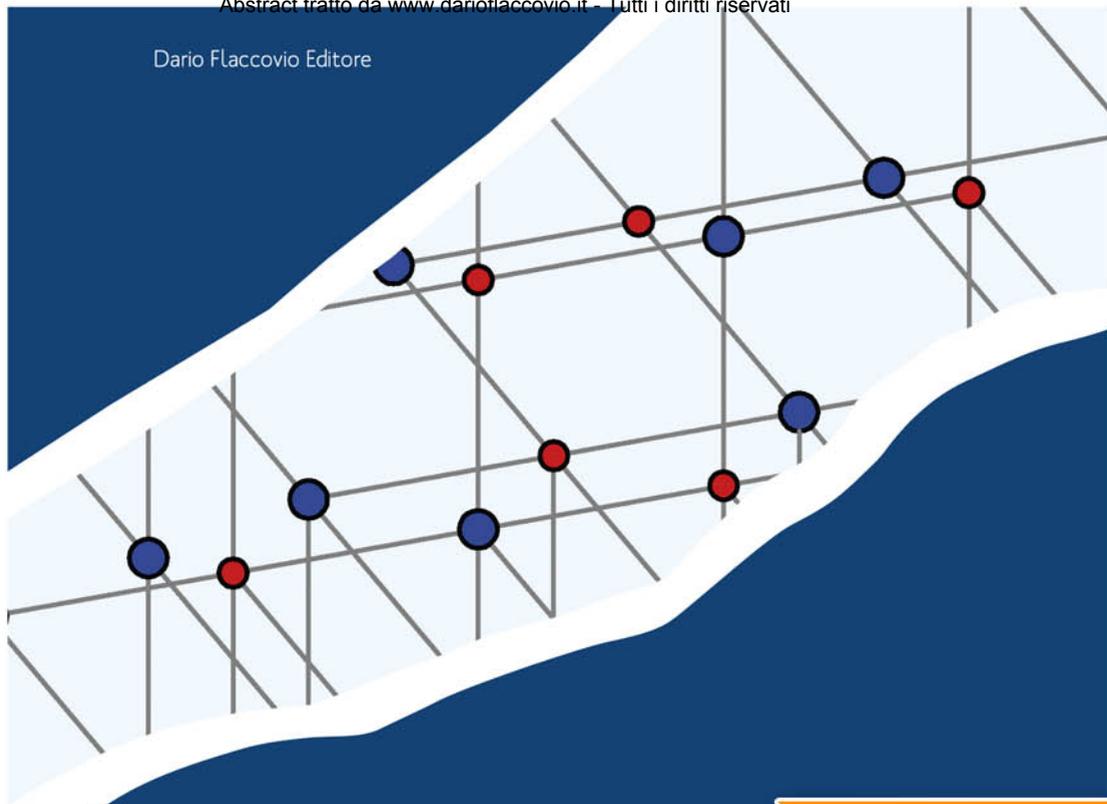


Dario Flaccovio Editore

ROMOLO DI FRANCESCO



GEOTECNICA DEL TERZO MILLENNIO



[Scheda sul sito >](#)

# INTRODUZIONE ALLA MECCANICA DEL CONTINUO

con applicazioni di Scienza dei Materiali,  
calcolo strutturale e geotecnico

*Ai miei genitori,  
Lena e Corrado*

Romolo Di Francesco

# **INTRODUZIONE ALLA MECCANICA DEL CONTINUO**

**CON APPLICAZIONI DI SCIENZA DEI MATERIALI, CALCOLO STRUTTURALE E GEOTECNICO**



Dario Flaccovio Editore

Romolo Di Francesco

INTRODUZIONE ALLA MECCANICA DEL CONTINUO

ISBN 978-88-579-0157-2

© 2012 by Dario Flaccovio Editore s.r.l. - tel. 0916700686

[www.darioflaccovio.it](http://www.darioflaccovio.it)    [info@darioflaccovio.it](mailto:info@darioflaccovio.it)

Prima edizione: settembre 2012

Di Francesco, Romolo <1965->

Introduzione alla meccanica del continuo : con applicazioni di scienza dei materiali, calcolo strutturale e geotecnico / Romolo Di Francesco. - Palermo : D. Flaccovio, 2012.

ISBN 978-88-579-0157-2

1. Meccanica.

531 CDD-22

SBN Pal0247029

*CIP - Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"*

Stampa: Tipografia Priulla, Palermo, settembre 2012

Nomi e marchi citati sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

L'editore dichiara la propria disponibilità ad adempiere agli obblighi di legge nei confronti degli aventi diritto sulle opere riprodotte.

La fotocopiatura dei libri è un reato.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata dagli aventi diritto/dall'editore.

## INDICE

### 1. Presentazione dell'opera

1.1. Introduzione all'opera .....	pag.	1
1.2. Introduzione al volume I .....	»	2
1.3. Introduzione al volume II .....	»	4
1.4. Ringraziamenti .....	»	5
1.5. Tabella dei simboli .....	»	6

### 2. Struttura atomica della materia

2.1. Introduzione .....	»	11
2.1.1. I legami chimici .....	»	13
2.2. I solidi cristallini .....	»	16
2.2.1. L'omogeneo periodico .....	»	19
2.2.2. La simmetria nei reticoli cristallini .....	»	21
2.2.3. Dislocazioni e fratture .....	»	24
2.2.4. Comportamento meccanico di base .....	»	26
2.2.5. Comportamento dinamico di base .....	»	30
2.3. Esercizi .....	»	31
2.3.1. Esercizio 2.1: l'equazione della forza nelle molle .....	»	32
2.3.2. Esercizio 2.2: applicazione del metodo FEM .....	»	34

### 3. Lo stato di sforzo nei solidi

3.1. Introduzione .....	»	37
3.2. Analisi dello stato di sforzo .....	»	39
3.2.1. Definizione matematica di mezzo continuo .....	»	46
3.2.2. Relazione tensore degli sforzi-vettore sforzo .....	»	47
3.2.3. Tensioni principali ed invarianti di sforzo .....	»	51
3.2.4. Lo spazio degli sforzi principali .....	»	57
3.2.5. Tensioni ottaedriche .....	»	59
3.2.6. Tensore sferico e tensore deviatorico dello sforzo .....	»	61
3.2.7. Invarianti deviatorici dello sforzo .....	»	64
3.2.8. Relazioni sforzi principali-invarianti dello sforzo .....	»	66
3.2.9. Interpretazione geometrica dello stato di sforzo .....	»	72
3.2.10. Stato tensionale piano e invarianti di sforzo .....	»	75
3.2.11. Un esempio applicativo degli invarianti di sforzo .....	»	77
3.2.12. Lo stato di sforzo secondo i cerchi di Mohr .....	»	79
3.2.13. Piani di rottura dei solidi secondo i cerchi di Mohr .....	»	86
3.3. Traiettorie delle tensioni principali .....	»	90
3.4. Esercizi .....	»	92
3.4.1. Esercizio 3.1: calcolo del vettore sforzo .....	»	93
3.4.2. Esercizio 3.2: calcolo dei componenti degli stati di sforzo .....	»	96
3.4.3. Esercizio 3.3: calcolo delle tensioni ottaedriche .....	»	97
3.4.4. Esercizio 3.4: effetti della rotazione del sistema di riferimento .....	»	100
3.4.5. Esercizio 3.5: applicazione dei cerchi di Mohr .....	»	101
3.4.6. Esercizio 3.6: analisi di una prova di trazione pura .....	»	104
3.4.7. Esercizio 3.7: componenti vettoriali sul piano deviatorico .....	»	106

#### 4. Analisi dello stato di deformazione

4.1. Introduzione .....	»	111
4.2. Analisi dello stato di deformazione .....	»	112
4.2.1. Effetti del coefficiente di Poisson sulla deformazione .....	»	121
4.2.2. Descrizione euleriana e descrizione lagrangiana.....	»	124
4.2.3. Descrizione tensoriale della deformazione.....	»	128
4.2.4. Descrizione ingegneristica della deformazione.....	»	138
4.2.5. Interpretazione geometrica della deformazione.....	»	142
4.2.6. Direzioni principali e invarianti della deformazione.....	»	147
4.2.7. Tensore sferico e tensore deviatorico della deformazione .....	»	150
4.2.8. Deformazioni ottaedriche .....	»	152
4.2.9. Deformazione piana e cerchi di Mohr.....	»	153
4.3. Esercizi.....	»	155
4.3.1. Esercizio 4.1: deformazione finita e infinitesima .....	»	156
4.3.2. Esercizio 4.2: calcolo delle componenti della deformazione .....	»	159
4.3.3. Esercizio 4.3: deformazione in campo elastico .....	»	160
4.3.4. Esercizio 4.4: deformazione di un provino di calcestruzzo.....	»	162
4.3.5. Esercizio 4.5: componenti vettoriali sul piano deviatorico .....	»	164

#### 5. Le relazioni costitutive

5.1. Introduzione .....	»	167
5.1.1. Validità della legge di conservazione dell'energia .....	»	168
5.1.2. Validità della legge di conservazione della massa.....	»	170
5.2. Equazioni di equilibrio.....	»	175
5.3. Legami sforzi-deformazioni .....	»	180
5.4. Equazioni di congruenza.....	»	182
5.5. Esercizi.....	»	184
5.5.1. Esercizio 5.1: applicazione delle leggi di equilibrio .....	»	185
5.5.2. Esercizio 5.2: un problema di raffreddamento dell'acqua.....	»	188

#### 6. Teoria dell'elasticità

6.1. Introduzione .....	»	193
6.1.1. Struttura logica della teoria dell'elasticità .....	»	196
6.2. Funzioni dell'energia di deformazione .....	»	198
6.3. Legge di Hooke o dell'elasticità lineare .....	»	202
6.3.1. Determinazione delle costanti elastiche .....	»	207
6.3.2. Il concetto di piano di simmetria elastica .....	»	210
6.3.3. Mezzi ortotropi .....	»	211
6.3.4. Mezzi isotropi .....	»	219
6.3.5. Mezzi trasversalmente isotropi.....	»	224
6.3.6. La deformazione volumetrica elastica isotropa .....	»	229
6.3.7. Stato di sforzo piano.....	»	230
6.3.8. Stato di deformazione piana .....	»	235
6.3.9. Stato di deformazione edometrica .....	»	248
6.3.10. Il legame elastico-isotropo invariante .....	»	243
6.4. Problemi elastostatici.....	»	244
6.4.1. Le equazioni di Navier .....	»	245
6.4.2. Le equazioni di Beltrami-Michell .....	»	249
6.5. Elasticità non lineare.....	»	250

6.5.1.	Teoria dell'iperelasticità .....	»	251
6.5.2.	Teoria dell'ipoelasticità .....	»	252
6.6.	Influenza della composizione chimica .....	»	253
6.6.1.	Il kevlar®.....	»	255
6.6.2.	Il vetro .....	»	256
6.6.3.	Il calcestruzzo .....	»	258
6.6.4.	I terreni .....	»	260
6.6.5.	Gli acciai .....	»	262
6.7.	Esercizi.....	»	269
6.7.1.	Esercizio 6.1: prova di trazione su un mezzo isotropo.....	»	270
6.7.2.	Esercizio 6.2: lavoro di deformazione sul piano ottaedrico .....	»	271
6.7.3.	Esercizio 6.3: invarianti elastici nella simmetria radiale.....	»	272
6.7.4.	Esercizio 6.4: invarianti elastici nella deformazione piana .....	»	275
6.7.5.	Esercizio 6.5: stress-path di una prova di compressione .....	»	276
6.7.6.	Esercizio 6.6: trasmissione di un carico concentrato .....	»	280
6.7.7.	Esercizio 6.7: trasmissione di uno sforzo lineare .....	»	288
6.7.8.	Esercizio 6.8: prova di compressione confinata .....	»	289
6.7.9.	Esercizio 6.9: relazione tra gli invarianti elastici .....	»	291
<b>7. Teoria della plasticità</b>			
7.1.	Introduzione .....	»	293
7.1.1.	Lavoro isotropo e lavoro deviatorico .....	»	296
7.1.2.	Formulazione generale della plasticità .....	»	300
7.1.3.	Comportamento plastico incrudente nel piano $\sigma\text{-}\varepsilon$ .....	»	304
7.1.4.	Comportamento plastico rammollente nel piano $\sigma\text{-}\varepsilon$ .....	»	309
7.1.5.	Snervamento e rottura a taglio nei solidi continui.....	»	312
7.1.6.	Analisi della strizione in trazione .....	»	319
7.1.7.	Analisi della shear-band in compressione .....	»	331
7.1.8.	Teorie incrementali: l'equazione di Prandtl-Reuss.....	»	338
7.1.9.	Sviluppo storico della teoria della plasticità.....	»	343
7.2.	Principali comportamenti plastici di base .....	»	348
7.2.1.	Modello rigido perfettamente plastico .....	»	348
7.2.2.	Modello elastico perfettamente plastico .....	»	349
7.2.3.	Modello rigido con incrudimento lineare .....	»	350
7.2.4.	Modello elastico con incrudimento lineare .....	»	350
7.2.5.	Gli acciai .....	»	351
7.2.6.	Il calcestruzzo .....	»	356
7.2.7.	I terreni .....	»	360
7.3.	Principali criteri di snervamento.....	»	363
7.3.1.	Criterio di snervamento di Tresca .....	»	364
7.3.2.	Criterio di snervamento di von Mises .....	»	370
7.3.3.	Confronto tra i criteri di Tresca e von Mises.....	»	376
7.3.4.	Criterio di snervamento di Mohr-Coulomb.....	»	378
7.4.	Criteri di flusso e leggi di incrudimento .....	»	384
7.4.1.	Le prove sui cilindri cavi di Taylor e Quinney .....	»	385
7.4.2.	Il criterio di flusso.....	»	389
7.4.3.	Postulato di normalità e assioma di convessità .....	»	390
7.4.4.	Il postulato di Drucker .....	»	393
7.4.5.	Le leggi di incrudimento .....	»	394

7.4.6.	Il parametro incrementale $\lambda$ .....	»	398
7.5.	Il modello non lineare elastico perfettamente plastico .....	»	400
7.5.1.	Tensore incrementale di deformazione elastica .....	»	401
7.5.2.	Un esempio di calcolo .....	»	402
7.5.3.	Tensore incrementale di deformazione plastica e totale .....	»	406
7.5.4.	Non linearità mediante il metodo dell'iterazione diretta.....	»	406
7.5.5.	Non linearità mediante il metodo di Newton-Raphson .....	»	409
7.6.	Esercizi .....	»	409
7.6.1.	Esercizio 7.1: carico limite di una fondazione .....	»	410
7.6.2.	Esercizio 7.2: minimizzazione del carico limite di una fondazione .....	»	412
7.6.3.	Esercizio 7.3: prova di compressione cubica .....	»	413
7.6.4.	Esercizio 7.4: interpretazione di una prova di trazione .....	»	418
<b>8. Teoria della viscoelasticità</b>			
8.1.	Introduzione .....	»	421
8.2.	Modelli viscoelastici di base.....	»	423
8.2.1.	La legge di Maxwell .....	»	425
8.2.2.	La legge di Kelvin-Voigt .....	»	426
8.2.3.	La legge di Burgers .....	»	427
8.3.	Prove di creep e prove di rilassamento .....	»	428
8.4.	Un modello viscoelastico per il calcestruzzo.....	»	432
8.4.1.	Un caso di studio: l'antico teatro Galli di Rimini .....	»	434
BIBLIOGRAFIA .....			» 438

# 1. PRESENTAZIONE DELL'OPERA

## 1.1. Introduzione all'opera

Per una corretta comprensione degli elementi costituenti l'opera ritengo sia fondamentale tenere ben presenti alcuni concetti essenziali legati al significato del termine "Geotecnica", i quali possono essere espressi in due soli punti:

- a. la Geotecnica non è un formulario; cercare l'equazione che possa risolvere il problema del momento o la correlazione più utile per il caso in analisi conduce solo al fallimento;
- b. la Geotecnica non può essere ricondotta alla disperata ricerca dei parametri da inserire, in maniera acritica e senza possederne il necessario bagaglio tecnico, nelle finestre del software in uso.

La Geotecnica in realtà può essere sintetizzata in una semplice frase: *studio dell'interazione terreno-struttura*, anche se nel significato completo dell'accezione dobbiamo includere, ad esempio, lo studio della stabilità dei versanti senza necessariamente dover scomodare concetti propri della Scienza e della Tecnica.

