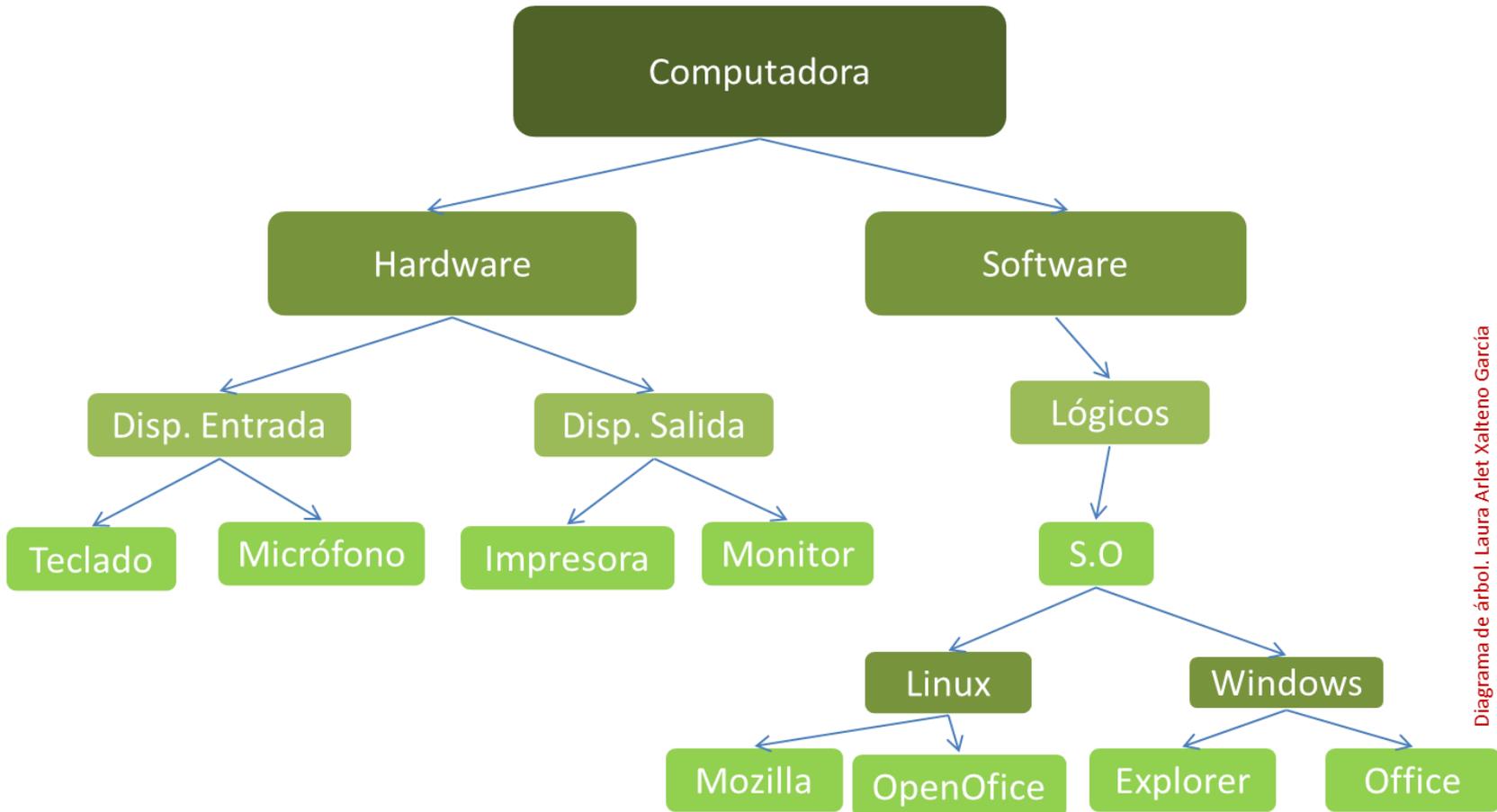


ÁRBOLES

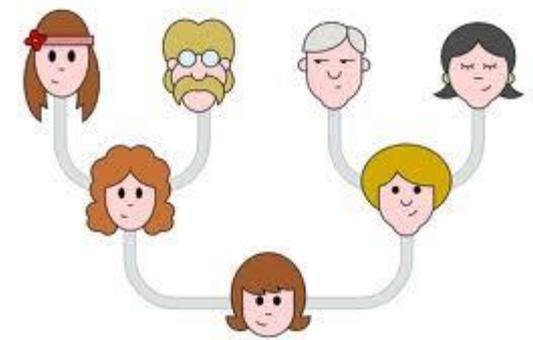
Árboles

- Un grafo conectado que no contiene circuitos simples.
- Utilizados desde 1857, por el matemático Ingles Arthur Cayley para contar ciertos tipos de componentes químicos.
- Un árbol es un grafo no dirigido conectado sin circuitos simples.
 - Un árbol no puede tener un circuito simple, un árbol no puede contener múltiples aristas o ciclos.
 - Un árbol debe ser un grafo simple.
- Un grafo no dirigido es un árbol si y sólo si existe una ruta unica simple entre cualquiera dos de sus vértices.

