del lema 3.6.5):

$$|\mathrm{dom}(\mathcal{P}^{(B)}(\hat{\omega}))| = |B^{\mathrm{dom}(\hat{\omega})}| = \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$$

Por el lema 3.7.8 podemos afirmar:

$$V^{(B)} \models |\mathcal{P}^{(B)}(\hat{\omega})| \leq |\hat{\aleph}_\alpha|$$

Y por ende:

$$V^{(B)} \models |\mathcal{P}(\omega)| \leq |\hat{\aleph}_\alpha|$$

Es necesario detenernos a esclarecer lo que significa el último paso realizado, de cambiar $\mathcal{P}^{(B)}(\hat{\omega})$ por sencillamente $\mathcal{P}(\omega)$.

El símbolo ω no pertenece al lenguaje, por lo que se aplica lo visto en el capítulo 1: el uso del símbolo ω como si fuera una constante se traduce al uso de una variable x a la que se le impone una fórmula $\psi(x)$ que define al conjunto ω. No obstante, se cumple que: $V^{(B)} \models \psi(\hat{\omega})$, por lo que, para cualquier B-fórmula $\phi(x)$, si $V^{(B)} \models \phi(\hat{\omega})$ entonces $V^{(B)} \models \phi(\omega)$.

Con el uso de $\mathcal{P}(u)$ la situación es la misma. En el capítulo 1 hay un ejemplo de traducción para el conjunto potencia. Dicha traducción es mediante una fórmula $\psi(x, y)$ que representa «$y = \mathcal{P}(x)$». Podemos sustituir $\mathcal{P}^{(B)}(\hat{\omega})$ por $\mathcal{P}(\hat{\omega})$ porque para cualquier $u \in V^{(B)}$, vale $V^{(B)} \models \psi(u, \mathcal{P}^{(B)}(u))$.

Continuando con la demostración, como B satisface *ccc*, podemos utilizar el teorema 3.7.7 y concluir:

$$V^{(B)} \models |\mathcal{P}(\omega)| \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$$

y por ende tenemos una desigualdad:

$$V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$$

Para demostrar la otra es que utilizaremos la relación de forcing, presentada anteriormente. Para cada $\nu \in \aleph_\alpha$ definimos un B-nombre $u_\nu \in V^{(B)}$ con $\mathrm{dom}(u_\nu) = \mathrm{dom}(\hat{\omega})$ y:

$$u_\nu(\hat{n}) \ := \ \{f \in 2^{\omega \times \aleph_\alpha} \ / \ f(n, \nu) = 1\} \ \in B$$

Para cada $\nu \in \aleph_\alpha$ tenemos:

$$[\![u_\nu \subseteq \hat{\omega}]\!] = \bigwedge_{n \in \omega} (u_\nu(\hat{n}) \Rightarrow [\![\hat{n} \in \hat{\omega}]\!]) = 1$$

El resultado es 1 porque $[\![\hat{n} \in \hat{\omega}]\!] = 1$ para cada $n \in \omega$. Probamos que en $V^{(B)}$ cada u_ν es un subconjunto de $\hat{\omega}$. Nuestro objetivo ahora es probar que si tenemos $\mu \neq \nu$ menorers a $\aleph_\alpha$, se cumple $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$, con lo que tendremos tantos subconjuntos de $\hat{\omega}$ como elementos de $\aleph_\alpha$.

Por lo observado previamente al enunciado, $(\mathrm{Fin}(\omega \times \aleph_\alpha, 2), \supseteq)$ es base de B. Con dicha base utilizaremos la relación de forcing. Veamos lo siguiente:

1. $p \Vdash \hat{n} \in u_\nu$ sii $(n, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(n, \nu) = 1$

2. $p \Vdash \hat{n} \notin u_\nu$ sii $(n, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(n, \nu) = 0$

1. Tenemos $p \Vdash \hat{n} \in u_\nu$ sii $N(p) \leq [\![\hat{n} \in u_\nu]\!]$.

$$[\![\hat{n} \in u_\nu]\!] = \bigvee_{m \in \omega} (u_\nu(\hat{m}) \wedge [\![\hat{m} = \hat{n}]\!]) = u_\nu(\hat{n})$$