Esiste, però, anche una definizione alternativa che, mutuata dalla terminologia informatica, riesce a racchiudere tutta la moderna essenza di tale materia: un *algoritmo di trasformazione* il quale risulta essere particolarmente sensibile ai dati di input, per quantità e qualità (Di Francesco e Siena, 2007); ossia, dovremmo cominciare a pensare alla Geotecnica come ad un meccanismo ad ingranaggi il quale, alimentato dalla matematica necessaria, sia in grado di produrre output all'altezza dei nostri problemi e perfettamente bilanciato rispetto ai costi necessari per produrre i relativi dati di input in termini di modello geologico e modello geotecnico. Anche se è proprio qui che emergono tutte le nostre lacune e le nostre limitazioni, poiché l'inserimento di dati di input non all'altezza della complessità dei modelli di calcolo utilizzati riesce ad inficiare il migliore dei nostri progetti.

Proprio per tali motivi l'opera è stata volutamente improntata secondo una metodologia differente rispetto a quanti l'hanno preceduta considerato che, pur analizzando con sufficiente dettaglio e rigore scientifico tutti gli aspetti propri delle materie coinvolte, ha cercato di annullare il gap esistente tra testi di chiara derivazione ingegneristica o geologica, tentando di colmare le lacune che separano due mondi complementari

mediante la costruzione di un filo conduttore comune. Ragionando in tale direzione (secondo lo schema rappresentato in volume I – figura 1.1), gli argomenti sono stati suddivisi in diversi volumi dedicati alla Meccanica del Continuo, alla Meccanica delle Terre in tutte le sue sfaccettature e agli ambienti geologici in chiave geotecnica con lo scopo di introdurre il lettore alla costruzione, progressiva e sequenziale, di un percorso logico che – partendo da conoscenze matematiche ed ingegneristiche – passa attraverso la “comprensione geotecnica” degli ambienti geologici di formazione dei terreni e di modellazione della superficie terrestre; un percorso la cui costruzione è stata fondata su uno strumento, potente e semplice allo stesso tempo, introdotto da Lambe T.W. (1967) e denominato *stress-path*, capace di riprodurre percorsi tensionali e cinematici anche complessi replicabili in laboratorio mediante il ricorso a prove sperimentali. Un metodo che consentirà di giungere alla definizione di analisi non più limitate ai soli aspetti teorici delle strutture che progettiamo ma di più ampio respiro, tale da consentirci di trattare problemi anche complessi grazie ai modelli geologici e geotecnici sviluppati intorno ai medesimi fenomeni.

Operando in questo modo saremo in grado, ad esempio, di analizzare l’influenza dei fronti di scavo nei confronti delle opere che progettiamo e di quelle esistenti nel loro raggio di influenza; contestualmente, tenuto conto delle condizioni al contorno che non assumono più aspetti esclusivamente di tipo meccanico e strutturale ma che fanno riferimento anche alla complessa storia geologica, saremo in grado di decidere se progettare opere provvisorie di sostegno o se sfruttare alcuni elementi chiave che sottendono la meccanica dei fronti di scavo (volume I, figura 1.10): elementi che saranno trattati nell’ottica della massima chiarezza e semplicità non solo espositiva ma anche fruitiva, in relazione alla necessità che abbiamo di utilizzare modelli semplici e di facile costruzione successivamente adattabili a modelli numerici anche di elevata complessità.

Per questi motivi tutti gli argomenti sono stati sviluppati secondo una logica di apprendimento delle numerose materie che concorrono nella definizione dei modelli di riferimento, partendo necessariamente da concetti teorici a carattere matematico che, sviluppati in sequenza, conducono alla strutturazione di strumenti potenti – e nel contempo di facile utilizzo – capaci di risolvere i numerosi problemi geotecnici che la pratica professionale ci presenta quotidianamente; un approccio che ha richiesto che ogni capitolo fosse corredato da appositi esercizi, o casi di studio, al fine di consentire al lettore di familiarizzare con gli argomenti fino a quel punto sviluppati.

## 1.2. Introduzione al volume I

L’obiettivo fondamentale del volume I discende dalla moderna necessità di progettare con metodi matematici molto avanzati come gli elementi finiti: uno strumento, oggi-giorno davvero molto diffuso anche nella pratica professionale, alla cui base stanno pochi ma essenziali concetti fisico-matematici come le molle virtuali, l’energia di

deformazione e il principio dei lavori virtuali che aprono, e guidano, i successivi argomenti ad essi obbligatoriamente correlati.

Allo stesso modo tali concetti guideranno, nei volumi successivi, la comprensione del comportamento meccanico dei solidi continui e la trattazione, e contestuale applicazione, dei legami costitutivi fino a condurre all'evoluzione verso la meccanica dei terreni e infine verso l'analisi dell'interazione terreno-struttura in funzione dell'influenza dei possibili ambienti geologici: un filo conduttore che seguirà l'intera opera e che faciliterà la comprensione dei risultati, offerti dai moderni software di progettazione strutturale e geotecnica, senza dover incorrere nella loro accettazione acritica. In effetti, com'è stato dimostrato con l'introduzione alle varie tecniche e con i relativi esempi di calcolo, il ricorso al metodo di analisi agli elementi finiti richiede – innanzitutto – lo studio della validità dei modelli di calcolo implementati nei programmi commerciali, com'è d'altronde richiesto anche dalle nuove normative tecniche sulle costruzioni che impongono la validazione dei risultati da parte dell'utilizzatore; nel contempo tale filosofia ha anche evidenziato la necessità di riuscire ad adottare il giusto bilanciamento tra la più corretta discretizzazione dei mezzi continui e degli elementi strutturali e il relativo incremento dell'onere computazionale; senza ovviamente dimenticare anche l'incremento dei parametri da determinare in funzione della sempre più crescente complessità dei criteri di snervamento utilizzabili. Tutti problemi che si traducono, in definitiva, nella necessità di padroneggiare almeno le tecniche poste alla base dei meccanismi che sottendono le analisi ad elementi finiti.

Per tali motivi il testo è stato suddiviso in pochi, ma essenziali capitoli ai quali è stato affidato il non semplice scopo di introdurre innanzitutto gli elementi finiti di base inquadrati organicamente in funzione della teoria dell'energia potenziale minima di Castigliano; segue l'analisi del metodo delle rigidezze dirette grazie al quale è possibile verificare, mediante numerosi esempi, il comportamento degli elementi finiti soggetti all'azione delle sole forze assiali i quali, pur apparentemente limitati nelle applicazioni, risultano particolarmente efficaci nell'analisi delle strutture i cui componenti si comportano esclusivamente come tiranti o puntoni.

Il passaggio successivo conduce all'introduzione delle tecniche fondamentali che possono essere definite il vero e proprio motore del metodo degli elementi finiti le quali, tramite il principio dei lavori virtuali, riescono a costruire il comportamento matematico di elementi strutturali semplici come le travi di Bernoulli, di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko nonché degli elementi isoparametri grazie ai quali è possibile simulare il comportamento di geometrie comunque complesse.

Quindi, una volta definiti gli elementi principali, è stato trattato il difficile argomento relativo all'interazione terreno-struttura mediante l'illustrazione di un modello a macroelementi il quale, ricavato in originale, è stato successivamente applicato all'analisi delle travi di fondazione, dei pali e delle paratie ovvero delle principali strutture geotecniche riscontrabili nella pratica professionale. Non ultimo, il testo è stato chiuso da alcuni esempi applicativi (con vocazione prevalentemente geotecnica)

relativi al comportamento termico e termo-meccanico delle strutture, all'interazione tra fondazioni adiacenti nonché ai fenomeni dipendenti dalla dinamica strutturale.

Infine, considerata la trattazione specificatamente matematica e geotecnica degli elementi, ho ritenuto necessario prevedere anche due apposite appendici: la prima dedicata allo studio delle matrici, dei vettori e dei tensori con lo scopo di fornire un ripasso sintetico di conoscenze già acquisite o di approfondimento delle nozioni necessarie per un corretto e concreto successo del processo di apprendimento logico previsto; la seconda dedicata alla determinazione della rigidità delle molle posta alla base dell'analisi dell'interazione terreno-struttura.

### 1.3. Introduzione al volume II

Seguendo il ragionamento didattico introdotto con il volume I, il testo possiede lo scopo di sviluppare il necessario processo formativo utile per affrontare gli argomenti, di carattere più francamente geotecnico, trattati nei volumi successivi; per questo motivo, pur introducendo tutti i concetti teorici che stanno alla base della Meccanica del Continuo, ho ritenuto necessario partire da cognizioni proprie della Fisica della Materia Condensata, della Mineralogia e della Scienza dei Materiali che ci permettono di chiarire alcune connessioni logiche esistenti tra i diversi modi di rottura dei solidi e il comportamento delle molle posto alla base del metodo degli elementi finiti e di tutta la progettazione strutturale e geotecnica.

Partire dalle modalità di assemblaggio dei cristalli – utilizzando i concetti di simmetria strutturale, di molle, di lavoro virtuale e di stabilità energetica giungendo infine alla trattazione dei legami costitutivi – risulterà in definitiva essenziale per comprendere quando utilizzare leggi semplici, come quella elastica, e quando approfondire le conoscenze introducendo nei modelli di analisi anche il comportamento in campo plastico; oppure per quale motivo alcuni materiali possiedono un comportamento fragile ed altri un comportamento viscoso, i cui risentimenti sulle strutture possono essere avvertiti anche a distanza di decine di anni dalla loro costruzione stante la tendenza al fluage del calcestruzzo e ai cedimenti di consolidazione dei terreni.

Allo stesso modo, attraverso l'iniziale e doverosa analisi di Cauchy degli stati di sforzo (e successivamente degli stati di deformazione) per i punti materiali, riusciremo anche a sviluppare e a comprendere appieno il concetto matematico di invariante in generale e di invarianti associati alle tensioni ottaedriche in particolare: uno strumento fondamentale nello sviluppo e nella trattazione della Meccanica delle Terre a partire dagli studi di Roscoe, Schofield e Wroth (1958) che per primi hanno introdotto i piani invarianti tutt'oggi ancora utilizzati. Strumenti grafico-matematici – questi ultimi – che, sostenendo il concetto degli stress-path, possiedono il grande pregio di poter descrivere in maniera completa gli stati tensionali e cinematici – riproducibili in laboratorio mediante prove in cella triassiale – tramite l'uso di due soli parametri la cui entità è del tutto indipendente dalla scelta del sistema di riferimento; piani

grafici dai quali è possibile estrarre le condizioni di criticità delle principali strutture geotecniche capaci, a loro volta, di guidare la costruzione del più appropriato modello geotecnico di riferimento per le successive analisi progettuali.

A tal proposito occorre rilevare che i problemi di apprendimento della Geotecnica sono imputabili, sostanzialmente, ad un approccio errato alla materia, considerata la sua derivazione dalla Meccanica del Continuo tramite la connessione logica esistente attraverso la Meccanica delle Terre (volume I, figura 1.1); in questo modo si assiste all'iniziale studio di argomenti legati alla natura del continuo che, basati esclusivamente sull'uso degli invarianti, conducono allo sviluppo della Scienza delle Costruzioni laddove invece tale potente strumento matematico è completamente abbandonato a favore di altri concetti ( $M$ ,  $N$ ,  $T$ ). Al contrario, essendo la Geotecnica totalmente costruita sulla Meccanica delle Terre ne deriva uno sviluppo affidato, in maniera quasi esclusiva, al concetto di invariante conducendo a difficoltà logiche di apprendimento con ovvie ripercussioni anche in campo professionale.

Occorre inoltre rilevare che, se tali problemi affliggono coloro che si occupano di ingegneria (studenti, ricercatori o professionisti interessati ad approfondire l'argomento), nel campo della geologia si assiste ad un'ulteriore limitazione dettata dal mancato apprendimento della Meccanica del Continuo, conducendo ad uno studio che poggia su elementi complessi dei quali sfugge la vera essenza o addirittura l'intero apparato teorico.

Per i motivi sopra espressi il testo è stato improntato in un'ottica dualistica di apprendimento dei concetti basilari che sottendono l'apparato teorico-sperimentale della Meccanica del Continuo e della Scienza dei Materiali, in quanto espressi sia in funzione di una trattazione autonoma degli argomenti e sia in funzione di una evidente propedeuticità nell'apprendimento della Meccanica delle Terre e della Geotecnica costituente il corpo dei volumi successivi. Per tali motivi ogni capitolo è stato completato da esercizi svolti, ai quali è stato affidato sia il compito riepilogativo degli argomenti esposti sia la funzione di connessione logica tra le diverse materie esposte nei vari volumi e nei vari capitoli.

#### 1.4. Ringraziamenti

Oltre a rinnovare i ringraziamenti a quanti sono stati citati nel volume I desidero estendere gli stessi all'architetto Matteo Felitti di Potenza (Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Napoli "Federico II") e agli ingegneri Pietro Cardone e Giovanni Molentino per aver condotto le prove sui materiali da costruzione – necessarie per una corretta gestione sperimentale dei concetti teorici sviluppati nel testo – presso il *Laboratorio Tecnologico Tecnoprove* con sedi a Ostuni e Matera ([www.tecnoprove.it](http://www.tecnoprove.it)); inoltre alla *DuPont*, per avermi inviato le informazioni tecniche relative al kevlar® da loro inventato nel 1965 ([www.dupont.com](http://www.dupont.com)), ad Alessandro Cerretini e Solitario Nesti, che gestiscono la rivista online *NT – Nuovi Tessili* ([www.technica.it](http://www.technica.it)).

net) dedicata anche ai materiali compositi e, non ultimo, al dottor Medeo Olivares, della Controls srl ([www.controlsgroup.net](http://www.controlsgroup.net)), per avermi fornito le splendide immagini dei diversi apparati di laboratorio utilizzati.

Nuovamente, sarei negligente se non ringraziassi tutti i docenti e i ricercatori universitari di *Ingegneria Civile*, *Ingegneria Geotecnica*, *Ingegneria Meccanica*, *Ingegneria Sismica*, *Geologia*, *Geomorfologia*, *Idrogeologia*, *Geologia Applicata*, *Chimica* e *Scienza dei Materiali* i quali, direttamente o indirettamente, hanno contribuito alla stesura del testo. Direttamente per i numerosi confronti su argomenti specifici; indirettamente per aver messo a disposizione sul web, questo straordinario ma altrettanto pericoloso strumento moderno, gli appunti delle proprie lezioni ed esercitazioni.

Infine desidero rinnovare i ringraziamenti alla casa editrice Dario Flaccovio di Palermo, e all'intero staff, per aver creduto in un'opera davvero ponderosa sia per me che per loro.

Resta beninteso che eventuali errori sono imputabili a me, e a me soltanto.

