# Vorlesung „Funktionalanalysis I - Teil 2“

## IV. Banachräume

# IV. Banachräume

## §1. Teilräume und Teilmengen eines normierten Vektorraums

Den Begriff eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$ (über $\mathbb{C}$) und den Begriff eines Banachraums $\mathcal{B}$ (über $\mathbb{C}$) hatten wir bereits in Definition III.4.2 eingeführt, dazu einige andere Begriffe. Wir wiederholen nun einen Begriff und studieren im übrigen einige Erweiterungen bereits bekannter Definitionen.

**Definition IV.1.1:** *Sei $\sum \neq \emptyset$ eine Teilmenge eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$ über $\mathbb{C}$. $\sum$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in \sum$ eine Kugel $K_\varepsilon(x) = \{y|y \in \mathcal{N},\ ||y-x|| < \varepsilon\}$ um $x$ gibt mit $K_\varepsilon(x) \subset \mathcal{N}$; dabei ist der Radius $\varepsilon$ der Kugel $K_\varepsilon(x)$ um $x$ eine positive Zahl. $\sum \neq \emptyset$ heißt abgeschlossen, wenn folgendes gilt: Sei $(x_n)$ eine Folge aus $\mathcal{N}$, die für $n \to \infty$ gegen $x \in \mathcal{N}$ konvergiert, d.h. $||x_n - x|| \to 0,\ n \to \infty$. Dann ist auch $x \in \sum$. $\sum$ heißt präkompakt, wenn jede Folge $(x_n)$ aus $\sum$ eine Teilfolge $(x_{n_j})$ enthält, die eine Cauchy-Folge ist, d.h. $||x_{n_k} - x_{n_l}|| \to 0,\ k, l \to \infty$. $\sum$ heißt kompakt, wenn jede Folge $(x_n)$ aus $\sum$ eine Teilfolge enthält, die gegen ein Element aus $\sum$ konvergiert. $\emptyset, \mathcal{N}$ sind offen und abgeschlossen. $x \in \sum$ heißt innerer Punkt.*

Ein Teilraum $\mathfrak{M}$ eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{N}$. $\mathfrak{M}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathfrak{M}$ als Teilmenge abgeschlossen ist. Sei $I$ eine Indexmenge, seien $\mathfrak{M}_\iota$, $\iota \in I$, Teilräume von $\mathfrak{N}$. Dann ist

$$\bigcap_{\iota \subset T} \mathfrak{M}_\iota$$

wieder ein Teilraum von $\mathfrak{N}$. Seien $\sum_\iota$, $\iota \in I$, offene Teilmengen von $\mathfrak{N}$. Dann ist

$$\bigcup_{\iota \in I} \sum_\iota$$

offen. Seien $\widetilde{\sum}_\iota$, $\iota \in I$, abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{N}$. Dann ist

$$\bigcap_{\iota \in I} \widetilde{\sum_\iota}$$

abgeschlossen. Infolgedessen ist für einen Teilraum $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{N}$

$$\bigcup_{\substack{\text{abgeschl. Teilraum von } \mathfrak{N}, \\ \mathfrak{T} \supset \mathfrak{M}}} \mathfrak{T}$$

abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{N}$. $\overline{\mathfrak{M}}$ heißt die Abschließung von $\mathfrak{M}$. Die sogenannte mengentheoretische Abschließung von $\mathfrak{M}$ als Teilmenge von $\mathcal{N}$, nämlich

$$\bigcup_{\substack{\mathfrak{A} \text{ abgeschl. Teilmenge von } \mathcal{N} \\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{M}}} \mathfrak{A}$$

ist gerade die Menge aller $x \in \mathcal{N}$, zu denen es eine Folge $(x_n)$ aus $\mathfrak{M}$ gibt mit $||x_n - x|| \to 0$, $n \to \infty$. Daher ist die mengentheoretische Abschließung von $\mathfrak{M}$ als Teilmenge von $\mathcal{N}$ wieder ein Teilraum von $\mathcal{N}$ und somit gerade $\overline{\mathfrak{M}}$. Zu jeder Teilmenge $\sum$ gibt es einen kleinsten Teilraum $\mathcal{L}_{\sum}$ von $\mathcal{N}$, der $\sum$ enthält, nämlich $\bigcap_{\substack{\mathfrak{M} \text{ Teilraum von } \mathcal{N} \\ \mathfrak{M} \supset \sum}} \mathfrak{M}$. Es ist

$$\mathcal{L}_{\sum} = \{f | f \in \mathcal{N}, \exists N = N(f) \in \mathbb{N} \text{ und } \begin{array}{c} f_1 = f_1(f), \ldots, f_N = f_{N(f)} \in \sum \\ c_1 = c_1(f), \ldots, c_N = c_{N(f)} \in \mathbb{C} \end{array}$$

$$\text{mit } f = \sum_{j=1}^{N} c_j f_j\}$$

$\mathcal{L}_{\sum}$ heißt der von $\sum$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{N}$.

Wie schon im Fall eines Prähilbertraums oder Hilbertraums nennen wir $\mathcal{N}$ separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\sum$ von $\mathcal{N}$ gilt, die dicht in $\mathcal{N}$ liegt, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $f \in \mathcal{N}$ gibt es ein $g \in \sum$ mit $||f - g|| < \varepsilon$. Ist $\mathcal{N}$ spearabel, so ist es auch jeder Teilraum $\mathfrak{M}$ (Beweis wie Hilfssatz II.2.2).

**Definition IV.1.2:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $\sum$ von $\mathcal{N}$ heißt vollständig in $\mathcal{N}$, wenn $\overline{\mathcal{L}_{\sum}} = \mathcal{N}$ ist.*

**Satz IV.1.1:** *Ein normierter Raum ist dann und nur dann separabel, wenn $\mathcal{N}$ eine abzählbare vollständige Teilmenge enthält.*

**Beweis:** Ist $\mathcal{N}$ separabel, so ist nichts zu zeigen. Nun enthalte $\mathcal{N}$ eine abzählbare vollständige Teilmenge $\sum$. Dann ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^{N} c_k f_k, \quad \begin{array}{l} f_1, \ldots, f_N \in \sum, \\ c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C} \text{ mit rationalem Real- und Imaginärteil,} \end{array}$$

abzählbar und dicht in $\mathcal{N}$. $\square$

Hinsichtlich des Abstandes eines Punktes von einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathcal{N}$ gilt:

**Satz IV.1.2:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum. Sei $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{N}$, und sei $\mathfrak{G}$ ein weiterer Teilraum von $\mathcal{N}$ mit $\mathfrak{M} \overset{\subset}{\neq} \mathfrak{G}$. Dann gibt es zu jedem $\lambda < 1$ ein $\varphi \in \mathfrak{G}$ mit $||\varphi|| = 1$ und $||\varphi - f|| \geq \lambda$ für alle $f \in \mathfrak{M}$.*

**Beweis:** Zunächst existiert ein $g \in \mathfrak{G} - \mathfrak{M}$. Sei

$$d = \inf_{f \in \mathfrak{M}} ||g - f||$$

Wäre $d = 0$, so existierte eine Folge $(f_n)$ mit $f_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, und $||g - f_n|| \to 0$, $n \to \infty$. Aus der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ folgte: $g \in \mathfrak{M}$, ein Widerspruch. Also ist $0 < d < +\infty$. Sei $f_0 \in \mathfrak{M}$ so gewählt, daß $||g - f_0|| \leq d/\lambda$ ist. Sei $\varphi = (g - f_0)/||g - f_0||$. Dann ist $||\varphi|| = 1$, $\varphi \in \mathfrak{G}$, und

$$\varphi - f = \frac{g - f_0}{||g - f_0||} - f = \frac{g - (f_0 + ||g - f_0||f)}{||g - f_0||}, \ f \in \mathfrak{M}.$$

$f_0 + ||g - f_0||f = h$ ist aus $\mathfrak{M}$: Also ist

$$||\varphi - f|| = \frac{||g - h||}{||g - f_0||} \geq d/(d/\lambda) = \lambda, \ f \in \mathfrak{M}.$$

□

Satz IV.1.2 wird uns im Banachraum als Substitut für den fehlenden Satz von der orthogonalen Projektion (Satz II.2.1) dienen.

Hinsichtlich der Abgeschlossenheit endlichdimensionaler Teilräume gilt

**Satz IV.1.3:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum. Sei $\mathfrak{M}$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.*

**Beweis:** $\mathfrak{M}$ ist endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, etwa der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$\mathfrak{M} = \{f | f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k, \ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}\}.$$

Wir behaupten nun:

$$\text{(IV.1.1)} \qquad ||\sum_{k=1}^{n} c_k f_k|| \geq \alpha \left( \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit einer positiven Konstante $\alpha$. Dies sieht man so: Die Funktion, die durch

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = ||\sum_{k=1}^{n} z_k \varphi_k||$$

auf $S = \{z | z \in \mathbb{C}^n,\ |z| = 1\}$ definiert ist, ist auf der kompakten Menge $S$ stetig und nirgends Null. Folglich wird das Minimum angenommen und ist positiv. Mit $\alpha = \min_{z\in S} \varphi(z)$ folgt (IV.1.1) sofort. Sei nun $(f_m)$ eine Folge mit $f_m \in \mathfrak{M}$, $m \in \mathbb{N}$. Die Basisdarstellung von $f_m$ sei

$$f_m = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} \varphi_k,\ m \in \mathbb{N}.$$

Ist nun $f_m$ konvergent gegen $f \in \mathcal{N}$, $n \to \infty$, so ist $(f_m)$ eine Cauchy-Folge. (IV.1.1) zeigt, daß die Folgen $(c_k^{(m)})$, $k = 1, \ldots, n$, Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ sind, also

$$c_k^{(n)} \to c_k \text{ in } \mathbb{C},\ m \to \infty.$$

Die Dreiecksungleichung liefert sofort $f_m \to f$, $m \to \infty$, mit

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \leq \mathfrak{M}.$$

$\square$

## §2. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Schwache und schwache-$*$-Konvergenz

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit können wir aus III.1 übernehmen.

**Satz IV.2.1:** *Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Banachräume mit Norm $||.||$ und $||.||'$. Sei $\{T_\iota | \iota \in I\}$, $I$ eine beliebige Indexmenge, eine Menge von beschränkten linearen Operatoren $T_\iota : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$. Zu jedem $x \in \mathcal{B}$ gebe es eine Zahl $M(x)$, die von $x$ abhängen kann, derart, daß*

$$||T_\iota x||' \leq M(x), \iota \in I,$$

*ist. Dann gibt es eine Zahl $M \geq 0$ derart, daß*

$$||T_\iota|| \leq M, \ \iota \in I,$$

*ist.*

**Beweis:** Für den Beweis verweisen wir auf Satz III.1.4 und die nachfolgende Bemerkung. $\square$

Wir betrachten den Fall $\mathcal{B}' = \mathbb{C}$ mit dem Betrag als Norm. Wir schreiben

$$\mathcal{B}^* = L(\mathcal{B}, \mathbb{C})$$

und bezeichnen $\mathcal{B}^*$ als den zu $\mathcal{B}$ dualen (auch konjugierten oder adjungierten) Raum. Wir hatten im Falle zweier beliebiger Banachräume $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ in III.4 bereits erwähnt, daß $L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Der folgende Satz liefert eine weitere Information in dieser Richtung.

**Satz IV.2.2:** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Banachräume. Im Vektorraum $L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ definieren wir eine Norm wie in III.4 durch*

$$||T|| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}, \\ ||f||=1}} ||Tf||',$$

*wobei wieder $||.||$ die Norm in .... ist. Mit dieser Norm wird $L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ zu einem Banachraum.*

**Beweis:** Der Nachweis, daß $L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ mit der oben eingeführten Norm zu einem normierten Vektorraum wird, sei dem Leser überlassen. Wir haben jetzt die Vollständigkeit zu zeigen. Sei also $(T_n)$ eine Cauchy-Folge in

$L(\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Wegen $||(T_n - T_m)x||' \leq ||T_n - T_m||||x||$ ist dann auch $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}'$. Sei $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann ist dadurch eine lineare Abbildung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ gegeben. Da die $T_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $L(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ bilden, ist insbesondere $||T_n|| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, mit einer positiven Konstante $M$. Also ist $||Tx||' \leq M||x||$ und $T \in L(\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Wir haben nur noch zu zeigen, daß $||T - T_n|| \to 0$, $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $||T_m - T_n|| < \varepsilon/2$ ausfällt für $n, m \geq N_0$. Sei $x \in \mathcal{B}$, $||x|| \leq 1$. Wir wählen ein $m(x) \in \mathbb{N}$ mit $m(x) \geq N_0$ und $||Tx - T_{m(x)}x|| < \varepsilon/2$. Für $n \geq N_0(\varepsilon)$ folgt somit

$$||(T - T_n)x||' \leq ||Tx - T_{m(x)}x||' + ||T_{m(x)}x - T_n x||' < \varepsilon,$$

$$||T - T_n|| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{B},\\ ||x||=1}} ||(T - T_n)x|| \leq \varepsilon.$$

□

Der vorstehende Satz liefert insbesondere, daß der Dualraum $\mathcal{B}^*$ zu einem Banachraum $\mathcal{B}$ wieder ein Banachraum ist. Die Elemente aus $\mathcal{B}^*$ heißen, wie schon im Fall eines Hilbertraums, die beschränkten (oder stetigen) linearen Funktionale in $\mathcal{B}$. $(\mathcal{B}^*)^* = \mathcal{B}^{**}$ ist natürlich auch wieder ein Banachraum, er heißt der Bidualraum zu $\mathcal{B}$.

**Definition IV. 2.1:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Sei natürliche Abbildung $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ ist folgendermaßen erklärt: $I(x)(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{B}^*$.*

Für $I(x)$ schreiben wir auch $Ix$. Es ist leicht zu sehen, daß $Ix(\alpha f + \beta g) = \alpha Ixf + \beta Ixg$, $f, g \in \mathcal{B}^*$, $x, \beta \in \mathbb{C}$, ist. Daher ist $Ix$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{B}^*$ in $\mathbb{C}$. Außerdem ist $|Ix(f)| \leq ||f||||x|| = ||x||||f||$, so daß $Ix$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{B}^*$ ist. Natürlich ist auch $I(\alpha x + \beta y) = \alpha Ix + \beta Iy$, $x, y \in \mathcal{B}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Daher ist $I$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}^{**}$. Nun ist

$$||Ix||_{\mathcal{B}^{**}} = \sup_{\substack{f\in\mathcal{B}^*,\\ ||f||_{\mathcal{B}^*}=1}} ||Ix(f)|| \leq ||x||.$$

Hieraus folgt, daß $I \in L(\mathcal{B},\mathcal{B}^{**})$ ist mit $||I|| \leq 1$. Einige Fragen erheben sich im Zusammenhang mit der Abbildung $I$: Ist $I$ eineindeutig, ist $I$ normtreu, d.h. $||Ix||_{\mathcal{B}^{**}} = ||x||$, ist $I$ surjektiv? Auf diese Fragen soll später eingegangen werden. Im Fall, daß $\mathcal{B}$ ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist, stellt sich die Situation folgendermaßen dar: Auf Grund von Satz II.3.1 gibt es zu $f \in \mathcal{H}^*$ ein und nur ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$f(h) = (h, g),\ h \in \mathcal{H},$$

und wir haben $||f|| = ||g||$. Umgekehrt ist durch $(., g)$ bei vorgegebenem $g \in \mathcal{H}$ in Element $f \in \mathcal{H}^*$ definiert mit $||f|| = ||g||$. Somit ist $Ix(f) = f(x) = (x, y)$, $x \in \iota$, $f \in ...^*$

$$||Ix||_{\mathcal{H}^{**}} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{H}, \\ ||g||=1}} |(x, y)| = ||x||.$$

Damit ist in diesem Fall $I$ eineindeutig und normtreu. $I$ ist auch surjektiv. Sei nämlich $\widetilde{I}$ die soeben eingeführte Zuordnung $f \longmapsto g$, d.h. $g = \widetilde{I}f$. Dann ist $\widetilde{I}$ antilinear (man sagt auch semilinear), d.h. $\widetilde{I}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha}\widetilde{I}f_1 + \overline{\beta}\widetilde{I}f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sei nun $F \in \mathcal{H}^{**}$. Also ist $F(f) = F_0\widetilde{I}^{-1}(g)$. Da $\widetilde{I}^{-1}$ wegen der Antilinearität von $\widetilde{I}$ auch antilinear ist, ist durch die Zuordnung $g \longmapsto \overline{F_0\widetilde{I}^{-1}(g)}$ ein Element aus $\mathcal{H}^*$ gegeben. Also gibt es ein und nur ein $x \in \mathcal{H}$ mit $\overline{F_0\widetilde{I}^{-1}(g)} = (g, x)$, $g \in \mathcal{H}$, d.h. $F_0\widetilde{I}^{-1}(g) = (x, g)$, $F = Ix$.

Beispiele für Dualräume geben wir am Ende dieses Paragraphen. Wir kommen nun zum Begriff der schwachen Konvergenz (vgl. auch III.1).

**Definition IV.2.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Eine Folge $(u_n)$ in $\mathcal{B}$ heißt schwach konvergent, wenn $(f(u_n))$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist für jedes $f \in \mathcal{B}^*$. Wenn es ein $u \in \mathcal{B}$ gibt derart, daß $f(u_n) \to f(u)$, $n \to \infty$, für alle $f \in \mathcal{B}^*$, so heißt die Folge $(u_n)$ schwach konvergent gegen $u$. In Zeichen: $u_n \rightharpoonup u$, $n \to \infty$. $u$ heißt schwacher Grenzwert oder Limes von $(u_n)$.*

Um diesen eben eingeführten Begriff der schwachen Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ vom bereits bekannten Begriff der Konvergenz der Folge $(u_n)$ gegen $u$ in $\mathcal{B}$ ($u_n \to u$, $n \to \infty$, erklärt durch $||u_n - u|| \to 0$, $n \to \infty$) abzugrenzen, schreiben wir zum ersten Fall auch $u = w - \lim_{n\to\infty} u_n$, im zweiten Fall auch $u = s - \lim_{n\to\infty} u_n$ und reden im zweiten Fall auch von starker Konvergenz. Konvergenz schlechthin bedeutet immer starke Konvergenz.

**Hilfssatz IV.2.1:** *Sei $(u_n)$ eine schwach konvergente Folge in einem Banachraum $\mathcal{B}$. Dann hat $(u_n)$ höchstens einen schwachen Grenzwert.*

**Beweis:** Der Beweis wird im folgenden Paragraphen erbracht. □

Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz, aber nicht umgekehrt, es sei denn, der Banachraum $\mathcal{B}$ ist endlichdimensional (Man wähle eine Basis von $\mathcal{B}$, etwa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, und die duale Basis $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ von $\mathcal{B}^*$; im endlichdimensionalen Banachraum $\mathcal{B}$ ist jede lineare Abbildung $f : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$

stetig). Weiter braucht eine schwache konvergente Folge in $\mathcal{B}$ nicht notwendig einen schwachen Grenzwert zu haben. Ist dies jedoch der Fall, so heißt $\mathcal{B}$ schwach vollständig.

**Hilfssatz IV.2.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ die natürliche Abbildung gemäß Definition IV.2.1. Dann ist*

$$||Ix|| = ||x||,\ x \in \mathcal{B}.$$

*$I$ ist also normtreu, insbesondere ist $I$ eineindeutig. $\mathcal{R}(I)$ ist abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}^{**}$.*

**Beweis:** Die Normtreue wird im nächsten Paragraphen bewiesen. Sei $Ix_n \to F$, $n \to \infty$, in $\mathcal{B}^{**}$ für eine Folge $(Ix_n)$ aus $\mathcal{R}(I)$ und ein $F \in \mathcal{B}^{**}$. Aus der Normtreue von $I$ folgt, daß $(x_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}$ ist, also $x_n \to x$, $n \to \infty$, für ein $x \in \mathcal{B}$. Also ist $Ix_1 \to Ix$, $n \to \infty$, in $\mathcal{B}^{**}$, und wir haben $F = Ix$. $\square$

Als Banachräume sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{R}(I)$ nicht zu unterscheiden ($\mathcal{R}(I)$ ist wegen der eben gezeigten Abgeschlossenheit mit der Norm von $\mathcal{B}^{**}$ ein Banachraum). Man sagt, $\mathcal{B}$ sei isometrisch in $\mathcal{B}^{**}$ eingebettet. Es kann aber durchaus der Fall $\mathcal{R}(I) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}^{**}$ eintreten.