Árboles, ejemplos



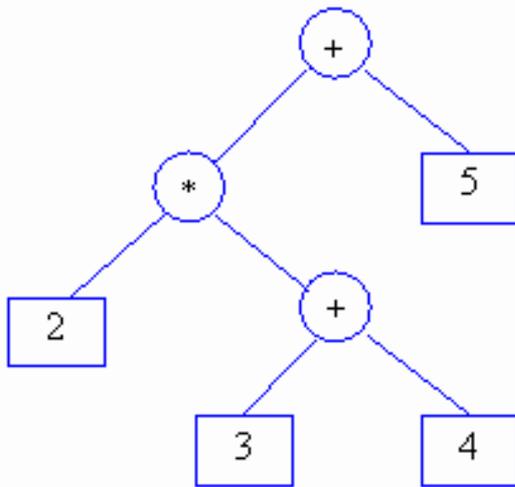
Árboles, ejemplos



Arbol Genealogico

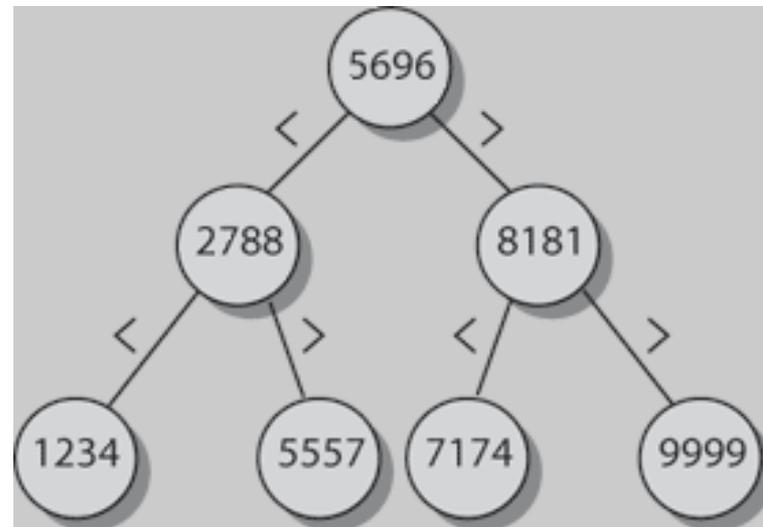
by Llanpac

Árboles, ejemplos



$$2 * (3 + 4) + 5$$

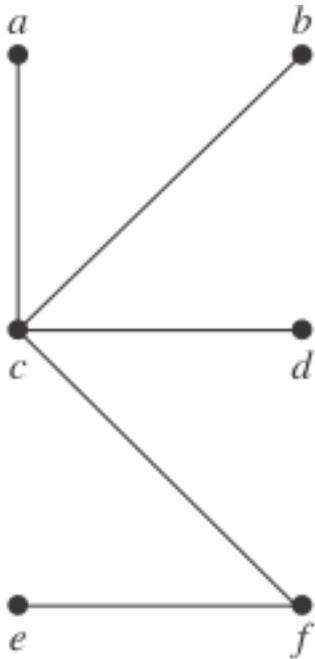
Análisis de expresiones



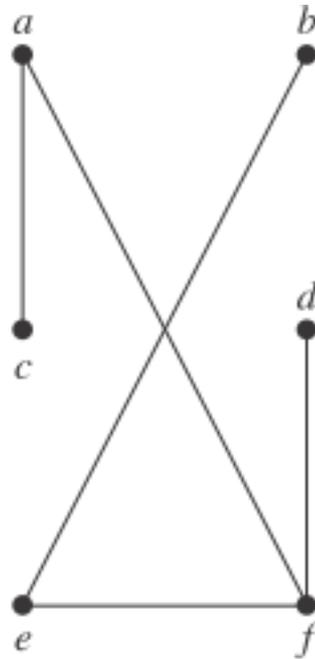
Árboles de búsqueda

Ejercicio

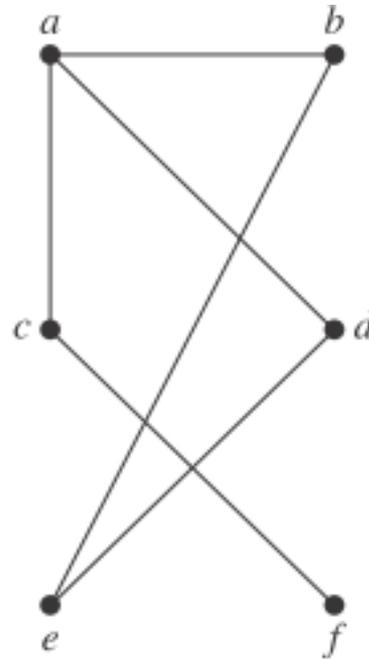
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



