Analytische Geometrie der Kegelschnitte

Salmon, George

Leipzig, 1860

Zwöfltes Kapitel. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte.

Diese Gleichung kann geschrieben werden

$$\varrho \cos^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = m\,,$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} \vartheta = m^{\frac{1}{2}}\,,$$

und gehört somit einer Klasse von Gleichungen an, deren allgemeine Form

$$\varrho^n \cos n\vartheta = a^n$$

ist. Einige Eigenschaften derselben gedenken wir später zu entwickeln.

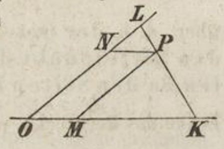
Zwölftes Kapitel.

Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte.

227. Die Methode, die Algebra auf Probleme bezüglich der Kegelschnitte anzuwenden, ist im Wesentlichen dieselbe, wie die in dem Falle der geraden Linie und des Kreises angewendete und wird keinem Leser Schwierigkeiten darbieten, der die im dritten und achten Kapitel gegebenen Beispiele sorgfältig durchgearbeitet hat. Wir wollen daher aus der grossen Anzahl von Aufgaben, die zu Oertern des zweiten Grades führen, nur einige auswählen und ihnen mehrere Eigenschaften der Kegelschnitte anreihen, welche zur Aufnahme in die vorhergehenden Entwickelungen nicht geeignet erschienen.

Aufg. 1. Eine Linie von constanter Länge bewegt sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels; man soll den durch einen festen Punkt in ihr beschriebenen Ort finden.

Fig. 76.



Bezeichnen wir PL durch n, PK durch m, und LK durch l, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken $OL = \frac{ly}{m}$ und $OK = \frac{lx}{n}$.

Mittelst der Relation

$$LK^2 = OL^2 + OK^2 - 2OL\,.\,OK \cos\omega$$

folgt daraus

$$l^2 = \frac{l^2y^2}{m^2} + \frac{l^2x^2}{n^2} - \frac{2l^2xy\cos\omega}{mn}$$

oder

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{2xy\cos\omega}{nm} = 1\,;$$

die Gleichung einer Ellipse, die den Punkt O zu ihrem Centrum hat; denn $B^2 - 4AC$ ist hier negativ, nämlich $= -\frac{4}{n^2m^2}\sin^2\omega$.

Aufg. 2. Welches ist der Ort, den der vierte Endpunkt eines Parallelogramms durchläuft, wenn zwei Seiten desselben OK, OL unveränderlich, und die zugehörige Diagonale um einen festen Punkt P drehend vorausgesetzt werden?

Aufg. 3. Welches ist der Ort der Endpunkte aller der Durchmesser, welche man parallel zur einen Diagonale eines Rechtecks in Kreisen ziehen kann, die über der andern Diagonale beschrieben werden?

Wir wählen zwei benachbarte Seiten des Rechtecks zu Coordinaten-Achsen und bezeichnen die Länge der mit der Achse der x zusammenfallenden durch m, und die Länge der in der Achse der y liegenden durch n, ferner durch a und b die Coordinaten des Centrums des Kreises, von dem wir voraussetzen, dass er über der durch den Coordinatenanfang gehenden Diagonale beschrieben sei. Die Gleichung dieses Kreises muss von der Form sein

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = o$$

und seine Mittelpunkts-Coordinaten unterliegen der Bedingung

$$m^2 + n^2 - 2am - 2bn = o.$$

Die Gleichung desjenigen Durchmessers, welcher der zweiten Diagonale des Rechtecks parallel geht, ist alsdann

$$an + bm = my + nx.$$

Wir erhalten die Gleichung des gesuchten Ortes, indem wir die Coordinaten des Mittelpunktes a, b aus den drei aufgestellten Bedingungsgleichungen eliminiren. Diese Elimination liefert