Por ende, tenemos $p \Vdash \hat{n} \in u_\nu$ sii $N(p) \subseteq \{f \in 2^{\omega \times \aleph_\alpha} \ / \ f(n, \nu) = 1\}$. Esto pasa si y solo si $(n, \nu) \in \mathrm{dom}(p)$ y $p(n, \nu) = 1$

2. Es análogo a lo anterior.

$$p \Vdash \hat{n} \notin u_\nu \text{ sii } N(p) \leq [\![\hat{n} \in u_\nu]\!]^* = u_\nu(\hat{n})^c = \{f \in 2^{\omega \times \aleph_\alpha} \ / \ f(n, \nu) = 0\}$$

Por ende, $p \Vdash n \hat{\notin} u_\nu$ si y solo si $(n, \nu) \in \mathrm{dom}(p)$ y $p(n, \nu) = 0$.

Ya probamos los dos ítems. Tomemos ahora $\mu, \nu \in \aleph_\alpha$ tal que $\mu \neq \nu$. Probaremos $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$. Para esto supongamos que no lo es. Como P es base, tenemos $p \in P$ tal que $p \Vdash u_\mu = u_\nu$. Como $\mathrm{dom}(p)$ es finito, podemos tomar $n \in \omega$ tal que para cada $\xi \in \aleph_\alpha$, tenemos que $(n, \xi) \notin \mathrm{dom}(p)$. Definimos $p' \in P$ como:

$$p' := p \cup \{((n, \mu), 1), ((n, \nu), 0)\}$$

Tenemos $p' \Vdash \hat{n} \in u_\mu$ y $p' \Vdash \hat{n} \notin u_\nu$, por lo que $p' \Vdash u_\mu \neq u_\nu$, sin embargo $p' \leq p$ y $p \Vdash u_\mu = u_\nu$, por lo que $p' \Vdash u_\mu = u_\nu$. Esto es absurdo, pues contradice el ítem (12) del teorema 4.1.5. Terminamos de probar que $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$.

Definimos el siguiente B-nombre:

$$f := \{(\hat{\nu}, u_\nu)^{(B)} \ / \ \nu \leq \aleph_\alpha\}$$

Con razonamientos como los usados en la prueba de 3.7.8, probamos que $V^{(B)} \models f : \hat{\aleph}_\alpha \to \mathcal{P}(\hat{\omega})$. Como $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = 0$ cuando $\mu \neq \nu$, tenemos que $V^{(B)} \models f$ es inyectiva. Como B cumple *ccc*, gracias al teorema 3.7.7, tenemos $V^{(B)} \models \hat{\aleph}_\alpha = \aleph_{\hat{\alpha}}$. Juntando todo esto, y recordando que podemos cambiar $\mathcal{P}(\hat{\omega})$ por $\mathcal{P}(\omega)$:

$$V^{(B)} \models f \text{ es función inyectiva de } \aleph_{\hat{\alpha}} \text{ en } \mathcal{P}(\omega)$$

Por ende probamos $V^{(B)} \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq 2^{\aleph_0}$, con lo que terminamos la demostración. □

Corolario 4.2.4. *Si ZF es consistente, también lo es ZFC + $(2^{\aleph_0} = \aleph_n)$, para cualquier $n \geq 2$.*

Demostración. Por lo presentado en el capítulo 2, si ZF es consistente, también lo es ZFC + HGC, por lo que trabajaremos en esta última teoría. En ella, se cumple: $\aleph_n^{\aleph_0} = (2^{\aleph_{n-1}})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_{n-1} \times \aleph_0} = 2^{\aleph_{n-1}} = \aleph_n$, por lo que estamos en las hipótesis del teorema anterior, con $\alpha = n$. Entonces concluimos que con el álgebra booleana $B = \mathrm{RO}(2^{\omega \times \aleph_n})$ tenemos $V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{n}}$. Podemos sustituir $\hat{n}$ por n, con lo que llegamos a $V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_n$; la justificación es la misma que utilizamos en la demostración del teorema anterior, para cambiar $\hat{\omega}$ por ω.