**Hilfssatz IV.2.3:** *Sei $(u_n)$ eine schwach konvergente Folge im Banachraum $\mathcal{B}$. Dann ist die Folge $(||u_n||)$ beschränkt.*

**Beweis:** Wegen der Konvergenz von $(f(u_n))$, $f \in \mathcal{B}^*$, und

$$Iu_n(f) = f(u_n),\ n \in \mathbb{N},$$

ist $|Iu_n(f)| \leq M(f)$, $n \in \mathbb{N}$, mit einer Konstanten $M(f) \geq 0$. Satz IV.2.1 zeigt, daß $||Iu_n||_{\mathcal{B}^{**}} \leq M$, also $||u_n|| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, ist nach Hilfssatz IV.2.2. $\square$

**Hilfssatz IV.2.4:** *Sei $(u_n)$ eine beschränkte Folge in einem Banachraum $\mathcal{B}$, d.h. $(||u_n||)$ ist beschränkt. Für die schwache Konvergenz von $(u_n)$ (gegen $u$) in $\mathcal{B}$ ist es hinreichend, daß $(f(u_n))$ konvergiert (gegen $f(u)$) für alle $f$ aus einer vollständigen Menge $\sum^*$ aus $\mathcal{B}^*$ (d.h. die endlichen Linearkombinationen $\mathcal{L}_{\sum^*}$ sind dicht in $\mathcal{B}^*$).*

**Beweis:** Sei

$$F = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \in \mathcal{L}_{\sum^*}$$

$(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C},\ f_1, \ldots, f_m \in \sum^*)$. Dann ist auch $(F(u_n))$ konvergent (gegen $F(u)$). $\mathcal{L}_{\sum^*}$ ist dicht in $\mathcal{B}^*$. Sei $G \in \mathcal{B}^*$, $\varepsilon > 0$. Sei $F$ aus $\mathcal{L}_{\sum^*}$ und $||F - G||_{\mathcal{B}^*} < \varepsilon$. Es ist $|F(u_n) - F(u_l)| < \varepsilon$, $n, l \geq N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Also haben wir

$$|G(u_n) - G(u_l)| \leq |G(u_n) - F(u_n)| + |F(u_n) - F(u_l)| + |F(u_l) - G(u_l)|,$$

$$< 2\varepsilon \sup_{m \in \mathbb{N}} ||u_m|| + \varepsilon,\ n, l \geq N_0 \in \mathbb{N}$$

so daß $(G(u_n))$ konvergiert für jedes $G \in \mathcal{B}^*$. Ist $(f(u_n))$ konvergent gegen $f(u)$, $n \to \infty$ für alle $f \in \sum^*$, so argumentiert man ebenso, indem man $u_n - u_l$ durch $u_n - u$ ersetzt und erhält $G(u_n) \to G(u)$, $u \to \infty$, $G \in \mathcal{B}^*$.

Die Beziehung zwischen starker und schwacher Konvergenz ist gegeben durch

**Satz IV.2.3:** *Eine Folge $(u_n)$ in einem Banachraum $\mathcal{B}$ konvergiert dann und nur dann stark, wenn $(f(u_n))$ gleichmäßig konvergiert in $\{f | f \in \mathcal{B}^*, ||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$ (oder $\{f | f \in \mathcal{B}^*,\ ||f||_{\mathcal{B}^*} = 1\ \}$).*

**Beweis:** Wir setzen zunächst die gleichmäßige Konvergenz von $(f(u_n))$ in $\{f | f = \mathcal{B}^*,\ ||f||_{\mathcal{B}^*} = 1\}$ voraus. Dies impliziert, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f(u_n) - f(u_m)| < \varepsilon,\ n, m \geq N_0,\ f = \mathcal{B}^*,\ ||f||_{\mathcal{B}^*} = 1.$$

Im folgenden Paragraphen zeigen wir, daß es zu jedem $u \in \mathcal{B}$, ein $f \in \mathcal{B}^*$ gibt mit $f(u) = ||u||$, $||f||_{\mathcal{B}^*} = 1$. Also ist

$$||u_m - u_n|| \leq \sup_{\substack{f = \mathcal{B}^* \\ ||f||_{\mathcal{B}^*} = 1}} |f(u_n) - f(u_m)| = \varepsilon,\ n, m \geq N_0,$$

so daß $(u_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}$ und daher konvergent ist. Konvergiert andererseits $(u_n)$ stark, so ist für $f \in \mathcal{B}^*$, $||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1$ gerade $|f(u_m) - f(u_n)| \geq ||f||||u_n - u_m|| \leq ||u_n - u_m||$, so daß sich die gleichmäßige Konvergenz ergibt. $\square$

Für Satz IV.2.3 genügt es natürlich, die gleichmäßige Konvergenz von $(f(u_n))$ in einer dichten Teilmenge von $\{f | f \in \mathcal{B}^*,\ ||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$ einzuführen statt der in $\{f|f \in \mathcal{B}^*, ||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$.

Im Dualraum eines Banachraums steht uns neben der schwachen und starken Konvergenz noch ein anderer Konvergenzbegriff zur Verfügung, die schwache-$*$-Konvergenz.

**Definition IV.2.3:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $\mathcal{B}^*$ sein Dualraum. Sei $(f_n)$ eine Folge aus $\mathcal{B}^*$. $(f_n)$ heißt schwach-$*$-konvergent gegen $f \in \mathcal{B}^*$ genau dann, wenn $f_n(u) \to f(u)$, $n \to \infty$, für alle $u \in \mathcal{B}$.*

Die schwache-$*$-Konvergenz ist schwächer als die schwache Konvergenz in $\mathcal{B}^*$. Sei nämlich $(f_n)$ schwach konvergent gegen $f \in \mathcal{B}^*$, so folgt $F(f_n) \to F(f)$, $n \to \infty$, $F \in \mathcal{B}^{**}$. Wenn $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ die in Definition IV.2.1 eingeführte natürliche Abbildung ist, so folgt $Iu(f_n) \to Iu(f)$, $n \to \infty$, $u \in \mathcal{B}$, also $f_n(u) \to f(u)$, $n \to \infty$, $u \in \mathcal{B}$. Wenn $(f_n)$ schwach-$*$ gegen $f$ konvergiert, so schreiben wir $f_n \underset{*}{\to} f$ oder $f = w - * - \lim_{n\to\infty} f_n$. $f$ heißt der schwache-$*$-Grenzwert von $(f_n)$ oder schwache-$*$-Limes von $(f_n)$.

**Hilfssatz IV.2.5:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $\mathcal{B}^*$ sein Dualraum. Sei $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{B}^*$ derart, daß $(f_n(u))$ konvergiert für jedes $u \in \mathcal{B}$. Dann ist die Folge $(||f_n||_{\mathcal{B}^*})$ beschränkt.*

**Beweis:** Da $(f_n(u))$ konvergiert, $u \in \mathcal{B}$, gibt es zu jedem $u \in \mathcal{B}$ ein $M(u) \geq 0$ mit $|f_n(u)| \leq M(u)$. Aus Satz IV.2.1 folgt nun die Behauptung des Hilfssatzes. $\square$

Im Gegensatz zur schwachen Konvergenz in $\mathcal{B}$, ist $\mathcal{B}^*$ schwach-$*$-vollständig bezüglich der schwachen-$*$-Konvergenz. Genauer gilt der

**Satz IV.2.4:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum mit Dualraum $\mathcal{B}^*$. Sei $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{B}^*$ derart, daß $(f_n(u))$ konvergiert für jedes $u \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein und nur ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit $f_n \underset{*}{\to} f$, $n \to \infty$.*

**Beweis:** Sei

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} f_n(u),\ u \in \mathcal{B}.$$

Man erkennt sofort, daß $f : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung ist. Nach Hilfssatz IV.2.5 ist $||f_n|| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, mit einem $M \geq 0$. Also ist $|f(u)| \leq M||u||$, $u \in \mathcal{B}$, und somit $f \in \mathcal{B}^*$. Die Eindeutigkeit von $f$ ist trivial. $\square$

Die folgenden Resultate werden wie im Fall der schwachen Konvergenz bewiesen:

**Hilfssatz IV.2.6:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum mit Dualraum $\mathcal{B}^*$. Sei $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{B}^*$. $(f_n)$ konvergiert stark in $\mathcal{B}^*$ gegen $f \in \mathcal{B}^*$ dann und nur dann, wenn $(f_n(u))$ gleichmässig in $\{u|u \in \mathcal{B}, ||u|| \leq 1\}$ (oder $\{u|u \in \mathcal{B}, ||u|| = 1\}$) konvergiert. Sei $(||f_n||)$ beschränkt. Für die schwache-$*$-Konvergenz der Folge $(f_n)$ ist es hinreichend, wenn $(f_n(u))$ konvergiert für alle $u \in \sum$ mit einer in $\mathcal{B}$ vollständigen Menge $\sum$.*

Wir kommen nun zu den angekündigten **Beispielen für Dualräume.** Wir beginnen mit den Folgenräumen. Dabei machen wir freien Gebrauch von den folgenden Ungleichungen für komplexe oder reelle Zahlen, die in den Übungen bewiesen werden sollen: Sei $N \in \mathbb{N}$, seien $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\text{(IV.2.1)} \sum_{\nu=1}^{N} |\zeta_\nu z_\nu| \leq (\sum_{\nu=1}^{N} |\zeta_\nu|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{\nu=1}^{N} |z_\nu|^q)^{1/q},$$

falls $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
$\leq \max_{1 \leq \nu \leq N} |z_\nu| \cdot \sum_{\nu=1}^{N} |\zeta_\nu|$,
falls $p = 1$ und $q = +\infty$ gesetzt wird, was formal zu $1/p + 1/q = 1$ führt.

(IV.2.1) heißt Höldersche Ungleichung. Falls $1 \leq p < +\infty$ ist, gilt

$$\text{(IV.2.2)} \qquad (\sum_{\nu=1}^{N} |\zeta + z_\nu|^p)^{1/p} \leq (\sum_{\nu=1}^{N} |z_\nu|^n)^{1/p} + (\sum_{\nu=1}^{N} |z_\nu|^p)^{1/p}.$$

(IV.2.2) heißt Minkowskische Ungleichung. Für $+\infty > p \geq 1$ machen wir

$$l_p = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

in evidenter Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$. Aus (IV.2.2) folgt, daß durch

$$||(x_n)||_{lp} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$$

eine Norm in $l_p$ definiert; der Leser kann sich leicht überlegen, daß $l_p$ bezüglich dieser Norm vollständig ist, der normierte Vektorraum $l_p$ über $\mathbb{C}$ also ein Banachraum ist. Im Fall $p = +\infty$ setzen wir: $(c) = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ (x_n)$ konvergiert für $n \to \infty\}$,

$$l_\infty = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$$

Dies liefert jeweils einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, der mit der Norm

$$||(x_n)||_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = ||(x_n)||_{(c)}.$$

zu einem Banachraum wird. Sei nun $+\infty \geq p \geq 1$. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, falls $+\infty > p > 1$, $q = 1$, falls $p = +\infty$, $q = +\infty$, falls $p = 1$ ist. Jedes Element $(z_n) \in l_q$, definiert über $l_p$ durch

$$f((\zeta_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n z_n,\ (\zeta_n) \in l_p,$$

liefert ein $f \in l_p^*$. Daß dies auch alle Elemente aus $l_p^*$ sind, zeigt

**Hilfssatz IV.2.7:** *Sei $+\infty \geq p \geq 1$. Dann gibt es einen normtreuen Vektoranmisomorphismus $\widehat{I} : l_p^* \to l_q$ (bzw. $(c)^* \to l_1$). Also kann man $l_p^*$ und $l_q$ als Banachräume nicht unterscheiden, und wir schreiben $l_p^* = l_q$ (bzw. $(c)^* = l_1$). Hierbei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, falls $+\infty > p > 1$, $q = 1$, falls „$p = +\infty$“ d.h. falls $l_p$ durch $(c)$ ersetzt wird, $q = +\infty$, falls $p = 1$ ist. Die natürliche Abbildung $I : l_p \to l_p^{**}$ ist surjektiv, $1 < p < +\infty$.*

Für $p = 2$ sind wir mit dem obigen Resultat bereits durch die Abschnitte I.4, II.1, II.3 vertraut.

**Beweis des Hilfssatzes IV.2.7:** Sei $f \in l_p^*$. Sei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, d.h. die Folge, die an der $i$-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen hat. Sei $f(e_i) = f_i$, $i \in \mathbb{N}$. Sei $(x_i) \in l_p$. Dann ist $(x = (x_i))$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$$

mit einer in $l_p$ konvergenten Reihe, so daß aus der Stetigkeit von $f$ folgt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i.$$

Sei nun $x_i = |f_i|^{q-2}\overline{f_i}$ für alle $i$ mit $i = 1, \ldots, n$, $f_i \neq 0$, und 0 sonst. Dabei ist $1 < q < +\infty$, d.h. $1 < p < +\infty$. Dann ist

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \leq ||f||_{l_p^*} ||x||_{l_p}$$

mit

$$
\begin{aligned}
||x||_{l_p} &= (\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{(q-1)p})^{1/p}, \\
&= (\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{q})^{1/p},
\end{aligned}
$$

da $(q-1)p = p$ ist. Hieraus folgt

$$
(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{q})^{1-1/p} \leq ||f||_{l_p^*},
$$

und der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$
(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^{q})^{1/q} \leq ||f||_{l_p^*}.
$$

Die Höldersche Ungleichung (IV.2.1) liefert gleichzeitig $|f(x)| \leq ||x||_{l_p} ||(f_i)||_{l_q}$, also $||f||_{l_p^*} \leq ||(f_i)||_{l_q}$, also

$$
||f||_{l_p^*} = ||(f_i)||_{l_q}.
$$

Indem wir nun $\widehat{I}f = (f_i)$ setzen, $f \in l_p^*$, sehen wir, daß $\widehat{I}$ eine lineare Abbildung von $l_p^*$ in $l_q$ ist, die normtreu und somit eineindeutig ist. Wie schon vor diesem Hilfssatz erwähnt, definiert $(z_i) \in l_q$ ein Element $z \in l_p^*$; offenbar ist gerade $z(e_i) = z_i$, also $(z_i) = \widehat{I}z$. Daher ist $\widehat{I}$ auch surjektiv. Im Fall $q = +\infty$, d.h. $p = 1$, setzen wir für irgendein $j \in \mathbb{N}$ mit $f_j \neq 0$

$$
\begin{aligned}
x_j &= \overline{f_j}/|f_j|, \\
x_i &= 0 \text{ sonst }.
\end{aligned}
$$

Dann ist $||x||_{l_1} \leq 1$, $|f_j| \leq ||f||_{l_p^*}$, also $\sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i| \leq ||f||_{l_p^*} \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i|$, $\sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i| = ||f||_{l_p^*}$. Die Surjektivität von $\widehat{I}$ sieht man wie eben. Im Fall „$p = +\infty$“, d.h. $q = 1$, muß etwas anders argumentiert werden. Für $x = (\zeta_m) \in (c)$ haben wir die Darstellung

$$
x = \zeta_0 e_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\zeta_m - \zeta_0) e_m
$$

mit einer in $(c)$ konvergenten Reihe, wobei $\zeta_0 = \lim_{m\to\infty} \zeta_m$, $e_0 = (1, 1, 1, \ldots)$ ist. Für jedes $f \in (c)^*$ gilt demnach

$$\begin{aligned} f(x) &= \zeta_0 f(e_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\zeta_m - \zeta_0) f(e_m), \\ &= \zeta_0 f_0' + \sum_{m=1}^{\infty} (\zeta_m - \zeta_0) f_m, \end{aligned}$$

wobei $f_0' = f(e_0)$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ setzten wir $\zeta_m = \overline{f_m}/|f_m|$, falls $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$, $f_m \ne 0$ ist, und $\zeta_m = 0$ sonst. Dann ist $(\zeta_m) \in (c)$, $\zeta_m \to 0$, $m \to \infty$. Für $x^{(n)} = (\zeta_m)$, $\zeta_m$ wie eben, folgt $||x^{(n)}|| \le 1$,

$$f(x) = |f(x_n)| = \sum_{m=1}^{n} |f_m| \le ||f||_{(c)^*}, \ n \in \mathbb{N},$$

also $(f_m) \in l_1$. Sei nun $f_0 = f_0' - \sum_{m=1}^{\infty} f_m$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \zeta_0 f_0' + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m f_m - \zeta_0 \sum_{m=1}^{\infty} f_m, \\ &= \zeta_0 f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m f_m, \text{ also} \\ |f(x)| &\le |f_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |f_m|, \end{aligned}$$

wenn $x = (\zeta_m)$ ein allgemeines Element aus $(c)$ ist mit $||x||_{(c)} \le 1$, $\zeta_0 = \lim_{m\to\infty} \zeta_m$. Sei $\epsilon_m$ definiert durch $f_m = \epsilon_m |f_m|$, $m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $f_m \ne 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_m = 1/\epsilon_m$, $m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $0 \le m \le n$, $f_m \ne 0$, $\zeta_m = 1/\varepsilon_0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge n+1$, wobei wir für den Augenblick voraussetzen, daß $f_0 \ne 0$ ist. Dann folgt aus der letzten Gleichung für $f(x)$:

$$|f(x)| = ||f_0| + \sum_{m=1}^{n} |f_m| + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m| \le ||f||_{(c)^*},$$

$$|f_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |f_m| \le ||f||_{(c)^*},$$

da für die eben gewählte spezielle Folge $(\zeta_m)$ gilt: $\zeta_m \to 1/\varepsilon_0$, $m \to \infty$, $||(\zeta_m)||_{(c)} = 1$. Wie schon vorher gezeigt, gilt die letzte Ungleichung erst recht, falls $f_0 = 0$ ist. Also ist

$$||f||_{(c)^*} = |f_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |f_m|$$

und die lineare Abbildung $\widehat{I} : (c)^* \to l_1$ die durch $(c)^* \ni f \longmapsto (f_0, f_1, f_2, \ldots)$ definiert ist, ist normtreu. Ist umgekehrt $(z_0, z_1, z_2, \ldots)$ aus $l_1$ mit

$$||(z_0, z_1, z_2, \ldots)||_{l_1} = |z_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |z_m| < \infty,$$

so wird durch

$$\lim_{m\to\infty} \zeta_m \cdot z_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m z_m = f(x),$$

wobei $x = (\zeta_m) \in (c)$ ist, ein Element aus $(c)^*$ definiert mit $||f||_{(c)^*} \leq |z_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |z_m|$. Für den letzten Teil des Beweises, der nur den Fall $1 < p < +\infty$ betrifft, argumentieren wir wie folgt:

Offenbar gewinnen wir einen normtreuen Vektorraumisomorphismus

$$\widetilde{I} : l_p \longrightarrow l_p^{**},\ 1 < p < +\infty,$$

indem wir

$$(\widetilde{I}w)(f) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i (\widehat{I}f)_i,\ w \in l_p,\ f \in l_p^*,$$

setzen. Dabei ist wieder $(\widehat{I}f)_i = f(e_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Sei $F \in l_p^{**}$, $F = \widetilde{I}w$. Dann ist $F(f) = (\widetilde{I}w)(f) = f(w) = (Iw)(f)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. $\square$

In III.4 hatten wir schon die Banachräume $L^p(\Omega)$ eingeführt, wohin $\Omega$ eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und $p$ eine endliche Zahl $\geq 1$ ist. Wir definieren nun $L^\infty(\Omega)$ in der folgenden Weise: $L^1_{loc}(\Omega)$ ist der Vektorraum über $\mathbb{C}$ aller Äquivalenzklassen von fast überall erklärten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die über jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ integrierbar sind. Wie üblich wird mit den Repräsentanten statt mit den Äquivalenzklassen gerechnet. Man vergleiche mit [Forster, Analysis 3, S. 87, S. 91]. $L^\infty(\Omega)$ ist die Menge aller $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, zu denen es ein $M(f) \geq 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M(f)$ fast überall in $\Omega$. $L^\infty(\Omega)$ wird in naheliegender Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ gemacht. Wir setzen für $f \in L^\infty(\Omega)$

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M(f)|M(f) \geq |f(x)| \text{ fast überall in } Q\}.$$

Dadurch wird $L^\infty(\Omega)$ zu einem normierten Vektorraum, da auch $||f||_{L^\infty(Q)} \geq |f(x)|$ fast überall in $Q$ ist. $L^\infty(\Omega)$ wird dadurch sogar zu einem Banachraum: Sei $(f_\nu)$ eine Folge in $L^\infty(Q)$ mit $||f_\nu - f_\mu||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$, $\nu, \mu \to \infty$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $n_k \in \mathbb{N}$ derart, daß $||f_\nu - f_\mu||_{L^\infty(\Omega)} \leq 1/k$,

$\nu, \mu \geq n_k$. Demnach ist $|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq 1/k$ für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Menge $M^k_{\nu,\mu} \subset \Omega$ vom Inhalt Null, $\nu, \mu \geq u_k$. Also ist auch

$$M^k = \bigcup_{\nu,\mu \geq u_k} M^k_{\nu,\mu}$$

eine Nullmenge und $|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq 1/k$, $x \in \Omega - M^k$, $\nu, \mu \geq n_k$. Schließlich ist auch

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

eine Nullmenge und $|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq \frac{1}{k}$, $x \in \Omega - M$, $k \in \mathbb{N}$, $k, \nu, \mu \geq u_k$. Die Folge $(f_\nu)$ aus $L^\infty(\Omega)$ konvergiert also gleichmäßig in $\Omega - M$. Wir setzen $f(x) = \lim_{\to\infty} f_\nu(x)$, $x \in \Omega - M$, und $f(x) = 0$ sonst. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, nach Konstruktion ist dann $f \in L^\infty(\Omega)$ und $\lim_{\nu\to\infty} ||f - f_\nu||_{L^\infty(\Omega)} = 0$.

Wir zeigen nun:
**Hilfssatz IV.2.8:** *Sei* $(L^1(\Omega))^*$ *der Dualraum von* $L^1(\Omega)$*,* $\Omega$ *eine beschränkte offene Menge des* $\mathbb{R}^n$*. Dann gibt es einen normtreuen Vektorraumisomorphismus* $I : (L^1(\Omega))^* \to L^\infty(\Omega)$.