## 1.5. Tabella dei simboli

### *Chimica*

$q$	carica elettrica
$V$	energia potenziale tra componenti atomici
$r$	distanza tra componenti atomici
$EI$	potenziale di ionizzazione
$AE$	affinità elettronica
$\varepsilon$	elettronegatività
Na	simbolo chimico del sodio
Cl	simbolo chimico del cloro
NaCl	simbolo chimico del cloruro di sodio
$r_e$	distanza minima di equilibrio nel legame ionico
$\text{Å}$	miliardesimo di metro ( $1 \times 10^{-10}$ metri)
$a, b, c$	periodi dei reticoli cristallini
$\alpha, \beta, \gamma$	angoli tra le maglie dei reticoli cristallini

### *Fisica ed elementi finiti*

$k$	rigidezza delle molle
$u_e$	energia di deformazione
$U_e$	energia elastica
$W, L$	lavoro
$\Pi$	energia potenziale
$F$	forza
$d\mathbf{r}$	vettore differenziale

$\delta, U$	spostamento
$\delta^{el}$	spostamento elastico
$u$	spostamento orizzontale
$v$	spostamento verticale
$E$	modulo elastico
$L$	lunghezza elementi
$A$	area elementi
$V$	volume elementi
$N$	funzioni di interpolazione
$\Phi$	funzioni di forma
$M$	momento flettente
$I_z$	momento di inerzia
$P$	forze nodali
$\mathbf{D}$	matrice di rigidezza
$\mathbf{C}$	matrice di cedevolezza
$f$	frequenza di oscillazione di un sistema
$T$	periodo di oscillazione di un sistema

### *Sforzi*

$u$	spostamento orizzontale secondo x
$v$	spostamento orizzontale secondo y
$w$	spostamento verticale secondo z
$L$	lunghezza iniziale di un corpo continuo
$\Delta L$	variazione di lunghezza di un corpo continuo
$F$	forza
$A$	area
$\sigma$	sforzo normale generico di compressione o trazione
$\tau$	sforzo di taglio generico
$\sigma_y$	sforzo normale parallelo all'asse y
$\tau_{yx}$	sforzo di taglio perpendicolare all'asse y e parallelo all'asse x
$\sigma_{ij}$	tensore degli sforzi
$m$	massa
$V$	volume
$\rho$	densità
$\sigma_n, \sigma$	componente normale di uno sforzo
$S_n, \tau$	componente tangenziale di uno sforzo
$I_1$	invariante lineare o di primo ordine del tensore degli sforzi
$I_2$	invariante quadratico o di secondo ordine del tensore degli sforzi
$I_3$	invariante cubico o di terzo ordine del tensore degli sforzi

$\sigma_1$	tensione principale massima
$\sigma_2$	tensione principale intermedia
$\sigma_3$	tensione principale minima
$\sigma_{ott}$	tensione ottaedrica normale
$\tau_{ott}$	tensione ottaedrica tangenziale
$\sigma_M$	tensore sferico degli sforzi
$\sigma_d, s_{ij}$	tensore deviatorico degli sforzi
$\sigma_{ii}$	traccia del tensore degli sforzi
$J_1$	invariante lineare del tensore deviatorico di sforzo
$J_2$	invariante quadratico del tensore deviatorico di sforzo
$J_3$	invariante cubico del tensore deviatorico di sforzo

### *Deformazioni*

$\varepsilon$	deformazione
$\varepsilon^{el}$	componente elastica della deformazione
$\varepsilon^{pl}$	componente plastica della deformazione
$C_{ij}$	tensore della variazione di posizione di Cauchy
$G_{ij}$	tensore della variazione di posizione di Green
$L_{ij}$	tensore lagrangiano di deformazione finita
$l_{ij}$	tensore lagrangiano di deformazione infinitesima
$I'_1$	invariante lineare del tensore di deformazione
$I'_2$	invariante quadratico del tensore di deformazione
$I'_3$	invariante cubico del tensore di deformazione
$\varepsilon_1$	deformazione principale massima
$\varepsilon_2$	deformazione principale intermedia
$\varepsilon_3$	deformazione principale minima
$\varepsilon_M$	tensore sferico di deformazione
$e_{ij}$	tensore deviatorico di deformazione
$\varepsilon_{ii}$	traccia del tensore di deformazione
$\varepsilon_v$	componente sferica associata alla variazione di volume
$J'_1$	invariante lineare del tensore deviatorico di deformazione
$J'_2$	invariante quadratico del tensore deviatorico di deformazione
$J'_3$	invariante cubico del tensore deviatorico di deformazione
$D$	dilatazione cubica
$E$	modulo elastico
$\nu$	coefficiente di Poisson
$K$	modulo di deformazione cubica
$G$	modulo di deformazione tangenziale
$\nabla$	operatore nabla

$\nabla^2$  operatore di Laplace

### *Leggi di equilibrio*

$F_i$  forze di massa  
 $T_i$  forze esterne  
 $u$  spostamento nella direzione  $x$   
 $v$  spostamento nella direzione  $y$   
 $w$  spostamento nella direzione  $z$   
 $\gamma_t$  peso di volume del terreno  
 $z$  profondità del punto di calcolo delle tensioni in un sottosuolo

### *Teoria dell'elasticità*

$F_i$  forze di massa  
 $L$  lavoro compiuto da forze esterne  
 $\varepsilon^{pl}$  componente plastica della deformazione  
 $V$  volume di un solido  
 $u_e$  energia specifica di deformazione elastica  
 $U_e$  energia di deformazione elastica  
 $\varepsilon_{hk}$  tensore delle deformazioni  
 $D_{ijhk}$  tensore delle costanti elastiche di rigidezza  
 $C_{ijhk}$  tensore delle costanti elastiche di cedevolezza  
 $\sigma_{hk}$  tensore degli sforzi  
 $\Phi$  potenziale elastico o densità di energia di deformazione  
 $\Psi$  potenziale elastico complementare  
 $E$  modulo elastico  
 $\nu$  coefficiente di Poisson  
 $[D]_{sf,p}$  matrice di rigidezza elastica per condizioni di sforzo piano  
 $[C]_{sf,p}$  matrice di cedevolezza elastica per condizioni di sforzo piano  
 $[D]_{def,p}$  matrice di rigidezza elastica per condizioni di deformazione piana  
 $[C]_{def,p}$  matrice di cedevolezza elastica per condizioni di deformazione piana  
 $E_{ed}$  modulo elastico edometrico  
 $K$  modulo di deformazione cubica  
 $G$  modulo di deformazione tangenziale

### *Teoria della plasticità*

$\lambda$  parametro incrementale plastico  
 $\{d\varepsilon^e\}$  vettore di deformazione elastica  
 $\{d\varepsilon^p\}$  vettore di deformazione plastica  
 $L$  lavoro di deformazione

$\sigma_n$	sforzo agente normalmente ad un piano inclinato
$\tau_n$	sforzo agente parallelamente ad un piano inclinato
$\sigma_y$	tensione di snervamento (ingresso in campo elastoplastico)
$\sigma_{max}$	massima resistenza di un materiale a trazione o compressione
$\sigma_u$	resistenza ultima di un materiale a rottura
$\varepsilon^{ep}$	deformazione elastoplastica
$\varepsilon^p$	deformazione plastica
$L_0$	lunghezza iniziale di un provino
$L_i$	lunghezza istantanea di un provino
$\Delta L^e$	variazione elastica della lunghezza di un provino
$\Delta L^p$	variazione plastica della lunghezza di un provino
$D_0$	diametro iniziale di un provino cilindrico
$A_0$	area iniziale di un provino
$A_i$	area istantanea (attuale) di un provino
$\Delta A_i$	variazione dell'area di un provino (fattore di contrazione)
$V_0$	volume iniziale di un provino
$F_i$	carico attuale applicato ad un provino
$\sigma_i$	tensione istantanea (attuale) applicata ad un provino
$d\varepsilon^{ep}$	deformazione elastoplastica incrementale
$C^{ep}_{ijhk}$	matrice di cedevolezza elastoplastica
$K$	resistenza caratteristica o di snervamento dei materiali
$\gamma_t$	peso di volume del terreno
$z$	profondità del punto di calcolo delle tensioni in un sottosuolo
$\gamma_w$	peso di volume dell'acqua
$z_w$	altezza del battente d'acqua agente su un punto materiale
$f$	funzione di snervamento
$G$	modulo elastico tangenziale
$\tau$	resistenza al taglio di un materiale
$c$	coesione secondo il criterio di Mohr-Coulomb
$\varphi$	angolo di attrito secondo il criterio di Mohr-Coulomb
$k$	rigidezza delle molle nel metodo dell'iterazione diretta
$Q$	carico limite di una fondazione
$s_u$	resistenza allo snervamento del terreno secondo il criterio di Tresca

## 2. STRUTTURA ATOMICA DELLA MATERIA

### 2.1. Introduzione

Studiare la struttura atomica e cristallina della materia, nell'ambito dello sviluppo di concetti decisamente più pertinenti a mezzi bi/trifase quali possono essere considerati i terreni, può sembrare a priva vista un'inutile perdita di tempo; al contrario, per gli scopi prefissi risulta decisamente utile il modello, considerabile invece limitato nell'ambito della Fisica della Materia Condensata, dell'atomo a tre elementi con i protoni, i neutroni e gli elettroni: un concetto oramai noto da millenni ed introdotto per la prima volta da Democrito, il quale affermò che se provassimo a suddividere un pezzo di materia in elementi sempre più piccoli raggiungeremmo un limite dimensionale inferiore, e chiamò tali particelle *atomi*.

Occorre inoltre considerare, come sarà possibile scoprire nel proseguo del testo, che esiste una stretta relazione tra la struttura atomica della materia, le modalità di assemblaggio dei cristalli e le proprietà fisiche dei mezzi supposti continui; una relazione grazie alla quale siamo in grado di formulare l'intero apparato teorico-sperimentale della Meccanica del Continuo capace di simulare, con elevata accuratezza, la risposta Meccanica dei Solidi a svariate condizioni di sollecitazioni esterne (dalle fasi iniziali fino al collasso finale) e di seguire percorsi tensodeformativi non solo complessi ma anche notevolmente differenti tra loro. Inoltre, sempre grazie ai concetti pertinenti le modalità di assemblaggio dei costituenti la materia, saremo anche in grado di comprendere i differenti modi di deformazione dei solidi continui: elastico, plastico, fragile e viscoso: tutti elementi che ritroveremo sia nella Meccanica del Continuo che nella Meccanica delle Terre in relazione alla connessione logica illustrata in volume I, figura 1.1.

Nel raggiungimento dell'obiettivo risulta comunque possibile semplificare ulteriormente il concetto che abbiamo di atomo, poiché lo stesso può essere assimilato ad un sistema a due soli elementi:

1. il *nucleo*, costituito dai neutroni e protoni (per tale motivo definiti *nucleoni*) e rappresentante la massa ovvero le proprietà inerziali della materia;
2. gli *elettroni*, orbitanti attorno al nucleo e dotati di carica elettrica negativa alla quale attribuire, invece, le proprietà elastiche.

Nello stesso modo, per estensione di tali concetti, nel volume III scopriremo che anche i terreni possono essere ascritti a due soli elementi (in realtà scopriremo che possono essere suddivisi in due grandi gruppi):

- a. i terreni a grana grossa, come le sabbie e le ghiaie, che mostrano un comportamento meccanico dipendente dalle forze di massa (alla stregua dei nucleoni) con un'interazione tra le particelle di tipo puramente meccanico;
- b. i terreni a grana fine, come i limi e le argille, le cui proprietà e il cui comportamento meccanico dipendono invece dalle cariche elettriche dei minerali e dei cristalli (alla stregua degli elettroni), traducibili in forze di superficie, e dalla struttura del deposito.

In questo modo, pur nella necessaria semplificazione dei concetti, sarà innanzitutto possibile comprendere l'influenza esercitata da tali elementi nei confronti dell'interazione tra le particelle costituenti un terreno e tra queste e l'acqua in esso in presente; quindi, per estensione dei concetti sarà possibile giungere alla scoperta delle fenomenologie attinenti l'interazione terreno-struttura, a partire dai differenti parametri geotecnici da adottare i quali a loro volta conducono al ricorso delle metodologie di indagine e di sperimentazione in sito e in laboratorio.

Ritornando al concetto semplificato di atomo, i protoni (di carica elettrica positiva  $e^+$ ) e i neutroni, che insieme costituiscono il nucleo, possiedono una stabilità strutturale garantita dall'esistenza di forze di interazione definite *forze nucleari forti*; nel contempo risulta anche che l'intensità di tali forze dipende dalla carica elettrica delle particelle fondamentali, tale da manifestare un raggio d'azione davvero limitato e dell'ordine dei  $10^{-15}$  metri. Intorno al nucleo, che concentra praticamente l'intera massa dell'atomo, orbitano gli elettroni (di carica elettrica negativa  $e^-$ ) in funzione dell'esistenza di *forze elettromagnetiche* la cui intensità è circa 100 volte inferiore alle precedenti; ma, elemento essenziale, sono proprio tali forze le responsabili dell'attrazione con le cariche positive del nucleo e della repulsione con le altre cariche negative ovvero con gli altri atomi.

Volendo esprimere questi concetti in altre parole è possibile definire la contemporanea esistenza, tra gli elementi essenziali di un atomo, di forze attrattive e di forze repulsive che garantiscono la stabilità strutturale e che possono essere agevolmente calcolate a partire dal concetto di carica elettrica ( $q$ ) positiva e negativa; difatti, prendendo due componenti atomici posti a distanza  $r$ , fissa tra di loro, risulta che gli stessi devono possedere un'energia potenziale ( $V$ ) funzione della posizione, tale che:

$$V = \frac{q_1 \cdot q_2}{r} \quad (2.1)$$

L'equazione (2.1) comporta, a sua volta, lo sviluppo di valori negativi o positivi dell'energia potenziale rispettivamente per interazione tra particelle di carica opposta (protoni ed elettroni) o di carica uguale, ovvero implica attrazione nel primo caso e

repulsione nel secondo. È quindi possibile, in questo modo, provare ad immaginare l'unione degli elettroni con i nucleoni tramite connessioni a molle le quali, proprio per la loro idealizzazione, possono essere definite virtuali: un concetto che approfondiremo successivamente e che, posto anche alla base del metodo degli elementi finiti (volume I), ritroveremo praticamente in tutti i volumi.

Occorre inoltre considerare che il nucleo degli atomi non partecipa alle reazioni chimiche, ragion per cui le proprietà chimiche degli stessi devono dipendere dalla distribuzione degli elettroni e cioè dalla *configurazione elettronica*. Di conseguenza, se tentiamo di eccitare energeticamente un atomo lo stesso risponde alla sollecitazione con emissione di energia luminosa quantizzata, ossia definita solo per determinate lunghezze d'onda ognuna delle quali funzione dell'orbita occupata dagli elettroni; ma ciò comporta, proprio per l'inerzia del nucleo, che un elettrone tende ad assorbire energia subendo un aumento di orbita restituendola, allorquando cessa la sollecitazione esterna, in relazione alla caduta verso l'orbitale di origine.

Un processo di tale tipo non risulta essere casuale, ma avviene proprio con lo scopo di garantire la stabilità energetica dell'atomo tanto che, in relazione ai concetti di attrazione visti, gli elettroni tendono ad occupare sempre gli orbitali più vicini al nucleo, da cui è facile dedurre che le proprietà chimiche di un atomo dipendono solo dalla sua configurazione elettronica. Occorre, comunque, in tal senso precisare che gli elettroni non orbitano in posizioni ben precise, tanto da non poter individuare le singole traiettorie inducendoci a utilizzare un più corretto pensiero di *nubi elettroniche*.

In definitiva, dai concetti che abbiamo di atomo possiamo tentarne l'estensione delle proprietà anche all'unione di più atomi a formare in tale modo gli elementi chimici fondamentali, grazie allo sviluppo di forze interatomiche (di tipo elettromagnetico) meglio note come *legami chimici* e il cui studio richiede innanzitutto l'introduzione del *potenziale di ionizzazione*, dell'*affinità elettronica* e dell'*elettronegatività*.

### 2.1.1. I legami chimici

Il primo dei tre concetti è relativo all'energia necessaria per strappare un elettrone da un atomo gassoso isolato, trasformando quest'ultimo in uno ione positivo (*catione*); quindi il potenziale di ionizzazione (*EI*) misura la forza di attrazione esercitata dal nucleo nei confronti delle particelle negative, riuscendo in tal modo a distinguere potenziali di primo, secondo o anche di terzo ordine in relazione al numero di elettroni strappati.

Con il termine di affinità elettronica (*AE*) si intende invece un concetto opposto al precedente, ovvero l'energia liberata da un atomo allorquando allo stesso viene aggiunto un elettrone atto a trasformarlo in uno ione positivo (*anione*), un processo che si sviluppa sempre in condizioni esotermiche cioè con emissione di calore.

Con riferimento alla tavola periodica degli elementi risulta che tanto l'energia di ionizzazione quanto l'affinità elettronica aumentano dal basso verso l'alto e da sini-

stra verso destra; conseguenzialmente, alcuni elementi tendono a reagire tra di loro per assumere una conformazione energetica più stabile che porta all'introduzione della *regola dell'ottetto*: un atomo tende ad acquistare o a perdere elettroni fino a che il suo livello (orbitale) più esterno risulta essere costituito da otto elettroni. L'esempio più classico è quello dell'unione tra il sodio (Na) e il cloro (Cl) considerando che il primo possiede, sul livello più esterno, un solo elettrone mentre il secondo ne possiede sette; la reazione tra i due elementi porta allora alla formazione del cloruro di sodio (NaCl), il tipico sale da cucina la cui stabilità è garantita dalla condivisione dell'intero ottetto costituito.

Per quanto concerne l'elettronegatività ( $\epsilon^-$ ), occorre considerare che la stessa può essere definita come l'attrazione esercitata dal nucleo di un atomo, legato, nei confronti dei suoi elettroni essendo proporzionale alla media tra l' $EI$  e l' $AE$  degli elementi coinvolti, denotando di conseguenza la disponibilità di un atomo neutro ad acquisire o perdere elettroni.