Si ZFC + $(2^{\aleph_0} = \aleph_n)$ fuera inconsistente, tendríamos $\tau_1, \ldots, \tau_k$ axiomas de ZFC tal que $\tau_1, \ldots, \tau_k, (2^{\aleph_0} = \aleph_n) \vdash \perp$. Como $V^{(B)} \models \tau_i$ para cada i entre 1 y k y además $V^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_n$, concluimos $V^{(B)} \models \perp$, por la adecuación de $V^{(B)}$ a la lógica clásica (teorema 3.3.6). Esto último implica $0 = 1$ (siendo 0 y 1 el mínimo y el máximo de B, respectivamente), por lo que ZFC + HGC sería inconsistente, lo cual es absurdo. $\square$

Con el corolario anterior ya demostramos la consistencia relativa de la negación de la hipótesis del continuo respecto a ZF. Para concluir el trabajo, afirmamos que hay muchos otros valores que puede tomar el cardinal del continuo, pero también hay valores que no puede tomar. Con un razonamiento análogo al del corolario 4.2.4, se puede probar que el cardinal del continuo puede tomar el valor $\aleph_{\omega+n}$ para cualquier $n \geq 1$. Por otra parte, mediante el teorema de König [17], se puede probar en ZFC que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$, por lo que $\aleph_\omega$ es un valor prohibido para el cardinal del continuo.

Apéndice A

Relativización

Sea $\mathcal{T}$ una teoría de primer orden. Diremos que un predicado $C(x)$ (fórmula con variable libre x) es *probablemente no vacío* si:

$$\mathcal{T} \vdash \exists x\ C(x)$$

Dado un símbolo de función f de aridad k, diremos que es *comptatible con* C si:

$$\mathcal{T} \vdash \forall x_1, \ldots x_k\ (C(x_1) \wedge \cdots \wedge C(x_k) \Rightarrow C(f(x_1, \ldots, x_k)))$$

Definición A.0.1 (Relativización de fórmulas)**.** *Definimos $\phi \mapsto \phi^C$, la relativización de fórmulas del lenguaje de $\mathcal{T}$ a C. Esta operación consiste en relativizar las cuantificaciones sin cambiar las conectivas; es decir:*

$$\begin{aligned}
\phi^C &= \phi \quad \textit{Si } \phi \textit{ es atómica} \\
(\phi \vee \psi)^C &= \phi^C \vee \psi^C \\
(\phi \wedge \psi)^C &= \phi^C \wedge \psi^C \\
(\neg\phi)^C &= \neg\phi^C \\
(\exists x \phi(x))^C &= \exists x (C(x) \wedge \phi(x)^C) \\
(\forall x \phi(x))^C &= \forall x (C(x) \Rightarrow \phi(x)^C)
\end{aligned}$$

Definición A.0.2 (relativización de $\mathcal{T}$ a C)**.** *Definimos una teoría $\mathcal{T}^C$ con lenguaje formado por todos los símbolos de predicado de $\mathcal{T}$ y solamente los símbolos de función compatibles con C. Sus axiomas son los siguientes:*

$$Ax\ (\mathcal{T}^C)\ :=\ \{\phi \textit{ fórmula cerrada } / \ \mathcal{T} \vdash \phi^C\}$$

En base a la definición, es claro que si $\mathcal{T} \vdash \phi^C$, entonces $\mathcal{T}^C \vdash \phi$. Veremos que también se cumple el recíproco, para lo cual necesitaremos el siguiente lema. De aquí en más, supondremos que todos los símbolos de función de $\mathcal{T}$ son compatibles con C. Esto no será un problema, pues esto se utilizará solamente con la teoría ZF, cuyo lenguaje no tiene símbolos de función.