**Beweis:** Sei $L \in (L^1(\Omega))^*$. Nun ist für $f \in L^2(\Omega)$ nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\int_\Omega |f| dx \leq (Vol \Omega)^{1/2} ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Also ist erst recht $L \in (L^2(\Omega))^*$. Nach Satz II.3.1 gibt es genau ein $g \in L^2(\Omega)$ mit

$$L(f) = \textstyle\int_\Omega f(x)g(x)dx,\ f \in L^2(\Omega). \tag{IV.2.3}$$

Dann ist

$$|\int_\Omega f(x)g(x)dx| \leq ||L|| \int_Q |f(x)|dx,\ f \in L^2(\Omega).$$

Sei $f(x) = |g(x)|/g(x)$, falls $x \in \Omega$, $|g(x)| > ||L||$ ist, und Null sonst in $\Omega$. Zunächst ist die Menge $E = \{x | x \in \Omega,\ |g(x)| > ||L||\}$ integrierbar. Seien $\varphi_\nu \in C^\infty_0(\Omega)$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $||\varphi_\nu - |g|||_{L^2(\Omega)} \to 0$, $\nu \to \infty$ (s. Hilfssatz III.7.1). Nach [Forster, Analysis 3, S. 96] können wir davon ausgehen, daß $\varphi_\nu(x) \to |g(x)|$ für fast alle $x \in \Omega$, $\nu \to \infty$. Die Mengen

$$E_\nu = \{x | x \in \Omega,\ \varphi_\nu(x) > ||L||\}$$

sind offene Teilmengen von $\Omega$ und daher integrierbar (s. [Forster, Analysis 3, S. 64, Beispiel (6.4)]). Sei $\chi_{E_\nu}(x) = 1$, $x \in E_\nu$, und $= 0$ sonst, sei $\chi_E(x) = 1$, $x \in E$, und $= 0$ sonst. Nun gilt $\chi_{E_\nu}(x) \to \chi_E(x)$ fast überall in $\Omega$, $|\chi_{E_\nu}(x)| \le 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, so daß nach dem Satz von Lebesgue folgt: $\chi_E \in L^1(\Omega)$, d.h. $E$ ist in der Tat integrierbar. Damit erhalten wir

$$\int_E |g(x)| dx \le ||L|| \int_E dx,$$

$$0 \le \int_E (|y(x)| - ||L||) dx \le 0,$$

also ist nach [Forster, Analysis 3, S. 71] $|g(x)| \le ||L||$ fast überall in $\Omega$. Insbesondere folgt: $g \in L^\infty(\Omega)$, $||g||_{L^\infty(\Omega)} \le ||L||$. Approximieren wir $f \in L^1(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ durch $C_0^\infty(\Omega)$-Funktion (s. Hilfssatz III.7.1), so erkennt man, daß (IV.2.3) nicht nur für $f \in L^2(\Omega)$, sondern auch für $f \in L^1(\Omega)$ gilt, d.h. $L(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$, $f \in L^1(\Omega)$. Also ist

$$|L(f)| \le ||g||_{L^\infty(\Omega)} ||f||_{L^1(\Omega)},\ f \in L^1(\Omega),$$

d.h. $||L|| \le ||g||_{L^\infty(\Omega)}$. Insgesamt folgt

$$||L|| = ||g||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Die Abbildung $I : (L^1(\Omega))^* \to L^\infty(\Omega)$ definieren wir nun durch die Zuordnung $(L^1(\Omega))^* \ni L \longmapsto g \in L^\infty(\Omega)$. Es ist sofort ersichtlich, daß $I$ linear ist. Wie eben gezeigt, ist $I$ auch normtreu. Nun liefert umgekehrt jedes $g \in L^\infty(\Omega)$ vermöge

$$L(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx,\ f \in L^1(\Omega)$$

ein Element $L \in (L^1\Omega))^*$. Daher ist $I$ surjektiv und Hilfssatz IV.2.8 bewiesen. □

Nach Hilfssatz IV.2.8 kann man $(L^1(\Omega))^*$ und $L^\infty(\Omega)$ als Banachräume nicht unterscheiden. Entsprechendes gilt für $(L^p(\Omega))^*$ und $L^q(\Omega)$, wenn $1 < p < +\infty$ und $1/p + 1/q = 1$ ist. Der Beweis ist jedoch erheblich komplizierter als der des in Hilfssatz IV.2.8 erörterten Falls und kann daher hier nicht gegeben werden. Der interessierte Leser sei auf [Hewitt-Stromberg, Real and Abstract Analysis, Chapter Four, Section 15] verwiesen.

## §3. Der Satz von Hahn-Banach und einige Konsequenzen. Reflexivität

Wir beweisen hier einen fundamentalen Satz über die Fortsetzbarkeit linearer Funktionale, die auf Teilräumen von normierten Vektorräumen erklärt sind. Mit Hilfe dieses Satzes schließen wir nicht nur die noch bestehenden Beweislücken aus IV.2, sondern gewinnen auch neue Erkenntnisse über die Struktur von Banachräumen.

**Satz IV.3.1 (Hahn-Banach):** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von $\mathcal{N}$ (s. IV.1 zu diesen Begriffen). Sei $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung mit*

$$|f(x)| \leq c||x||, \; x \in \mathfrak{M}. \tag{IV.3.1}$$

*mit einer nichtnegativen Konstante $c$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ mit*

$$F(x) = f(x), \; x \in \mathfrak{M}, \tag{IV.3.2}$$

$$|F(x)| \leq c||x||, \; x \in calN, \tag{IV.3.3}$$

*wobei $\iota$ die Konstante aus (IV.3.1) ist. Setzen wir*

$$||F||_{\mathcal{N}^*} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{N}, \\ ||x||=1}} |F(x)|,$$

$$||f||_{\mathfrak{M}^*} = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}, \\ ||x||=1}} |f(x)|,$$

*so können wir insbesondere $||F||_{\mathcal{N}^*} = ||f||_{\mathfrak{M}^*}$ erreichen.*

Den folgenden Beweis führen wir nur für separable $\mathcal{N}$ durch (Definition in IV.1). Dies ist für unsere Zwecke ausreichend, da die von uns zu untersuchenden Funktionenraüme meist separabel sind, der Satz selbst gilt jedoch allgemein, s. etwa [Hewitt-Stromberg, Real and Abstract Analysis, Chapter Four, Section 14].

**Beweis:** Sei ohne Einschränkung $||f||_{\mathfrak{M}^*} = 1$, also $|f(x)| \leq ||x||, \; x \in \mathfrak{M}$. Sei $y \in \mathcal{N}$ und $\mathfrak{M}$ der kleinste Teilraum von $\mathcal{N}$, der $y$ und $\mathfrak{M}$ enthält, d.h.

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{M}' \text{Teilraum von } \mathcal{N}, \\ y \in \mathfrak{M}', \; \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'}} = \mathcal{L}_{\sum}, \; \sum = \mathfrak{M} \cup \{y\}.$$

Wenn $y \in \mathfrak{M}$ ist, so ist $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Sei $y \notin \mathfrak{M}$. Jedes $z \in \mathfrak{M}$ läßt sich in der Form $z = x + ty$ mit einem $t \in \mathbb{C}$ und einem $x \in \mathfrak{M}$ darstellen. Die Darstellung ist eindeutig, denn sei

$$z = x' + t'y = x'' + t''y,$$

wobei $x', x'' \in \mathfrak{M}$, $t', t'' \in \mathbb{C}$ sind, so folgt $x' - x'' + (t' - t'')y = 0$. Da $y \notin \mathfrak{M}$ ist, ist $t' = t''$ und somit $x' = x''$. Wir nehmen nun im ersten Beweisschritt an, daß $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{M}$ Teilraum von $\mathcal{N}$, d.h. Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\mathfrak{M} \subset \mathcal{N}$ ist. Auf die Wiederholung der Begriffe und Ergebnisse aus IV. 1 für den Fall, daß der Körper der Skalare $\mathbb{R}$ ist, verzichten wir. $||F||_{\mathcal{N}^*}$, $||f||_{\mathfrak{M}^*}$ sind wie vorher erklärt. Wir wollen $f$ durch $F$ aus $\widetilde{\mathfrak{M}}$ fortsetzen, so daß $|F(z)| \leq ||z||$ ist, $z \in \mathfrak{M}$. Angenommen es gibt eine solche Fortsetzung. Dann ist

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x + ty) = F(x) + tF(y), \\ &= f(x) + tF(y), \end{aligned}$$

$$|f(x) + tF(y)| \leq ||x + ty||, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathfrak{M}; \tag{IV.3.4}$$

Sei $z' = x' + t'y$, $z'' = x'' + t''y$, und seien $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$. Dann haben wir

$$\alpha' F(z') + \alpha'' F(z'') = f(\alpha' x' + \alpha'' x'') + (\alpha' t' + \alpha'' t'')F(y), \tag{IV.3.5}$$

$$= F(\alpha' z' + \alpha'' z'').$$

(IV.3.4) ist äquivalend mit

$$|f(\frac{x}{t}) + F(y)| \leq ||\frac{x}{t} + y||, \ t \in \mathbb{R} - \{0\}, \ x \in \mathfrak{M},$$

d.h. äquivalent mit

$$||x + y|| \geq |f(x) + F(y)|, \ x \in \mathfrak{M}.$$

Es ist also $F(y)$ so zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} -||x + y|| &\leq f(x) + F(y) \leq ||x + y||, \ x \in \mathfrak{M}, \ \text{oder äquivalent} \\ -f(x) - ||x + y|| &\leq F(y) \leq ||x + y|| - f(x), \ x \in \mathfrak{M}, \ \text{oder äquivalent} \\ f(x) - ||y - x|| &\leq F(y) \leq ||y - x|| + f(x), \ x \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Seien $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$. Dann ist $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leq ||x_1 - x_2|| = ||x_1 - y - (x_2 - y)|| \leq ||y - x_1|| + ||y - x_2||$, $f(x_1) - f(x_2) \leq ||y - x_1|| + ||y -$

$x_2||$, $f(x_1)-||y-x_1|| \leq f(x_2)+||y-x_2||$. Sei $c_1 = \sup_{x\in\mathfrak{M}}(f(x)-||y-x||)$, $c_2 = \inf_{x\in\mathfrak{M}}(f(x)+||y-x||)$, wobei beide Größen nach der letzten Ungleichung endlich ausfallen, insbesondere liefert diese Ungleichung $c_1 \leq c_2$. Wir wählen $F(y)$ so, daß $c_1 \leq F(y) \leq c_2$ ist. Dann wird gesetzt:

$$F(z) = f(x) + cF(y),\ z \in \widetilde{\mathfrak{M}},\ \text{d. h. } z = x + ty$$

Dann liefern die vorstehenden Äquivalenzen $|F(z)| \leq ||z||$, $z \in \mathfrak{M}$, und (IV.3.5) zeigt die Linearität von $F$. Nun setzen wir $F$ auf ganz $\mathcal{N}$ fort. Hierbei nutzen wir die Separabilität von $\mathcal{N}$ aus. Sei $(y_n)$ eine Folge in $\mathcal{N}$ derart, daß ihre Glieder in $\mathcal{N}$ dicht liegen. Sei $\sum_k = \mathfrak{M}\cup\{y_1,\dots,y_k\}$, sei $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathcal{L}_{\sum_1},\dots,\mathfrak{M}_k = \mathcal{L}_{\sum_k},\dots$ (s. S. IV.3 zur Definition der $\mathcal{L}_{\sum_k}$, $k\in\mathbb{N}$). Wir haben $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \dots$. Wir setzen $f$ wie eben beschrieben sukzessive von $\mathfrak{M}_0$ auf $\mathfrak{M}_1$, von $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{M}_2$, usw., fort. Sei

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k.$$

$\mathcal{R}$ ist dann ein Teilraum von $\mathcal{N}$, und wir erhalten mit diesem Fortsetzungsprozess eine lineare Abbildung $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ mit $|F(x)| \leq ||x||$. Nun ist $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{N}$. Sei $z\in\mathcal{N}$ und $(z_n)$ eine Folge aus $\mathcal{R}$ mit $||z-z_n|| \to 0$, $n\to\infty$. Wir setzen

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F(z_n).$$

Man sieht sofort, daß diese Definition von der Auswahl der Folge $(z_n)$, die $z$ ankonvergiert, unabhängig ist. Somit haben wir $F$ von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{N}$ fortgesetzt. Man erkennt leicht, daß diese Fortsetzung eine lineare Abbildung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}$ ist mit $|F(x)| \leq ||x||$, $x\in\mathcal{N}$. Im zweiten Schritt studieren wir den Fall, daß $\mathcal{N}$ Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, natürlich ebenso $\mathfrak{M}$, und $f:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ ist eine lineare Abbildung mit $|f(x)| \leq ||x||$, $x\in\mathfrak{M}$. Sei $f_1(x) = \mathcal{R}ef(x)$, $f_2(x) = \mathfrak{I}mf(x)$. Dann ist $f(x) = f_1(x)+if_2(x)$, und $|f_k(x)| \leq ||x||$, $x\in\mathfrak{M}$, $k=1,2$. Für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ist $\alpha f(x)+\beta f(y) = f(\alpha x+\beta y)$, also

$$\begin{aligned}
\alpha(f_1(x)+if_2(x))+\beta(f_1(y)+if_2(y)) &= \alpha f_1(x)+\beta f_1(y)+i(\alpha f_2(x)+\beta f_2(y)),\\
&= f_1(\alpha x+\beta y)+if_2(\alpha x+\beta y),\\
f_k(\alpha x+\beta y) &= \alpha f_k(y),\ k=1,2,
\end{aligned}$$

$x,y\in\mathfrak{M}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Nun sind $\mathcal{N}$, $\mathfrak{M}$ auch Vektorräume über $\mathbb{R}$, und $f_1, f_2$ sind lineare Abbildungen von $\mathfrak{M}$ in $\mathbb{R}$, $\mathfrak{M}$ aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbb{R}$, mit $|f_k(\alpha)| \leq ||x||$, $x\in\mathfrak{M}$, $k=1,2$. Nun ist $f(ix) = f_1(ix)+if_2(ix) = if(x) = if_1(x)-f_2(x)$, so daß $f_2(x) = -f_1(ix)$ ist. Insgesamt ist

$$f(x) = f_1(x) - i f_1(ix),\; x \in \mathfrak{M}.$$

Nun setzen wir $f_1$ gemäß dem ersten Teil des Beweises auf $\mathcal{N}$ fort, $\mathcal{N}$ aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dies liefert eine lineare Abbildung $F_1 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit $|F_1(x)| \leq ||x||$. Sei

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix),\; x \in \mathcal{N}.$$

Wir betrachten jetzt $\mathcal{N}$ wieder als Vektorraum über $\mathbb{C}$ und wollen beweisen, daß $F : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ linear ist. Zunächst haben wir

$$\begin{aligned}
F(x+y) &= F_1(x+y) - iF_1(i(x+y)), \\
&= F_1(x+y) - iF_1(ix+iy), \\
&= F_1(x) + F_1(y) - i(F_1(ix) + F_2(iy)), \\
&= F_1(x) - iF_1(ix) + F_1(y) - iF_1(iy), \\
&= F(x) + F(y).
\end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
F(\alpha x) = F_1(\alpha x) - iF_1(i\alpha x) &= \alpha(F_1(x) - iF_1(ix)), \\
&= \alpha F(x).
\end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) &= iF_1(x) + F_1(ix), \\
&= i(F_1(x) - iF_1(ix)), \\
&= iF(x).
\end{aligned}$$

Für $\gamma = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist demnach

$$\begin{aligned}
F(\gamma x) = F(\alpha x) + iF(\beta x) &= \alpha F(x) + i\beta F(x), \\
&= \gamma F(x),
\end{aligned}$$

so daß $F(cx + dy) = cF(x) + dF(y)$, $c, d \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{N}$, ist. Sei $x \in \mathcal{N}$, $F(x) = re^{it}$ mit einem geeigneten $r \geq 0$ und einem geeigneten $t \in [0, 2\pi)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni |F(x)| = r &= e^{-it}F(x) = F(e^{-it}x), \\
&= F_1(e^{-it}x) - iF_1(ie^{-it}x), \\
&= F_1(e^{-it}x) \leq |F_1(e^{-it}x)| \leq ||e^{-it}x|| = ||x||.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Eine erste wichtige Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach ist

**Satz IV.3.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$, sei $u_0 \in \mathcal{B} - \mathfrak{M}$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit*

$$\begin{aligned} f(u_0) &= 1 \\ f(u) &= 0, \ u \in \mathfrak{M}, \\ ||f||_{\mathcal{B}^*} &= 1/dist(u_0, \mathfrak{M}), \end{aligned}$$

*wobei $dist(u_0, \mathfrak{M}) = \inf_{x \in \mathfrak{M}} ||u_0 - x||$ positiv ausfällt.*

**Beweis:** Sei $\sum = \mathfrak{M} \cup \{u_0\}$. Wir betrachten $\mathcal{L}_{\sum}$. Jedes Element $z$ aus $\mathcal{L}_{\sum}$ hat die Form $z = v + \xi u_0$, $v \in \mathfrak{M}$, $\xi \in \mathbb{C}$. Wie im Beweis des (vorigen) Satzes IV.3.1 zeigt man, daß $v$ und $\xi$ eindeutig bestimmt sind. Also können wir jedem $z \in \mathcal{L}_{\sum}$ die eindeutig bestimmte Zahl $\xi \in \mathbb{C}$ zuordnen. So erhalten wir eine lineare Abbildung $f : \mathcal{L}_{\sum} \to \mathbb{C}$ mit $f(u) = 0$, $u \in \mathfrak{M}$, $f(u_0) = 1$.

Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ gibt es ein $v_0 \in \mathfrak{M}$ mit

$$dist(u_0, \mathfrak{M}) = ||u_0 - v_0|| > 0.$$

Nun ist $\xi u_0 = z - v$, also $u_0 = \frac{1}{\xi} z - \frac{1}{\xi} v$, falls $\xi \neq 0$, also $\frac{1}{\xi} z = u_0 + \frac{1}{\xi} v$, $||\frac{1}{\xi} z|| \geq dist(u_0, \mathfrak{M})$. Wenn $||z|| = 1$ ist, so folgt $|f(z)| = |\xi| \leq 1/dist(u_0, \mathfrak{M})$. Im Fall $\xi = 0$ gilt diese Ungleichung trivialerweise. Nach Satz IV.1.2 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $z' \in \mathcal{L}_{\sum}$ mit $||z'|| = 1$, $||z' - v|| \geq 1 - \varepsilon$, $v \in \mathfrak{M}$. Für dieses $z'$ haben wir

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq dist(z', \mathfrak{M}) = dist(\xi u_0 + v, \mathfrak{M}), \\ &= |\xi| dist(u_0, \mathfrak{M}) = |f(z')| dist(u_0, \mathfrak{M}), \\ \frac{1 - \varepsilon}{dist(u_0, \mathfrak{M})} &= |f(z')|, \ \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

so daß in der Tat $||f||_{\mathcal{B}^*} = 1/dist(u_0, \mathfrak{M})$ ist. $f$ wird nun mit gleicher Norm gemäß Satz IV.3.1 auf $\mathcal{B}$ erweitert. $\square$

Der vorstehende Satz hat wichtige Konsequenzen: Zunächst ist Hilfssatz IV.2.1 eine Folgerung aus

**Hilfssatz IV.3.1:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Seien $u, v \in \mathcal{B}$, $u \neq v$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit $f(u) \neq f(v)$. Insbesondere enthält $\mathcal{B}^*$ hinreichend viele Elemente, um zwischen verschiedenen Elementen aus $\mathcal{B}$ zu unterscheiden.*

**Beweis:** Wäre $f(u) = f(v)$ für alle $f \in \mathcal{B}^*$, so wäre $f(u - v) = 0$, $f \in \mathcal{B}^*$. Wählt man $\mathfrak{M} = \{0\}$ und $u_0 = u - v$ in Satz IV.3.2, so folgt ein Widerspruch. $\square$

**Hilfssatz IV.3.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei $u_0 \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{B}^*$ derart, daß $f(u_0) = ||u_0||$ und $||f||_{\mathcal{B}^*} = 1$ ist.*

**Beweis:** Sei $\mathfrak{M} = \mathcal{L}_{\sum}$ mit $\sum = \{u_0\}$ und sei $u_0 \neq 0$. Jedes $z \in \mathfrak{M}$ hat die Darstellung $z = \lambda u_0$ mit einem eindeutig bestimmten $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir ordnen $z$ die Zahl $\lambda$ zu. Dann ist dadurch eine lineare Abbildung $f$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathbb{C}$ gegeben mit $f(u_0) = u_0$, $|f(\lambda u_0)| = |\lambda|||u_0|| = ||\lambda u_0||$. Anwendung des Satzes IV.3.1 beweist die Behauptung im Fall $u_0 \neq 0$. Im Fall $u_0 = 0$ konstruieren wir zu einem $u_1 \neq 0$ ein $f$ wie eben. Wegen der Linearität von $f$ folgt dann $f(u_0) = f(0) = 0$. $\square$

Hilfssatz IV.2.2 wenden wir zunächst auf die natürliche Abbildung $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ aus DefinitionIV.2.1 an und komplettieren den **Beweis von Hilfssatz IV.2.2**, indem wir die Normtreue von $I$ zeigen: Es ist $Ix(f) = f(x)$, $x \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{B}^*$. Zu $x \in \mathcal{B}$ konstruieren wir nach Hilfssatz IV.3.2 ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit $f(x) = ||x||$ und $||f||_{\mathcal{B}^*} = 1$. Dann ist

$$|Ix(f)| = |f(x)| = ||x||$$

und somit in der Tat $||Ix||_{\mathcal{B}^{**}} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}^*, \\ ||f||_{\mathcal{B}^*}=1}} |Ix(f)| = ||x||$, da wir schon aus IV.2 wissen, daß $||Ix||_{\mathcal{B}^{**}} \leq ||x||$ ist.