In definitiva, in relazione ai valori di  $EI$ ,  $AE$  ed  $\epsilon^-$  ogni elemento tende a sviluppare un determinato legame piuttosto che un altro, conducendo alla definizione delle seguenti tipologie che, come sarà illustrato nei volumi III e IV, influenzano anche il comportamento idraulico e meccanico delle terre a grana fine (argille e limi).

#### LEGAME IONICO

Tale tipo di legame si costituisce sempre dall'interazione tra un elemento con basso potenziale di ionizzazione e un elemento con elevata affinità elettronica, in modo tale che il primo tende a trasformarsi in catione e il secondo in anione; un processo chimico che comporta una riduzione dell'energia complessiva del sistema con relativa emissione di calore.

Se prendiamo come riferimento il cloruro di sodio, si scopre che il processo di combinazione chimica richiede l'iniziale allontanamento di un elettrone dal sodio che comporta pertanto un aumento dell'energia di ionizzazione; contestualmente, l'accettazione dell'elettrone da parte dell'atomo di cloro necessita di una variazione negativa di energia che in questo caso è riferita all'affinità elettronica. In altre parole, se utilizziamo solo questo punto di vista basato sulla variazione dell'energia potenziale in funzione della distanza tra i due atomi (equazione (2.1)), scopriamo che tra il sodio e il cloro si sviluppa una forza di attrazione elettrostatica di tipo coulombiano e cioè direttamente proporzionale al prodotto delle rispettive cariche ma inversamente proporzionale alla distanza; ossia, al diminuire della distanza si assiste ad una diminuzione di tale forza attrattiva e ad un aumento della forza repulsiva sviluppata a sua volta tanto dai nuclei quanto dalle loro nubi di elettroni.

Un processo di tale tipo termina, ovviamente, allorché le due forze risultano perfettamente bilanciate conducendo alla condivisione finale dell'ottetto quale base essenziale del legame ionico; nel caso specifico del cloruro di sodio la distanza minima di equilibrio ( $r_e$ ), alla quale corrisponde un bilancio energetico negativo del

sistema e quindi una struttura finale più stabile (in termini di *energia reticolare*), è pari alla somma dei raggi ionici dei rispettivi elementi:  $r_e = 2,78 \text{ \AA}$  (*Angstrom = miliardesimo di metro*). In definitiva, la regola fondamentale afferma che il legame ionico è tipico nell'unione di un metallo con un nonmetallo.

#### LEGAME COVALENTE

Nel legame ionico la formazione di una struttura comporta sempre che la perdita di energia, determinata dalla configurazione del reticolo ionico, debba essere maggiore della variazione dell'energia di ionizzazione e dell'affinità elettronica: ma cosa accade quando sono coinvolti elementi dall'elevata *ET*?

Poiché questo processo non è più energeticamente conveniente la natura tende ad adottare una strategia differente, basata sulla condivisione degli elettroni in quanto rivolta sempre al raggiungimento di una configurazione energetica minima; in questo caso nessuno degli elementi perde elettroni ma tutti raggiungono la loro configurazione stabile (ottetto completo), grazie alla parziale sovrapposizione delle nubi elettroniche che viene raggiunta allorché gli elettroni di un atomo iniziano ad essere oggetto delle forze di attrazione di entrambi i nuclei. Evidentemente anche in questo caso esiste una distanza internucleare minima, detta *distanza di legame*, di esatto bilanciamento tra le forze repulsive e quelle attrattive. In definitiva tale tipo di legame risulta essere tipico nell'unione tra nonmetalli, con la conseguenza che in caso di elettro-negatività nulla tra gli atomi assistiamo ad una perfetta simmetria nella condivisione delle nubi elettroniche, conducendo alla formazione di un legame covalente puro.

#### LEGAME METALLICO

Nel caso di atomi con bassa e quasi uguale elettronegatività, tipica dei metalli, tende a svilupparsi un ulteriore tipo di legame che può essere considerato come un caso speciale di quello covalente e nel quale la forza attrattiva complessiva è esercitata per lo più dai nuclei, con gli elettroni delocalizzati su entrambi. Il legame che ne risulta è quindi più debole dei precedenti e non direzionale.

#### LEGAME RESIDUALE O DI VAN DER WAALS

Esso può essere definito come la forza di attrazione che si manifesta tra particelle elettricamente neutre essendo però in presenza, ad un'estremità del legame, di una concentrazione di carica parziale dovuta alla definizione di dipoli elettrici. Un classico esempio è fornito dall'acqua le cui molecole tendono ad unirsi (tra loro e con altre sostanze) in relazione alla presenza del legame ponte idrogeno, così detto per il semplice motivo che tale elemento è legato in maniera covalente con elementi elettronegativi; poiché, inoltre, il suo unico elettrone tende a spostarsi dalla parte del legante, il legame residuale comporta che la parte negativa del dipolo si avvicini a quella positiva di un altro dipolo. Infine, esiste un'altra tipologia di connessione chimica che tende a svilupparsi in presenza di particelle neutre, prive quindi di pola-

rità, rappresentante un caso tipico delle molecole simmetriche: il legame dovuto alle *forze dispersive di London*, generate da dipoli istantanei indotti internamente ad ogni atomo coinvolto dal moto di rotazione degli elettroni. Si tratta in ogni caso di forze di attrazione molto deboli.

## 2.2. I solidi cristallini

In relazione ai concetti fin qui esposti, pertinenti la struttura atomica degli elementi costituenti la materia, possiamo azzardare alcune congetture sulle loro proprietà fisiche che sono poi quelle che realmente interessano. Abbiamo visto che fondamentale è il numero di elettroni (uguale a quello dei protoni) a caratterizzare, e quindi a differenziare, gli elementi raggruppati nella tavola periodica i quali, grazie all'elevato numero possibile di combinazioni, possono dare luogo ad un altrettanto elevato numero di sostanze. In questo modo, grazie all'assemblaggio delle molecole prima e dei cristalli dopo, giungiamo a formulare l'esistenza della materia solida alla quale affidare il concetto di mezzo rigido sul quale è fondata la Meccanica del Continuo; un processo che ha origine nella ripetizione periodica degli atomi secondo tre direzioni, non necessariamente ortogonali, e che conduce, infine, ad ipotizzare l'esistenza di sostanze omogenee e disomogenee, isotrope e anisotrope.

Il problema sostanziale dipende, però, dalla constatazione che non tutti i composti, così come sono conosciuti nella pratica quotidiana, possono essere ascritti ai solidi cristallini tanto che alcuni di loro manifestano proprietà fisiche che sfuggono alle regole principali; ma, affinché possa ancora valere il principio di continuità, è necessario, ad esempio, che la condizione di omogeneità sia espressa in funzione di una porzione sufficientemente grande di materia in rapporto anche alle discontinuità implicite nella struttura periodica delle sostanze cristalline.

Un ulteriore aspetto che deve essere preso in considerazione dipende dal *fattore tempo*, la cui influenza sullo stato della materia e, di conseguenza, sulle relative proprietà fisiche assume talora valenze inaspettate. In effetti, sappiamo che lo stato solido, quale aggregato di atomi la cui stabilità è garantita dal bilanciamento tra le forze di attrazione e quelle di repulsione, può essere considerato come un corpo rigido dotato cioè di bassa espansione termica, elevata rigidità, viscosità praticamente infinita e compressibilità molto bassa se non trascurabile: tutte proprietà che vengono, comunque, perse nel momento in cui, in relazione all'innalzamento della temperatura del solido oltre quella di fusione, assistiamo al passaggio allo stato liquido. Quest'ultima è, in buona sostanza, una condizione di elevata energia del sistema e pertanto instabile, alla quale possiamo però assoggettare tutte le sostanze che conosciamo compreso il cloruro di sodio; una condizione energetica per la quale gli atomi non occupano più posizioni ben definite tanto che la sostanza può assumere la forma del contenitore che la accoglie.

Se consideriamo tale condizione di alta energia del sistema come punto di partenza,

e iniziamo una fase di raffreddamento molto lento dello stesso, il cloruro di sodio cristallizza mantenendo comunque la forma iniziale: un'apparente contraddizione che può essere spiegata con l'osservazione al microscopio, capace di evidenziare la struttura periodica dei singoli, minutissimi, cristalli o aggregati di cristalli in questo modo formati.

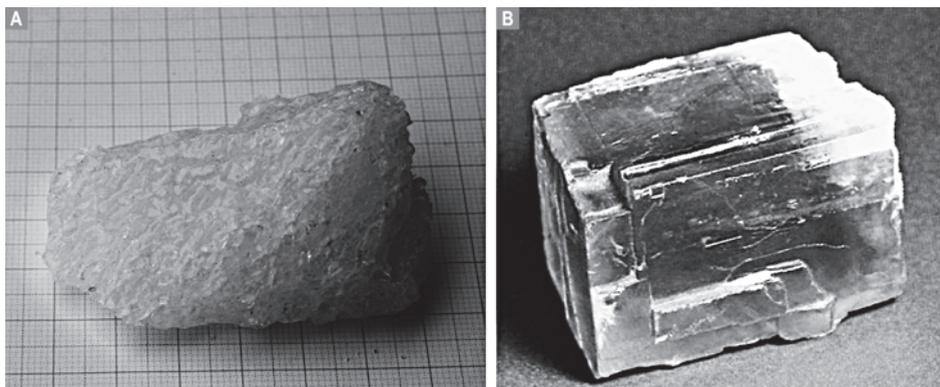


Figura 2.1. Forme policristallina (a) e monocristallina; (b) del cloruro di sodio ((b) fonte: Mottana et al., 1989)

Abbiamo raggiunto la condizione di *forma policristallina* della materia (figura 2.1a). Ma nel momento in cui imponiamo una velocità di raffreddamento davvero molto bassa, allora siamo anche in grado di consentire la formazione di un unico grande cristallo (figura 2.1b). Se, infine, potessimo invece costruire un apparato capace di raffreddare davvero molto velocemente il liquido iniziale (raffreddamento “di getto”) otterremmo il risultato opposto: congeleremmo la posizione, inizialmente disordinata, di tutti gli atomi con la conseguente formazione di cloruro di sodio vetroso il quale, pur mantenendo un aspetto comunque simile al sale che conosciamo, possederebbe molte delle proprietà fisiche del vetro comune.

Possiamo quindi realmente considerare il fattore tempo come un elemento discriminante, capace di variare il prodotto finale a partire dal medesimo liquido iniziale conducendo alla formazione di un solido cristallino o di un solido vetroso; di conseguenza, e ragionando da un punto di vista puramente morfologico, risulta che il vetro non può essere considerato come un solido cristallino quanto piuttosto come un liquido superraffreddato che conserva la disposizione atomica, o molecolare casuale tipica dei liquidi. Poiché però la Natura ha stabilito che lo stato solido, in relazione al minimo contenuto energetico, è anche quello più stabile ecco che tutte le sostanze vetrose subiscono nel tempo un lento processo di riorganizzazione strutturale al quale corrisponde un aumento di densità e una concentrazione del materiale; un fenomeno di cristallizzazione noto come *devettrificazione* la cui forma cristallina più comune è il quarzo ( $\text{SiO}_2$ ), un minerale alquanto diffuso nei vetri degli antichi romani. Un problema, quello della devettrificazione, che accomuna i vetri antichi con quelli moderni,

considerato che non è raro imbattersi in vetri di edifici di alcuni decenni di età che manifestano locali anomalie, visibili come distorsioni delle immagini, dovute proprio a tale processo di riorganizzazione strutturale della materia (figure 2.2c-d).

Concludendo, ora che sono stati esplorati alcuni aspetti basilari sugli stati di aggregazione della materia, è possibile fare un passo indietro per cercare di scoprire quante sono le possibili strutture cristalline esistenti e con quali strategie la Natura provvede a forgiarle, mentre si rimanda alla figura 2.3 per la visione dell'opale ovvero di un minerale tipicamente amorfo.

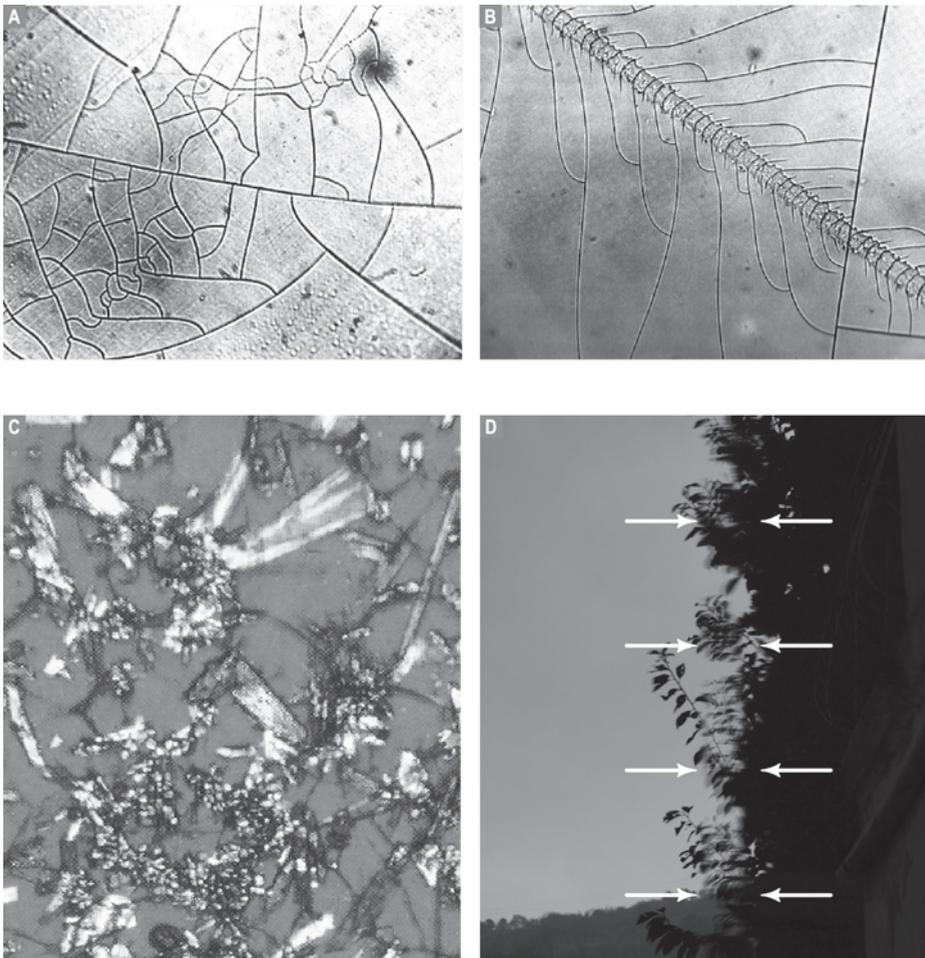


Figura 2.2. Vetri al microscopio con fessure naturali (a) e prodotte da abrasioni artificiali (b); fenomeni di cristallizzazione per devetrificazione di un antico vetro romano (c) (fonte: Gordon, 1991); aberrazione di un'immagine riflessa in un vetro soggetto a devetrificazione lineare verticale (d)

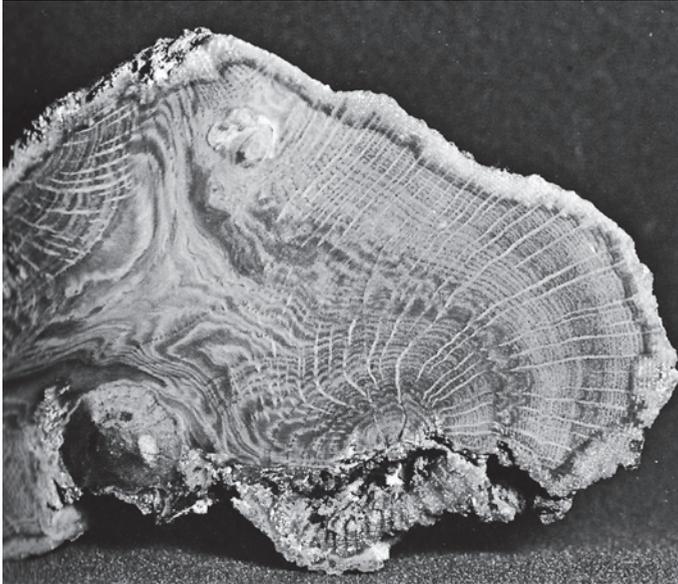


Figura 2.3. Esempio di opale xiloide (legno fossile silicizzato), un minerale amorfo costituito da silice idrata (fonte: Mottana et al., 1989)

### 2.2.1. *L'omogeneo periodico*

Abbiamo visto che un lento raffreddamento di un liquido porta alla formazione di solidi cristallini nei quali ogni atomo assume determinate posizioni alle quali corrispondono due proprietà:

- la stabilità strutturale;
- la distribuzione periodica.