Lema A.0.3. *Sea $\mathcal{T}$ una teoría de primer orden, con un predicado C, probablemente no vacío. Supongamos que $\Gamma, C(\vec{x}) \vdash \phi$*[1]*, con $\vec{x} = FV(\phi) \cup FV(\Gamma)$. Entonces:*

$$\Gamma^C, \mathcal{T}, C(\vec{x}) \vdash \phi^C$$

Demostración. Se demuestra por inducción en el tamaño de la derivación de $\Gamma \vdash \phi$, con un caso para cada regla.

Caso axioma: $\overline{\Gamma \vdash \phi}$ con $\phi \in \Gamma$.

Es claro que $\phi^C \in \Gamma^C$, por lo que $\overline{\Gamma^C \vdash \phi^C}$ es una derivación válida, la cual se puede debilitar para tener lo deseado.

Caso introducción de la igualdad: $\overline{\Gamma \vdash t = t}$.

$(t = t)^C \equiv t = t$, por lo que también es directo.

Caso introducción de conjunción:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma \vdash \phi & \Gamma \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}$$

Asumimos $\forall x \in FV(\phi \wedge \psi),\ (x \in C) \in \Gamma$. Por ende, ambas subderivaciones están en las hipótesis inductivas, por lo que es directo.

Caso eliminación de conjunción:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \phi \wedge \psi \end{array}}{\Gamma \vdash \phi}$$

Esta caso es más difícil, porque la subderivación podría no estar en las hipótesis inductivas, en el caso de que ψ tenga variables libres que no estén en ϕ. Supongamos que esas variables son $y_1, \ldots, y_k$. Por debilitamiento, tenemos la siguiente derivación que sí está en las hipótesis (pues el debilitamiento mantiene el tamaño):

$$\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma, y_1 \in C, \ldots, y_n \in C \vdash \phi \wedge \psi(y_1, \ldots, y_k) \end{array}$$

Por ende, tenemos:

$$\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma^C, y_1 \in C, \ldots, y_n \in C \vdash \phi^C \wedge \psi^C(y_1, \ldots, y_k) \end{array}$$

[1] Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $C(\vec{x}) \equiv C(x_1) \wedge \cdots \wedge C(x_n)$

Se asume conmutación entre la relativización y la sustitución.
De esto se deriva el siguiente secuente:

$$\Gamma^C \vdash (y_1 \in C \wedge \cdots \wedge y_k \in C) \Rightarrow \phi^C \wedge \psi^C(y_1, \ldots, y_k)$$

Luego se deriva lo siguiente:

$$\Gamma^C \vdash \forall y_1, \ldots. \forall y_k,\ (y_1 \in C \wedge \cdots \wedge y_k \in C) \Rightarrow \phi^C \wedge \psi^C(y_1, \ldots, y_k)$$

Ahora utilizamos que la clase es probablemente no vacía. Tenemos $\mathcal{T} \vdash \exists y,\ y \in C$. Eliminando ese existencial, tenemos un $y \in C$, con el cual podemos eliminar los $\forall y_1, \ldots. \forall y_k$ y tenemos $(y_1 \in C \wedge \cdots \wedge y_k \in C)$ (pues todos son el y que proviene de eliminar el existencial). Por ende, con modus ponens, tenemos $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash \phi^C \wedge \psi^C(y, \ldots, y)$, a lo que podemos aplicar la primera eliminación de la conjunción. Observar que las sustituciones no afectan a ϕ.

Caso eliminación de disyunción:

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} d_0 & d_1 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma \vdash \phi \vee \psi & \Gamma, \phi \vdash \xi & \Gamma, \psi \vdash \xi \end{array}}{\Gamma \vdash \xi}$$

Se resuelve de forma análoga al caso de eliminación de conjunción. Sean $y_1, \ldots, y_k$ los elementos de $(FV(\phi) \cup FV(\psi)) - (FV(\xi) \cup FV(\Gamma))$. Procediendo de la misma forma, dentro de una eliminación de existencial se obtiene una derivación de $\Gamma^C \vdash \phi^C(y, \ldots, y) \vee \psi^C(y, \ldots, y)$. Por otra parte, d_1 y d_2 están en las hipótesis, por lo que tenemos $\Gamma^C, \phi^C \vdash \xi$ y $\Gamma^C, \psi^C \vdash \xi$. Podemos aplicar la sustitutividad, que no afecta a Γ ni a ξ por hipótesis, y tenemos $\Gamma^C, \phi^C(y, \ldots, y) \vdash \xi$ y $\Gamma^C, \psi^C(y, \ldots, y) \vdash \xi$. Por eliminación de disyunción, llegamos a lo deseado.