Eine weitere Konsequenz aus Hilfssatz IV.3.2 ist die folgende Gleichungskette, die den **Beweis von Satz IV.2.3** vollendet:

$$\text{(IV.3.6)} \qquad ||u|| = \sup_{f \in \mathcal{B}^* - \{0\}} \frac{|f(u)|}{||f||} \qquad = \sup_{||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1} |f(u)|, \\ = \sup_{||f||_{\mathcal{B}^*} = 1} |f(u)|$$

Oft nützlich ist der folgende Hilfssatz:

**Hilfssatz IV.3.3:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$. Sei $(u_n)$ eine Folge in $\mathfrak{M}$, die einen schwachen Grenzwert $u_0$*

*besitze. Dann ist $u_0 \in \mathfrak{M}$.*

**Beweis:** Wir nehmen an, daß $u_0 \notin \mathfrak{M}$ ist. Dann liegt die Situation aus Satz IV.3.2 vor und wir können ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit den in Satz IV.3.2 beschriebenen Eigenschaften finden. Wir haben

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \lim_{u\to\infty} f(u_n) = 0, \text{ aber auch} \\ f(u_0) &= 1, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

In Hilfssatz IV.2.3 hatten wir bereits auf die Beschränktheit jeder schwach konvergenten Folge $(u_n)$ in einem Banachraum $\mathcal{B}$ geschlossen. Genauer gilt

**Hilfssatz IV.3.4:** *Sei $(u_n)$ eine Folge in einem Banachraum $\mathcal{B}$. Sei $(u_n)$ schwach konvergent gegen $u \in \mathcal{B}$, $u \to \infty$. Dann ist*

$$||u|| \leq \lim_{u\to\infty} \inf ||u_n||.$$

**Beweis:** Wir haben

$$f(u) = \lim_{u\to\infty} f(u_n), \; f \in \mathcal{B}^*$$

Nun wählen wir nach Hilfssatz IV.3.2 ein $f \in \mathcal{B}^*$ mit $f(u) = ||u||$, $||f||_{\mathcal{B}^*} = 1$. Dann ist $|f(u_n)| \leq ||u_n||$ und $||u|| > ||u_n||$ tritt nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ ein. □

Wir geben nun eine Anwendung des Hahn-Banachschen Satzes auf das sogenannte Momentenproblem.

**Satz IV.3.3:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $(x_n)$ eine Folge in $\mathcal{N}$, sei $(\alpha_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $\gamma$ eine positive Zahl. Es gibt dann und nur dann eine stetige lineare Abbildung $f : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ mit $f(x_i) = \alpha_i$, $i \in \mathbb{N}$ und $||f||_{\mathcal{N}^*} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{N},\\ ||x||=1}} |f(x)| \leq \gamma$, wenn*

$$|\sum_{i=1}^{u} \beta_i \alpha_i| \leq \gamma || \sum_{i=1}^{u} \beta_i x_i ||,$$

$$n \in \mathbb{N}, \; (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}.$$

**Beweis:** Die Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort aus der Definition von $||f||_{\mathcal{N}^*}$. Um zu erkennen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, betrachten wir den Teilraum

$$\mathcal{N}_1 = \{z | z \in \mathcal{N}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^N \text{ mit }$$
$$z = \sum^N \beta_i x_i\},$$

d.h. den von $\{x_1, x_2, \dots\}$ aufgespannten Teilraum von $\mathcal{N}$. Für zwei Darstellungen von $z \in \mathcal{N}_1$, nämlich

$$z = \sum_{i=1}^N \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{N'} \beta_i' x_i,$$

folgt aus der Bedingung des Satzes

$$|\sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{N'} \beta_i' \alpha_i|$$
$$\leq \gamma || \sum_{i=1}^N \beta_i x_i - \sum_{i=1}^N \beta_i' x_i|| = 0.$$

Durch die Zuordnung

$$\mathcal{N}_1 \ni \sum_{i=1}^N \beta_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i$$

wird daher eine lineare Abbildung $f_1$ von $\mathcal{N}_1$ in $\mathbb{C}$ definiert mit $f_1(x_i) = \alpha_i$, $i \in \mathbb{N}$, und $||f_1||_{\mathcal{N}^*} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{N}_1, \\ ||x||=1}} |f_1(x)| \leq \gamma$. Anwendung von Satz IV.3.1 vollendet den Beweis. □

Als Anwendung des Satzes IV.3.3 auf konkrete Funktionenräume präsentieren wir

**Satz IV.3.4:** *Sei $\Omega$ eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $(f_j)$ eine Folge in $L^1(\Omega)$. Die Menge $\{f_1, f_2, \dots\}$ ist dann und nur dann vollständig in $L^1(\Omega)$, wenn das Gleichungssystem*

$$\int_\Omega \varphi(x) f_j(x) dx = 0, \; j \in \mathbb{N},$$

*für $\varphi$ in $L^\infty(\Omega)$ nur die triviale Lösung hat.*

**Beweis:** Sei $\int_\Omega \varphi(x) f j(x) dx = 0$, $j \in \mathbb{N}$, für $\varphi \in L^\infty(\Omega) - \{0\}$.

Nach Hilfssatz IV.2.8, insbesondere der Konstruktion des Isomorphismus im Beweis zu diesem Hilfssatz, gibt es ein $f \in L^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 1$. Also ist

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_\Omega \varphi(x)(f(x) - \sum_{k=1}^N c_k f_k(x))dx, \\
&\leq \gamma \int_\Omega |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k f_k(x)|dx, \ N \in \mathbb{N}, \ (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N,
\end{aligned}
$$

wobei $\gamma = ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} > 0$ gesetzt ist. Hieraus folgt aber, daß $\{f_1, f_2, \ldots\}$ nicht vollständig ist. Nehmen wir umgekehrt an, daß $\{f_1, f_2, \ldots\}$ nicht vollständig ist in $L^1(\Omega)$. Dann gibt es $f_0 \in L^1(\Omega)$ derart, daß

(IV.3.7) $\quad ||f_0 - \sum_{k=1}^N c_k f_k||_{L^1(\Omega)} \geq \delta, \ N \in \mathbb{N}, \ (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N.$

Nun senden wir eine Lösung $\varphi \in L^\infty(\Omega) - \{0\}$ des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_\Omega f_0(x)\varphi(x)dx = 1, \\
\alpha_k &= \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)dx = 0, \ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist nach Satz IV.3.3:

(IV.3.8) $\quad |\beta_0| \leq \gamma||\beta_0 f_0 + \sum_{k=1}^N \beta_k f_k||_{L^1(\Omega)}, \ N \in \mathbb{N},$
$\beta_0 \in \mathbb{C}, \ (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in C^N,$

mit einem $\gamma > 0$. Für $\beta_0 = 0$ gilt die Ungleichung (IV.3.8) mit jedem $\gamma > 0$. Für $\beta_0 \neq 0$ geht die Ungleichung (IV.3.8) über in

(IV.3.9) $\quad 1 \leq \gamma||f_0 + \sum_{k=1}^N \eta_k f_k||_{L^1(\Omega)}, \ N \in \mathbb{N}, \ (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in \mathbb{C}^N.$

(IV.3.9) wird jedoch von (IV.3.7) impliziert ($\gamma = 1/\delta$). $\square$

Wir führen nun einen neuen Begriff ein, den der Reflexivität.

**Definition IV.3.1:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Sei $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ die natürliche Abbildung gemäß Definition IV.2.1. B heißt reflexiv dann und nur dann, wenn I surjektiv ist.*

Wir kennen bereits einige reflexive Banachräume. Jeder Hilbertraum ist reflexiv, jedoch auch die Räume $l_p$, $1 < p < +\infty$ und $L^p(\Omega)$, $\Omega$ eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$ (s. hierzu IV.2). Dagegen ist der Banachraum $L^\infty(\Omega)$ nicht reflexiv und übrigens auch nicht separabel. [Pflaumann-Unger, Funktionalanalysis I, S. 177] für die Nicht-Separabilität. Die Nicht-

Reflexivität wird später gezeigt. Die Bedeutung des Begriffs der Reflexivität liegt darin, daß mit seiner Hilfe der Satz von Bolzano-Weierstraß, der in unendlichdimensionalen Räumen nicht mehr gilt, dort teilweise ersetzt werden kann. Wir beginnen mit

**Satz IV.3.5:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Sei $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{B}^*$ derart, daß $(||f_n||_{\mathcal{B}^*})$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(fn_j)$ von $(f_n)$ derart, daß $fn_j$ schwach$-*$ gegen ein $f \in \mathcal{B}^*$ konvergiert, $j \to \infty$.*

**Beweis:** Wir können hier den Beweis nur im Fall, daß $\mathcal{B}$ separabel ist, erbringen (für einen Beweis im allgemeinen Fall s. [Yosida, Functional Analysis, 5th edition, S. 137]). Sei also $\sum = \{u_1, u_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{B}$. Sei $c \geq ||f_n||_{\mathcal{B}^*}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|f_n(u_1)| \leq c||u_1||$. Die Folge $(f_n(u_1))$ enthält somit eine konvergente Teilfolge $(f_n^{(1)}(u_1))$. Wegen $|f_n^{(1)}(u_2)| \leq c||u_2||$ enthält auch $(f_n^{(1)}(u_2))$ eine konvergente Teilfolge $(f_n^{(2)}(u_2))$ usw. Wir haben also folgende Schema:

$$\begin{array}{cccc}
f_1^{(1)}(u_1) & f_2^{(1)}(u_1) & f_3^{(1)}(u_1) & \ldots \\
f_1^{(2)}(u_2) & f_2^{(2)}(u_2) & f_3^{(2)}(u_2) & \ldots \\
f_1^{(3)}(u_1) & f_2^{(3)}(u_1) & f_3^{(3)}(u_3) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

in dem $(f_n^{(k+1)})$ eine Teilfolge von $(f_n^{(k)})$ ist, $k \in \mathbb{N}$. Wir behaupten, daß $(f_k^{(k)}(u_l))$ konvergiert für alle $u_l \in \sum$, falls $k \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$, sei $u_l \in \sum$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f_k^{(k)}(u_l) - f_p^{(p)}(u_l)| \leq\ & |f_k^{(k)}(u_l) - f_k^{(l)}(u_l)| + \\
& + |f_k^{(l)}(u_l) - f_p^{(l)}(u_l)| + \\
& + |f_p^{(l)}(u_l) - f_p^{(p)}(u_l)|
\end{aligned}$$

Zunächst seien $k, p \geq l$. Demnach ist $(f_n^{(l)})$ sowohl eine $(f_n^{(k)})$ als auch eine $(f_n^{(p)})$ enthaltende Folge. Für $k, p \geq N_0 = N_0(\varepsilon)$ wird also $|f_k^{(k)}(u_l) - f_k^{(l)}(u_l)| < \varepsilon/3$, $|f_p^{(l)}(u_l) - f_p^{(p)}(u_l)| < \varepsilon/3$ und, da $(f_n^{(l)}(u_l))$ konvergiert, auch $|f_k^{(l)}(u_l) - f_p^{(l)}(u_l)| < \varepsilon/3$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Für $u_l \in \sum$ setzen wir

$$f(u_l) = \lim_{k \to \infty} f_k^{(k)}(u_l).$$

Definieren wir für

$$u = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j,\ N \in \mathbb{N},\ (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N$$

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j=1}^{N} c_j f(u_j), \\ &= \lim_{k\to\infty} f_k^{(k)}(\sum_{j=1}^{N} c_j u_j), \end{aligned}$$

so erhalten wir eine lineare Abbildung $f : \mathcal{L}_{\sum} \to \mathbb{C}$ mit $f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(k)}(u)$, $u \in \mathcal{L}_{\sum}$. Da $(f_k^{(k)})$ eine Teilfolge von $(f_n)$ ist, ist auch $|f(u)| \leq c||u||$, $u \in \mathcal{L}_{\sum}$. Nach Satz IV.1.1 können wir annehmen, daß $\sum$ vollständig ist, d.h. $\overline{\mathcal{L}}_{\sum} = \mathcal{B}$. Dann läßt sich die lineare Abbildung $f$ auf eine und nur eine Weise zu einer linearen Abbildung $f : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ mit $|f(u)| \leq c||u||$ fortsetzen, $u \in \mathcal{B}$. Der Beweis ist derselbe wie der von Satz II.4.1. Aus $||f_u||_{\mathcal{B}^*} \leq c$, $n \in \mathcal{N}$, folgt sofort, daß auch für $u \in \mathcal{B}$ gilt (s. Hilfssatz IV.2.6)

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(k)}(u).$$

□

Satz IV.3.5 kann auch so formuliert, daß man sagt: Die abgeschlossene Einheitskugel $\{f | f \in \mathcal{B}^*,\ ||f||_{\mathcal{B}^*} \leq 1\}$ in $\mathcal{B}^*$ ist schwach-$*$ folgenkompakt. Nach Hilfssatz IV.2.8 ist $L^\infty(\Omega)$ der Dualraum von $L^1(\Omega)$, $\Omega$ eine beschränkte offene Punktmenge des $\mathbb{R}^n$. Aus jeder Folge $(f_n)$ in $L^\infty(\Omega)$ mit $||f_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq c$, $n \in \mathbb{N}$, läßt sich eine Teilfolge $(f_{n_j})$ auswählen derart, daß ein $f \in L^\infty(\Omega)$ existiert mit $f = w - * - \lim_{j\to\infty} f_{n_j}$. Da man mit Hilfssatz III.7.1 sogar zeigen kann (was hier nicht geschehen soll), daß alle $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, separabel sind, ist das letzte Resultat in $L^\infty(\Omega)$ sogar durch unseren Beweisgang des Satzes IV.3.5 abgedeckt.

Wir kommen nun zum angekündigten Resultat über reflexive Banachräume.

**Satz IV.3.6:** *Sei $\mathcal{B}$ ein reflexiver Banachraum. Sei $(x_n)$ eine Folge in $\mathcal{B}$ derart, daß $(||x_n||)$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})$ von $(x_n)$ derart, daß $(x_{n_j})$ schwach in $\mathcal{B}$ gegen ein $x \in \mathcal{B}$ konvergiert, $j \to \infty$.*

**Beweis:** Wegen $I\mathcal{B} = \mathcal{B}^{**}$ ist $(Ix_n)$ eine Folge in $(\mathcal{B}^*)^*$ derart, daß $(||Ix_n||_{(\mathcal{B}^*)^*})$ beschränkt ist. Nach Satz IV.3.5 ist eine Teilfolge $(Ix_{n_j})$ von $(Ix_n)$ schwach-*-konvergent gegen ein $Ix$ in $(\mathcal{B}^*)^*$, $j \to \infty$. Dies heißt

$$\begin{aligned} Ix_{n_j}(f) &\to Ix(f),\ f \in \mathcal{B}^*,\ j \to \infty,\ \text{also} \\ f(x_{n_j}) &\to f(x),\ f \in \mathcal{B}^*,\ j \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Für die Frage, ob auch die **Umkehrung des letzten Satzes** gilt, verweisen wir auf [Yosida, Functional Analysis, 5th edition, S. 141], wo in dem **Satz von Eberlein-Shmulyan** in der Tat gezeigt wird, daß ein Banachraum $\mathcal{B}$ genau dann reflexiv ist, wenn jede Folge $(x_n)$ aus $\mathcal{B}$ derart, daß $(||x_n||)$ beschränkt ist, eine Teilfolge $(x_{n_j})$ enthält, die schwach in $\mathcal{B}$ gegen ein $x \in \mathcal{B}$ konvergiert, $j \to \infty$.

Nützlich ist noch das folgende Resultat:
**Satz IV.3.7:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. $\mathcal{B}$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn $\mathcal{B}^*$ reflexiv ist.*

**Beweis:** Sei $\mathcal{B}$ reflexiv. Sei $\varphi \in \mathcal{B}^{***}$ ($\mathcal{B}^{***}$ ist der Dualraum zu $\mathcal{B}^{**}$). Sei ($I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$ ist die natürliche Abbildung)

$$g(x) = \varphi(Ix),\ x \in \mathcal{B}.$$

Dann ist $g$ eine lineare stetige Abbildung von $\mathcal{B}$ in $\mathbb{C}$, also aus $\mathcal{B}^*$. Zu jedem $f \in \mathcal{B}^{**}$ gibt es wegen der Reflexivität von $\mathcal{B}$ ein $x \in \mathcal{B}$ mit $F = Ix$, also $F(f) = Ix(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{B}^*$. Insbesondere gilt für dieses $x$

$$\begin{aligned} F(g) &= g(x) = \varphi(Ix) = \varphi(F),\ \text{also} \\ \varphi(F) &= F(g) = I^*g(F), \end{aligned}$$

wobei $I^*$ die natürliche Abbildung von $\mathcal{B}^*$ in $\mathcal{B}^{***}$ ist. Also ist $I^*$ surjektiv und $\mathcal{B}^*$ reflexiv. Nun sei $\mathcal{B}^*$ reflexiv. Wir nehmen an, $\mathcal{B}$ sei nicht reflexiv. Aus der Isometrie von $I$ folgt sofort, daß $I(\mathcal{B})$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}^{**}$ ist. Weil $\mathcal{B}$ nicht reflexiv ist, ist $I(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{B}^{**}$ und wir finden nach Satz IV.3.2 ein $\varphi \in \mathcal{B}^{***}$ mit $||\varphi||_{\mathcal{B}^{***}} > 0$, aber $\varphi(u) = 0$, $u \in I(\mathcal{B})$. Wenn $I^* : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}^{***}$ wieder die natürliche Abbildung ist, so ist wegen der Reflexivität von $\mathcal{B}^*$ jedenfalls $I^*(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}^{***}$, so daß ein $f \in \mathcal{B}^*$ existiert mit

$$\begin{aligned} I^*f &= \varphi,\ \text{also} \\ I^*f(u) &= \varphi(u),\ u \in \mathcal{B}^{**}. \end{aligned}$$

Nun ist $I^*f(u) = u(f)$, also

$$\begin{aligned} 0 &= I^* f(u),\ u \in I(\mathcal{B}), \\ 0 &= I^* f(Ix), x \in \mathcal{B}, \\ 0 &= Ix(f) = f(x),\ x \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Also ist $f = 0$ und dann auch $\varphi$ im Widerspruch zur Wahl von $\varphi$. $\square$

Wir kommen zurück auf den Anfang dieses Abschnitts. Dort war angekündigt worden, daß $L^\infty(\Omega)$ nicht reflexiv ist. ($\Omega$ eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$). Nun hatten wir in Hilfssatz IV.2.8 bereits erkannt, daß $L^\infty(\Omega)$ der zu $L^1(\Omega)$ duale Raum ist, d.h. $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$. $L^\infty(\Omega)$ ist also nach Satz IV.3.6 dann und nur dann reflexiv, wenn $L^1(\Omega)$ dies ist. Der Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ wird in [Yosida, Functional Analysis, 5th edition, S. 118 und 119] bestimmt. Aus der Charakterisierung dort folgt, daß der Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ im allgemeinen nicht $L^1(\Omega)$ ist.

## §4. Weitere Konsequenzen aus dem Satz von Hahn-Banach, insbesondere Trennungssätze

Wir wollen in diesem Abschnitt abgeschlossene konvexe Teilmengen $\mathfrak{K}$ eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$ oder eines Banachraums $\mathcal{B}$ und einen Punkt $x_0 \in \mathcal{B} - \mathfrak{K}$ durch beschränkte lineare Funktionale voneinander trennen, d.h. wir wollen ein beschränktes lineares Funktional finden, das auf $\mathfrak{K}$ und in $x_0$ jeweils verschiedene Werte annimmt.

**Definition IV.4.1:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathcal{N}$. $\mathfrak{M}$ heißt konvex, wenn mit $x, y \in \mathfrak{M}$ auch die Verbindungsgerade $\alpha x + (1-\alpha)y$, $\alpha \in [0,1]$, zu $\mathfrak{M}$ gehört. $\mathfrak{M}$ heißt ausgeglichen, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{N}$ ein $\alpha \in (0, +\infty)$ gibt mit $\alpha^{-1}x \in \mathfrak{M}$ (oder, äquivalent, $x \in \alpha\mathfrak{M}$, wobei $\alpha\mathfrak{M} = \{\alpha z | z \in \mathfrak{M}\}$ gesetzt ist). Für eine ausgeglichene Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{N}$ setzen wir*

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{M}}(x) &= \inf\{\alpha | \alpha > 0, \alpha^{-1}x \in \mathfrak{M}\}, \\ &= \inf\{\alpha | \alpha > 0,\ x \in \alpha\mathfrak{M}\},\ x \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

$p_{\mathfrak{M}}$ heißt die Distanzfunktion oder das Minkowski-Funktional von $\mathfrak{M}$.