La prima proprietà comporta che un solido non cambia forma spontaneamente poiché la somma delle forze di attrazione e di quelle di repulsione risulta perfettamente bilanciata, tanto che gli atomi, in assenza di sollecitazioni esterne, mantengono la loro posizione relativa. Se però sottoponessimo un solido ad una forza di trazione o di compressione non elevata (se rapportata alla sua resistenza ultima) otterremmo rispettivamente un allontanamento o un avvicinamento degli atomi: una condizione che cessa nel momento in cui viene rimossa la causa perturbatrice.

In altre parole possiamo ipotizzare che le forze di bilanciamento possono essere pensate come molle virtuali (figura 2.4) le quali possono essere accorciate o allungate, quindi tendenti a ritornare sempre alla posizione originaria, e dalle quali dipendono le *proprietà elastiche* della materia; in realtà sappiamo che tali molle sono rappresentate dalle influenze reciproche degli atomi, in funzione delle cariche elettriche positive e negative, e che proprio per questo motivo possono essere definite virtuali.

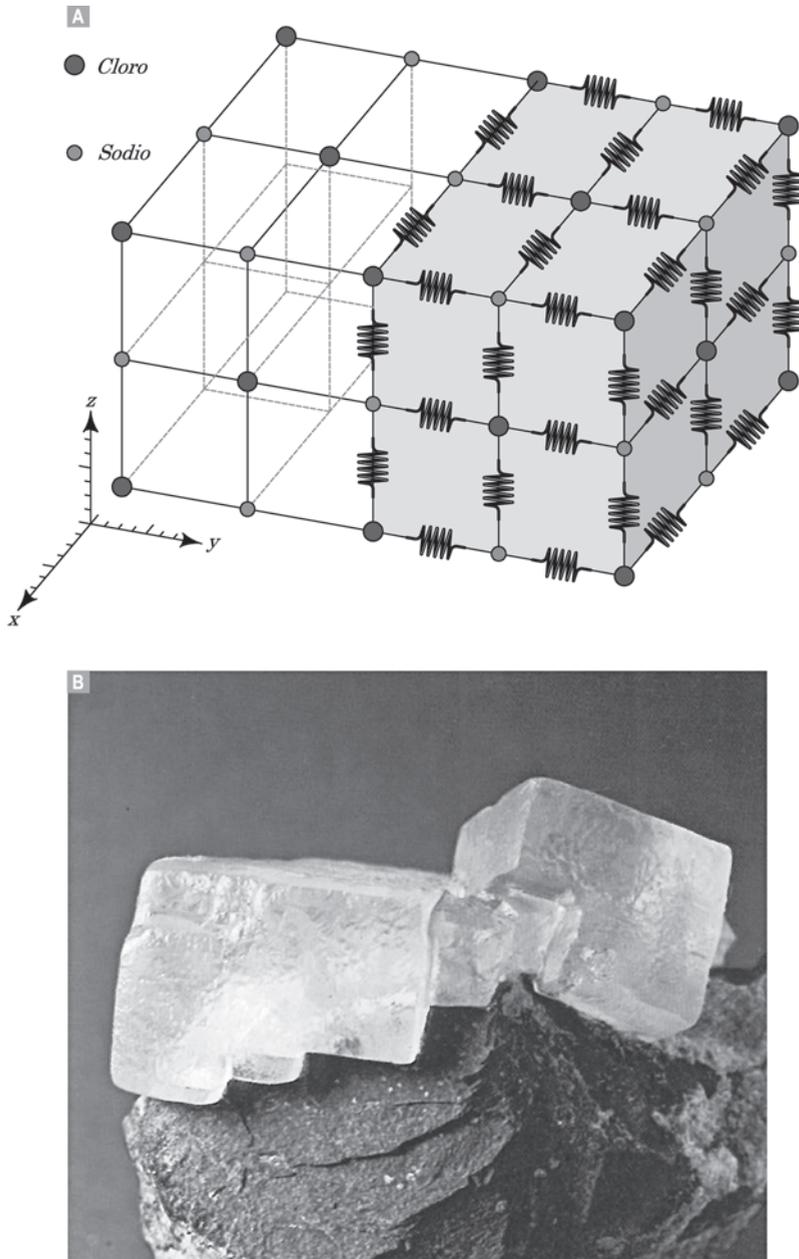


Figura 2.4. Confronto tra il modello ad aste e molle (a) ed i cristalli reali di cloruro di sodio (b)

Per quanto concerne la seconda proprietà, utilizzando gli atomi come unità fondamentali otteniamo dalla loro ripetizione sistematica una distribuzione periodica con la conseguenza che l'omogeneo reale che ne deriva, il cui sviluppo può seguire una,

due o tre direzioni, deve essere considerato praticamente infinito; ma, quale diretta conseguenza di tale assunzione, risulta che un cristallo, se di dimensioni adeguate ovvero non costituito da pochi atomi, può essere considerato effettivamente infinito. Una condizione valida praticamente ovunque tranne che presso la sua superficie, sulla quale è possibile pertanto osservare alcune proprietà peculiari dipendenti dall'esistenza di cariche elettriche sbilanciate: un argomento che accomuna i cristalli con i minerali delle argille le cui proprietà elettriche di superficie influenzano il comportamento idraulico e meccanico delle terre a grana fine (volume III).

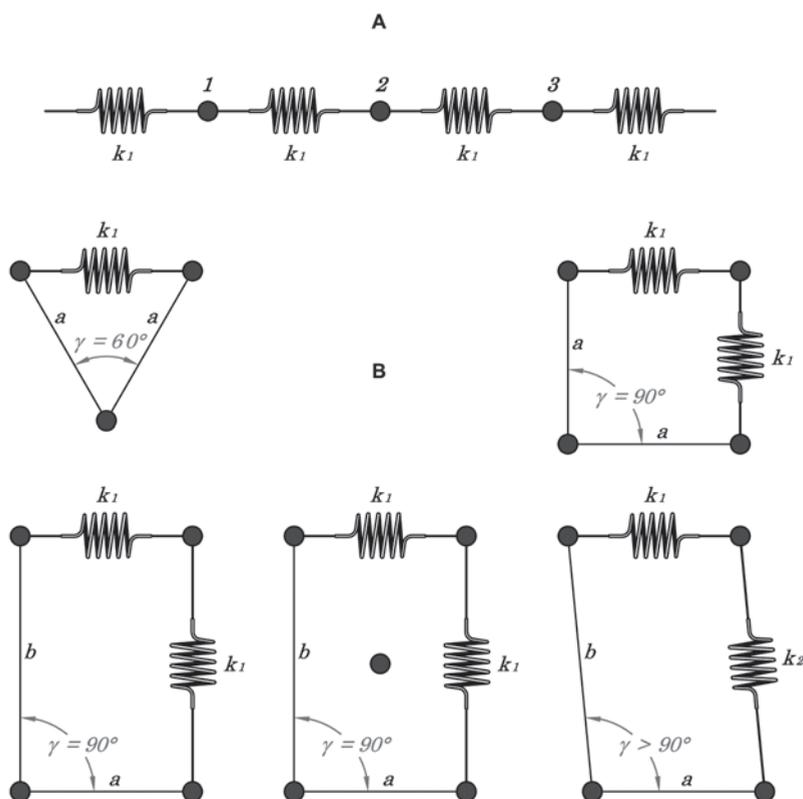


Figura 2.5. Schema di un cristallo unidimensionale costituito da atomi connessi da molle virtuali della medesima rigidezza  $k_1$  (a); rappresentazione delle maglie relative ai cinque reticoli dibenzionali fondamentali della materia (b)

### 2.2.2. La simmetria nei reticoli cristallini

La distribuzione omogenea periodica di atomi secondo una sola direzione comporta la possibilità di assemblaggio di un cristallo unidirezionale, ottenuto per un'azione di semplice *traslazione*; in questo modo abbiamo costruito una barra davvero semplice,

di periodo  $a$ , che può essere stirata o accorciata in relazione alle caratteristiche elastiche delle molle virtuali (figura 2.5a). In altre parole abbiamo costruito una struttura lineare che possiede anche un'evidente analogia con gli elementi tipo BAR/TRUSS, utilizzati nel metodo agli elementi finiti, per i cui dettagli si consiglia la lettura del volume I.

La ripetizione omogeneo-periodico-discontinua bidimensionale degli atomi porta invece alla formazione di una maglia, nella quale osserviamo due periodi  $a$  e  $b$  nelle rispettive direzioni formanti un angolo  $\gamma$  tra di loro (figura 2.5b); ovviamente in tali condizioni la lunghezza delle molle virtuali potrà essere diversa nelle due direzioni così come differenti potranno essere le rispettive proprietà elastiche.

In buona sostanza, il metodo di assemblaggio dei reticoli cristallini mono o bidimensionali visto con la figura 2.5 induce a pensare che le sostanze cristalline possiedano proprietà fisiche omogenee, anisotrope e discontinue, ovvero direzionali, mentre solo le sostanze amorfe come i vetri possano essere considerate isotrope in tutte le direzioni; una condizione, quest'ultima, che sarà utilizzata nella trattazione matematica del comportamento meccanico dei mezzi continui stante la necessità che abbiamo di codificare il comportamento dei solidi reali in modelli di utilizzo pratico.

Ragionando da tale punto di vista è allora importante evidenziare che in natura esistono solo 5 possibili modalità di aggregazione bidimensionale, il che conduce a considerare la maglia come la nuova unità fondamentale, la quale si ripete sempre uguale a se stessa lungo due direzioni di un piano dando origine a:

- *reticolo quadrato*:  $a = b$ ;  $\gamma = 90^\circ$ ;
- *reticolo rettangolare semplice*:  $a \neq b$ ;  $\gamma = 90^\circ$ ;
- *reticolo rettangolare centrato*:  $a \neq b$ ;  $\gamma = 90^\circ$ ;
- *reticolo obliquo*:  $a \neq b$ ;  $\gamma \neq 90^\circ$ ;
- *reticolo triangolare*:  $a = b$ ;  $\gamma = 60^\circ$ .

Infine, la ripetizione omogenea-periodico-discontinua degli atomi per traslazione secondo tre direzioni non complanari  $a$ ,  $b$  e  $c$ , formanti altrettanti angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conduce alla formazione delle celle quale nuova ed ultima unità fondamentale nello spazio. Non solo: se consideriamo le cinque maglie fondamentali e le loro possibili combinazioni scopriamo anche dell'esistenza, in natura, di soli 14 tipi di celle o reticoli spaziali denominati *reticoli di Bravais* dal nome del loro scopritore.

Finora abbiamo visto che gli omogenei periodici possono essere assemblati per operazioni di traslazioni; in realtà, il ricoprimento di punti identici può avvenire anche con altre *operazioni di simmetria* – quali la rotazione, la riflessione e l'inversione – ciascuno con operatori indipendenti semplici che in definitiva possono essere solo tre (figura 2.6):

- *il centro*, al quale è associata l'inversione, quale unica operazione di simmetria possibile, che comporta la ripetizione di un punto in posizione invertita rispetto all'originaria; tutti i reticoli cristallini possiedono il centro;

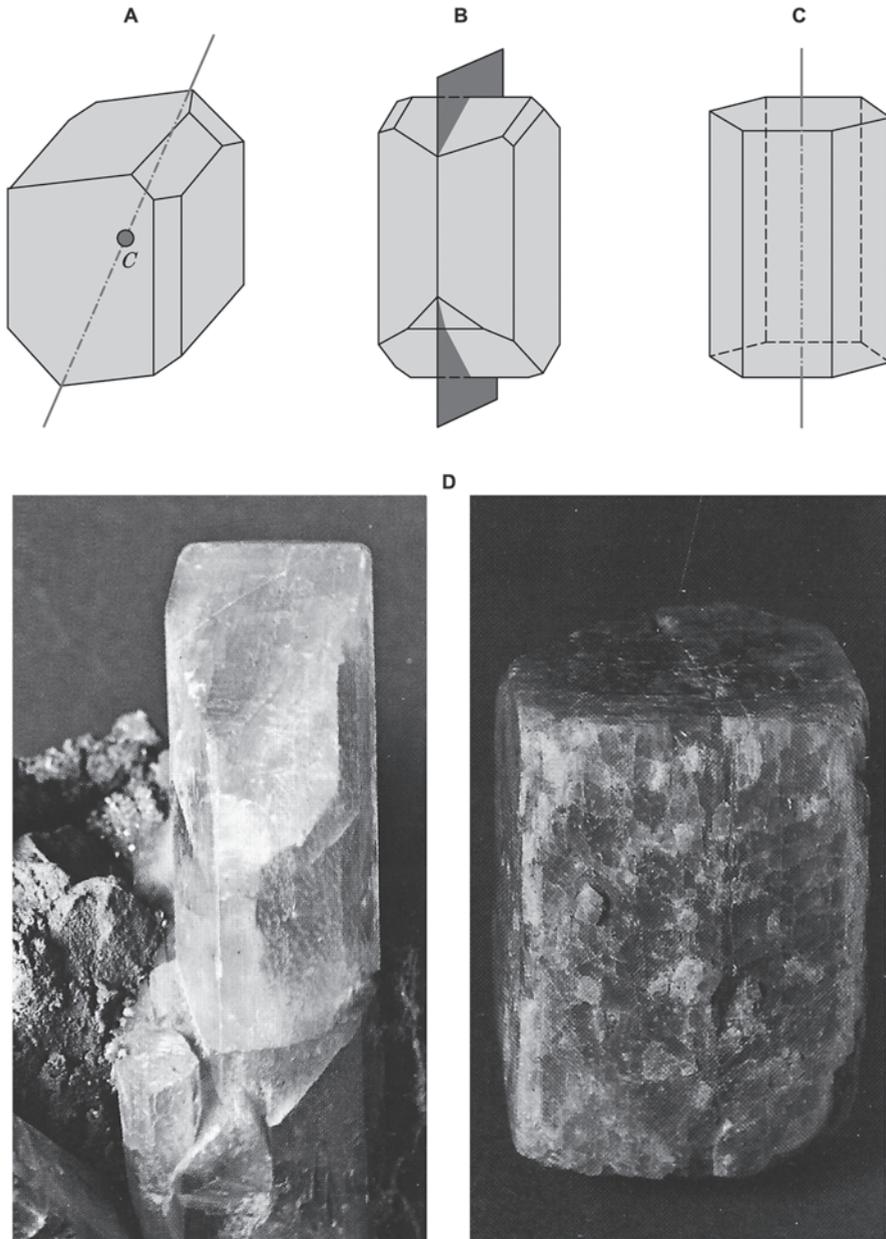


Figura 2.6. Elementi di simmetria nei reticoli cristallini: il centro (a), il piano (b) e l'asse (c). Cristalli di barite e di anortite dotati di piano e asse (d) (fonte foto: Mottana et al., 1989)

- *il piano*, il quale può essere pensato come un elemento geometrico immaginario rispetto al quale un atomo o un filare di atomi possono essere riflessi in maniera speculare; tredici tra i reticoli e quattro tra le maglie possiedono il piano;

- *L'asse*, per il quale si assiste alla ripetizione periodica di un punto o di un filare intorno ad una determinata direzione tale da risultare possibile, compatibilmente con le maglie fondamentali, secondo solo cinque possibili assi tutti sottomultipli dell'angolo giro.

Notare che la figura 2.6d illustra due esempi di cristalli dotati di asse, anortite, e di piano, barite, utilizzati rispettivamente nell'industria della ceramica e nella produzione di calcestruzzi super-pesanti applicati nelle schermature delle radiazioni.

Ovviamente dalla combinazione degli operatori semplici di simmetria cristallina è possibile ottenere anche quelli a carattere composto, come gli *slittopiani* (riflessione secondo un piano + traslazione secondo una retta), le *elicogire* (rotazione e traslazione secondo una retta) e gli *assi di inversione* (rotazione + inversione rispetto ad un centro). In conclusione, ora che abbiamo scoperto le condizioni basilari necessarie per la genesi dei solidi cristallini, e i metodi per la loro schematizzazione, possiamo brevemente tornare ai solidi vetrosi.