Las dos introducciones de disyunción son directas.

Para **modus ponens** se utiliza el mismo truco para solucionar variables libres que aparezcan arriba y queda.

Caso introducción de implicación:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma, \phi \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}$$

La subderivación está en las hipótesis de inducción, por lo que es directo.

Caso intoducción de la negación: es análogo a la introducción de implicación.

Caso eliminación de la negación: es análogo a modus ponens.

Caso reducción al absurdo: la subderivación está en las hipótesis, por lo que no hay problemas.

Caso eliminación de la igualdad:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma \vdash t = u & \Gamma \vdash \phi[x := t] \end{array}}{\Gamma \vdash \phi[x := u]}$$

Sean $y_1, \ldots, y_k$ las variables libres de t que no están en $\phi[x := u]$ ni en Γ. Reiterativamente, se puede obtener $\Gamma^C \vdash t(y, \ldots, y) = u$ y $\Gamma^C \vdash \phi^C[x := t(y, \ldots, y)]$. Con esto nuevamente se obtiene lo deseado.

Caso introducción de cuantificación universal:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \phi(x) \end{array}}{\Gamma \vdash \forall x,\ \phi(x)}$$

Recordar $(\forall x,\ \phi(x))^C \equiv \forall x,\ (x \in C \Rightarrow \phi(x))$.Aplicando debilitamiento e hipótesis inductiva, tenemos $\Gamma^C, x \in C \vdash \phi^C(x)$. Por ende tenemos $\Gamma^C \vdash x \in C \Rightarrow \phi(x)$. Como $x \notin \Gamma^C$ (pues $FV(\Gamma) = FV(\Gamma^C)$), tenemos $\Gamma^C \vdash \forall x,\ (x \in C \Rightarrow \phi(x))$.

Caso eliminación de la cuantificación universal:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \forall x,\ \phi(x) \end{array}}{\Gamma \vdash \phi(t)}$$

La subderivación está en las hipótesis inductivas, por lo que tenemos $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash \forall x,\ (x \in C \Rightarrow \phi(x))$, por lo que $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash t \in C \Rightarrow \phi(t))$. Como solo aparecen símbolos compatibles con C y para cada variable que aparezca en t, tenemos como hipótesis que es de C, tenemos que $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash t \in C$, con lo que este caso queda resuelto.

Caso introducción de la cuantificación existencial:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \phi(t) \end{array}}{\Gamma \vdash \exists x,\ \phi(x)}$$

Análogamente a lo que se viene haciendo, se obtiene $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash \phi(t(y, \ldots, y))$, con $y \in C$. Por el argumento de la eliminación de "para todo", tenemos $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash t \in C$. Con esto tenemos $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash t(y, \ldots, y) \in C \wedge \phi(t(y, \ldots, y))$, por lo que $\Gamma^C, \mathcal{T} \vdash \exists x,\ x \in C \wedge \phi(x)$.

Caso eliminación de cuantificación existencial:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d_0 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \exists x,\ \phi(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ \Gamma, \phi(x) \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

Razonando análogamente, tenemos $\Gamma^C \vdash \exists x,\ x \in C \wedge \phi(x, y, \ldots, y)$ y $\Gamma^C, \phi(x, y, \ldots, y) \vdash \psi^C$. Por ende, mediante eliminación de existencial, tenemos lo deseado. □

Teorema A.0.4. *Para cualquier fórmula cerrada ϕ del lenguaje de $\mathcal{T}$ (que estamos asumiendo que solo tiene símbolos de función compatibles con C), se cumple:*

$$\mathcal{T} \vdash \phi^C \quad \textit{si y solo si} \quad \mathcal{T}^C \vdash \phi$$

Demostración. Comentamos previamente que el directo es por definición de $\mathcal{T}^C$. Veamos el recíproco.