Bezüglich des Minkowski-Funktionals benötigen wir folgenden Hilfsatz:
**Hilfssatz IV.4.1:** *Sei $\mathfrak{M}$ eine ausgeglichene Teilmenge eines normierten Vektorraums über $\mathbb{C}$. Dann ist*

$$p_{\mathfrak{M}}(x) \ \geq\ 0,\ x \in \mathcal{N},$$

$$p_{\mathfrak{M}}(\beta x) \ =\ \beta p_{\mathfrak{M}}(x),\ x \in \mathcal{N},\ \beta \geq 0, \quad \text{also } p_{\mathfrak{M}}(0) = 0.$$

*d.h. $p_{\mathfrak{M}}$ ist nichtnegativ und positiv-homogen. Ist $\mathfrak{M}$ zusätzlich konvex, so ist*

$$p_{\mathfrak{M}}(x+y) \leq p_{\mathfrak{M}}(x) + p_{\mathfrak{M}}(y),\ x, y \in \mathcal{N},$$

*d.h. $p_{\mathfrak{M}}$ ist subadditiv.*

**Beweis:** Auf Grund der Definition IV.4.1 ist $p_{\mathfrak{M}}(x) \geq 0$, $x \in \mathcal{N}$. Sei $\beta > 0$. Dann ist $\beta x \in \alpha M$ äquivalent mit $x \in \frac{\alpha}{\beta}M$, d.h. $p_{\mathfrak{M}}(\beta x) = \inf\{\beta\widetilde{\alpha} | \widetilde{\alpha} > 0,\ x \in \widetilde{\alpha}\mathfrak{M}\} = \beta \inf\{\widetilde{\alpha} | \alpha > 0, x \in \widetilde{\alpha}\mathfrak{M}\}$, so daß in der Tat

$$p_{\mathfrak{M}}(\beta x) = \beta p_{\mathfrak{M}}(x),\ x \in \mathcal{N}, \beta > 0,$$

ist. Sei $\beta = 0$. Da das Nullelement von $\mathcal{N}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, ist $p_{\mathfrak{M}}(0) = 0$, also insbesondere $0p_{\mathfrak{M}}(0) = 0$. Sei nun $\mathfrak{M}$ konvex, $x = \widetilde{\alpha} z_1$, $y = \widetilde{\beta} z_2$, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} > 0$, $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}$. Dann ist

$$x + y = \widetilde{\alpha} z_1 + \widetilde{\beta} z_2 = (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})(\frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}} z_1 + \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}} z_2), \text{ also}$$

$$x + y \in (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})\mathfrak{M}$$

$$p_{\mathfrak{M}}(x + y) \leq \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}$$

für alle $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} > 0$ mit $\frac{1}{\widetilde{\alpha}} x \in \mathfrak{M}$, $\frac{1}{\widetilde{\beta}} y \in \mathfrak{M}$, also

$$p_{\mathfrak{M}}(x + y) \leq p_{\mathfrak{M}}(x) + p_{\mathfrak{M}}(y).$$

$\square$

Wir brauchen nun eine partielle Verschärfung des Satzes IV.3.1 (Satz von Hahn-Banach).

**Satz IV.4.1:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $p$ ein positiv homogenes, subadditives Funktional in $\mathcal{N}$, d.h. $p$ sei eine Abbildung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

$$p(\beta x) = \beta p(x), \ x \in \mathcal{N}, \ \beta \geq 0, \text{ also } p(0) = 0,$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ x, y \in \mathcal{N},$$

*$p$ sei stetig in $0$.*

*Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von $\mathcal{N}$. Im reellen Fall heißt das: $\mathfrak{M}$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{M} \subset \mathcal{N}$. Sei $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, falls $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, sei $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, falls $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Dann gilt:*

*Im Fall, daß $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, und $f(x) \leq p(x)$ ist, $x \in \mathfrak{M}$, gibt es eine lineare Abbildung $g : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit*

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(x),\ x \in \mathfrak{M},\\[1em]
g(x) &\leq p(x),\ x \in \mathcal{N}.\\[1em]
||g||_{\mathcal{N}^*} &= \sup_{\substack{x\in\mathcal{N},\\ ||x||=1}} |g(x)| < +\infty.
\end{aligned}
$$

*Im Fall, daß $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, und $\mathcal{R}ef(x) \leq p(x)$ ist, $x \in \mathfrak{M}$, gibt es eine lineare Abbildung $g : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ mit*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}e\, g(x) &= f(x),\ x \in \mathfrak{M},\\
\mathcal{R}eg(x) &\leq p(x),\ x \in \mathcal{N},\\
||g||_{\mathcal{N}^*} &= \sup_{\substack{x\in\mathcal{N}\\ ||x||=1}} |g(x)| < +\infty.
\end{aligned}
$$

**Beweis:** Wir beschränken uns wie bei dem Beweis des Satzes IV.3.1 auf den Fall, daß $\mathcal{N}$ separabel ist. Der Beweis kann dann bis auf die Stetigkeit so durchgeführt werden wie der von Satz IV.3.1, der den Fall $-f(x), f(x) \leq p(x) = ||f||_{\mathfrak{M}^*}||x||$ behandelt hat. Die Details sollen in den Übungen behandelt werden, siehe auch [Pflaumann/Unger, Funktionalanalysis I, S. 102]. Der Beweis der Stetigkeit von $f, g$ (falls $p$ in 0 stetig ist) verläuft im reellen Fall so: Wegen der Linearität von $g$ ist $g(-x) = -g(x)$, also $-g(x) \leq p(x)$, $x \in \mathcal{N}$, und schließlich

$$-p(x) \leq g(x) \leq p(x),\ x \in \mathcal{N}.$$

Für eine Folge $(x_n)$ aus $\mathcal{N}$ mit $||x_n|| \to 0$, $n \to \infty$ gilt: $p(x_n) \to 0$, also $g(x_n) \to 0 = g(x)$, $n \to \infty$, so daß $g$ in 0 stetig ist und damit wegen der Linearität überhaupt. Im komplexen Fall ist durch $x \longmapsto \mathcal{R}eg(x)$ eine Abbildung $g_1$: $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x+y) = g_1(x) + g_1(y)$, $g_1(\alpha x) = \alpha g_1(x)$, $x, y \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Wie eben zeigt man: $g_1(x_n) \to 0$, falls $||x_n|| \to 0$ $(x_n \in \mathcal{N},\ n \in \mathbb{N},\ n \to \infty)$. Wie im Beweis des Satzes IV.3.1 gezeigt, ist $g(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$, $x \in \mathcal{N}$. Daraus folgt $g(x_n) \to 0$, $u \to \infty$ also die Stetigkeit von $g$. □

Unsere erste Anwendung ist

**Satz IV.4.2:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ (nicht $\mathbb{C}$), sei $\widehat{\mathfrak{M}}$ eine abgeschlossene ausgeglichene konvexe Teilmenge von $\mathcal{N}$, die somit das Element 0 enthält. Sei $x_0 \notin \widehat{\mathfrak{M}}$. Zu $x_0$ existiert eine lineare Abbildung $f_0 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: $f_0$ ist stetig, d.h.*

$$||f_0||_{\mathcal{N}^*} < +\infty,$$

*weiter ist* $f_0(x_0) > 1$*,* $f_0(x) \leq 1$*,* $x \in \widehat{\mathfrak{M}}$*. Falls* $\widehat{\mathfrak{M}}$ *das Element 0 als inneren Punkt enthält, so ist* $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ *stets in 0 stetig.*

**Beweis:** Da $x_0 \notin \mathfrak{M}$, ist $x_0 \neq 0$. Sei $\mathfrak{M}$ der von $x_0$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{N}$, d.h. $\mathfrak{M} = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da $\widehat{\mathfrak{M}}$ ausgeglichen ist, steht uns das Minkowski-Funktional $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ zur Verfügung. Offenbar enthält jede ausgeglichene Teilmenge von $\mathcal{N}$ das Element 0. Da $x_0 \notin \widehat{\mathfrak{M}}$ ist, ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) > 1$, wie mit der Abgeschlossenheit von $\widehat{\mathfrak{M}}$ sofort folgt: Wäre nämlich $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) \leq 1$, so gäbe es eine Folge $(\alpha_n)$ positiver Zahlen mit

$$\alpha_n \geq 1,\ \frac{1}{\alpha_n}x_0 \in \widehat{\mathfrak{M}},\ n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\alpha_n} \to 1,\ n \to \infty,$$

$$\text{falls } p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) = 1,$$

und

$$\alpha_n < 1,\ \frac{1}{\alpha_n}x_0 \in \widehat{\mathfrak{M}},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \to p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0),\ n \to \infty,$$

$$\text{falls } p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) < 1.$$

Im ersten Fall liefert die Abgeschlossenheit von $\widehat{\mathfrak{M}}$, daß $x_0 \in \widehat{\mathfrak{M}}$. Im zweiten Fall folgt aus der Konvexität von $\widehat{\mathfrak{M}}$ und aus $0 \in \widehat{\mathfrak{M}}$, daß $x_0 \in \widehat{\mathfrak{M}}$. Im Falle, daß $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, definieren wir durch

$$\text{(IV.4.1)} \qquad f_0(\lambda x_0) = \lambda p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

eine (stetige) lineare Abbildung $f_0 : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$. Für $\lambda \geq 0$ ist

$$\text{(IV.4.2)} \qquad f_0(\lambda x_0) = p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\lambda x_0), \text{ insbesondere } f_0(x_0) = p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) > 1$$

Für $\lambda < 0$ ist

$$\text{(IV.4.3)} \qquad f_0(\lambda x_0) = \lambda p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) < 0 \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\lambda x_0).$$

Nun konstruieren wir eine Fortsetzung von $f_0$ auf $\mathcal{N}$, die hier auch mit $f_0$ bezeichnet sei, derart, daß diese Fortsetzung mit dem durch (IV.4.1) definierten $f_0$ in $\mathfrak{M}$ übereinstimmt und weiter

$$f_0(x) \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x),\ x \in \mathcal{N},$$

$$||f_0||_{\mathcal{N}^*} < +\infty,\ \text{da } p_{\widehat{\mathfrak{M}}} \text{ in 0 stetig ist,}$$

ist; dies ist nach Satz IV.4.1, reeller Fall, möglich. Für $x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x) \le 1$, also $f_0(x) \le 1$, $x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ Zum letzten Teil: Siehe Hilfssatz IV.4.3, Beweis. □

In dem (ersten) Trennungssatz IV.4.2, den wir eben bewiesen haben, durfte weder $\mathcal{N}$ **Vektorraum über** $\mathbb{C}$ sein noch haben wir **stets**, d.h. für alle konvexen abgeschlossenen Mengen $\widehat{\mathfrak{M}}$, durch **stetige lineare Abbildungen** von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ getrennt. Um dies zu erreichen, sind weitere Vorbereitungen erforderlich.

**Definition IV.4.2:** *Sei $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $p : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ heißt Halbnorm (in $\mathcal{N}$) dann und nur dann, wenn*

$$\begin{aligned} p(x+y) &\le p(x) + p(y), x, y \in \mathcal{N}, \\ p(\alpha x) &= |\alpha| p(x),\ x \in \mathcal{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**Hilfssatz IV.4.2:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $p : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &p(0) = 0, \\ &p(x_1 - x_2) \ge |p(x_1) - p(x_2)|,\ \textit{insbesondere ist} \\ &p(x) \ge 0,\ x_1, x_2, x \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir haben $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$, $x \in \mathcal{N}$. Aus der Subadditivität folgt $p(x_1 - x_2) + p(x_2) \ge p(x_1)$, also $p(x_1 - x_2) \ge p(x_1) - p(x_2)$. Nun ist $p(x_1 - x_2) = |-1| \cdot p(x_2 - x_1) = p(x_2 - x_1) \ge p(x_2) - p(x_1)$, woraus der Hilfssatz folgt. □

**Definition IV.4.3:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\widehat{\mathfrak{M}}$ eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{N}$. $\widehat{\mathfrak{M}}$ heißt kreisförmig, wenn aus $x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ folgt: $\alpha x \in \mathfrak{M}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $|\alpha| \le 1$.*

**Hilfssatz IV.4.3:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\widehat{\mathfrak{M}}$ eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{N}$, die ausgeglichen und kreisförmig ist. Dann ist das Minkowski-Funktional $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ eine Halbnorm. Enthält $\widehat{\mathfrak{M}}$ eine Kugel $K_\varepsilon(0) = \{x | x \in \mathcal{N},\ ||x|| < \varepsilon\}$ vom Radius $\varepsilon > 0$ um den Nullpunkt, so ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, d.h. für eine Folge $(x_n)$ aus $\mathcal{N}$ mit $x_n \to x$, $n \to \infty$, d.h. $||x_n - x|| \to 0$, $n \to \infty$, gilt*

$$p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_n) \to p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x),\ n \to \infty.$$

**Beweis:** Für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $\lambda \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\lambda x) &= \inf\{\alpha | \alpha > 0, \frac{1}{\alpha}\lambda x \in \widehat{\mathfrak{M}}\}, \\ &= |\lambda| \inf\{\alpha | \alpha > 0, \frac{1}{\alpha}\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in \widehat{\mathfrak{M}}\}, \\ &= |\lambda| p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\frac{\lambda}{|\lambda|} x). \end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ für ein $\alpha > 0$ folgt wegen der Kreisförmigkeit von $\widehat{\mathfrak{M}}$, daß $\frac{1}{\alpha}x \in \widehat{\mathfrak{M}}$. Ist umgekehrt $\frac{1}{\alpha}x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ für ein $\alpha > 0$, so folgt ebenfalls wegen der Kreisförmigkeit von $\widehat{\mathfrak{M}}$, daß auch $\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in \widehat{\mathfrak{M}}$ ist. Also ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\frac{\lambda}{|\lambda|}x) = p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x)$. Für $\lambda = 0$ ist natürlich $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\lambda x) = |\lambda| p_{\underline{\mathfrak{M}}}(x)$. Damit ist gezeigt, daß $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ eine Halbnorm ist. Nach Hilfssatz IV.4.2 ist es hinreichend, die Stetigkeit von $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ in 0 nachzuweisen. Mit $K_\varepsilon(0) \subset \widehat{\mathfrak{M}}$ ist

$$\overline{K_{\varepsilon/2}(0)} \subset \widehat{\mathfrak{M}}.$$

Sei $z \in \mathcal{N}$, $||z|| = 1$. Dann ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(z) \leq 2/\varepsilon$. Für eine Folge $(x_n)$ aus $\mathcal{N}$ mit $||x_n|| \to 0$, $n \to \infty$, haben wir, sofern $x_n \neq 0$ ist,

$$0 \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_n) = ||x_n|| p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\frac{x_n}{||x_n||}) \leq 2||x_n||/\varepsilon,$$

so daß $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_n) \to 0$, $n \to \infty$. $\square$

Mit Hilfe des Begriffs der Halbnorm können wir nur die präzise Verallgemeinerung des Satzes IV.3.1 (Satz von Hahn-Banach) angeben, die wir benötigen.

**Satz IV.4.3:** *Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von $\mathcal{N}$, sei $p$ eine Halbnorm in $\mathcal{N}$. Sei $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ eine lineare Abbildung mit*

$$|f(x)| \leq p(x),\ x \in \mathfrak{M}.$$

*$p$ sei stetig in $0$, also stetig überhaupt.*

*Dann läßt sich $f$ zu einer linearen Abbildung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ fortsetzen derart, daß*

$$|f(x)| \leq p(x),\ x \in \mathcal{N},$$

*ist, hierbei ist die Fortsetzung von $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ auch mit $f$ bezeichnet worden. Da $p$ stetig ist, so ist zunächst*

$$||f||_{\mathfrak{M}^*} = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{M},\\ ||x||=1}} |f(x)| < +\infty$$

*und dann auch*

$$||f||_{\mathcal{N}^*} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{N},\\ ||x||=1}} |f(x)| < +\infty$$

*für die oben gewonnene Fortsetzung $f$, d.h. die Abbildung $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist stetig und auch ihre oben gewonnene Fortsetzung $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.*

**Beweis:** Daß dies die präzise Verallgemeinerung von Satz IV.3.1 ist, erkennt man daran, daß im Satz IV.3.1 die Größe $||f||_{\mathfrak{M}^*}||x||$ eine stetige Halbnorm in $\mathcal{N}$ ist. Für den Beweis des Satzes IV.4.3 ohne die Stetigkeitsaussage beschränken wir uns auf separable $\mathcal{N}$ und können dann so vorgehen wie im Beweis des Satzes IV.3.1. Die Details sollen in den Übungen behandelt werden, siehe auch [Yosida, Functional Analysis, 5th edition, S. 105; Pflaumann/Unger, Funktionalanalysis I, S 104]. Wegen $p(x_n) \to 0$, falls $(x_n)$ eine Folge aus $\mathfrak{M}$ ist mit $||x_n|| \to 0$ bzw. aus $\mathcal{N}$ mit $||x_n|| \to 0$, $n \to \infty$, und falls $p$ stetig ist, folgt $f(x_n) \to 0$, $n \to \infty$. Also folgt mit der Linearität von $f$ die Stetigkeit von $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Also folgt in bekannter Weise $||f||_{\mathfrak{M}^*} < +\infty$, $||f||_{\mathcal{N}^*} < +\infty$.

Wir beweisen nun einen ersten Satz über die Trennbarkeit einer konvexen Teilmenge eines normierten Vektorraums von einem Punkt außerhalb durch stetige (beschränkte) lineare Funktionale.

**Satz IV.4.4 (1. Trennungssatz von Mazur):** *Sei $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Sei $\mathfrak{M}$ eine konvexe kreisförmige abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{N}$. Sei $x_0 \in \mathcal{N} - \mathfrak{M}$. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $f_0 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ derart, daß*

$$|f(x)| \leq 1,\ x \in \mathfrak{M}$$

$$\mathbb{R} \ni f_0(x_0) > 1$$

*ist.*

**Beweis:** Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, existiert eine Kugel $K_\varepsilon(x_0)$ um $x_0$ mit positivem Radius $\varepsilon$ derart, daß

$$\mathfrak{M} \cap \overline{K_\varepsilon(x_0)} = \emptyset$$

ist. Offenbar ist $\overline{K_\varepsilon(x_0)} = x_0 + \overline{K_\varepsilon(0)} = \{x_0 + y|\ ||y|| \leq \varepsilon\}$. Sei

$$\widehat{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M} + \overline{K_{\varepsilon/4}(0)}} = \overline{\{z + y|z \in \mathfrak{M},\ ||y|| \leq \varepsilon/2\}}.$$

Dann ist $\widehat{\mathfrak{M}}$ konvex, kreisförmig, ausgeglichen und abgeschlossen. Endlich ist

$$\widehat{\mathfrak{M}} \cap x_0 + \overline{K_{\varepsilon/4}(0)} = \emptyset,$$

denn sei $z_n + \frac{1}{4}y_n \to x_0 + \frac{1}{4}y'$, $n \to \infty$, mit $z_n \in \mathfrak{M}$, $y_n, y' \in \overline{K_\varepsilon(0)}$, so ist $|||z_n - x_0|| - ||\frac{1}{4}y' - \frac{1}{4}y_n||| \to 0$, also $||z_n - x_0|| \leq \frac{2}{3}\varepsilon$, $n \geq n_0$, da ja $\frac{y'}{2} - \frac{y_n}{2} \in \overline{K_{\varepsilon/2}(0)}$, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{M} \cap \overline{K_\varepsilon(0)} = \emptyset$. Weiter ist natürlich

$$K_{\varepsilon/4}(0) \subset \widehat{\mathfrak{M}}.$$

Nach Hilfssatz IV.4.3 ist das Minkowski-Funktional $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ eine Halbnorm in $\mathcal{N}$ und eine stetige Abbildung von $\mathcal{N}$ in die nichtnegativen Zahlen. Wie im Beweis des Satzes IV.4.2 schon gezeigt, ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) > 1$, da $\widehat{\mathfrak{M}}$ abgeschlossen ist und $x_0$ in $\mathcal{N} - \widehat{\mathfrak{M}}$ liegt. Sei

$$f(\lambda x_0) = \lambda p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0),\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}. \tag{IV.4.4}$$

Sei $\widetilde{\mathfrak{M}}$ der von $x_0$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{N}$, d.h. $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{C}\}$. Dann ist durch (IV.4.4) eine (stetige) lineare Abbildung von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gegeben mit

$$\begin{aligned}
|f(\lambda x_0)| &= |\lambda| p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) = p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\lambda x_0),\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \text{ also} \\
|f(x)| &\leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x),\ x \in \widetilde{\mathfrak{M}}, \text{ und} \\
f(x_0) &= p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_0) > 1.
\end{aligned}$$

Anwendung von Satz IV.4.3 liefert eine Fortsetzung von $f$ auf $\mathcal{N}$, die auch mit $f$ bezeichnet sei; $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist stetig, $|f(x)| \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x)$, $x \in \mathcal{N}$. Für $x \in \widehat{\mathfrak{M}}$, also insbesondere $x \in \mathfrak{M}$, ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x) \leq 1$, also auch $|f(x)| \leq 1$,

$x \in \mathfrak{M}$. $\square$

In einem normierten Vektorraum $\mathcal{N}$ über $\mathbb{R}$ kann man einen Trennungssatz beweisen, der mit geringeren Voraussetzungen an die konvexe Menge auskommt.

**Satz IV.4.5 (2. Trennungssatz von Mazur):** *Sei $\mathcal{N}$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ (nicht $\mathbb{C}$). Sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathcal{N}$ mit $0 \in \mathfrak{M}$. Sei $x_0 \notin \mathfrak{M}$. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $f_0 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_0(x_0) > 1,$$

$$f_0(x) \leq 1, \ x \in \mathfrak{M}.$$

**Beweis:** Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, existiert eine Kugel $K_\varepsilon(x_0)$ um $x_0$ mit positivem Radius $\varepsilon$ derart, daß

$$\mathfrak{M} \cap \overline{K_\varepsilon(x_0)} = \emptyset$$

ist. Offenbar ist $\overline{K_\varepsilon(x_0)} = x_0 + \overline{K_\varepsilon(0)}$ (zur Definition dieser Menge siehe Beweis des Satzes IV.4.4). Sei

$$\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \overline{K_{\varepsilon/4}(0)}$$

(zur Definition dieser Menge siehe wieder Beweis des Satzes IV.4.4). Dann ist $\widehat{\mathfrak{M}}$ konvex, ausgeglichen und abgeschlossen. Wie im Beweis des Satzes IV.4.4 zeigt man, daß $x_0 \in \mathcal{N} - \widehat{\mathfrak{M}}$ ist. Das Minkowski-Funktional $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}$ ist nach Hilfssatz IV.4.1 positiv-homogen und subadditiv. Nach Satz IV.4.2 gibt es eine lineare Abbildung $f_0 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_0(x_0) > 1,$$

$$f_0(x) \leq 1, \ x \in \widehat{\mathfrak{M}}$$

(Satz IV.4.2 wird für $\mathfrak{M} = \widehat{\mathfrak{M}}$ angewandt), also insbesondere

$$f_0(x) \leq 1, \ x \in \mathfrak{M}.$$

Nach Konstruktion der Abbildung $f_0$ im Beweis des Satzes IV.4.2 ist

$$f(x) \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x), \ x \in \mathcal{N},$$

also $f(-x) = -f(x) \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(-x)$, d.h.

$$(\text{IV.4.5}) \qquad -p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(-x) \leq f(x) \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x),\ x \in \mathcal{N}.$$

Nun haben wir offenbar $\overline{K_{\varepsilon/4}(0)} \subset \widehat{\mathfrak{M}}$. Sei $(x_n)$ eine Folge aus $\mathcal{N}$ mit $||x_n|| \to 0$, $n \to \infty$. Ohne Einschränkung können wir $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, annehmen. Für alle $z \in \mathcal{N}$ mit $||z|| = 1$ ist $p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(z) \leq 2/\varepsilon$ (siehe Beweis des Hilfssatzes IV.4.3). Also haben wir

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(-x_n) &= ||x_n|| p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\frac{-x_n}{||x_n||}) \leq 2||x_n||/\varepsilon,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(x_n) &= ||x_n|| p_{\widehat{\mathfrak{M}}}(\frac{x_n}{||x_n||}) \leq 2||x_n||/\varepsilon,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(IV.4.5) impliziert nun die Stetigkeit von $f$ in 0 und damit überhaupt. □

Wir schließen einige Hinweise an: In den Sätzen IV.4.4, 5 kann statt des Punktes $x_0$ eine kompakte komplexe Menge genommen werden, die zur vorgegebenen konvexen Menge $\mathfrak{M}$ disjunkt ist. In der englischsprachigen Literatur werden andere Bezeichnungen verwendet: „kreisförmig“ wird als “balanced“, „ausgeglichen“ als „absorbing“ bezeichnet.

