RUSSELLŮV PARADOX

Tím, kdo v podstatě sám založil celou teorii množin, byl německý matematik Georg Cantor. Rychle se ukázalo, že množiny, respektive třídy (pro naše účely nejsou rozdíly mezi oběma pojmy podstatné) jsou pro logiku tak základní a jsou s ní tak propojeny, že jakákoli snaha budovat matematiku na základech logiky nutně vedla k tomu, že byla budována i na axiomatickém základě teorie množin.

Třída nebo množina jsou jednoduše souborem objektů, které navzájem nemusí mít žádný vztah. Může existovat například třída, která obsahuje všechny následující položky: každodenní seriály, které se vysílaly v roce 2003, Napoleonova bílého koně a pojem opravdové lásky. Objekty, které patří k určité třídě, se nazývají *prvky* této třídy.

Většina tříd, s nimiž jsme se zřejmě někdy setkali, není prvkem sebe sama. Například třída všech sněhových vloček není sama sněhová vločka; třída všech starožitností není sama starožitnost, a tak dále. Některé třídy však prvky sebe samých jsou. Například třída „všechno, co není starožitnost" je prvkem sebe samé, jelikož rozhodně není starožitností. Také třída všech tříd je prvkem sebe samé, protože je očividně třídou. Jak je to ale s třídou „všech tříd, které nejsou prvky sebe samých"?[15] Označme si ji jako *R*. Je *R* prvkem sebe samé (*R*), nebo není? Je jasné, že *R* nemůže patřit k *R*, protože kdyby patřila, nesplnila by definici členství v *R*. Pokud by však *R* sama k sobě nepatřila, pak podle téže definice by musela být prvkem *R*. Stejně jako u situace s holičem tedy zjišťujeme, že třída R současně patří i nepatří k *R*, což je ovšem logický spor. Tak vypadal paradox, o němž Russell napsal Fregemu. Jeho antinomie podkopala celý proces, jímž by se daly určit třídy nebo množiny, takže byla pro Fregeho program smrtící ranou. Frege sice podnikl některé zoufalé pokusy o nápravu, úspěšný však nebyl. Důsledek byl katastrofální – formální logika, která se měla stát pevným základem matematiky, byla najednou sama ohrožena ochromujícími rozpory.

Zhruba v té době, kdy Frege rozvíjel svůj logický program, zkoušel italský matematik a logik Giuseppe Peano poněkud odlišný přístup. Peano chtěl založit aritmetiku na axiomatických základech. Jeho výchozím bodem proto byla formulace hutné a jednoduché sady axiomů. Jeho první tři axiomy zní:

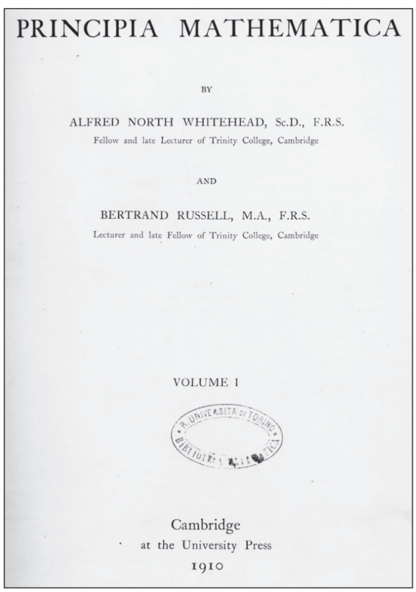
1. Nula je číslo.
2. Následníkem každého čísla je rovněž číslo.
3. Žádná dvě čísla nemají stejného následníka.

Obr. 50 Alfred North Whitehead.

Problém byl ovšem v tom, že i když Peanův axiomatický systém dovedl reprodukovat známé zákony aritmetiky (po zavedení dodatečných definic), nebylo v něm nic, co by identifikovalo jednotlivá přirozená čísla.

Další krok uskutečnil Bertrand Russell. Tento britský logik trval na tom, že Fregeho původní myšlenka – odvodit aritmetiku z logiky – je i nadále správnou cestou. Ve snaze zdolat tento těžký úkol vytvořil Russell spolu s Alfredem Northem Whiteheadem (obrázek 50) neuvěřitelné mistrovské dílo logiky – přelomová třísvazková *Principia Mathematica.*[16] Snad s výjimkou Aristotelova *Organonu* to bylo pravděpodobně nejvlivnější dílo v dějinách celé logiky (na obrázku 51 je titulní stránka prvního vydání).