Supongamos $\mathcal{T}^C \vdash \phi$, por lo que tenemos $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{Ax}\ (\mathcal{T}^C)$ tal que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$. Por definición de $\mathcal{T}$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ son cerradas y $\mathcal{T} \vdash \psi_i^C$ para cada i desde 1 hasta n.

Por el lema anterior, usando que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ y que todas las fórmulas del secuente son cerradas, tenemos:

$$\psi_1^C, \ldots \psi_n^C \vdash \phi^C$$

Como $\mathcal{T} \vdash \psi_i^C$ para cada i desde 1 hasta n, tenemos $\mathcal{T} \vdash \phi^C$. □

Corolario A.0.5. *$\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^C$ son equiconsistentes.*

Demostración. Se deduce del teorema anterior, observando $\perp^C = \perp$ □

Apéndice B

Demostración de adecuación

En este anexo se presenta la demostración del teorema de adecuación de $V^{(B)}$ 3.3.6

Teorema B.0.1. *Sean ϕ una B-fórmula y Γ un conjunto finito de B-fórmulas. Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $V^{(B)} \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \phi$*

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción estructural en la derivación. Hay que tener en cuenta que como Γ y ϕ pueden tener variables libres, $V^{(B)} \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \phi$ significa $[\![\forall \vec{y}\ (\bigwedge \Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}))]\!] = 1$, siendo $\vec{y}$ las variables libres presentes. Por la interpretación de $\forall$, se puede agregar a $\vec{y}$ más sin cambiar el resultado. En algunos casos utilizaremos eso por uniformidad. Por otra parte, en algunos casos escribiremos $\Gamma(\vec{y})$ en lugar de $\bigwedge \Gamma(\vec{y})$

Veremos los casos más complejos y algunos representativos.

Caso axioma: $\overline{\Gamma, \phi \vdash \phi}$

Debemos probar $[\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}), \phi(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}))]\!] = 1$.

$$
\begin{aligned}
[\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}), \phi(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}))]\!] &= \bigwedge_{\vec{v}} ([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \wedge [\![\phi(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\phi(\vec{v})]\!]) \\
&= \bigwedge_{\vec{v}} ([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow ([\![\phi(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\phi(\vec{v})]\!])) \\
&= \bigwedge_{\vec{v}} ([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow 1 \ = \bigwedge_{\vec{v}} 1 \ = 1
\end{aligned}
$$

Caso eliminación de negación: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \bot}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{H} & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}))]\!] = 1 \\ & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \neg\phi(\vec{y}))]\!] = 1 \\ \textbf{T} & \\ & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \bot)]\!] = 1 \end{array}$$

Sean $\vec{v}$ en $V^{(B)}$. La tésis se reduce a probar $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] = 0$. Utilizando las hipótesis tenemos $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v})]\!]$ y $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v})]\!]^*$. Por ende, tenemos $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v})]\!] \wedge [\![\phi(\vec{v})]\!]^* = 0$.

Caso introducción de igual: $\dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}$

Debemos probar Debemos probar $[\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow t(\vec{y})) = t(\vec{y}))]\!] = 1$, es decir

$$\bigwedge_{\vec{v}}([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![t(\vec{v}) = t(\vec{v})]\!]) = 1$$

Por el primer item del lema 3.3.5, tenemos que para cualquier $\vec{v}$, como $t(\vec{v})$ es un elemento de $v^{(B)}$, se cumple que$[\![t(\vec{v}) = t(\vec{v})]\!] = 1$. Es implica que el cunsecuente a la implicación es siempre 1 y por ende su resultado también lo es.