## §5. Der Satz von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

Wir brauchen zunächst einige Hilfsmittel aus der Theorie der metrischen Räume. Der Begriff des metrischens Raums, der offenen und abgeschlossenen Teilmenge eines metrischen Raumes, und des vollständigen metrischen Raumes wird dabei als bekannt vorausgesetzt. Sei $\mathcal{M}$ ein metrischer Raum und $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}$, sei weiter $\mu$ die Metrik in $\mathcal{M}$. Sei

$$diam\gamma = \sup_{x,y\in\mathfrak{S}} \mu(x,y)$$

als Durchmesser von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Dann gilt:

**Satz IV.5.1:** *Sei $\mathcal{M}$ ein vollständiger metrischer Raum. Sei $\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2 \supset \ldots$ eine abnehmende Folge $(\mathfrak{S}_n)$ nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathcal{M}$ mit*

$$diam\mathfrak{S}_n \to 0,\ n \to \infty.$$

*Dann besteht $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ aus genau einem Punkt.*

**Beweis:** Sei $x_n \in \mathfrak{S}_n$. Dann sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ alle $x_k$ mit $k \geq i$ in $\mathfrak{S}_i$ enthalten. Für $\epsilon > 0$ ist also

$$\mu(x_i, x_k) < \varepsilon,\ k \geq i \geq N_0 = N_0(\varepsilon).$$

Somit ist $(x_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{M}$, also wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{M}$ konvergent gegen ein $x \in \mathcal{M}$, $n \to \infty$. Da die $\mathfrak{S}_n$ abgeschlossen sind, $x_m \in \mathfrak{S}_n$, $m \geq n$, folgt $x \in \mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ist

$$y \in \bigcap_{u=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n,$$

so ist $\mu(x,y) = 0$, also $x = y$. □

Wir können nun den Satz von Baire beweisen.

**Satz IV.5.2:** *Sei $\mathcal{M}$ ein vollständiger metrischer Raum. Seien $\mathfrak{T}_i$, $i \in \mathbb{N}$, Teilmengen von $\mathcal{M}$. Es gebe eine offene Kugel $K_\delta(x_0) = \{y|\mu(y,x_0) < \delta\}$ vom Radius $\delta > 0$ um $x_0 \in \mathcal{M}$ derart, daß*

$$K_\delta(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{T}_i.$$

*Dann gibt es einen Index $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $\overline{\mathfrak{T}_k}$ eine offene Kugel $K_{\delta'}(x_0')$ vom Radius $\delta' > 0$ um $x_0' \in \mathcal{M}$ enthält. Wie üblich ist hierbei für eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathcal{M}$*

$$\overline{\mathfrak{T}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{T}\subset\mathfrak{A}\subset\mathcal{M},\\ \mathfrak{A} \text{ abgeschlossen}}} \mathfrak{A}$$

*die kleinste $\mathfrak{T}$ enthaltene abgeschlossene Menge, auch abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{T}$ genannt.*

**Beweis:** Wir führen einen indirekten Beweis. Wir nehmen also an, keine der Mengen $\overline{\mathfrak{T}_i}$ enthalte eine offene Kugel, d.h. jede offene Kugel aus $\mathcal{M}$ habe für jedes $i \in \mathbb{N}$ nichtleeren Durchschnitt mit $\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_i}$. Insbesondere ist $(\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_i}) \cap K_\delta(x_0)$ eine offene nichtleere Menge. Also gibt es ein $\varepsilon_1 \in (0,1)$ und ein $x_1 \in (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_i}) \cap K_\delta(x_0)$ derart, daß

$$\overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_1}) \cap K_\delta(x_0).$$

Wie eben ist $(\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_2}) \cap K_{\varepsilon_1}(x_1)$ offen und nichtleer und wir finden eine Kugel $K_{\varepsilon_2}(x_2)$ um $x_2 \in (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_2}) \cap K_{\varepsilon_1}(x_1)$ vom Radius $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ mit

$$\overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_2}) \cap K_{\varepsilon_1}(x_1).$$

Mit dieser Konstruktion fortfahrend erhalten wir eine Folge abnehmender abgeschlossener Kugeln $K_{\varepsilon_\nu}(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, mit $\varepsilon_\nu \to 0$. Auf diese Folge können wir Satz IV.5.1 anwenden und erhalten.

$$\{x\} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{K_{\varepsilon_\nu}(x_\nu)} \subset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_\nu}),$$

$x \in K_\delta(x_0)$, aber es ist auch

$$K_\delta(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{T}_i, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{T}_i \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{M} - \overline{\mathfrak{T}_i}) = \emptyset,$$

so daß sich ein Widerspruch ergibt. □

Eine Teilmenge $\mathfrak{T}$ eines metrischen Raums $\mathcal{M}$ heißt **nirgends dicht,** wenn $\overline{\mathfrak{T}}$ keine inneren Punkte besitzt, d. h. also keine offene Kugel enthält. Aus Satz IV.5.2 folgt somit, daß ein vollständiger metrischer Raum nicht die Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen sein kann. Eine Vereinigung von abzählbar vielen, nirgends dichten Teilmengen eines metrischen Raums $\mathcal{M}$ heißt **mager** oder **eine Menge von 1. Kategorie.** Eine Menge, die **nicht mager** ist, heißt **von 2. Kategorie.** Ein vollständiger metrischer Raum ist also nicht mager oder auch von 2. Kategorie.

Der folgende fundamentale Satz stammt von Banach.
**Satz: IV.5.3 (Satz von der offenen Abbildung):** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Banachräume, sei $T$ ein Element aus $L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ sei $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}'$. Dann ist $T$ offen, d.h. $T(\mathfrak{U})$ ist offen für jede offene Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathcal{B}$.*

**Beweis:** Sei $K_\varepsilon(0) = \{x | x \in \mathcal{B}, ||x|| < \varepsilon\}$, $K'_\varepsilon(0) = \{y | y \in \mathcal{B}',\ ||y||' < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, wobei $||.||'$ die Norm in $\mathcal{B}'$ bezeichnet. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß es ein $\delta > 0$ gibt derart, daß $T(K_\varepsilon(0)) \supset K'_\delta(0)$. Sei $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n$ fixiert ist, so ist

$$\mathcal{B} = \bigcap_{j=1}^{\infty} jK_{\varepsilon_n}(0),$$

wobei $2K_{\varepsilon_n}(0) = \{x + x' | x, x' \in K_{\varepsilon_n}(0)\}$, $3K_{\varepsilon_n}(0) = \{x + x' + x'' | x, x', x'' \in K_{\varepsilon_n}(0)\}, \ldots$ ist und wir natürlich $1K_{\varepsilon_n}(0) = K_{\varepsilon_n}(0)$ gesetzt haben. Daher haben wir auch

$$T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}' = \bigcup_{j=1}^{\infty} T(jK_{\varepsilon_n}(0)).$$

Da $\mathcal{B}'$ mit der Metrik $\mu(y, y') = ||y - y'||'$, $y, y' \in \mathcal{B}'$, ein vollständiger metrischer Raum ist, existiert nach Satz IV.5.2 ein $j_n$ derart, daß $\overline{T(j_n K_{\varepsilon_n}(0))}$ eine offene Kugel enthält. Nun ist

$$\frac{1}{2j_n}\overline{(T(j_n K_{\varepsilon_n}(0))} = \overline{T(K_{\varepsilon_{n/2}}(0))}.$$

Wenn $\mathfrak{W}$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}'$ ist, so ist auch $\alpha\mathfrak{W}$, $\alpha \in \mathbb{C} - \{\mathbb{N}\}$, eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}'$. Daher enthält die Menge $\overline{T(K_{\varepsilon_n/2}(0))}$ eine offene Menge $V_n$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{T(K_{\varepsilon_n/2}(0))} &\supset \overline{(T(K_{\varepsilon_n/2}(0)) \vdash\!\dashv T(K_{\varepsilon_n/2}(0)))}, \\
&\supset \overline{T(K_{\varepsilon_n/2}(0)) \vdash\!\dashv T(K_{\varepsilon_n/2}(0))}, \\
&\supset V_n - V_n,
\end{aligned}$$

wobei wir hier unter $\mathfrak{A} \vdash\!\dashv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{B}'$, die Menge $\{x - y | x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{B}\}$ verstehen. Nun ist $0 \in V_n \vdash\!\dashv$ und

$$V_n \vdash\!\dashv V_n = \bigcup_{x \in V_n} (V_n \vdash\!\dashv \{x\})$$

ist offene Teilmenge von $\mathcal{B}'$. Daher existiert eine offene Kugel $K'_{\delta_n}(0)$ mit

$$\text{(IV.5.1)} \qquad K'_{\delta_n}(0) \subset V_n \vdash\!\dashv\subset \overline{T(K_{\varepsilon_n}(0))}.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\delta_n < 1/n$ ist, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten jetzt beweisen, daß $K'_{\delta_1}(0) \subset T(K_\varepsilon(0))$ ist. Sei dazu $y \in K'_{\delta_1}(0)$. Wir suchen ein $x \in K_\varepsilon(0)$ mit $Tx = y$. Nach (IV.5.1) existiert ein $x_1 \in K_{\varepsilon_1}(0)$ derart, daß $||y - Tx_1||' < \delta_2$ ist; dies sieht man folgendermaßen: Ist $y \in T(K_{\varepsilon_1}(0))$, so ist man fertig, ist $y \in \overline{T(K_{\varepsilon_1}(0))} - T(K_{\varepsilon_1}(0))$, so gibt es eine Folge $(\widetilde{x}_l)$, $\widetilde{x}_l \in K_{\varepsilon_1}(0)$, mit $T\widetilde{x}_l \to y$, $l \to \infty$, und wir finden ebenfalls ein $x_1$ wie gewünscht. Insbesondere ist also $y - Tx_1 \in K'_{\delta_2}(0)$. Wie eben finden wir ein $x_2$ mit $x_2 \in K_{\varepsilon_2}(0)$ derart, daß $||y - Tx_1 - Tx_2||' < \delta_3$ ist. Setzen wir dieses Verfahren fort, so ergibt sich eine Folge $(x_n)$ mit

$$\text{(IV.5.2)} \qquad \left[\begin{array}{l} x_n \in K_{\varepsilon_n}(0), \\[2ex] ||y - \sum\limits_{k=1}^{n} Tx_k||' < \delta_{n+1},\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Sei

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ n \in \mathbb{N},$$

so daß für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||z_n - z_m|| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k||, \\ &< \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon/2^k < \varepsilon/2^m \end{aligned}$$

ergibt. Daher ist $(z_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}$ und konvergiert für $n \to \infty$ gegen ein $x \in \mathcal{B}$. Offenbar ist

$$\begin{aligned} ||x|| = \lim_{u \to \infty} ||z_n|| \ &\leq \ \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \\ &< \ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $x \in K_\varepsilon(0)$. Aus (IV.5.2) folgt, daß $y - Tz_n \to 0$, $n \to \infty$. Da $T$ stetig ist, ist $y = Tx$. Sei nun $\mathfrak{U}$ irgendeine offene Teilmenge von $\mathcal{B}$. Sei

$y \in T(\mathfrak{U})$. Dann ist $y = Tx$ für ein $x \in \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset \mathfrak{U}$, d.h. $\{x\} + K_\varepsilon(0) \subset \mathfrak{U}$. Wenden wir das eben gewonnene Resultat an, so finden wir ein $\delta > 0$ derart, daß $K'_\delta(0) \subset T(K_\varepsilon(0))$. Also ist $\{y\} + K'_\delta(0) \subset \{Tx\} + T(K_\varepsilon(0)) \subset T(\{x\} + K_\varepsilon(0)) \subset T(\mathfrak{U})$ und $K'_\delta(y) \subset T(\mathfrak{U})$. Also ist $T(\mathfrak{U})$ offen. □

Eine Folgerung aus Satz IV.5.3 ist

**Hilfssatz IV.5.1:** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Banachräume, sei $T \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Sei $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}'$, sei $T$ eineindeutig. Dann ist der in $\mathcal{B}'$ definierte lineare Operator $T^{-1}$ von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ aus $L(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, d.h. beschränkt (oder äquivalent, stetig).*

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$, sei $y' \in \mathcal{B}'$. Wählen wir $y$ aus $TK_\varepsilon(x')$, wobei $y' = Tx'$ ist, so ist mit $y = Tx$ jedenfalls

$$||T^{-1}y - T^{-1}y'|| = ||x - x'|| < \varepsilon.$$

Nach Satz IV.5.3 ist $TK_\varepsilon(x')$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}'$, so daß es eine offene Kugel $K'_\delta(y')$ gibt mit $\delta > 0$, $K'_\delta(y') \subset TK_\varepsilon(x')$, also $||T^{-1}y - T^{-1}y'|| < \varepsilon$, $y \in K'_\delta(y')$. □

**Hilfssatz IV.5.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum mit Norm $||.||$. Sei $\mathcal{B}'$ ein weiterer Banachraum mit Norm $||.||'$. Als Vektorräume über $\mathbb{C}$ mögen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ übereinstimmen. Die offenen Mengen in $\mathcal{B}$ (bezüglich der Norm $||.||$) und die offenen Mengen in $\mathcal{B}'$ (bezüglich der Norm $||.||'$) stimmten dann und nur dann überein, wenn es eine positive Konstante $\alpha$ gibt mit*

$$\alpha ||x|| \geq ||x||'$$

*für alle $x$ aus dem Vektorraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ über $\mathbb{C}$.*

**Beweis:** Durch die Abbildung $\mathcal{B} \ni x \longmapsto x \in \mathcal{B}'$ wird ein linearer Operator von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ definiert mit der Eigenschaft, daß sein Wertebereich gerade $\mathcal{B}'$ ist. Die Einzelheiten seien dam Leser zur Übung überlassen. □

**Hilfssatz IV.5.3:** *Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ normierte Vektorräume (über $\mathbb{C}$). Sei $\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{(x, y) | x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{N}\}$. Wir setzen*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),\ (x, y), (x', y') \in \mathcal{M} \times \mathcal{N},$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),\ \alpha \in \mathbb{C},\ (x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}.$$

*Dadurch wird $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$, den wir auch mit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ bezeichnen. Setzen wir*

$$||(x,y)|| = ||x|| + ||y||,\ (x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N},$$

*so wird $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ zu einem normierten Vektorraum, den wir wieder mit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ bezeichnen. $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ als normierter Vektorraum ist dann und nur dann vollständig (d.h. Banachraum), wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ vollständig (d.h. Banachräume) sind.*

**Beweis:** Übung. □

**Definition IV.5.1:** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Banachräume, sei $T$ ein linearer Operator von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Man sagt, $T$ sei abgeschlossen oder habe abgeschlossenen Graphen, wenn aus $x_n \to x$, $n \to \infty$, $x_n \in \mathcal{D}(T)$, $n \in \mathbb{N}$, und $Tx_n \to y$, $n \to \infty$, folgt: $x \in \mathcal{D}(T)$, $Tx = y$, d.h. also, daß*

$$\mathfrak{G}_T = \{(x, Tx) | x \in \mathcal{D}(T)\}$$

*abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ ist: $\mathfrak{G}_T$ heißt der Graph von $T$.*

Trivialerweise ist $\mathfrak{G}_T$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$, wenn $T \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ist. Es gilt auch die Umkehrung, nämlich

**Satz IV.5.4 (Satz vom abgeschlossenen Graphen):** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Banachräume, sei $T$ ein linearer Operator von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{B}$. Sei $\mathfrak{G}_T$ (der Graph von $T$) abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$. Dann ist $T \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

**Beweis:** $\mathfrak{G}_T$ ist ein Banachraum, sei

$$\begin{aligned} P_1(x, Tx) &= x,\ x \in \mathcal{B}, \\ P_2(x, Tx) &= Tx,\ x \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Dann sind $P_1, P_2$ lineare Operatoren von $\mathfrak{G}_T$ in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{D}(P_1) = \mathfrak{G}_T$, $\mathcal{D}(P_2) = \mathfrak{G}_T$,

$$||P_1(x, Tx)|| = ||x|| \leq ||(x, Tx)||,$$

$$||P_2(x, Tx)|| = ||Tx|| \leq ||(x, Tx)||,$$

also $P_1 \in L(\mathfrak{G}_T, \mathcal{B})$, $P_2 \in L(\mathfrak{G}_T, \mathcal{B}')$. $P_1$ ist offenbar injektiv und surjektiv. Nach Hilfssatz IV.5.1 hat $P_1$ eine Inverse $P_1^{-1}$ aus $L(\mathcal{B}, \mathfrak{G}_T)$. Nun ist $T = P_2 P_1^{-1}$ (im Sinne des Hintereinanderausführens von Abbildungen). Also ist

$$||Tx|| \leq ||P_1^{-1}||||x||, \; x \in \mathcal{B},$$

und somit folgt die Beschränktheit von $T$. □

Es sei schon jetzt darauf hingewiesen, daß der Graph $\mathfrak{G}_T$ eines Operators auch bei nicht beschränkten linearen Operatoren $T$ eine wichtige Rolle spielt. Insbesondere werden wir dies im zweiten Teil der Vorlesung beim Studium unbeschränkter Operatoren im Hilbertraum sehen.