Russell a Whitehead v *Principiích* obhajovali názor, podle něhož je matematika v podstatě rozpracováním zákonů logiky a mezi oběma obory neexistuje jasná hranice.[17] Aby ovšem dospěli k vnitřně bezespornému popisu, museli nějakým způsobem vyřešit antinomie čili paradoxy (vedle Russellova parado-



PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Obr. 51 První vydání Russelovy a Whiteheadovy knihy *Principia Mathematica.*

xu se objevily ještě další). To vyžadovalo obratné žonglování s logickými pojmy. Russell tvrdil, že tyto paradoxy vznikají jen kvůli „bludnému kruhu“, v němž se pojmy definují ve vztahu ke třídám objektů, které samy v sobě obsahují definovaný pojem. Russell k tomu uvedl: „Jestliže říkám ‚Napoleon měl všechny vlastnosti, které dělají velkého generála‘, musím definovat ‚vlastnosti‘ tak, aby nezahrnovaly to, co nyní říkám, to znamená, že vlastnost ‚mít všechny vlastnosti, které dělají velkého generála‘ mezi vlastnosti v tomto smyslu předpokládané patřit nesmí.“

Aby se svému paradoxu vyhnul, navrhl Russell *teorii typů*,[18] v níž každá třída (nebo množina) patří k vyššímu logickému typu než třída, k níž náleží její prvky. Například všichni hráči fotbalového klubu Manchester United budou třídou typu 0. Sám tým Manchester United, který je třídou hráčů, bude třídou typu 1. Anglická nejvyšší liga, která je třídou fotbalových klubů, bude patřit k typu 2; anglický systém lig bude třídou typu 3, a tak dále. V takové soustavě pouhá zmínka o „třídě, která je prvkem sebe sama“ není pravdivá ani nepravdivá, prostě nemá žádný význam. Díky tomu se zde s antinomiemi typu Russellova paradoxu nikdy nesetkáme.

Není pochyb, že *Principia* byla v logice kolosálním počinem, avšak za dlouho hledaný základ celé matematiky se dala považovat jen stěží. Russellovu teorii typů mnozí považovali za poněkud umělé řešení problému paradoxů, které navíc vytvářelo znepokojivě složitou spleť různých důsledků.[19] Například racionální čísla (vyjádřitelná zlomky) se v tomto systému dostala do vyššího typu než přirozená čísla. Russell s Whiteheadem se chtěli těmto komplikacím vyhnout a zavedli další axiom známý jako axiom reducibility; ten ovšem sám vyvolal další spory a nedůvěru.

Elegantnější způsob, jak paradoxy odstranit, nakonec navrhli matematikové Ernst Zermelo a Abraham Fraenkel. V podstatě se jim podařilo uvést teorii množin pomocí axiomů do vnitřně bezesporné podoby a v tomto systému reprodukovat většinu výsledků této teorie. Na první pohled se zdálo, že se tím alespoň zčásti plní sen platoniků. Kdyby byly teorie množin a logika skutečně dvěma stranami téže mince, pak by nalezení pevného základu teorie množin znamenalo i vybudování pevného základu logiky. A pokud opravdu většina matematiky vychází z logiky, pak by to matematice zajišťovalo určitý druh objektivní jistoty, což by se dalo využít i k vysvětlení univerzálních schopností matematiky. Platonikům však bohužel nebylo přáno slavit příliš dlouho, jelikož měli být brzy zasaženi další neblahou ranou. Přišla z již známého směru.

NEEUKLEIDOVSKÁ KRIZE UŽ JE TU ZAS?