In effetti abbiamo scoperto che gli stessi possono essere visti come sostanze amorfe nelle quali gli atomi, o le molecole, occupano le medesime posizioni presenti nel liquido di partenza. Sappiamo, però, che ogni atomo può essere pensato come legato a quelli vicini tramite connessioni a molle virtuali, il cui singolo stato di sollecitazione deve rispettare una condizione di equilibrio; ma, stante la disposizione non reticolare, ciò richiede che nei vetri alcune molle debbano essere compresse ed altre tese anche se nel complesso nessun atomo tende ad essere attratto o spostato. Non ultimo, abbiamo anche visto che la natura preferisce i sistemi organizzati, come i solidi, nei quali assistiamo ad un contenuto energetico minimo: una condizione che tende ad essere rispettata anche dai vetri i quali, in tempi molto lunghi, tendono verso una riorganizzazione strutturale (figura 2.2c) volta ad assumere la forma cristallina e a rispettarne, conseguenzialmente, le leggi fisiche.

### 2.2.3. Dislocazioni e fratture

I metalli possono essere considerati realmente mezzi isotropi, cioè mezzi che possiedono le stesse proprietà meccaniche (ma anche dinamiche e ottiche) in tutte le direzioni.

Una delle caratteristiche più importanti dei metalli è la loro duttilità, cioè la capacità di cedere senza rompersi con un'azione meccanica di scorrimento dei vari strati di atomi quale effetto dovuto all'azione di sforzi di taglio: un'azione, nota sin dall'antichità da chi forgiava le armi, che a prima vista sembrerebbe violare il concetto di bilanciamento delle forze di repulsione e di attrazione tra gli atomi costituenti la struttura cristallina.

In realtà, fu solo nel 1934 che Taylor G.I. avanzò l'ipotesi dell'esistenza di dislocazioni nei metalli le quali, in quanto costituenti difetti lineari (figura 2.7a), avrebbero

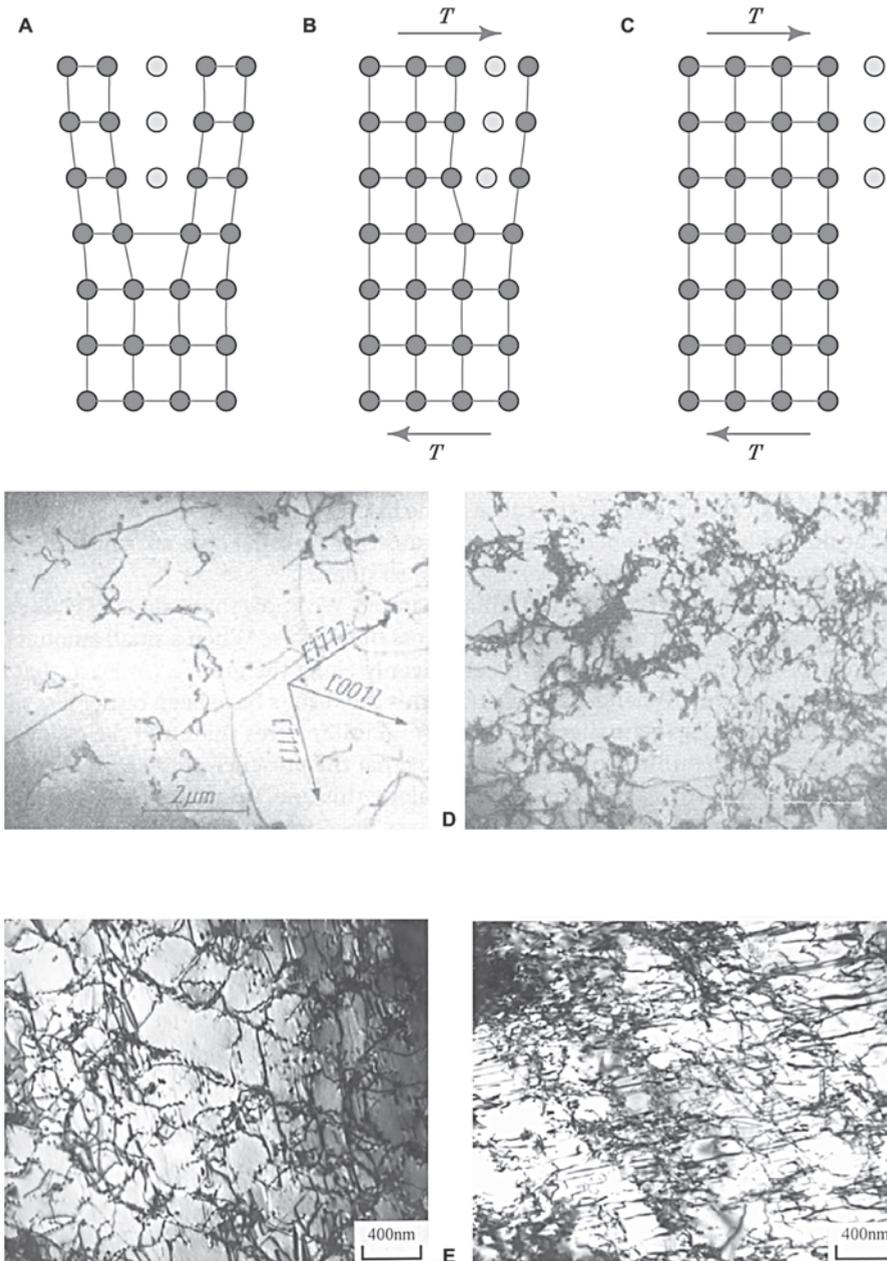


Figura 2.7. Una dislocazione lineare provoca concentrazioni di sforzo che possono causare la rottura localizzata in un cristallo (a); il suo slittamento verso la superficie, determinato da sforzi di taglio, è responsabile del comportamento plastico dei solidi (b-c). Esempi di dislocazioni in un cristallo di molibdeno (d) e nell'acciaio inossidabile (e) (fonti: a-b-c: Gordon, 1991; d: Pronina et al., 1982; e: Woei-Shyan e Chi-Feng, 2000)

potuto consentire lo slittamento degli atomi sotto sollecitazioni esterne volte a migliorare, in tal modo, le caratteristiche meccaniche con un procedimento di incrudimento (figure 2.7b-c).

La presenza di un atomo in più (o di una fila di atomi in più) in una determinata posizione comporta sempre lo sviluppo di alcune condizioni fondamentali per la comprensione del comportamento meccanico dei solidi:

1. un fenomeno di concentrazione dello sforzo, tale da superare localmente la resistenza a rottura del materiale;
2. lo slittamento dei filari, o piani di atomi, causato dalle sollecitazioni di taglio, che avviene generalmente secondo piani inclinati a  $45^\circ$  rispetto alla direzione dello sforzo applicato;
3. la possibilità, per i solidi metallici, del cedimento per fatica causato dalla ripetizione ciclica di sollecitazioni anche di bassa intensità.

Ma ciò che è fondamentale comprendere è insito nel comportamento meccanico dei solidi, il quale dipende in maniera marcata dalla presenza, sviluppo ed evoluzione delle dislocazioni (figure 2.7d-e).

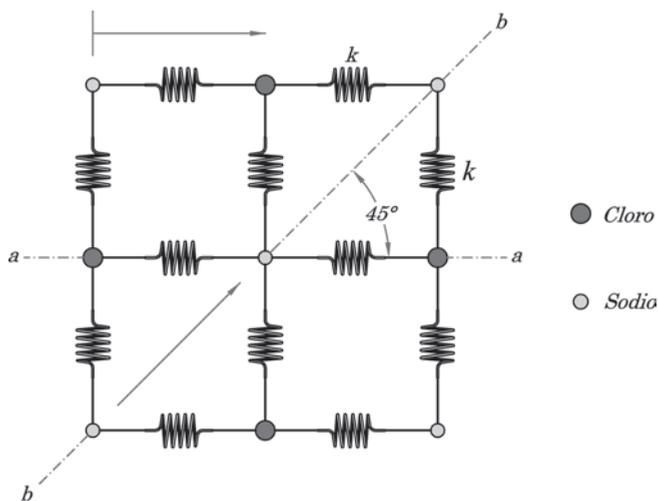


Figura 2.8. Nel cristallo di NaCl uno slittamento porta a fronteggiarsi atomi uguali nelle direzioni a-a e b-b con i piani a loro paralleli che diventano luoghi di sfaldatura

#### 2.2.4. Comportamento meccanico di base

Per comprendere il meccanismo di azione delle dislocazioni, che possono essere considerate delle vere e proprie fratture (discontinuità) presenti all'interno dei cristalli, è possibile riferirsi alla figura 2.8 relativa ad una maglia di cloruro di sodio (per sem-

plicità grafica) nella quale gli atomi sono connessi da molle virtuali di rigidezza  $k$  per i cui dettagli si rimanda al volume I. Sappiamo, inoltre, che i solidi manifestano, in relazione all'azione delle molle, una notevole resistenza alle variazioni di forma indotte mediante sollecitazioni esterne che a loro volta possono essere di origine sia meccanica che termica; ma, mentre per la loro corretta compressione si rimanda al volume I, capitolo 6, paragrafo 6.1.1 (“Un problema termico”) e paragrafo 6.1.2 (“Un problema termo-meccanico”), è essenziale evidenziare come tale rapporto biunivoco sforzi-deformazioni conduca all'assorbimento delle sollecitazioni da parte delle molle solo entro un limite dipendente proprio dall'intensità dei legami chimici.

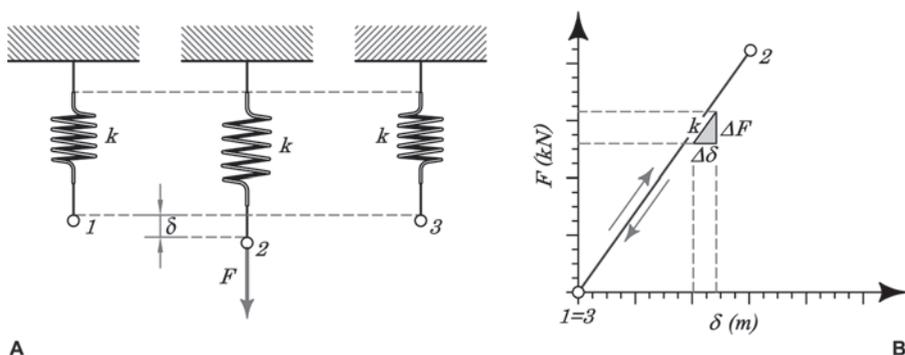


Figura 2.9. Comportamento puramente elastico della materia in funzione di sforzi di trazione o compressione (a), nell'ambito del quale il modulo elastico rappresenta la pendenza della curva sforzi-deformazioni mentre la rigidezza  $k$  la pendenza della curva forze-spostamenti (b). Notare che nel caso specifico le curve sono state sostituite da rette per una necessaria semplificazione iniziale dell'argomento

Qual diretta conseguenza di tale rapporto tra l'intensità delle sollecitazioni e la deformazione delle molle, si assiste ad un comportamento puramente elastico della materia nell'ambito del quale le molle subiscono fenomeni di allungamento o di accorciamento quale risposta all'azione di sforzi di trazione o di compressione (figura 2.9a). In questo caso, e solo in questo caso, è possibile parlare di comportamento elastico della materia e, come scopriremo nel proseguo del testo, tali variazioni di forma risultano essere proporzionali alla forza applicata (figura 2.9b) nonché pienamente recuperabili alla rimozione delle sollecitazioni; in altre parole, ed in termini puramente energetici, risulta che un solido elastico si comporta come un vero e proprio accumulatore di energia la quale, proprio per i concetti di deformazione e di restituzione elastica della stessa, può essere definita come *energia di deformazione*. Nel contempo risulta anche che all'aumentare della pendenza della curva forze-spostamenti aumenta la costante elastica della materia ovvero la sua rigidezza.

Nel caso invece di sforzi sufficientemente elevati, ovvero superiori a quella che possiamo definire come una vera e propria soglia elastica (o di snervamento o di transizione elastoplastica), il comportamento del solido cessa di essere reversibile,

tanto da manifestare una deformazione residua e pertanto irreversibile; siamo arrivati ad un bivio nel quale il comportamento meccanico può seguire due strade alternative: entrare in *campo plastico*, ovvero deformarsi duttilmente come nel caso dell'acciaio (figura 2.10a), oppure rompersi bruscamente mostrando invece un *comportamento elastofragile* tipico, ad esempio, del vetro (figura 2.10b). Ma, se per il comportamento elastico è sufficiente affidarsi al concetto di molle, per comprendere le modalità di sviluppo delle deformazioni plastiche occorre invece riferirsi alle dislocazioni.

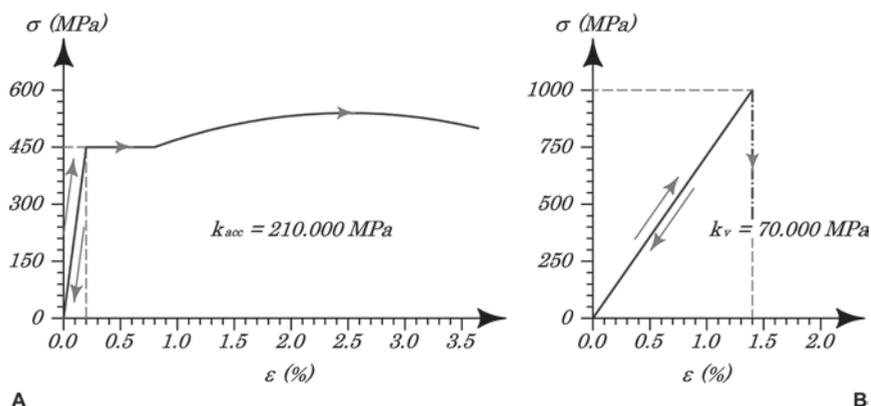


Figura 2.10. Confronto tra il comportamento plastico dell'acciaio usato nell'edilizia (a) e quello fragile del vetro (b)

In effetti, in un cristallo perfetto una deformazione plastica può avvenire solo con lo slittamento lungo un filare atomico, tanto da determinare la rottura iniziale dei legami chimici e il loro successivo riformarsi: un processo che può avvenire solo con un'elevata energia; al contrario, la presenza di una dislocazione consente una successione di movimenti degli atomi fino a quando non viene raggiunta la superficie presso la quale il difetto scompare (figure 2.7b-c). Infine, sommando i milioni di dislocazioni presenti in un cristallo è facile a questo punto comprendere quanto le stesse possano favorire, solo per superamento della soglia elastica, la deformazione duttile ovvero plastica del solido.

La lavorazione dei metalli a freddo, come nel caso del ferro, comporta da una parte l'eliminazione progressiva delle dislocazioni e dall'altra la formazione continua di nuove dislocazioni, fino a quando il solido non contiene un numero sufficientemente elevato di difetti tali da bloccare qualunque ulteriore movimento; in questo modo, all'aumentare dei cicli di lavorazione, diminuisce il campo plastico e il materiale tende ad irrigidirsi, manifestando di conseguenza un comportamento fragile ovvero più vicino a quello dei cristalli ideali. Un fenomeno, quest'ultimo, che può essere ottenuto anche con l'aggiunta, al ferro, di piccole quantità di carbonio i cui atomi tendono ad occupare i vuoti presenti nei reticoli a causa dell'esistenza dei difetti pun-

tuali o lineari; in questo modo viene imposto una sorta di vincolo cinematico interno rispetto ai movimenti delle dislocazioni aumentando la resistenza e, contestualmente, la fragilità del materiale. È altresì essenziale comprendere che la rottura non avviene mai secondo direzioni casuali, quanto piuttosto secondo superfici parallele alle facce dei cristalli dando origine ai piani di *sfaldatura*: un termine che rappresenta un metro di misura del carattere vettoriale della coesione, dovuta ai legami chimici, la quale assume un valore minimo in direzione normale ai piani di più facile divisibilità (figura 2.8) e che influenza in maniera preponderante il comportamento idraulico (volume III) e meccanico (volume IV) dei terreni argillosi.

Per quanto concerne, invece, la rottura a fatica dei metalli (punto 3 del paragrafo precedente), occorre rilevare che in genere la stessa viene raggiunta a seguito della presenza di cricche (piccole fessure) nel solido, unitamente alla diffusione delle dislocazioni; a questo punto, ragionando da un punto di vista puramente energetico, è facile intuire che per vincere la resistenza dovuta alle forze attrattive/repulsive tra gli atomi è necessario un apporto esterno davvero elevato: un apporto energetico che comunque può essere profuso anche in milioni di cicli di lavoro, con la conseguente propagazione della fessura fino al collasso finale.