## §6. Die Fredholmschen Sätze für vollstetige Operatoren im Banachraum

Wir wollen in diesem Abschnitt die bereits aus III.3 bekannten Fredholmschen Sätze für vollstetige Operatoren im Hilbertraum wenigstens teilweise auf vollstetige Operatoren in einem beliebigen Banachraum übertragen. Wir gehen von folgender Situation aus: Sei $V$ ein linearer Operator im Banachraum $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{D}(V) = \mathcal{B}$, der vollstetig ist (s. Definition III.4.3). Zu untersuchen ist der Operator $T = I - V \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Zunächst gilt wie im Hilbertraum

**Hilfssatz IV.6.1:** *Die Gleichung $Tx = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann ist $||Tx|| \geq d||x||$, $x \in \mathcal{B}$, mit einer positiven Konstante $d$.*

**Beweis:** Es genügt $||Tx|| \geq d$ für $||x|| = 1$ zu zeigen. Angenommen, es gibt eine Folge $(x_n)$ mit $||x_n|| = 1$ und $||Tx_n|| \to 0$, d.h. $x_n - Vx_n \to 0$, $n \to \infty$. Wegen der Vollstetigkeit von $V$ gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})$ von $(x_n)$ mit $Vx_{n_j} \to y$, $y \to \infty$, für ein $y \in \mathcal{B}$. Also gilt $x_{n_j} \to y$, $j \to \infty$, $y - Vy = 0$. Wegen $||x_{n_j}|| = 1$ ist auch $||y|| = 1$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme. □

**Hilfssatz IV.6.2:** *Die Gleichung $Tx = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$.*

**Beweis:** Sei $(y_n)$ eine Folge aus $\mathcal{R}(T)$, sei $y_n = Tx_n$. Sei $(y_n)$ konvergent in $\mathcal{B}$ gegen $y$, $n \to \infty$. Nach Hilfssatz IV.6.1 ist $||y_n - y_m|| = ||Tx_n - Tx_m|| \geq d||x_n - x_m||$, so daß in $\mathcal{B}$ gilt: $x_n \to x$, $n \to \infty$. Also konvergiert $(Tx_n)$ gegen $Tx$, $n \to \infty$. □

**Hilfssatz IV.6.3:** *Der Nullraum $\mathfrak{N}(T) = \{x | x \in \mathcal{B},\ Tx = 0\}$ des Operators $T$ ist ein Vektorraum endlicher Dimension (über $\mathbb{C}$).*

**Beweis:** Es ist klar, daß $\mathfrak{N}(T)$ Teilraum von $\mathcal{B}$ ist. Angenommen, $\mathfrak{N}(T)$ sei nicht endlichdimensional. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\sum = \{f_1, f_2, \ldots\} \subset \mathfrak{N}(T)$ derart, daß für jedes $n \in \mathcal{N}$ die Elemente $\{f_1, \ldots, f_n\}$ linear unabhängig sind. Sei

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_n &= \{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k | c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}\}, \\
\mathfrak{M}_{n+1} &= \{\sum_{k=1}^{n+1} c_k f_k | c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{C}\},
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$. Nach Satz IV.1.3 sind $\mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_{n+1}$ abgeschlossen. Nach Satz IV.1.2 gibt es ein $\varphi \in \mathfrak{M}_{n+1}$ mit $||\varphi|| = 1$, $||f - \varphi|| \geq \frac{1}{2}$, $f \in \mathfrak{M}_n$, da $\mathfrak{M}_n \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{M}_{n+1}$. Also gibt es eine Folge $(\varphi_l)$ aus $\mathfrak{N}(T)$ mit $||\varphi_l|| = 1$, $l \in \mathbb{N}$ $||\varphi_l - \varphi_k|| \geq \frac{1}{2}$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l \neq k$. Wir haben $T_{\varphi_l} = \varphi_l - V\varphi_l = 0$, $l \in \mathbb{N}$. Wegen der Vollstetigkeit von $V$ gibt es eine Teilfolge $(V\varphi_{l_j})$ von $(V\varphi_l)$, die gegen ein $\psi \in \mathcal{B}$ konvergiert. Wegen $\varphi_{l_j} = V\varphi_{l_j}$ gilt dann auch $\varphi_{l_j} \to \psi$, $j \to \infty$. Gleichzeitig ist aber $||\varphi_{l_j} - \varphi_{l_i}|| \geq \frac{1}{2}$, $i \neq j$, so daß ein Widerspruch vorliegt. $\square$

**Definition IV.6.1:** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Banachräume, sei $L$ ein linearer Operator von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Sei $\mathcal{R}(L)$ der Wertebereich von $L$. Ist $L$ eineindeutig, so wird die inverse Abbildung $L^{-1}$ auch als inverser Operator bezeichnet. $L^{-1}$ ist ein linearer Operator von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{R}(L)$ und Wertebereich $\mathcal{D}(L)$.*

Auf den Nachweis, daß $L^{-1}$ ein linearer Operator von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ ist mit den oben angegebenen Eigenschaften, verzichten wir (s. II.5). Nun gilt für die speziellen Operatoren $T = I - V$ der

**Satz IV.6.1 (1. Fredholmscher Satz):** *Die Gleichung $Tx = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann hat $T$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte Inverse $T^{-1}$. $T^{-1}$ ist aus $L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ und hat wie $T$ die Form*

$$T^{-1} = I - W$$

*mit einem vollstetigen Operator $W$ ($\mathcal{D}(W) = \mathcal{B}$).*

**Beweis:** Wegen $\mathfrak{N}(T) = \{0\}$ ist nach Hilfssatz IV.6.2 der Teilraum $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, und nach Hilfssatz IV.6.1 ist $||Tx|| \geq d||x||$, $x \in \mathcal{B}$, mit einer positiven Konstante $d$. Ist $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$, so folgt $||T^{-1}x|| \leq (1/d)||x||$, $x \in \mathcal{B}$. Zunächst haben wir also $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$ zu beweisen. Wir nehmen an: $T(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}$. Sei $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1 = T(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T)$, $\mathcal{B}_2 = T^2(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T^2), \ldots$. Offenbar ist $\mathcal{B}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \ldots$, $\mathcal{B}_k = T(\mathcal{B}_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Nun ist

$$T^k = (I - V)^k = I + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-V)^l, \ k \in \mathbb{N},$$

so daß auch $T^k$ von der Form „Identität - Vollstetig" ist (s. Hilfssatz III.4.10). Aus $T^kx = 0$, $k \in \mathbb{N}$ folgt nach unserer Annahme $T^{k-1}x = 0$ usw., so daß wir $x = 0$ erhalten. Nach Hilfssatz IV.6.2 ist somit $\mathcal{B}_k = \mathcal{R}(T^k)$ abgeschlossen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: 1. Fall: $\mathcal{B}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_2 \underset{\neq}{\supset} \ldots$, 2. Fall: $\mathcal{B}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_{k-1} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_{k+2} = \ldots$ für ein $k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Ein anderer Fall kann nicht eintreten, denn ist für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1},$$

so ist $\mathcal{B}_{k+2} = T(T^{k+1}(\mathcal{B})) = T(T^k(\mathcal{B})) = \mathcal{B}_{k+1}$ usw. Tritt nun der erste Fall ein, so gibt es eine Folge $(\varphi_k)$ mit $\varphi_k \in \mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $||\varphi_k|| = 1$, und $||\varphi_k - f|| \geq \frac{1}{2}$, $f \in \mathcal{B}_{k+1}$ (siehe Satz IV.1.2). Sei $l > k$. Dann ist $V\varphi_k - V\varphi_l = (I - T)\varphi_k - (I - T)\varphi_l = \varphi_k - (T\varphi_k + \varphi_l - T\varphi_l)$. Sei $g = T\varphi_k + \varphi_l - T\varphi_l$. Wegen $\varphi_l \in \mathcal{B}_{k+1}$, $T\varphi_l \in \mathcal{B}_{k+1}$, $T\varphi_k \in \mathcal{B}_{k+1}$ ist $g \in \mathcal{B}_{k+1}$. Also ist $||V\varphi_k - V\varphi_l|| = ||\varphi_k - g|| \geq \frac{1}{2}$, $l \neq k$. Dies ist ein Widerspruch zur Vollstetigkeit von $V$, denn $(V\varphi_k)$ enthält eine konvergente Teilfolge $(V\varphi_{k_j})$. Der erste Fall tritt also nicht ein. Tritt nun der zweite Fall für ein $k \geq 1$ ein, so gibt es wie eben in $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ Elemente $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ mit $||\varphi_j|| = 1$, $j = 0, \ldots, k-1$, $||\varphi_j - f|| \geq 1/2$, $f \in \mathcal{B}_{j+1}$, $j = 0, \ldots, k-1$, aber $\varphi_j \in \mathcal{B}_j$. Insbesondere ist $T\varphi_{k-1} \in \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1}$, so daß es ein $f \in \mathcal{B}_k$ gibt mit $T\varphi_{k-1} = Tf$, also $T(\varphi_{k-1} - f) = 0$. Dann folgt aus der Voraussetzung des Satzes $\varphi_{k-1} = f$, im Widerspruch zu $||\varphi_{k-1} - f|| \geq 1/2$, $f \in \mathcal{B}_k$. Somit haben wir gezeigt: $k = 0$, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$. Zu $y \in \mathcal{B}$ gibt es also ein und nur ein $x \in \mathcal{B}$ mit $y = x - Vx$, und es ist $x = T^{-1}y$, also $x = y + Vx = y + VT^{-1}y = T^{-1}y$. Nach Hilfssatz III.4.10 ist $VT^{-1}$ vollstetig. Damit ist der erste Fredholmsche Satz bewiesen. $\square$

Der zweite Fredholmsche Satz behandelt den Fall, daß $Tx = 0$ eine von Null verschiedene Lösung besitzt.

**Satz IV.6.2 (2. Fredholmsche Satz):** *Es gebe ein $x_1 \in \mathcal{B} - \{0\}$ derart, daß $Tx_1 = 0$ ist. Dann ist $\mathcal{R}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}$.*

**Beweis:** Wir führen wieder einen indirekten Beweis. Angenommen, es sei $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$. Dann gibt es ein $x_2$ mit $Tx_2 = x_1 \neq 0$. Also ist $T^2x_2 = Tx_1 = 0$. Nun bestimmen wir ein $x_3$ mit $Tx_3 = x_2 \neq 0$. Also ist $T^3x_3 = 0$, $T^2x_3 = x_1 \neq 0$. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir eine Folge $(x_n)$ aus $\mathcal{B}$ mit $Tx_k = x_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Nach Konstruktion ist $T^kx_k = 0$, aber $T^{k-1}x_k = x_1 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$; unter $T^0$ verstehen wir dabei die identische Abbildung. Sei $\mathfrak{N}_k = \{x | x \in \mathcal{B},\ T^kx = 0\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$. $\mathfrak{N}_k$ ist also der Nullraum von

$$T^k = (I - V)^k = I + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-V)^l, \ k \in \mathbb{N},$$

nach Hilfssatz IV.6.3 endlichdimensional und nach Satz IV.1.3 abgeschlossen. Es ist $x_k \in \mathfrak{N}_k$, aber $x_k \notin \mathfrak{N}_{k-1}$, und weiter $\mathfrak{N}_{k-1} \subset \mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$. So haben wir $\mathfrak{N}_0 \subsetneqq \mathfrak{N}_1 \subsetneqq \mathfrak{N}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{N}_{k-1} \subsetneqq \mathfrak{N}_k \subsetneqq \ldots$. Wir beweisen, daß diese Situation nicht möglich ist. Sei $y_k \in \mathfrak{N}_k$ mit $||y_k|| = 1$ und $||y_k - f|| \geq \frac{1}{2}$, $f \in \mathfrak{N}_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe Satz IV.1.2). Sie $k > l$. Dann ist $Vy_k - Vy_l = (I-T)y_k - (I-T)y_l = y_k - (Ty_k + y_l - Ty_l)$, und $f = Ty_k + y_l - Ty_l \in \mathfrak{N}_{k-1}$, da $T^{k-1}f = T^k y_k + T^{k-1-l}(T^l y_l) - T^{k-1}(T^l y_l) = 0$ ist. Also ist $||Vy_k - Vy_l|| \geq \frac{1}{2}$, $k \neq l$. Dies ist jedoch nicht möglich, da wegen der Vollstetigkeit von $V$ die Folge $(Vy_k)$ eine konvergente Teilfolge enthält. $\square$

Satz IV.6.1 und Satz IV.6.2 heißen die, wie schon erwähnt, die Fredholmschen Sätze im Banachraum. Sie bilden, wie man auch sagt die **Fredholmsche Alternative im Banachraum.**

## §7. Der Rieszsche Zerlegungssatz. Die Eigenwerte eines vollstetigen Operators. Die Neumannsche Reihe

Wir erinnern an Satz IV.1.3 aus IV.1, insbesondere an den Beweis dieses Satzes: Ist $\mathfrak{M}$ ein endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$, ist $n$ die Dimension von $\mathfrak{M}$ und $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine Basis ($n \in \mathbb{N}$), so ist

$$||\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k|| \geq \alpha(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2)^{1/2},\ (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n,$$

mit einer positiven Konstante $\alpha$. Ist insbesondere $(f_l)$ eine Folge in $\mathfrak{M}$ mit $||f_l|| \leq M$, $l \in \mathbb{N}$, ist

$$f_l = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(l)}\varphi_k,\ l \in \mathbb{N},$$

mit eindeutig bestimmten $c_1^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)} \in \mathbb{C}$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k^{(l)}|^2 \leq M^2/\alpha^2,\ l \in \mathbb{N}.$$

Nun sieht man sofort, daß $(f_l)$ eine gegen ein $f^* \in \mathfrak{M}$ konvergente Teilfolge $(f_{l_j})$ enthält. Hieraus folgt:

**Hilfssatz IV.7.1:** *Sei $\mathfrak{M}$ endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$. Sei $f \in \mathcal{N}$. Dann gibt es ein $f^* \in \mathfrak{M}$ mit*

$$||f - f^*|| \leq ||f - g||,\ g \in \mathfrak{M}.$$

**Beweis:** Sei $d = \inf_{g\in\mathfrak{M}} ||f - g||$. Dann gibt es eine Folge $(g_m)$ in $\mathfrak{M}$ mit $||f - g_m|| \to d$, $m \to \infty$. Nun ist $||g_m|| \leq ||f - g_m|| + ||f||$. Da $(||f - g_m||)$ eine beschränkte Folge ist, ist es auch $(||g_m||)$: Wie eben gezeigt, enthält $(g_m)$ eine konvergente Teilfolge $(g_{m_j})$ mit $g_{m_j} \to f^* \in \mathfrak{M}$, $j \to \infty$. Also ist $d = \lim_{j\to\infty} ||f - g_{m_j}|| = ||f - f^*||$. $\square$

**Hilfssatz IV.7.2:** *Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ zwei abgeschlossene Teilräume eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$. Sei $\mathfrak{N}$ endlichdimensional, sei $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} = \{0\}$. Dann gibt es eine positive Konstante $c = c(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ mit*

$$||f|| + ||g|| \leq c||f + g||,\ f \in \mathfrak{M},\ g \in \mathfrak{N}.$$

**Beweis:** Angenommen, die Behauptung des Satzes ist falsch. Dann gibt es Folgen $(f_n)$ aus $\mathfrak{M}$ und $(g_n)$ aus $\mathfrak{N}$ derart, daß

$$\frac{||f_n + g_n||}{||f_n|| + ||g_n||} \leq \frac{1}{n},\ ||f_n|| + ||g_n|| > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

sind. Sei

$$f_n^* = \frac{f_n}{||f_n|| + ||g_n||},\ g_n^* = \frac{g_n}{||f_n|| + ||g_n||}.$$

Dann ist

$$||f_n^* + g_n^*|| \leq \frac{1}{n} \text{ und } ||f_n^*|| + ||g_n^*|| = 1,$$

$$f_n^* \in \mathfrak{M},\ g_n^* \in \mathfrak{N},\ n \in \mathbb{N}$$

Wie vor Hilfssatz IV.7.1 bemerkt, gibt es wegen der Endlichdimensionalität von $\mathfrak{N}$ eine Teilfolge $(g_{n_j}^*)$ von $(g_n)$ mit

$$g_{n_j} \to g^*,\ j \to \infty,$$

$$g^* \in \mathfrak{N}.$$

Aus $||f_n^*+g_n^*|| \leq \frac{1}{n}$ folgt sofort, daß die $f_{n_j}^*$ gegen $-g^*$ konvergieren, $j \to \infty$. Weiter ist wegen $||f_n^*|| + ||g_n^*|| = 1$ offenbar $||g^*|| = 1/2$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ folgt: $g^* \in \mathfrak{M}$, also wegen $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\}$ dann $g^* = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $||g^*|| = 1/2$. $\square$

**Hilfssatz IV.7.3:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei $V$ ein vollstetiger Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{D}(V) = \mathcal{B})$. Wir definieren wieder durch $T = I - V$ einen linearen Operator aus $L(\mathcal{B})$. Es gilt: $\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$.*

**Beweis:** Sei $(Tf_n)$ eine Folge aus $\mathcal{R}(T)$, sei $(g_n)$, $g_n = Tf_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent gegen ein $g \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, daß $g$ in $\mathcal{R}(T)$ liegt. Nach Hilfssatz IV.6.3 ist $\mathfrak{N}(T) = \{x | x \in \mathcal{B}, Tx = 0\}$ endlichdimensionaler Teilraum von $\mathcal{B}$. Nach Hilfssatz VI.7.1 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h_n \in \mathfrak{N}(T)$ mit

$$||f_n - h|| \geq ||f_n - h_n||,\ h \in \mathfrak{N}(T).$$

Sei $f_n' = f_n - h_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $||f_n - h|| \geq ||f_n'||$, $Tf_n' = g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: 1. Fall: Die Folge $(||f_n'||)$ ist beschränkt, etwa $||f_n'|| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Vollstetigkeit von $V$ gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j}')$ von $(f_n')$ mit $Vf_{n_j}' \to \varphi$, $j \to \infty$. Da die $g_{n_j} = f_{n_j}' - Vf_{n_j}'$ einerseits gegen $g$ und andererseits die $Vf'_{n_j}$ gegen $\varphi$ konvergieren, $j \to \infty$ folgt, daß auch die $f'_{n_j}$ für $j \to \infty$ konvergieren, etwa gegen $f'$, und wir erhalten $g = Tf'$, also $g \in \mathcal{R}(T)$. 2. Fall: Die Folge $(||f'_n||)$ ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(f'_{n_j})$ von $(f'_n)$ derart, daß $||f'_{n_j}|| > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $||f'_{n_j}|| \to +\infty$, $j \to \infty$, $Tf'_{n_j} = gn_j \to g$, $j \to \infty$. Also gilt

$$\frac{g_{n_j}}{||f'_{n_j}||} = T\frac{f'_{n_j}}{||f'_{n_j}||} \to 0, \ j \to \infty.$$

Sei $\varphi_{n_j} = f'_{n_j}/||f'_{n_j}||$, $j \in \mathbb{N}$. Dann haben wir $||\varphi_{n_j}|| = 1$, $T\varphi_{n_j} \to 0$, $j \to \infty$. Wegen $||f'_{n_j} - h|| \geq ||f'_{n_j}||$, $h \in \mathfrak{N}(T)$, folgt $||\varphi_{n_j} - h|| \geq 1$, $h \in \mathfrak{N}(T)$. Wiederum wegen der Vollstetigkeit von $V$ gibt es eine Teilfolge $(\varphi'_{n_j})$ von $(\varphi_{n_j})$ mit $V\varphi'_{n_j} \to \psi$, $j \to \infty$. Gleichzeitig ist $T\varphi'_{n_j} = \varphi'_{n_j} - V\varphi'_{n_j} \to 0$, $j \to \infty$, so daß $\varphi'_{n_j} \to \psi$, $j \to \infty$, $T\psi = 0$, $||\psi - h|| \geq 1$, $h \in \mathfrak{N}(T)$. Da $\psi$ selbst in $\mathfrak{N}(T)$ liegt, ist dies ein Widerspruch, und der zweite Fall kann somit nicht eintreten. $\square$

Wir setzen $\mathfrak{M}_k = T^k(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T^k)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_k = \{x | x \in \mathcal{B}, T^k x = 0\} = \mathfrak{N}(T^k)$. Für $k = 0$ sei $\mathfrak{M}_0 = \mathcal{B}$, $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$. Hierbei ist natürlich $T$ wie in Hilfssatz IV.7.3.

Aus der schon verwendeten Formel

$$T^k = (I - V)^k = I + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-V)^l$$

folgt mit Hilfssatz IV.7.3 sofort, daß $\mathfrak{M}_k$ abgeschlossen ist. $\mathfrak{N}_k$ ist trivialerweise abgeschlossen. Für die Teilräume $\mathfrak{M}_k$ und $\mathfrak{N}_k$ gilt die folgende Aussage:

**Hilfssatz IV.7.4:** *Es gibt zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ derart, daß*

$$\mathcal{B} = \mathfrak{M}_0 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}_{m+1} = \mathfrak{M}_{m+2} = \dots,$$

$$\{0\} = \mathfrak{N}_0 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_{n+2} = \dots$$

*ist, d.h. die absteigende Folge $\{\mathfrak{M}_k\}$ wird stationär, und die aufsteigende Folge $\{\mathfrak{N}_k\}$ wird stationär.*

**Beweis:** Im Beweis des Satzes IV.6.1 hatten wir bereits gesehen, daß $\mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_{k+1}$ ist, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Voraussetzung des Satzes IV.6.1, daß die Gleichung $Tx = 0$ in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$ hat, war dabei nicht benutzt worden. Ebenfalls ohne Benutzung dieser Voraussetzung hatten wir dort den Fall $\mathfrak{M}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_2 \underset{\neq}{\supset} \dots$ ausgeschlossen. Wieder ohne Benutzung der genannten Voraussetzung hatten wir im Beweis von Satz IV.6.1 gezeigt, daß das Auftreten einer Gleichheit $\mathfrak{M}_l = \mathfrak{M}_{l+1}$ für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nach sich zieht, daß $\mathfrak{M}_l = \mathfrak{M}_{l+1} = \mathfrak{M}_{l+2} = \dots$ ist. Damit ist der Fall der Räume $\mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erledigt. Im Beweis des Satzes IV.6.2 hatten wir schon gesehen, daß $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N}_{k+1}$ ist, $k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Die Voraussetzung des Satzes IV.6.2, daß die Gleichung $Tx = 0$ eine von Null verschiedene Lösung besitzt, war dabei nicht benutzt worden. Ebenfalls ohne Benutzung dieser Voraussetzung hatten wir dort den Fall $\mathfrak{N}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_2 \underset{\neq}{\subset} \dots$ ausgeschlossen. Sei nun $\mathfrak{N}_l = \mathfrak{N}_{l+1}$ für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gibt es nun unendlich viele Indizes $l_1, l_2, \dots$ aus $\mathbb{N}$ derart, daß $\mathfrak{N}_{l_j} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_{l_j+1}$ ist, so kann man wie im Beweis des Satzes IV.6.2 eine Folge $(y_{l_j+1})$ finden mit

$$y_{l_j+1} \in \mathfrak{N}_{l_j+1},\ ||y_{l_j+1}|| = 1,$$

$$||y_{l_j+1} - f|| \geq \frac{1}{2},\ f \in \mathfrak{N}_{l_j}.$$

Sei $k > p$. Dann ist $Vy_{l_k+1} - Vy_{l_p+1} = y_{l_k+1} - (Ty_{l_k+1} + y_{l_p+1} - Ty_{l_p+1})$. Nun folgt $T^{l_k}(Ty_{l_k+1} + y_{l_p+1} - Ty_{l_p+1}) = T^{l_k+1}y_{l_k+1} + T^{l_k-l_p-1}T^{l_p+1}y_{l_p+1} + T^{l_k-l_p}T^{l_p+1}y_{l_p+1} = 0$, so daß $||Vy_{l_k+1} - Vy_{l_p+1}|| \geq \frac{1}{2}$ ist. Also ist $||Vy_{l_k+1} - Vy_{l_p+1}|| \geq \frac{1}{2}$, $k \neq p$, $k, p \in \mathbb{N}$. Da wegen der Vollstetigkeit von $V$ die Folge $(Vy_{l_j+1})$ eine konvergente Teilfolge enthält, ist dies ein Widerspruch. Also ist von einem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ an $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_{n+2} = \dots$ □

Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, daß $m = n$ ist. Aufgrund der Sätze IV.6.1 und IV.6.2 wissen wir bereits, daß $m = 0$ dann und nur dann eintritt, wenn $n = 0$ ist.