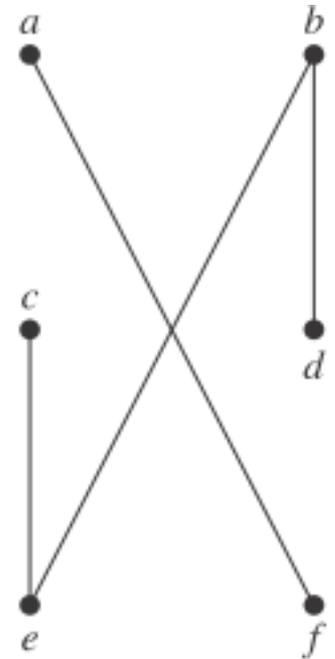
G_1



G_2



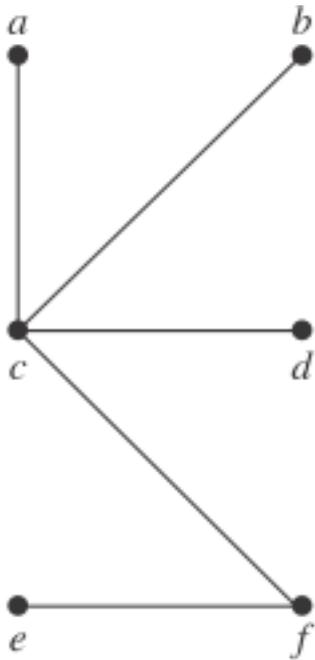
G_3



G_4

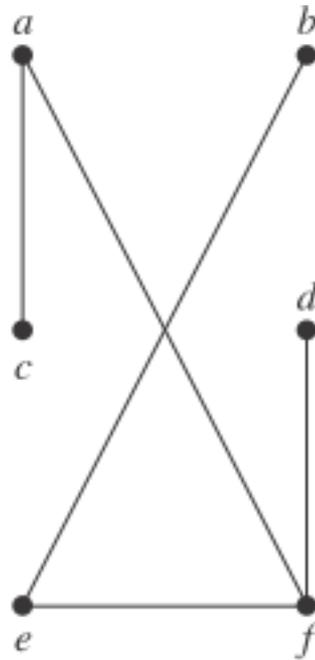
Solución

- ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



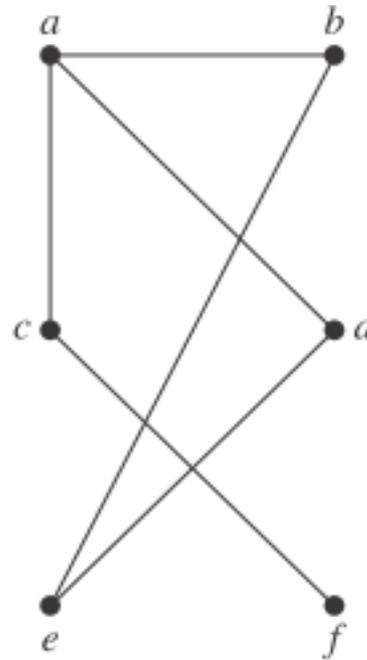
G_1

Árbol



G_2

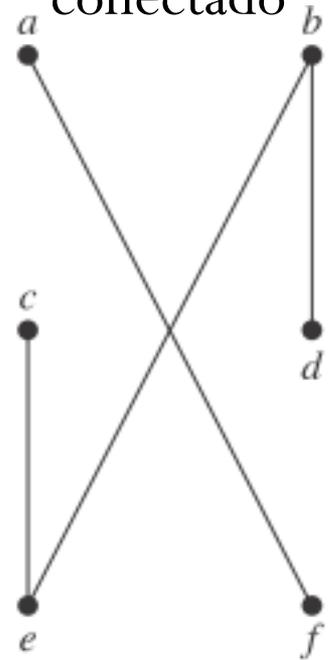
Árbol



G_3

No es un árbol, porque hay un circuito simple: e, b, a, d, e

No es un árbol, porque no está conectado

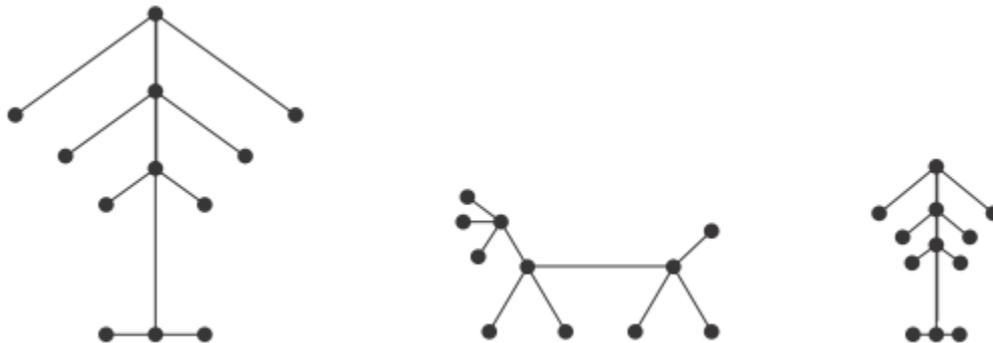


G_4

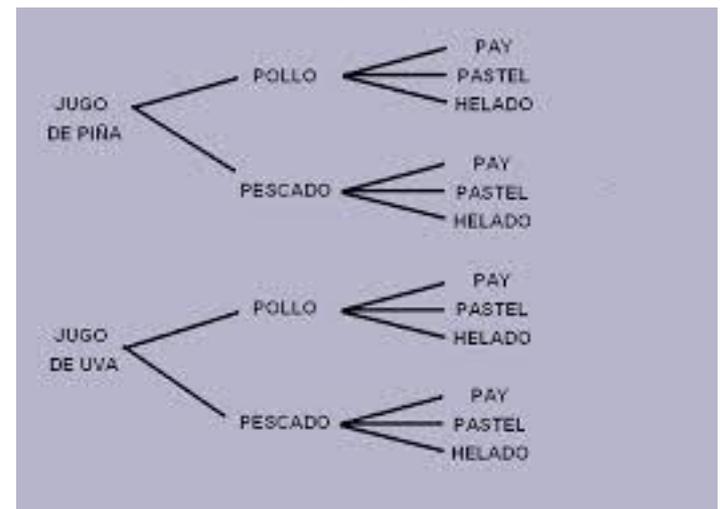
Bosques



- Un bosque es un conjunto de árboles, es decir, un árbol es un bosque conectado.