Caso eliminación de igual: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi(t) \qquad \Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash \phi(t')}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{H} & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}, t(\vec{y})))]\!] = 1 \\ & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow t(\vec{y}) = t'(\vec{y}))]\!] = 1 \\ \textbf{T} & \\ & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}, t'(\vec{y}))]\!] = 1 \end{array}$$

Sean $\vec{v}$ de $V^{(B)}$. Queremos probar que $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v}, t'(\vec{v}))]\!]$. Por las hipótesis tengo:

- $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v}, t(\vec{v}))]\!]$
- $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![t(\vec{v}) = t'(\vec{v})]\!]$

Concluimos $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v}, t(\vec{v}))]\!] \wedge [\![t(\vec{v}) = t'(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v}, t'(\vec{v}))]\!]$, siendo la última desigualdad por el tercer item del lema 3.3.5, aplicado con $\psi(x) \equiv \phi(\vec{v}, x)$.

Caso introducción de $\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi(x)}{\Gamma \vdash \forall x \phi(x)}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{H} & [\![\forall\vec{y}\forall x\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y},x))]\!] = 1 \\ \mathbf{T} & \\ & [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \forall x\phi(\vec{y},x)]\!] = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [\![\forall\vec{y}\forall x\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y},x))]\!] &= \bigwedge_{\vec{v}}\bigwedge_{u}([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\phi(\vec{v},u)]\!]) \\ &= \bigwedge_{\vec{v}}\left([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow \bigwedge_{u}[\![\phi(\vec{v},u)]\!]\right) \\ &= \bigwedge_{\vec{v}}([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\forall x\phi(\vec{v},x)]\!]) \\ &= [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \forall x\phi(\vec{y},x)]\!] \end{aligned}$$

Caso eliminación de $\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\phi(x)}{\Gamma \vdash \phi(t)}$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{H} & [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \forall x\phi(\vec{y},x))]\!] = 1 \\ \mathbf{T} & \\ & [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y},t(\vec{y}))]\!] = 1 \end{array}$$

Estamos asumiendo que $\vec{y}$ son las variables libres de Γ y t. A su vez, asumo que x no está entre ellas. Sean $\vec{v}$ de $V^{(B)}$. Debo probar $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v},t(\vec{v}))]\!]$. Esto es por lo siguiente:

$$[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq \bigwedge_{x\in V^{(B)}}[\![\phi(\vec{v},x)]\!] \leq [\![\phi(\vec{v},t(\vec{v}))]\!]$$

Donde la primera desigualdad es por la hipótesis.

Caso introducción de $\exists$: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi(t)}{\Gamma \vdash \exists x\phi(x)}$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{H} & [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y},t(\vec{y})))]\!] = 1 \\ \mathbf{T} & \\ & [\![\forall\vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \exists x\phi(\vec{y},x))]\!] = 1 \end{array}$$

Hacemos las mismas suposiciones sobre $\vec{y}$ que en el caso anterior. Tomamos $\vec{v}$ de $V(B)$. Queremos probar $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\exists x\phi(\vec{v},x)]\!]$. El razonamiento es análogo al del caso anterior.

$$[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v}, t(\vec{v}))]\!] \leq \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(\vec{v}, u)]\!]$$

Caso eliminación de $\exists$: $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x \phi(x) \qquad \Gamma, \phi(x) \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \psi)$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{H} & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \exists x \phi(\vec{y}, x))]\!] = 1 \\
 & [\![\forall \vec{y} \forall x\ (\Gamma(\vec{y}) \wedge \phi(\vec{y}, x) \Rightarrow \psi(\vec{y}))]\!] = 1 \\
\mathbf{T} & \\
 & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \psi(\vec{y}))]\!] = 1
\end{array}$$

$\vec{y}$ son las variables libres de Γ y ψ; nuevamente asumo que x no está. Sean $\vec{v}$ en $V^{(B)}$. Debemos probar que $[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\psi(\vec{v})]\!]$.