**Hilfssatz IV.7.5:** *Sei $m$ die in Hilfssatz IV.7.4 eingeführte Größe. Schränken wir $T$ auf $\mathfrak{M}_m$ ein, so ist die Einschränkung $T|\mathfrak{M}_m : \mathfrak{M}_m \to \mathfrak{M}_m$ ein Element aus $L(\mathfrak{M}_m)$, $T|\mathfrak{M}_m$ ist injektiv und surjektiv.*

**Beweis:** $\mathfrak{M}_m$ ist, da abgeschlossen, ein Banachraum. Daß $T(\mathfrak{M}_m) = \mathfrak{M}_m$ ist, folgt aus Hilfssatz IV.7.4. Also ist $T|\mathfrak{M}_m$ surjektiv. Sei $(T|\mathfrak{M}_m)f = 0$ (für ein $f \in \mathfrak{M}_m$). Dann ist nach Satz IV.6.2 auch $f = 0$. □

**Hilfssatz IV.7.6:** *Sei $\mathfrak{M} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die in Hilfssatz VI.7.3 eingeführte Größe. Dann ist $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}_{m+1} = \dots$ d.h. $n \leq m$.*

**Beweis:** Sei $f \in \mathfrak{N}_{m+1}$. Dann ist $T^{m+1}f = 0$. Sei $\varphi = T^m f$. Dann ist

$T\varphi = 0$ und $\varphi \in \mathfrak{M}_m$. Nach Hilfssatz IV.7.5 folgt: $\varphi = 0$, also $T^m f = 0$, also $f \in \mathfrak{N}_m$, also $\mathfrak{N}_{m+1} \subset \mathfrak{N}_m$. Da wir schon wissen, daß $\mathfrak{N}_m \subset \mathfrak{N}_{m+1}$ ist, folgt $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}_{m+1}$. Ebenso zeigt man $\mathfrak{N}_{m+1} = \mathfrak{N}_{m+2} = \ldots$, was sich der Leser selbst überlegen möge. □

**Hilfssatz IV.7.7:** *Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die in Hilfssatz IV.7.3 eingeführte Größe. Sei $m \geq 1$. Dann gilt $\mathfrak{N}_{m-1} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_m$.*

**Beweis:** Es ist $\mathfrak{M}_{m-1} \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_m$, d.h. es gibt ein $f \in \mathfrak{M}_{m-1}$ mit $f \notin \mathfrak{M}_m$. Sei $g = Tf$. Dann ist $g \in \mathfrak{M}_m$ und es gibt nach Hilfssatz IV.7.5 ein $h \in \mathfrak{M}_m$ mit $Tf = Th$, d.h. $T(f-h) = 0$. Mit $\varphi = f - h$ gilt also $T\varphi = 0$, $\varphi \neq 0$ (da $f \notin \mathfrak{M}_m$) und $\varphi \in \mathfrak{M}_{m-1}$. Also ist $\varphi = T^{m-1}\psi$ mit einem $\psi \in \mathcal{B} - \{0\}$. Insbesondere folgt $T^m\psi = T\varphi = 0$, also $\psi \in \mathfrak{N}_m$, aber $\psi \notin \mathfrak{N}_{m-1}$, da $\varphi \neq 0$ war. □

Zusammen mit unserer Bemerkung vor Hilfssatz IV.7.4 ergibt sich, daß stets $m = n$ ist. Sei

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_m,$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_m.$$

Dann ist

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k,$$
$$\mathfrak{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{N}_k,$$

und $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sind invariante Teilräume bezüglich $T$, d.h. $T(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$, $T(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$, genauer gilt sogar $T(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ (s. Hilfssatz IV.7.5). Der Rieszsche Zerlegungssatz besteht nun in der folgenden Aussage:

**Satz IV.7.1 (Rieszscher Zerlegungssatz):** *Es ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\}$, wobei $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die soeben eingeführten Teilräume von $\mathcal{B}$ sind. Jede $f \in \mathcal{B}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form*

$$f = f_1 + f_2$$

*mit $f_1 \in \mathfrak{N}$, $f_2 \in \mathfrak{M}$ darstellen.*

**Beweis:** Sei $f \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$. Dann ist $f = T^m\varphi$ mit einem $\varphi \in \mathcal{B}$. Weiter ist $T^m f = 0$, also $T^{2m}\varphi = 0$. Also ist $\varphi$ aus $\mathfrak{N}_{2m} = \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}$, also $T^m\varphi = 0$, also $f = 0$. Sei nun $f \in \mathcal{B}$,

$$f = f_1' + f_2' \text{ mit } f_1' \in \mathfrak{N},\ f_2' \in \mathfrak{M}, \text{ und}$$

$$f = f_1'' + f_2'' \text{ mit } f_1'' \in \mathfrak{N},\ f_2'' \in \mathfrak{M},$$

so ist $0 = f_1' - f_1'' + f_2' - f_2''$, d.h. $f_1' - f_1'' = -(f_2' - f_2'')$, also $f_1' - f_1''$, $f_2' - f_2'' \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$, also $f_1' = f_1''$, $f_2' = f_2''$. Die Zerlegung ist also eindeutig, wenn es sie gibt. Um die Existenz der Zerlegung zu zeigen, beachte man, daß für $f \in \mathcal{B}$ jedenfalls $T^m f \in \mathfrak{M}$ ist. Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{2m}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $T^n f = T^{2n}\varphi$, so daß $T^m(f - T^m\varphi) = 0$ ist. Also ist $f - T^m\varphi \in \mathfrak{N}$, $f - T^m\varphi = \psi$ mit einem $\psi \in \mathfrak{N}$. Setzt man $f_1 = \psi$, $f_2 = T^m\varphi$, so ergibt sich die gewünschte Zerlegung. $\square$

Während wir im Fall eines vollstetigen hermiteschen Operators im Hilbertraum uns in III.6 einen vollständigen Überblich über die Gesamtheit der Eigenwerte verschafft haben, ist dies im Fall eines vollstetigen Operators in einem Banachraum nicht möglich. Doch lassen auch hier einige Aussagen beweisen, die aus dem Rieszschen Zerlegungssatz folgen. Wir beweisen zunächst

**Satz IV.7.2:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei $V$ ein vollstetiger Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{D}(V) = \mathcal{B})$. Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die vorhin eingeführten Teilräume von $\mathcal{B}$. Dann gibt es zwei in $\mathcal{B}$ vollstetige Operatoren $S$ und $R$ mit folgenden Eigenschaften: $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(R) = \mathcal{B}$,*

$$Sf = Vf,\ f \in \mathfrak{N}, \tag{IV.7.1}$$

$$Sf = 0,\ f \in \mathfrak{M}, \tag{IV.7.2}$$

$$Rf = 0,\ f \in \mathfrak{N}, \tag{IV.7.3}$$

$$Rf = Vf,\ f \in \mathfrak{M}. \tag{IV.7.4}$$

*Ferner ist $S(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{N}$ und $R(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{M}$. Außerdem gilt: $V = S + R$, $SR = RS = 0$. Die Operatoren $S, R$ sind durch (IV.7.1) bis (IV.7.4) eindeutig bestimmt.*

**Beweis:** Zunächst zur Eindeutigkeit: Sei $f \in \mathcal{B}$. Dann ist nach Satz IV.7.1

$$\text{(IV.7.5)} \qquad f = f_1 + f_2 \text{ mit } f_1 \in \mathfrak{N},\ f_2 \in \mathfrak{M},$$

und $f_1, f_2$ sind eindeutig bestimmt. Aus (IV.7.2) folgt $Sf = Sf_1$, aus (IV.7.3) folgt $Rf = Rf_2$, so daß durch die Forderungen (IV.7.1), (IV.7.4) die Größen $Sf, Rf$ vollständig bestimmt sind. Nun zur Existenz: Ordnen wir jedem $f \in \mathcal{B}$ das Element $f_1$ bzw. $f_2$ in der Zerlegung (IV.7.5) zu, so erhalten wir zwei lineare Operatoren $P$ und $Q$ in $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(Q) = \mathcal{B}$. Offenbar können wir Hilfssatz IV.7.2 auf die Teilräume $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ anwenden (wir hatten bereits vor Hilfssatz IV.7.4 bemerkt, daß jeder Raum $\mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ abgeschlossen ist). Dies liefert

$$||f|| = ||f_1 + f_2|| \geq c(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})(||f_1|| + ||f_2||),\ f \in \mathcal{B},$$

mit einer positiven Konstante $c(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$. Also ist $||Pf|| \leq (1/c(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})) \cdot ||f||$, $||Qf|| \leq (1/c(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}))||f||$. Somit sind $P, Q$ aus $L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Sei nun

$$S = VP,\ R = VQ.$$

Nach Hilfssatz III.4.10 sind $S, R$ vollstetig ($\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(R) = \mathcal{B}$). Wegen $I = P + Q$ ist $V = S + R$. Wegen $Vx = Tx - x$, $x \in \mathcal{B}$, wobei wieder $T = I - V$ ist, folgt $V(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$, $V(\mathfrak{N}) \subset (\mathfrak{N})$. Also ist $Sf = Vf_1 \in \mathfrak{N}$, $Rf = Vf_2 \in \mathfrak{M}$; offenbar ist $Sf = Sf_2 = VPf_2 = 0$, $f \in \mathfrak{M}$, $Rf = Rf_1 = VQf_1 = 0$, $f \in \mathfrak{N}$. Wegen $VP(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{N}$ folgt $RS = 0$, wegen $VQ(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$ folgt $SR = 0$. □

**Satz IV.7.3:** *Sei $R$ der in Satz IV.7.2 eingeführte Operator im Banachraum $\mathcal{B}$. Dann hat $I - R$ einen in $\mathcal{B}$ definierten beschränkten inversen Operator. Sei $S$ der ebenfalls in Satz IV.7.2 eingeführte Operator in $\mathcal{B}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{N}((I - V)^k) = \mathfrak{N}((I - S)^k),\ \mathcal{R}((I - V)^k) = \mathcal{R}((I - S)^k),\ k \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Sei $f \in \mathcal{B}$, $(I - R)f = 0$. Dann ist $f = Rf$. Wegen $R(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{M}$ ist $f \in \mathfrak{M}$. Also ist $f = Rf = VQf = Vf$, $(I - V)f = Tf = 0$ und $f \in \mathfrak{M}$. Aus Hilfssatz IV.7.5 folgt: $f = 0$. Also ist $I - R$ eineindeutig. Da $R$ vollstetig ist, folgt aus Satz IV.6.1, daß der inverse Operator $(I - R)^{-1}$ in $\mathcal{B}$ erklärt und beschränkt ist. Wir haben weiter

$$(I - R)(I - S) = I - V = (I - S)(I - R),$$

also

$$(I - V)^k = (I - R)^k (I - S)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Nun hat mit $I - R$ auch $(I - R)^k$ einen in $\mathcal{B}$ definierten beschränkten inversen Operator. Die Inverse ist

$$((I - R)^k)^{-1} = (I - R)^{-k} = \prod_{j=1}^{k} (I - R)^{-1}$$

Für $x \in \mathcal{B}$ ist somit $(I - V)^k x = 0$ dann und nur dann, wenn $(I - S)^k x = 0$ ist. Also ist

$$\mathfrak{N}((I - V)^k) = \mathfrak{N}((I - S)^k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Gleichzeitig haben wir

$$(I - V)^k = (I - S)^k (I - R)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Sei $g \in \mathcal{R}((I - V)^k)$, d.h. $g = (I - V)^k f$ mit einem $f \in \mathcal{B}$. Dann ist $g = (I - S)^k((I - R)^k f)$, also $g \in \mathcal{R}((I - S)^k)$. Sei nun umgekehrt $g \in \mathcal{R}((I - S)^k)$, d.h. $g = (I - S)^k f$ mit einem $f \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\begin{aligned} g &= (I - S)^k (I - R)^k ((I - R)^{-k} f), \\ &= (I - V)^k ((I - R)^{-k} f), \end{aligned}$$

also $g \in \mathcal{R}((I - V)^k)$. Damit ist Satz IV.7.3 bewiesen. □

**Satz IV.7.4:** *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_\lambda(\widetilde{V}) = I - \lambda\widetilde{V}$, $\widetilde{V}$ ein vollstetiger Operator in einem Banachraum $\mathcal{B}(\mathcal{D}(\widetilde{V}) = \mathcal{B})$. Sei $V$ ein vorgegebener vollstetiger Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{D}(V) = \mathcal{B})$, sei $S$ der in Satz IV.7.2 eingeführte vollstetige Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{D}(S) = \mathcal{B})$. Dann besitzt $T_\lambda(S)$ für $\lambda \neq 1$ einen in $\mathcal{B}$ erklärten beschränkten inversen Operator.*

**Beweis:** Offenbar hat $T_0(S) = I$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse. Sei also $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, $T_\lambda(S)f = 0$ für ein $f \in \mathcal{B}$. Dann ist $f = \lambda S f = \lambda V P f$. Da $S(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{N}$ nach Satz IV.7.2, ist $f \in \mathfrak{N}$. Weiter ist $Sf = (1/\lambda)f$, $(I - S)f = f - (1/\lambda)f = ((\lambda - 1)/\lambda)f$. Nach Satz IV.7.3 ist

$$\mathfrak{N}((I - S)^k) = \mathfrak{N}((I - V)^k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Natürlich gilt diese Gleichheit auch für die nach Hilfssatz IV.7.6 eingeführte Zahl $m$, von der wir im Augenblick annehmen, daß sie $\geq 1$ ist. Für $\widetilde{f} \in \mathfrak{N}$ folgt

$$0 = (I - V)^m \widetilde{f} = (I - S)^m \widetilde{f},$$

also folgt für das oben benutzte spezielle $f$ mit $T_\lambda(S)f = 0$ wegen $(I - S)f = ((\lambda-1)/\lambda)f$ die Beziehung

$$0 = (I-S)^m f = ((\lambda-1)/\lambda)^m f,$$

also $f = 0$. Somit ist $T_\lambda(S)$ eineindeutig, falls $\lambda \neq 1$ ist. Nach Satz IV.6.1 ist $T_\lambda(S)^{-1}$ in $\mathcal{B}$ erklärt und beschränkt. Im Fall $m = 0$ folgt $\mathfrak{N} = \{0\}$, $S = 0$, und wir sind fertig. $\square$

**Hilfssatz IV.7.7:** *Sei $V$ ein vollstetiger Operator in einem Banachraum $\mathcal{B}(\mathcal{D}(V) = \mathcal{B})$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $T_\lambda(V) = I - \lambda V$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$ eine in $\mathcal{B}$ definierte beschränkte Inverse besitzt.*

**Beweis:** Es ist $I - \lambda V = (I - \lambda R)(I - \lambda S)$. Wir zeigen zunächst: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $I - \lambda R$ in $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse besitzt. Zunächst hat $I - R$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse $(I-R)^{-1}$ wie in Satz IV.7.3 bewiesen wurde. Wir betrachten die Reihe

$$\text{(IV.7.6)} \qquad \mathcal{R}(\widetilde{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\widetilde{\lambda} - 1)^n [(I-R)^{-1}]^{n+1},$$

die in der Norm von $L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ konvergiert, sofern $|\widetilde{\lambda} - 1| < \frac{1}{||(I-R)^{-1}||}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{R}(\widetilde{\lambda}) \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, sofern $|\widetilde{\lambda} - 1| < \frac{1}{||(I-R)^{-1}||}$ ist. Wörtlich wie bei der geometrischen Reihe zeigt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\widetilde{\lambda} - 1)^n [(I-R)^{-1}]^n = (I - (\widetilde{\lambda} - 1) \cdot (R - I)^{-1})^{-1}$$

Also ist $\mathcal{R}(\widetilde{\lambda}) = (I-R)^{-1}(I - (\widetilde{\lambda} - 1)(R - I)^{-1})^{-1} = (\widetilde{\lambda} I - R)^{-1} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \cdot (I - \frac{1}{\widetilde{\lambda}} R)^{-1}$, $\widetilde{\lambda}$ wie oben, $\widetilde{\lambda} \neq 0$. Setzen wir $\lambda = \frac{1}{\widetilde{\lambda}}$, so erkennen wir, daß $(I - \lambda R)^{-1}$ als beschränkter, überall in $\mathcal{B}$ erklärter Operator existiert, sofern $|\lambda - 1| < (1/(2 + 2||(I-R)^{-1}||))$ ist. Wegen

$$(I - \lambda V)^{-1} = (I - \lambda S)^{-1}(I - \lambda R)^{-1}, \ 0 < |\lambda - 1| < \frac{1}{2 + 2||(I-R)^{-1}||},$$

wobei $(I - \lambda S)^{-1}$ nach Satz IV.7.4 für $\lambda \neq 1$ als beschränkter, überall in $\mathcal{B}$ erklärter Operator existiert, folgt jetzt die Aussage des Hilfssatzes. $\square$

Beim Beweis der Invertierbarkeit von $I - \lambda R$, $|\lambda - 1| < \varepsilon$, hatten wir von der Vollstetigkeit von $R$ keinen Gebrauch gemacht. Es gibt nun noch einen anderen Beweis, der die Vollstetigkeit benutzt. Nach Satz IV.7.3 ist

$$||(I-R)f|| \geq a||f||,\ f \in \mathcal{B},$$

mit einer positiven Konstante $a$. Also haben wir

$$\begin{aligned} ||(I-\lambda R)f|| &= ||(I-R)f + (1-\lambda)Rf||, \\ &\geq a||f|| - \varepsilon||R||||f|| \geq \frac{a}{2}||f||, \end{aligned}$$

sofern $\varepsilon = a/2||R||$ gesetzt wird und $|1-\lambda| < \varepsilon$ ist. Mit der Vollstetigkeit von $R$ und Satz IV.6.1 folgt nun, daß $(I-\lambda R)^{-1}$ als beschränkter, in ganz $\mathcal{B}$ definierter Operator existiert. Es ging uns bei dem Beweis des Hilfssatzes IV.7.7 auch darum, die Entwicklung (IV.7.6) einzuführen (Resolventenreihe). Diese Entwicklung ist ein Spezialfall der sogenannten Neumannschen Reihe. Sei $A \in L(\mathcal{B},\mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ ein Banachraum, und sei $||I-A|| < 1$. Dann ist durch

$$\text{((IV.7.7)} \qquad \mathcal{R}(A) = \sum_{n=0}^{\infty}(I-A)^n$$

ein Element aus $L(\mathcal{B},\mathcal{B})$ gegeben, da die Reihe rechts im Banachraum $L(\mathcal{B},\mathcal{B})$ wegen $||I-A|| < 1$ konvergiert. Sei

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}(I-A)^n,\ N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Analog zur geometrischen Reihe folgt

$$AS_N = S_N A = I - (I-A)^{N+1},$$

also, indem man $N$ gegen $+\infty$ streben läßt

$$A\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A)A = I,$$

so daß $A$ eine in ganz $\mathcal{B}$ definierte beschränkte Inverse besitzt, nämlich $\mathcal{R}(A)$, und $\mathcal{R}(A)$ ist durch die Reihe in (IV.7.7) gegeben.

Wir kehren nun zu den vollstetigen Operatoren zurück.

**Definition IV.7.1:** *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei $A$ ein linearer Operator in $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A$ genau dann, wenn es ein $f \in \mathcal{D}(A)$ gibt mit $f \neq 0$, $Af = \lambda f$.*

**Satz IV.7.5:** *Sei $V$ ein vollstetiger Operator in einem Banachraum $\mathcal{B}(\mathcal{D}(V) = \mathcal{B})$. Zu jedem Eigenwert $\widehat{\lambda} \neq 0$ gibt es eine Kreisscheibe $\{z||z-\widehat{\lambda}| < \delta\}$*

*mit $\delta > 0$ derart, daß in dieser Kreisscheibe kein weiterer Eigenwert von $V$ liegt. Insbesondere besitzen die Eigenwerte von $V$ keinen Häufungspunkt $\neq 0$.*

**Beweis:** Sei also $\widehat{\lambda}$ Eigenwert von $V$, $\widehat{\lambda} \neq 0$. Sei $\widehat{V} = (1/\widehat{\lambda})V$. Dann ist auch $\widehat{V}$ vollstetig. Nach HIlfssatz IV.7.7 hat $T_\lambda(\widehat{V})$ in einer punktierten Kreisscheibe $\{\lambda | 0 < |\lambda - 1| < \varepsilon\} (1 > \varepsilon > 0)$ eine beschränkte Inverse $T_\lambda(\widehat{V})^{-1}$, $\mathcal{D}(T_\lambda(\widehat{V})^{-1}) = \mathcal{B}$. Also hat $\widehat{V}$ in $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$ keinen Eigenwert, also auch $V$ nicht in $0 < |z - \widehat{\lambda}| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} |\widehat{\lambda}|$. □

**Satz IV.7.6 (Natur des Spektrums):** *$S(V)$ von $V$, $V$ vollstetig: $\widehat{\lambda} \in S(V)$, $\widehat{\lambda} \neq 0$ Dann ist $\widehat{\lambda}$ isolierter Punkt von $S(V)$ und Eigenwert endlicher Vielfachheit.*

**Beweis:** Nach Hilfssatz IV.7.7 (vgl. Beweis vorher) existiert $(\frac{\widehat{\lambda}}{\lambda} - V)^{-1} \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ für $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$. Ist $|z = \frac{\widehat{\lambda}}{\lambda} - \widehat{\lambda}| < |\widehat{\lambda}| \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ so folgt $0 < |\frac{1}{\lambda} - 1| < \varepsilon/(1+\varepsilon)$, $1 - 1/|\lambda| < \varepsilon/(1+\varepsilon)$, $|\lambda| < 1 + \varepsilon$, $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$. □