- De un árbol se pueden obtener varios subárboles, mismos que forman un bosque.
- Un árbol puede considerarse un bosque conectado.
- El árbol más pequeño lo integra por lo menos dos nodos conectados por una arista.

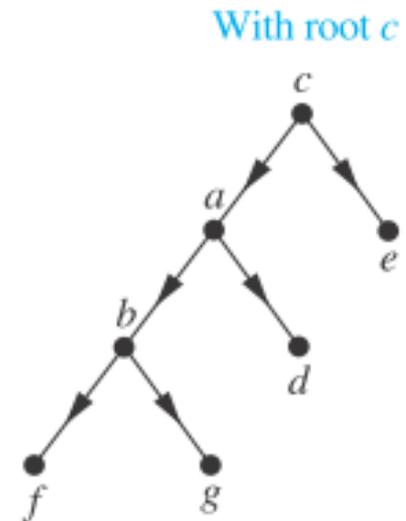
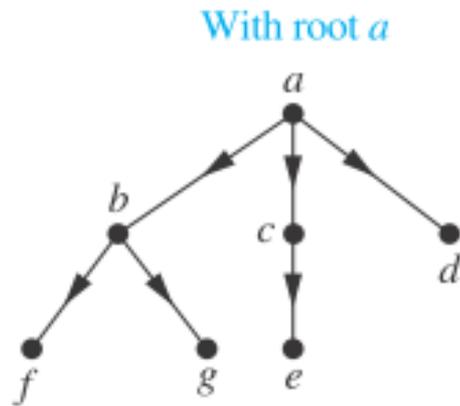
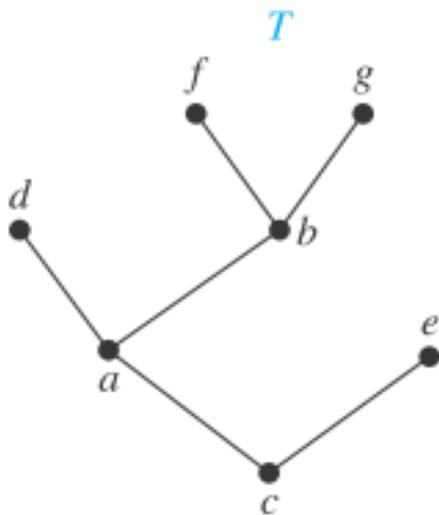


Un grafo con tres componentes conectadas



Árboles con raíz (o enraizado)

- Un árbol con raíz es un árbol en el cual un vértice ha sido designado como la raíz y cada arista es dirigida desde la raíz.