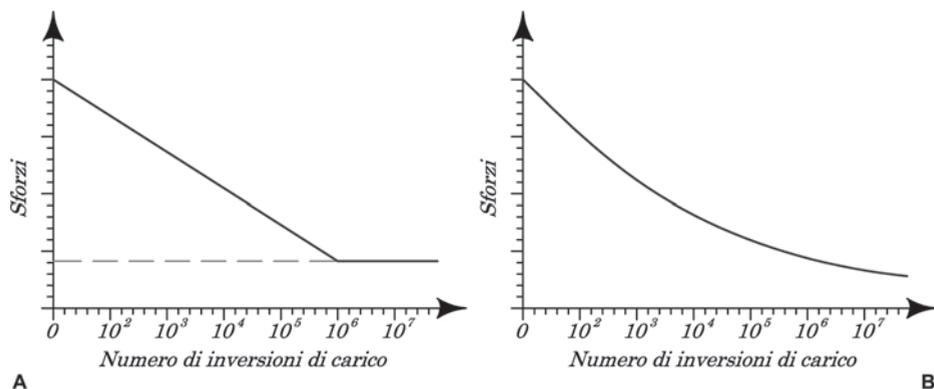


Figura 2.11. Confronto tra il comportamento a fatica del ferro e dell'acciaio (a) e quello dell'alluminio (b) (fonte: Gordon, 1991 – ridisegnato)

È importante notare, dalla figura 2.11a, che il ferro e l'acciaio manifestano un vero e proprio limite per fatica, facilmente riproducibile in laboratorio, all'incirca prossimo ai dieci milioni di inversioni delle sollecitazioni; un valore che viene raggiunto agevolmente ad esempio nei ponti e viadotti. Ma, cosa invece sconcertante, la stessa figura 2.11b mostra come le leghe in alluminio non manifestano un limite ben preciso, quanto piuttosto una curva decrescente con continuità a denotare un comportamento alquanto pericoloso. Un valido motivo per lavorare con alti coefficienti di sicurezza. Non resta che chiarire la rottura fragile dei solidi amorfi come il vetro. Sappiamo, dalle esperienze quotidiane, che il vetro manifesta una soglia elastica davvero molto

bassa, con facile tendenza alla rottura fragile; sappiamo anche che il vetro non possiede una struttura cristallina, negando di conseguenza anche l'esistenza delle dislocazioni. Deve pertanto esistere un altro meccanismo di rottura capace di spiegarne l'estrema fragilità.

Abbiamo visto, al termine del paragrafo 2.2, che la tendenza dei vetri è verso una lenta riorganizzazione cristallina, nota con il termine di devetrificazione, che comporta aumenti localizzati di densità e concentrazione di materiale che da soli sono sufficienti per spiegare, come dimostrato sperimentalmente, la formazione di fessure (figura 2.2a); ma, d'altra parte, sono proprio queste fessure, che potremmo definire intrinseche per tale materiale, a determinarne il comportamento fragile come ben sanno i vetrai che, per tagliare una lastra anche spessa, la incidono lunga una retta e infine applicano una lieve pressione sui due lati (figura 2.2b).

In definitiva, e riassumendo, risulta che i vetri manifestano contemporaneamente comportamenti fragili e comportamenti viscosi i quali, per sovrapposizione degli effetti, tendono ad esaltarsi reciprocamente.

#### 2.2.5. Comportamento dinamico di base

In Fisica esiste un limite termico inferiore noto come *zero assoluto*, posto a  $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$ , in corrispondenza del quale gli atomi non possiedono più alcuna energia; di conseguenza, ed estrapolando tale rapporto mobilità-temperatura, risulta che il progressivo raffreddamento di un gas, al quale corrisponde la massima condizione di energia cinetica degli atomi, porta al passaggio verso lo stato liquido prima e solido dopo con una concomitante diminuzione costante della mobilità dei componenti. In definitiva esiste una diretta correlazione tra la temperatura e l'energia di movimento degli atomi (energia cinetica), tanto che è possibile pensare a questi ultimi come in perenne oscillazione, garantita dalle molle virtuali, attorno ad un punto fisso del reticolo cristallino (esempio: figura 2.4). Ma cosa succede se un cristallo viene sottoposto ad una oscillazione monocromatica forzata?

Un'onda monocromatica vibra ad una determinata *frequenza* ( $f$  = numero di cicli al secondo) e la sua propagazione all'interno del cristallo è garantita dal progressivo spostamento degli atomi che, vincolati dalle molle, tornano a vibrare attorno alla posizione originaria.

Per comprendere appieno tale concetto riferiamoci ad un cristallo unidimensionale di lunghezza  $L$  e costituito da un numero limitato di atomi (figura 2.12); è evidente, anche dal solo punto di vista geometrico, che con tali vincoli la massima ampiezza dell'oscillazione impressa si avrà per una lunghezza  $2L$ , essendo un'onda una variazione periodica che si ripete sempre nelle medesime condizioni iniziali ad ogni *periodo*:  $T = 1/f$ .

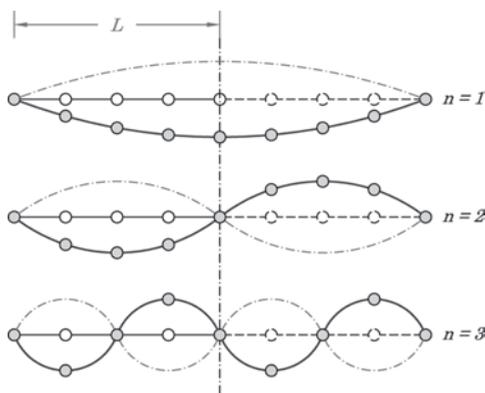


Figura 2.12. Comportamento dinamico di un cristallo unidimensionale con rappresentazione dei primi tre modi fondamentali di vibrazione

A questo punto, dal concetto di velocità in quanto rapporto tra spazio e tempo, è possibile ricavare l'equazione relativa alla frequenza fondamentale del cristallo, altresì nota come primo modo di vibrazione:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad (2.2)$$

Nota tale condizione il secondo modo di vibrazione non potrà che aversi per una lunghezza pari ad  $L$ :

$$f_2 = \frac{v}{L} \quad (2.3)$$

con la conseguenza che deve valere la condizione  $f_2 = 2f_1$ .

Continuando con questo schema si giunge infine a stabilire che, nota la prima frequenza di vibrazione di un solido (definita *armonica*, con gli atomi che vibrano alla medesima frequenza), tutte le frequenze superiori saranno un multiplo di essa:

$$f_n = nf_1 \quad (2.4)$$

con  $n = 1, 2, 3...$

### 2.3. Esercizi

Nel volume I sono stati illustrati tutti gli elementi che concorrono nella definizione del metodo di analisi agli elementi finiti, oggi giorno molto diffusi (o addirittura indispensabili) nella progettazione sia strutturale che geotecnica, a partire dal significato di comportamento elastico della materia sviluppato attraverso il concetto di molle di connessione elastica.

Nei paragrafi precedenti tali elementi hanno trovato un collocazione fisica nell'ambi-

to dei sistemi atomici o molecolari i quali possono essere pensati come mezzi discreti costituiti da nodi (atomi o molecole) connessi mediante molle (legami chimici) a rigidità fissa o variabile in funzione della direzione (natura vettoriale della coesione); contestualmente, se il comportamento elastico rappresenta quello universalmente esistente ed applicato, sono stati illustrati i meccanismi che consentono il comportamento duttile dei metalli e quello fragile dei vetri conducendo, infine, all'introduzione del comportamento meccanico di base che costituirà il corpo principale nel proseguo del testo. Infine, a titolo puramente indicativo, è stato anche introdotto il comportamento dinamico di base dei sistemi lineari i cui principi, fondati sul metodo degli elementi finiti, hanno trovato spazio nel capitolo 6 del volume I.

Alla luce di tali elementi, il primo esercizio che segue ha il compito di affinare la padronanza con gli elementi fondamentali che descrivono il comportamento elastico della materia il quale, sito alla base del metodo degli elementi finiti, grazie al concetto delle molle consente una connessione logica tra i due argomenti; allo stesso modo, il secondo esercizio ha uno scopo puramente applicativo riunendo il comportamento elastico e il metodo degli elementi finiti in un unico esempio di base.

### 2.3.1. Esercizio 2.1: l'equazione della forza nelle molle

Partendo dai concetti di energia di deformazione, associata alle molle virtuali, disegnare il grafico relativo al comportamento elastico della materia e ricavare l'equazione fondamentale della forza nelle molle.

#### SOLUZIONE

Per la costruzione del grafico occorre considerare la reversibilità delle deformazioni elastiche ( $\varepsilon^{el}$ ) e l'esistenza di una diretta proporzionalità tra queste ultime e le sollecitazioni impresse ( $F$ ;  $\sigma$ ) come dimostrato dalla figura 2.9; quindi, possiamo ipotizzare l'esistenza di una retta (valida però solo nel campo delle piccolissime deformazioni) nei piani  $\sigma \div \varepsilon^{el}$  e  $F \div \delta^{el}$  la cui pendenza è data dai parametri  $E$  e  $k$  (figura 2.13).

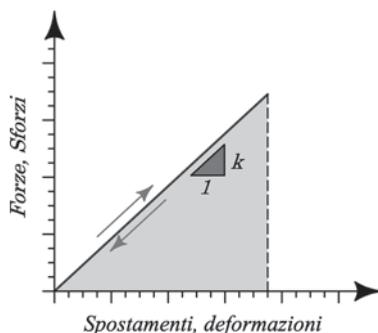


Figura 2.13. Diagramma relativo al comportamento elastico lineare dei solidi; l'area retinata indica l'energia di deformazione che può essere assorbita da un solido al di sotto della soglia elastica

Appare evidente che, in termini grafici, l'energia di deformazione di un solido può allora essere identificata con l'area sottesa dalla retta elastica nel piano sforzo-deformazioni (area scura), mentre matematicamente la stessa è data da:

$$u_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.5)$$

L'equazione (2.5) può essere ricavata anche partendo dalla condizione che, quando un solido è sottoposto all'azione di forze esterne, il lavoro compiuto da queste è convertito in energia cinetica e potenziale o, nel caso di un corpo elastico, in energia di deformazione (come nel caso delle catapulte o degli archi). Applicando quindi il concetto di lavoro di una particella che si muove lungo un percorso comunque variabile, compreso tra due estremi  $a$  e  $b$ , si ha:

$$L = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.6)$$

nella quale  $d\mathbf{r}$ :

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (2.7)$$

rappresenta il vettore differenziale lungo il percorso del moto.

Riferendoci ad un sistema cartesiano l'equazione (2.6) può allora essere riscritta nel seguente modo:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \quad (2.8)$$

con  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  che rappresentano le componenti cartesiane della forza vettoriale. È noto però che lo spostamento elastico  $\delta^{el}$  è direttamente proporzionale alla forza applicata  $F_a$ , esprimibile pertanto mediante la costante  $k$  (detta anche rigidità della molla) rappresentante la pendenza delle retta nel piano  $F \div \delta^{el}$  (equivalente al piano  $\sigma \div \varepsilon^{el}$ ):

$$k = \frac{F_a}{\delta} \quad (2.9)$$

dalla quale può essere ricavata l'equazione della forza:

$$F_a = k \cdot \delta \quad (2.10)$$

Ma, per un moto nella direzione positiva delle  $x$ , l'equazione (2.10) può essere riscritta come:

$$F_a = -k \cdot x \quad (2.11)$$

nota anche come *forza di richiamo* della molla virtuale, nella quale il segno negativo dipende proprio dalla direzione di allungamento della molla e dall'azione di richiamo nella direzione opposta.

Tuttavia il lavoro richiesto per produrre la deformazione, ovvero per allungare la molla di quantità  $\delta_0$  a partire dalla condizione di stato indeformato, è dato da:

$$L = \int_0^{\delta_0} F \cdot d\delta = \int_0^{\delta_0} k\delta \cdot d\delta = \frac{1}{2} k\delta_0^2 = U_e \quad (2.12)$$

che implica che il lavoro  $L$  e l'energia elastica  $U_e$  sono funzioni quadratiche dello spostamento. Banalizzando il procedimento è possibile considerare l'equivalenza tra spostamento e deformazione (così come tra forze e sforzi), per cui sostituendo l'equazione (2.9) nella (2.12) se ne deduce l'equazione di partenza (2.5). Infine, per una curva elastica generale deve valere che il lavoro di deformazione per unità di volume è:

$$u_e = \int_0^\epsilon \sigma \cdot d\epsilon \quad (2.13)$$

mentre per ulteriori e maggiori dettagli si rimanda al volume I.

### 2.3.2. Esercizio 2.2: applicazione del metodo FEM

Utilizzando il metodo delle rigidzze dirette (volume I, capitolo 3) e applicando l'equazione (2.11) relativa alla forza di richiamo delle molle, risolvere lo schema a tre molle rappresentato nella figura 2.14.

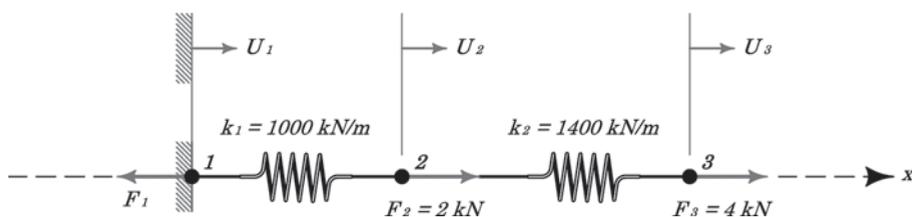


Figura 2.14. Modello a tre atomi e due molle, di diversa rigidzza, soggetto ad altrettante forze nella direzione delle  $x$

#### SOLUZIONE

L'energia di deformazione del sistema rappresentato in figura è data, secondo l'equazione (2.12), da:

$$U_e = \frac{1}{2} k_1 (U_2 - U_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (U_3 - U_2)^2 \quad (2.14)$$

(notare che  $U_i$  rappresenta in questo caso gli spostamenti, da non confondersi pertanto con l'energia elastica  $U_e$ ). Segue l'applicazione del *teorema di Castigliano* – volume I, paragrafo 2.4 – conducente al seguente set di equazioni:

$$\frac{\partial U_e}{\partial U_1} = k_1 U_1 - k_1 U_2 = F_1 \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial U_2} = k_1 U_2 - k_1 U_1 + k_2 U_2 - k_2 U_3 = F_2 \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial U_3} = k_2 U_3 - k_2 U_2 = F_3 \quad (2.15c)$$

Svolgendo tutte le equazioni, raggruppando le rigidezze in funzione degli spostamenti:

$$\begin{aligned} k_1 U_1 - k_1 U_2 + 0 &= F_1 \\ -k_1 U_1 + (k_1 + k_2) U_2 - k_2 U_3 &= F_2 \\ 0 - k_2 U_2 + k_2 U_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (2.15d)$$

e allineando i rispettivi termini, risulta immediata la costruzione della matrice di rigidezza del sistema:

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

la cui soluzione richiede la specificazione di alcune condizioni al contorno.

Dallo schema di figura 2.14 si evince che il nodo 1 è fissato ad un supporto inamovibile ( $U_1 = 0$ ), che ai nodi 2 e 3 sono applicate due forze di 2 e 4 kN mentre le molle possiedono rigidezze  $k_1 = 1000$  kN/m e  $k_2 = 1400$  kN/metro. L'equazione (2.16) diventa pertanto:

$$\begin{pmatrix} 1000 & -1000 & 0 \\ -1000 & 2400 & -1400 \\ 0 & -1400 & 1400 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Occorre a questo punto notare che la forza nodale  $F_1$  rappresenta la vera incognita del sistema e che la stessa, quale prima equazione algebrica della matrice (2.17), è definita come:

$$F_1 = -1000 U_2 \quad (2.18)$$

In questo modo il sistema si riduce a due sole equazioni in altrettante incognite:

$$\begin{pmatrix} 2400 & -1400 \\ -1400 & 1400 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

le cui soluzioni sono  $U_2 = 0,006$  m ed  $U_3 = 0,0089$  metri.