V roce 1908 kráčel německý matematik Ernst Zermelo (1871–1953)[20] cestou velmi podobnou té, kterou jako první prošlapal Eukleides na přelomu třetího a čtvrtého století před naším letopočtem. Eukleides formuloval několik nedokázaných, avšak zdánlivě zjevných postulátů o bodech a přímkách a na základě těchto axiomů pak vybudoval celou geometrii. Zermelo, který již v roce 1900 objevil Russellův paradox nezávisle na Rusellovi, navrhl způsob, jímž by se dala teorie množin vystavět na podobném axiomatickém základu. Russellův paradox jeho teorie překonala pečlivým výběrem stavebních principů, s jejichž pomocí byly eliminovány pojmy typu „množina všech množin“, které vedly k vnitřním rozporům. Zermelův systém v roce 1922 rozšířil izraelský matematik Abraham Fraenkel (1891–1965), čímž vznikla takzvaná Zermelo-Fraenkelova teorie množin (další významné změny doplnil v roce 1925 John von Neumann).[21] Bylo by to téměř dokonalé (bylo třeba ještě dokázat bezespornost teorie), kdyby nepřetrvaly některé sžíravé pochybnosti. Byl tu zejména jeden axiom – *axiom výběru* – který stejně jako pověstný Eukleidův „pátý postulát“ působil matematikům těžké trápení. Axiom výběru zjednodušeně řečeno tvrdí:[22] jestliže *X* je souborem (množinou) neprázdných množin, můžeme vybrat z každé množiny náležící k *X* právě po jednom prvku a ty vytvoří novou množinu *Y*. Snadno zjistíme, že toto tvrzení je pravdivé, pokud soubor *X* nebude nekonečný. Máme-li kupříkladu sto krabiček a v každé je nejméně jedna kulička, bez potíží vybereme po jedné kuličce z každé krabičky a sestavíme tím novou množinu *Y*, v níž bude ona stovka kuliček. V takovém případě žádný zvláštní axiom nepotřebujeme a můžeme lehce dokázat, že výběr je možný. Tvrzení platí i pro nekonečné soubory *X*, pokud budeme přesně specifikovat, jakým způsobem výběr provedeme. Představme si například nekonečný soubor neprázdných množin přirozených čísel. Prvky takového souboru mohou být množiny jako {2, 6, 7}, {1, 0}, {346, 5, 11, 1257}, {všechna přirozená čísla mezi 381 a 10 4578}, a tak dále. V každé množině přirozených čísel vždy existuje jeden prvek, který je nejmenší. Náš výběr by tedy mohl být popsán následujícím specifickým způsobem: „Z každé množiny vybereme nejmenší prvek.“ Tímto konkretizováním se můžeme obecnému axiomu výběru opět vyhnout. Problém nekonečných souborů vyvstane v případech, kdy výběr definovat nemůžeme. V takové situaci proces výběru nikdy nekončí a existence takové množiny, která se skládá z právě jednoho prvku z každé množiny souboru *X*, se stává pouze otázkou víry.

Axiom výběru od svého počátku vyvolával mezi matematiky značné spory. Skutečnost, že axiom ustavuje existenci určitých matematických objektů (výběrů), aniž poskytuje jediný hmatatelný příklad takového objektu, vyvolávalo nelibost zejména u zastánců školy myšlení zvané *konstruktivismus* (filozoficky spřízněné s intuicionismem, viz výše v této kapitole). Konstruktivisté tvrdili, že cokoli, co existuje, by mělo být také explicitně zkonstruovatelné. Axiomu výběru se raději většinou vyhýbali i ostatní matematici a ze Zermelo-Frankaelovy teorie množin využívali jen ostatní axiomy.

Vzhledem k citlivě vnímaným nedostatkům axiomu výběru začali matematici přemýšlet, zda by se tento axiom dal pomocí ostatních axiomů buď dokázat, nebo vyvrátit. Opakovala se tak téměř do písmene historie Eukleidova pátého axiomu. Částečná odpověď konečně přišla ke konci 30. let. Kurt Gödel (1906–78), jeden z nejvlivnějších logiků všech dob, dokázal, že axiom výběru jakož i další slavná domněnka, *hypotéza kontinua* nastolená zakladatelem teorie množin Georgem Cantorem,[23] jsou konzistentní s ostatními axiomy Zermelo-Fraenkelovy teorie. To znamená, že ani jednu z obou hypotéz nelze vyvrátit pomocí jiných standardních axiomů teorie množin. Dodatečné důkazy, které roku 1963 předložil americký matematik Paul Cohen (1934 až 2007, zemřel bohužel v době práce na této knize),[24] potvrdily, že axiom výběru a hypotéza kontinua jsou na sobě zcela nezávislé. Jinak řečeno, axiom výběru nelze dokázat ani vyvrátit z jiných axiomů teorie množin. Stejně tak se pomocí téhož souboru axiomů nedá dokázat a vyvrátit ani hypotéza kontinua – a to ani kdyby se použil axiom výběru.

Tento vývoj měl dramatické filozofické důsledky. Stejně jako u neeukleidovských geometrií 19. století došlo k tomu, že neexistovala jediná definitivní teorie množin, ale hned nejméně čtyři! Na základě odlišných předpokladů o nekonečných množinách bylo možné dojít k navzájem neslučitelným teoriím množin. Například s předpokladem, že platí jak axiom výběru, tak hypotéza kontinua, dojdeme k jedné verzi, zatímco když budeme předpokládat, že žádná z obou domněnek neplatí, budeme pracovat s úplně jinou množinovou teorií. Předpoklad platnosti jednoho z obou axiomů a negace druhého pak povede k dalším dvěma teoriím.

Byla to neeukleidovská krize číslo dvě, jen v horší podobě. Kvůli fundamentální roli teorie množin jako možného základu celé matematiky vypadala nyní situace pro platoniky mnohem vážněji. Pokud je skutečně možné formulovat celou řadu teorií množin jednoduše volbou jiného souboru axiomů, neznamená to snad, že matematika není ničím jiným než pouhým lidským výtvorem? Zdálo se, že formalisté už mají vítězství v kapse.