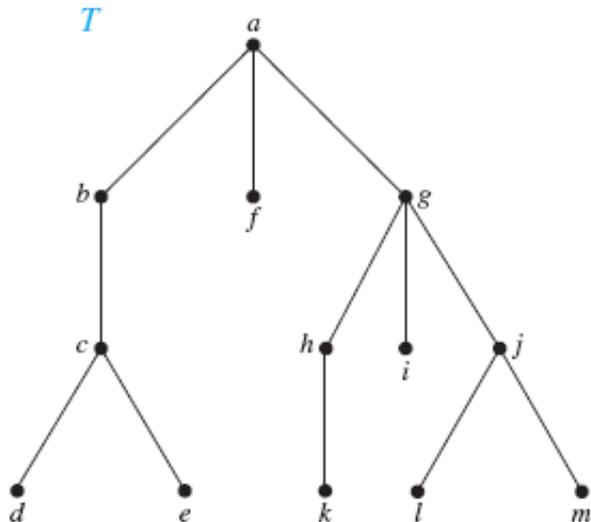


Árboles con raíz

- Padre: Si v es un vértice en T , que no necesariamente es la raíz, el **padre** de v es el vértice único u tal que existe un arco directo, v es un **hijo** de u .
- **Hermanos**, son vértices que tiene el mismo padre.
- Los **ancestros** de un vértice, son los vértices en la ruta desde la raíz hasta ese vértice, excluyendo el vértice mismo e incluyendo la raíz.
- Un vértice de un árbol enraizado es llamado hoja, si esta no tiene hijos.
- Los vértices que tienen hijos son llamados vértices internos. La raíz es un vértice interno a menos que está sea el único vértice en el grafo, en cuyo caso es una hoja.
- Si a es un vértice en un árbol, el subárbol con a como raíz es el subgrafo del árbol que consiste de a y sus descendientes y todos los arcos incidentes a esos descendientes.

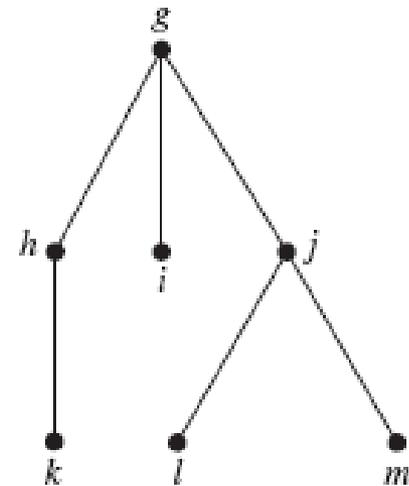
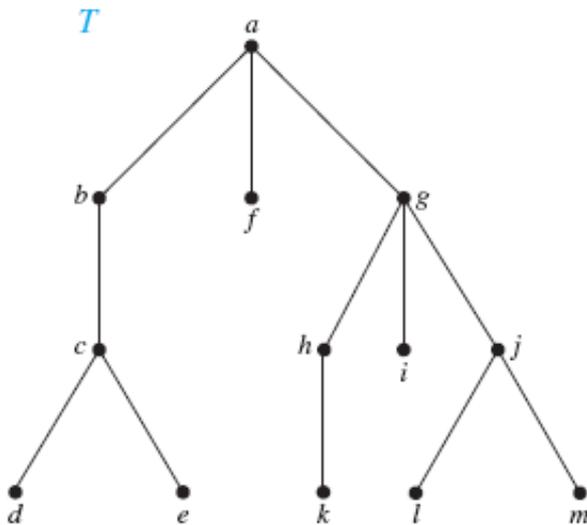
Ejercicio

- Sea T un árbol con raíz en a , encuentra el padre de c , los hijos de g , los hermanos de h , todos los ancestros de e , todos los descendientes de b , todos los vértices internos, y todas la hojas. ¿Cuál es el subárbol con raíz en g ?