Por la primera hipótesis tenemos:

$$[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\exists x \phi(\vec{v}, x)]\!] \tag{B.1}$$

De la segunda:

$$\begin{aligned}
[\![\forall x\ (\Gamma(\vec{v}) \wedge \phi(\vec{v}, x) \Rightarrow \psi(\vec{v}))]\!] &= \bigwedge_{u \in V^{(B)}} ([\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow ([\![\phi(\vec{v}, u)]\!] \Rightarrow [\![\psi(\vec{v})]\!])) \\
&= [\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow \bigwedge_{u \in V^{(B)}} [\![\phi(\vec{v}, u)]\!] \Rightarrow [\![\psi(\vec{v})]\!] \\
&= [\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\exists x \phi(\vec{v}, x)]\!] \Rightarrow [\![\psi(\vec{v})]\!]
\end{aligned}$$

Por ende concluimos $[\![\Gamma(\vec{v}) \leq [\![\exists x \phi(\vec{v}, x)]\!] \Rightarrow [\![\psi(\vec{v})]\!]$. Entre esto y B.1 tenemos lo buscado.

Caso Abs: $\dfrac{\Gamma, \neg\phi(x) \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{H} & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \wedge \neg\phi(\vec{y}) \Rightarrow \bot)]\!] = 1 \\
\mathbf{T} & \\
 & [\![\forall \vec{y}\ (\Gamma(\vec{y}) \Rightarrow \phi(\vec{y}))]\!] = 1
\end{array}$$

El objetivo es probar que $[\![\Gamma(\vec{y})]\!] \leq [\![\phi(\vec{y})]\!]$. Este caso es interesante porque se usa que $a^{**} = a$, lo cual es característico de las álgebras booleanas (en contraposición a las de Heyting, en las que no tiene por qué cumplirse). Tomamos $\vec{v}$ de $V^{(B)}$ y razonamos en base a la hipótesis.

$$
\begin{aligned}
&[\![\Gamma(\vec{v})]\!] \wedge [\![\phi(\vec{v})]\!]^* = 0 \\
&\qquad \Rightarrow [\![\Gamma(\vec{v})]\!]^* \vee [\![\phi(\vec{v})]\!]^{**} = 1 \\
&\qquad \Rightarrow [\![\Gamma(\vec{v})]\!]^* \vee [\![\phi(\vec{v})]\!] = 1 \\
&\qquad \Rightarrow [\![\Gamma(\vec{v})]\!] \Rightarrow [\![\phi(\vec{v})]\!] = 1 \\
&\qquad \Rightarrow [\![\Gamma(\vec{v})]\!] \leq [\![\phi(\vec{v})]\!] \qquad \Box
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Gottlob Frege. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic*, 1931:1–82, 1879.

[2] Bertrand Russell. Letter to frege. *From Frege to Gödel*, pages 124–125, 1902.

[3] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre. i. *Mathematische Annalen*, 65(2):261–281, 1908.

[4] Adolf Fraenkel. Axiomatische begründung der transfiniten kardinalzahlen. i. *Mathematische Zeitschrift*, 13(1):153–188, 1922.

[5] Thoralf Skolem. Einige bemerkungen zur axiomatischen begründung der mengenlehre. 1922.

[6] Thomas Jech. *Set theory.* Springer Science & Business Media, 2013.

[7] David Hilbert. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–479, 1902.

[8] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12):556, 1938.

[9] Paul Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 50(6):1143–1148, 1963.

[10] Paul J Cohen. The independence of the continuum hypothesis, ii. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(1):105, 1964.

[11] Dana Scott. Boolean-valued models for set theory. *Proc. AMS Summer Institute on Set Theory, Los Angeles: Univ. Cal., 1967*, 1967.

[12] Robert M Solovay. The measure problem. *Notices of the American Mathematical Society*, 12:217, 1965.

[13] Petr Vopenka. Limits of sheaves and applications on constructions of models. *BULLETIN DE L ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES-SERIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES*, 13(3):189, 1965.

[14] John L Bell. *Set theory: Boolean-valued models and independence proofs*, volume 47. Oxford University Press, 2011.

[15] Paul R Halmos. *Lectures on Boolean algebras.* Courier Dover Publications, 2018.

[16] John L Kelley. *General topology.* Courier Dover Publications, 2017.

[17] Julius König. Zum kontinuum-problem. *Mathematische Annalen*, 60(2):177–180, 1905.