Infine, inserendo il rispettivo valore nell'equazione (2.18) è possibile ricavare anche il valore della forza di reazione  $F_1 = -6$  kN.



## 3. LO STATO DI SFORZO NEI SOLIDI

### 3.1. Introduzione

Possiamo ritenere la Meccanica del Continuo la base sulla quale è stata fondata la Scienza delle Costruzioni (riferimento: volume I, figura 1.1): una materia il cui padre indiscusso può essere considerato di diritto Galileo Galilei il quale già nel 1594 pubblicò il celebre trattato dal titolo *Della scienza meccanica*.

Successivamente, nel 1638, rese noti i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, nei quali affrontò, per la prima volta e con rigore scientifico, il problema della flessione in una trave a mensola incastrata e soggetta a carico di punta: un argomento al quale, come scopriremo nel proseguo del testo, neanche la Geotecnica può sottrarsi.

Occorre comunque considerare che i primi studi che effettivamente gettarono le basi per lo sviluppo dell'intero apparato teorico-sperimentale della Meccanica del Continuo furono condotti da Robert Hooke, uno dei più brillanti e versatili scienziati inglesi del XVII secolo. Hooke, utilizzando materiali poveri come molle, cavi e travi di legno, eseguì una serie di esperimenti sottoponendo gli stessi a diverse condizioni di carico, misurandone la lunghezza iniziale ( $L$ ) e la successiva variazione ( $\Delta L$ ); quindi, graficizzando i risultati in un diagramma cartesiano scoprì che esiste una relazione biunivoca, lineare e reversibile, tra le forze applicate e le corrispondenti variazioni di lunghezza, come mostrato nella figura 3.1 che costituisce l'estensione in campo plastico della figura 2.13 (limitata invece all'analisi in campo elastico). Con tali esperimenti lo scienziato giunse alla conclusione che se non viene superato un determinato valore del carico, tale da definire una soglia elastica (punto  $S$ , dal termine "snervamento"), alla sua rimozione si assiste al totale recupero della deformazione imposta, sintetizzando la sua scoperta con la famosa frase *ut tensio, sic vis* (la forza è proporzionale al carico).

In realtà, come scopriremo nei paragrafi successivi e in particolare nei volumi III e IV relativi alla Meccanica delle Terre, il comportamento dei solidi è decisamente più complesso in quanto invoca una marcata non-linearità anche per basse condizioni di carico (effetto particolarmente evidente nei terreni) e presenta un cappio isteretico nelle fasi di scarico  $\rightarrow$  ricarico dovuto all'*effetto anelastico*; in particolare, e con l'ausilio della figura 3.1, si scopre che:

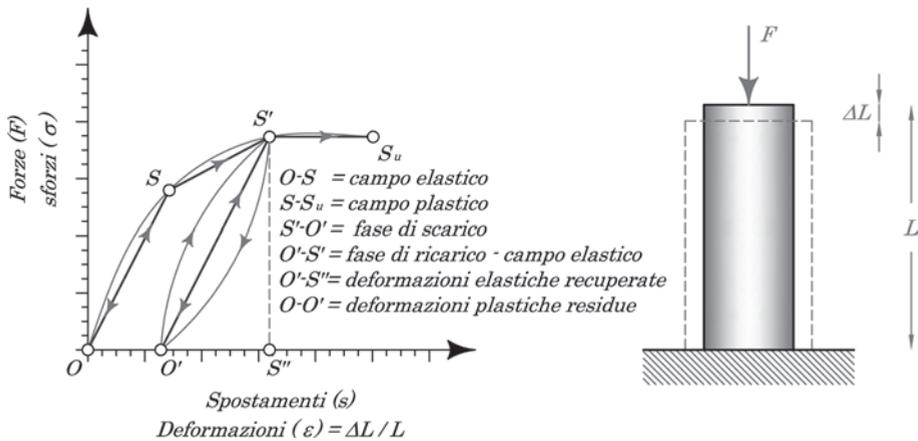


Figura 3.1. Confronto tra il reale comportamento elastoplastico dei solidi generici (tratto curvilineo) e la sua schematizzazione;  $S$  segna il passaggio dal comportamento puramente elastico a quello plastico

- il tratto puramente elastico non è definito a priori (ovvero non è noto), ma deve essere scoperto imponendo un programma di carico che prevede diverse fasi di scarico  $\rightarrow$  ricarico;
- la fase di scarico  $\rightarrow$  ricarico può essere linearizzata, conducendo ad una pendenza prossima a quella del tratto iniziale puramente elastico identificante il modulo elastico longitudinale  $E$  in quanto dato dal rapporto tra gli sforzi applicati e le deformazioni impresse;
- al termine di ogni fase di scarico si assiste al recupero delle deformazioni elastiche (tratto  $O'-S''$  sull'asse delle ascisse) e alla permanenza delle deformazioni plastiche (tratto  $O-O'$ ) e pertanto irreversibili;
- con il ricarico il materiale subisce un fenomeno di incrudimento, con l'innalzamento della soglia elastica dalla posizione iniziale,  $S$ , a quella successiva  $S'$ ; in altre parole nella fase di ricarico il solido tende a comportarsi elasticamente fino alla tensione corrispondente ora ad  $S'$ ;
- la rottura avviene al punto  $S_u$ , con il pedice relativo ad una condizione "ultima".

La presenza dell'effetto anelastico complica non poco la trattazione matematica dei problemi meccanici tanto da dover considerare anche l'energia di deformazione, la quale viene ad essere immagazzinata nelle molle schematizzanti il funzionamento dei solidi cristallini per poi essere rilasciata in fase di scarico e conseguente recupero della forma iniziale. Un problema che sarà affrontato con lo studio delle relazioni costitutive (capitolo 5) e della teoria dell'elasticità (capitolo 6).

In conclusione, oggi sappiamo che se un solido è sottoposto a carichi assiali di compressione o di trazione lo stesso manifesta accorciamenti o allungamenti proporzionali al carico stesso (valido, però, solo per piccole deformazioni e in campo elastico

lineare), con le medesime modalità dei cristalli unidimensionali visti nel capitolo precedente, tanto da riacquistare la dimensione originaria alla cessazione delle condizioni imposte; un comportamento che è stato spiegato in termini di legami interatomici solo nel 1941 (Norton e Loring, grazie all'uso della diffrattometria ai raggi X), tanto da rendere ulteriormente grande l'intuizione e gli studi di Hooke.

Oggi giorno, grazie agli oramai innumerevoli esperimenti di varia natura condotti su una combinazione estremamente diversificata di solidi, siamo coscienti che la maggior parte dei materiali si comporta come previsto dalla legge elastica di Hooke, mentre solo pochi, tra i quali i metalli duttili, si discostano da essa se non per basse condizioni di carico.

I secoli successivi alle scoperte dello scienziato inglese hanno visto il proliferare di numerose altre ricerche inerenti la Meccanica dei Solidi, talora volte sostanzialmente a fornire una spiegazione fisicamente compatibile e matematicamente corretta delle legge elastica la quale può essere, pertanto, considerata come il primo legame costitutivo della storia, ovvero una legge che lega (nel caso specifico in modo reversibile) i carichi e gli spostamenti espressi in termini di sforzi e di deformazioni.

### 3.2. Analisi dello stato di sforzo

I concetti di sforzo e di deformazione, sui quali si fondano tutte le scienze meccaniche, sono stati correttamente enunciati nella loro veste matematica moderna da Augustin Cauchy, uno scienziato francese che visse a cavallo dei secoli XVIII-XIX (Capecchi, 2001). Ad egli dobbiamo l'analisi della tensione (o pressione, indicata con la lettera greca  $\sigma$ ), intesa come rapporto tra una forza assiale ( $F$ ) applicata ad un solido e l'area ( $A$ ) ad essa normale sulla quale agisce:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.1a)$$

Ovviamente, e con riferimento alla figura 3.2, la tensione può assumere anche la connotazione di uno sforzo di taglio:

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (3.1b)$$

nel qual caso l'area e la forza applicata risultano essere paralleli e non più perpendicolari.

Cauchy ha ipotizzato nei suoi lavori che la tensione agente in un punto materiale contenuto in una superficie, estrapolando l'analisi dal concetto di dimensione, fosse indipendente dalla forma della superficie stessa e dipendesse invece dalla normale ad essa; in questo modo egli ha potuto:

- sostituire la superficie reale con un'altra piana di riferimento (superficie astratta);

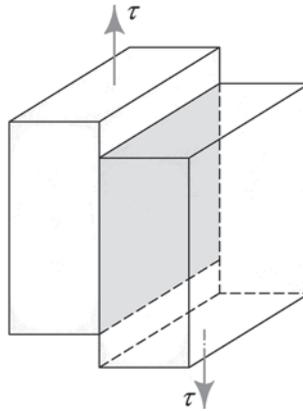


Figura 3.2. Individuazione delle sollecitazioni tangenziali ( $\tau$ ) quale rapporto tra un'area e una forza applicata parallelamente ad essa

- introdurre un postulato capace di esprimere lo stato di sollecitazione in un punto materiale, per il quale lo stato di tensione è completamente sviluppato quando sono note le sue componenti agenti su tre piani mutualmente ortogonali.

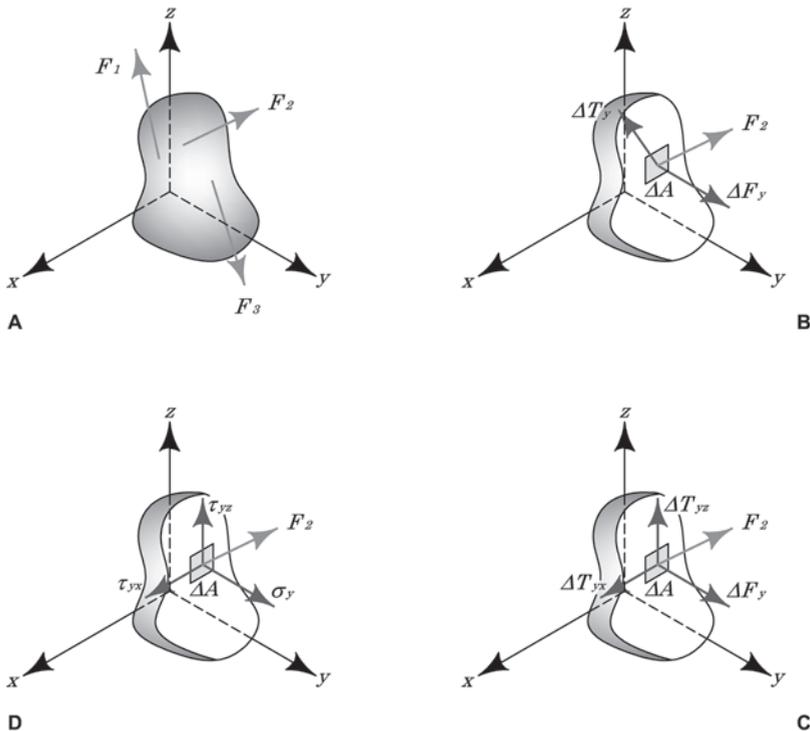


Figura 3.3. Evoluzione dello studio di un campo di forze applicato ad un mezzo continuo; le spiegazioni sono nel testo

Per apprezzare appieno la potenza di calcolo degli studi di Cauchy consideriamo un corpo di forma generica riferito ad un sistema cartesiano e soggetto all'azione di un campo di forze comunque orientate (figura 3.3a); in questo modo possiamo analizzare lo stato tensionale agente in un punto qualsiasi sezionando il corpo con un piano, parallelo ad esempio al piano di riferimento  $xz$ . Le forze agenti su di esso possono allora essere raggruppate, stante i concetti introdotti con le equazioni (3.1a) e (3.1b), in forze assiali, ovvero normali al piano di riferimento, e in forze tangenziali che risultano invece contenute nel piano stesso agendo di conseguenza parallelamente ad esso (figura 3.3b). Indicate con  $\Delta F_y$  e  $\Delta T_y$  le componenti delle forze, nelle quali il pedice  $y$  denota la normale al piano di riferimento, è possibile notare che:

- la componente assiale ( $\Delta F_y$ ) possiede una direzione di applicazione univocamente determinata;
- la componente tangenziale ( $\Delta T_y$ ) può assumere infinite direzioni tanto da richiedere un'ulteriore scomposizione secondo, nel caso specifico, due direzioni parallele agli assi cartesiani  $x$  e  $z$  conducendo alla definizione di  $T_{yx}$  e  $T_{yz}$  (figura 3.3c).

È importante notare che la notazione indiciale introdotta indica che il primo pedice è riferito alla normale al piano (in questo caso  $y$ ) e il secondo alla direzione delle componenti (per ulteriori approfondimenti dell'argomento si consiglia la lettura del volume I, capitolo 7, paragrafo 7.3.1).

Ritornando all'argomento, e utilizzando il concetto di tensione, risulta che lo stato di sforzo agente su un punto materiale può essere definito secondo le equazioni (3.1), richiedendo di conseguenza la condizione che il lato dell'elemento di riferimento sia infinitamente piccolo; quindi, esprimendo in termini di limiti, si ha:

$$\sigma_y = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_y}{A} \quad (3.2a)$$

$$\tau_{yx} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{T_{yx}}{A} \quad (3.2b)$$

$$\tau_{yz} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{T_{yz}}{A} \quad (3.2c)$$

dovendo valere le seguenti condizioni:

- $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y = \Delta x \cdot \Delta z = \Delta y \cdot \Delta z$
- $dA = dx \cdot dy = dx \cdot dz = dy \cdot dz$  per  $\Delta A \rightarrow 0$

In questo modo sono state identificate le prime tre componenti dello stato di sforzo,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ , agenti su una faccia del cubetto solido di riferimento i cui lati hanno dimensioni  $dx$  e  $dz$  (figura 3.3d).

Per avere un'idea di maggiore dettaglio del procedimento seguito, dal quale deriva infine l'analisi dello stato tensionale associato ad un punto materiale, può essere

utilizzata come riferimento la figura 3.4a nella quale è nuovamente rappresentato un generico campo di forze comunque orientate.

Utilizzando come riferimento la figura 7.4 del volume I, capitolo 7, nonché la notazione introdotta con le equazioni (7.39) e (7.42), risulta che ogni singola forza può essere associata ad un faccia del cubetto solido e scomposta nelle sue componenti elementari (figura 3.4b) parallele agli assi coordinati  $x$ ,  $y$ , e  $z$  i cui versori sono  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ ; in questo modo è allora possibile dapprima descrivere le forze come:

- $F_1 = F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j} + F_{1z} \mathbf{k}$
- $F_2 = F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{2z} \mathbf{k}$
- $F_3 = F_{3x} \mathbf{i} + F_{3y} \mathbf{j} + F_{3z} \mathbf{k}$

e successivamente assemblarle nella matrice delle forze:

$$\begin{array}{rcc}
 & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 F_1 & \rightarrow & F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\
 F_2 & \rightarrow & F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \\
 F_3 & \rightarrow & F_{3x} & F_{3y} & F_{3z}
 \end{array} \quad (3.3)$$

Appare evidente a questo punto, dall'analisi comparata dell'equazione (3.3) e della figura 3.4b, che le componenti normali alle facce del cubetto solido appartengono alla diagonale della matrice  $(F_{1x}, F_{2y}, F_{3z})$ , con la conseguenza che tutte le altre componenti devono essere intese come sforzi tangenziali così come visto con il proseguimento seguito nella figura 3.3. Applicando poi le equazioni (3.2) a tutte le forze presenti nella matrice (3.3) è infine possibile giungere all'identificazione delle nove componenti fondamentali dello stato di sforzo che, riferite sempre al cubetto solido di riferimento, conducono alla costruzione del  *tensore degli sforzi*  (figure 3.4c-d):

$$\left[ \sigma_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Notare che il secondo termine dell'equazione (3.4) è espresso in notazione matematica mentre il terzo in notazione ingegneristica (*notazione di von Karmann*). Notare anche che, oltre a rappresentare un insieme di tre equazioni lineari, la matrice (3.4) identifica in sostanza un vettore nello spazio, ovvero un sistema complesso di sforzo, attraverso la sequenza logica illustrata nella figura 3.4a  $\rightarrow$  3.4d.

Siamo infine giunti a definire lo stato di sforzo relativo ad un punto qualsiasi del mezzo pensato non più discreto, ovvero pertinente alla natura atomica o molecolare della materia vista nel capitolo 2, ma continuo, per i cui dettagli si rimanda al paragrafo successivo.