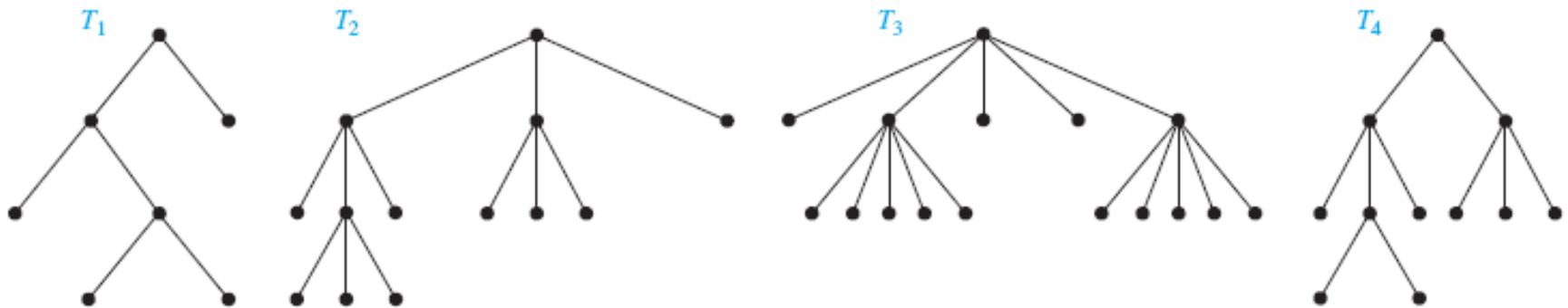


Solución

- Los padres de c es b . Los hijos de g son h, i y j . Los hermanos de h son i y j . Los ancestros de e son c, b y a . Los descendientes de b son c, d y e . Los vértices internos son a, b, c, g, h y j . Las hojas son d, e, f, i, k, l y m . El subárbol con raíz en g es:

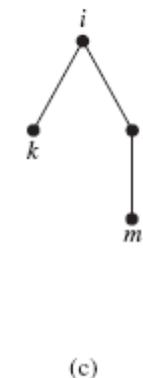
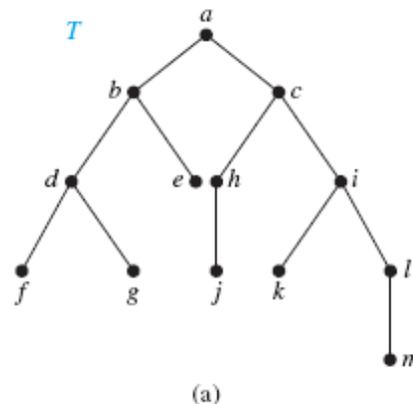


- Un árbol raíz se llama árbol m -ario si cada vértice interno no tiene más que m hijos. El árbol es un árbol m -ario completo si cada vértice interno tiene exactamente m hijos. Un árbol m -ario con $m=2$ es llamado un árbol binario.



vértice interno tiene 5 hijos, así T_3 es un árbol 5-ario completo. T_4 no es un árbol m -ario para cualquier m porque alguno de sus vértices internos tiene dos hijos y otros tienen tres hijos.

- En un árbol binario, si un vértice interno tiene dos hijos, el primero es el hijo izquierdo y el segundo el vértice derecho.
- La raíz del árbol en el hijo izquierdo de un vértice es el subárbol izquierdo y el segundo hijo es el hijo derecho.
- ¿Cuáles son los hijos izquierdo y derecho de d ? ¿Cuales son los izquierdos y derechos subárboles de c?
- Los hijos izquierdo de d es f y el derecho es g. Los subárboles de c son:



Árboles

- Los vértices de un árbol se llaman nodos
- Los nodos descendientes inmediatos de un nodo son sus hijos, y el nodo superior es el padre
- A una secuencia descendente de nodos se le llama rama
- Los nodos sin hijos se llaman hojas, y los que sí tienen hijos nodos internos
- Un conjunto de árboles es un bosque

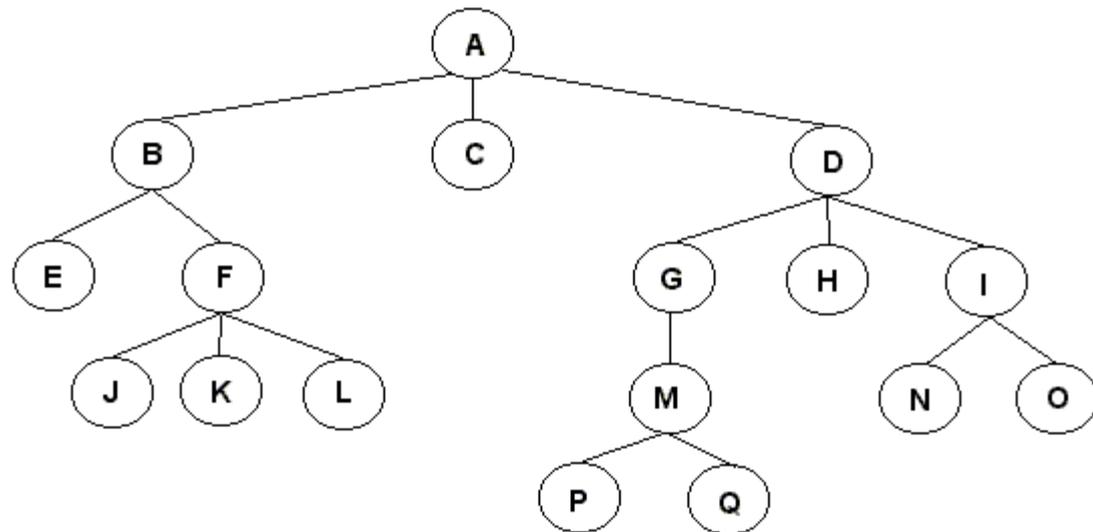
Árboles, propiedades

Sea $G = (V, A)$ un árbol. Entonces:

- Entre cada par de vértices x, y hay un único camino
- Al quitar de A cualquier arista resulta un bosque con 2 árboles
- Al añadir una arista nueva siempre se obtiene un ciclo
- $|A| = |V| - 1$

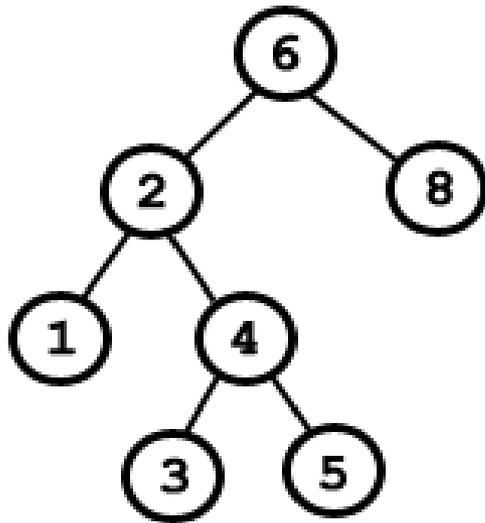
Tipos de árboles

- Árboles binarios: cada nodo padre tiene uno o dos hijos máximo.
- Árboles trinarios: cada nodo padre tiene máximo tres hijos.
- Árboles cuaternarios: cada nodo padre tiene como máximo cuatro hijos
- etc.



Tipos de árboles

- Árbol binario completo. Es aquél en el que cada nodo tiene dos ramas o ninguna.
- Un árbol binario completo con i nodos internos tiene $(i + 1)$ hojas y $(2i + 1)$ vértices en total.



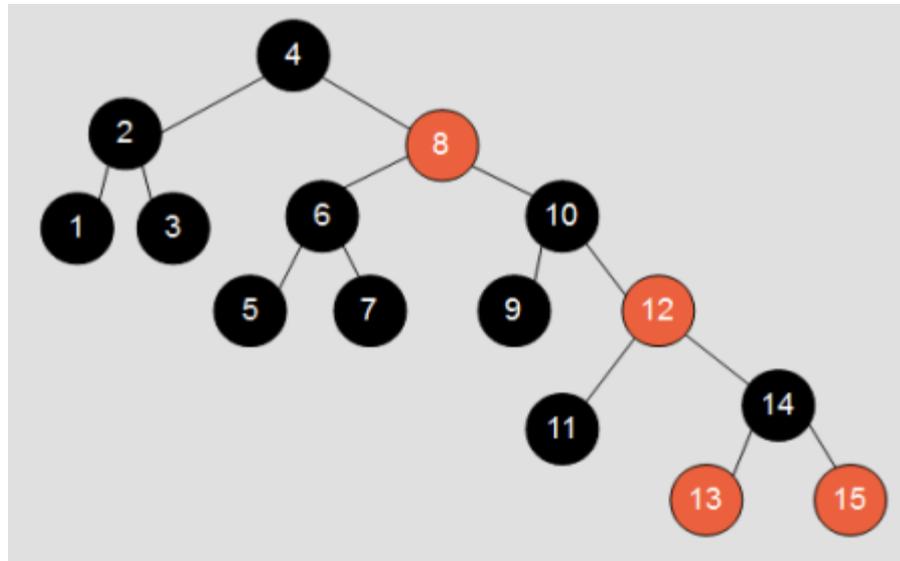
Nodos internos= 3

Nodos hoja= $i+1=4$

Total de vértices= $2i+1=2*3+1=7$

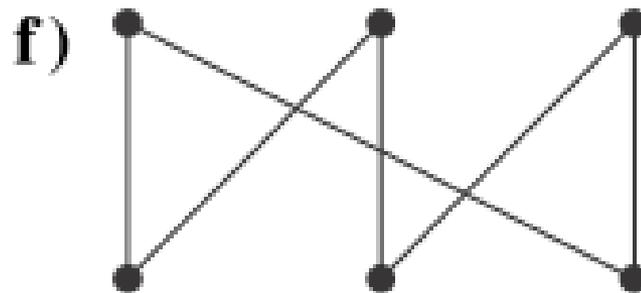
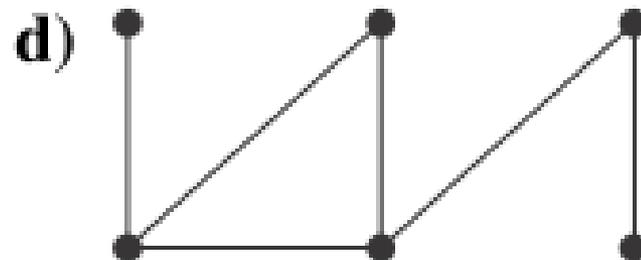
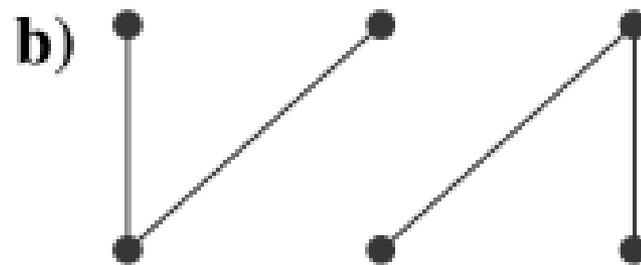
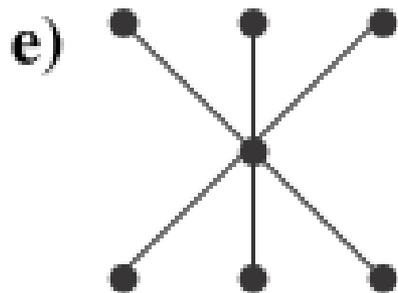
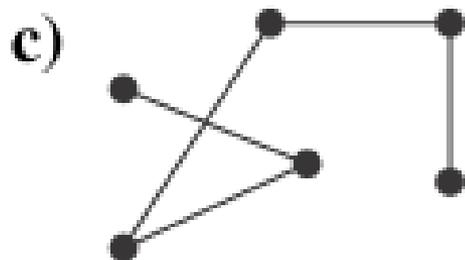
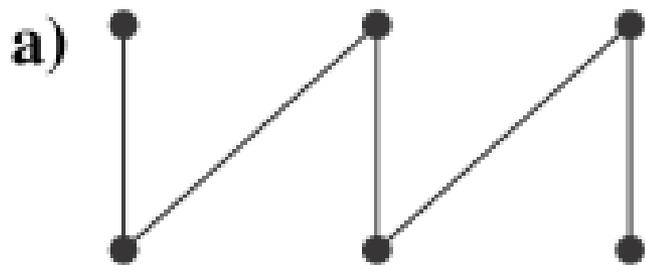
Ejercicio

- Identifique: número de nodos, hojas, nodo raíz, nodos internos, tipo de árbol.



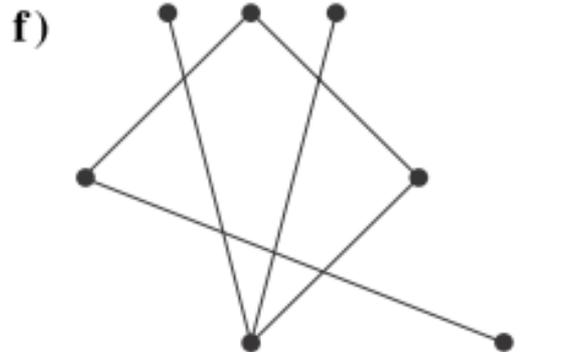
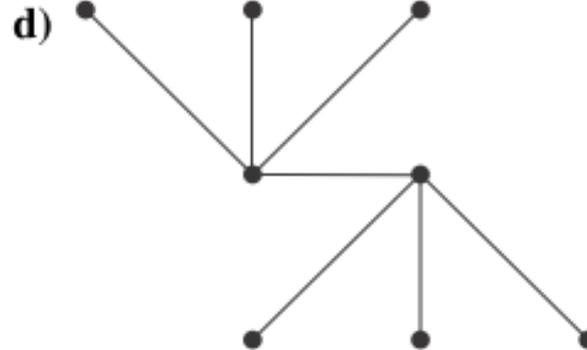
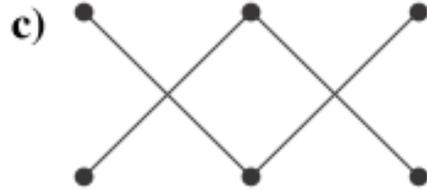
Ejercicio

- Cuales grafos son árboles?



Ejercicio

- Cuales grafos son árboles?



Ejercicio

- ¿Cuál es el vértice raíz?, ¿Cuáles son internos?, ¿Cuáles son hojas? ¿Cuáles son hijos de j? ¿Cuál es el padre de h? ¿Cuáles son hermanos de o? ¿Cuáles son ancestros de m? ¿Cuáles son descendientes de b?