$$(m^2 + n^2)(y^2 - x^2 + mx - ny) = o,$$

oder als die Gleichung des Ortes

$$y^2 - x^2 + mx - ny = o.$$

Durch die Substitution $x + \frac{m}{2}$ für x und $y + \frac{n}{2}$ für y, d. h. bei Verlegung des Anfangspunktes in den Mittelpunkt des Rechtecks geht dieselbe in

$$x^2 - y^2 = \frac{m^2 + n^2}{4}$$

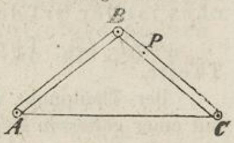
über, d. h. der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche den Mittelpunkt des Rechtecks zum Centrum und Parallelen zu den Seiten desselben zu Achsen hat. Sie geht durch die Ecken des Rechtecks, weil $x = \pm \frac{m}{2}$, $y = \pm \frac{n}{2}$ gefunden wird.

Aufg. 4. Oder der Ort des Durchschnittspunktes der auf OK, OL in denselben Punkten L, K wie in Aufg. 2 errichteten Senkrechten, d. h. der vierten Ecke des entsprechenden veränderlichen Kreisvierecks?

Aufg. 5. Welchen Ort beschreibt ein Punkt Q, der in LK so angenommen wird, dass $QK = PL$ ist?

Aufg. 6. Zwei gleiche Lineale AB, BC (Fig. 77) sind durch ein Charnier in B vereinigt, der Endpunkt A ist befestigt, indess C die gerade Linie AC durchlaufen muss; man soll den durch irgend einen festen Punkt P in BC beschriebenen Ort finden.

Fig. 77.



Aufg. 7. Man soll aus der Basis und der Differenz der Basiswinkel eines Dreiecks den Ort der Spitze desselben bestimmen.

Wir können genau wie in Artikel 124, Aufgabe 1 verfahren, wo die Summe der Basiswinkel gegeben ist. Der Ort wird als eine gleichseitige Hyperbel gefunden, welche die Basis zum Durchmesser hat. Da die Differenz der Basiswinkel gegeben ist, so ist leicht zu sehen, dass die innere und äussere Halbirungslinie des Winkels an der Spitze zu festen Linien parallel sein müssen, und diese geraden Linien sind den Asymptoten der gefundenen Hyberbel parallel.

Umgekehrt, wenn wir das Dreieck betrachten, dessen Basis der Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel ist, und dessen Spitzen in der Curve liegen, so sind die Seiten nach Art. 180 zu conjugirten Durchmessern parallel; conjugirte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel machen aber gleiche Winkel mit den Asymptoten. (Art. 175.)

Aufg. 8. Man soll aus der Basis und dem Product der Tangenten der Basiswinkel eines Dreiecks den Ort des Scheitels bestimmen.

Derselbe ist ein Kegelschnitt, dessen Scheitel mit den Basisecken zusammenfallen. Dies ist die Umkehrung von Art. 171.

Aufg. 9. Aus der Basislänge und dem Product der Tangenten der halben Basiswinkel den Ort der Spitze zu finden.

Indem man die Tangenten der Hälften der Basiswinkel in Theilen der Seiten ausdrückt, findet man, dass die Summe der Seiten gegeben ist, und dass daher der Ort eine Ellipse ist, welche die Basisecken zu Brennpunkten hat.

Aufg. 10. Welches ist der Ort des Mittelpunktes des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, von welchem die Basis und die Summe seiner Seiten bekannt sind?

Man kann aus den beiden letzten Beispielen unmittelbar erkennen, dass der Ort eine Ellipse ist, deren Scheitel die Endpunkte der gegebenen Basis sind.

Aufg. 11. Wenn der Inhalt irgend eines Dreiecks und der Winkel an der Spitze desselben der Grösse und Lage nach bestimmt sind, so soll man den Ort eines Punktes finden, der die Basis in einem gegebenen Verhältniss theilt.

Aufg. 12. Die Basis eines Dreiecks ist gegeben und der eine Basiswinkel ist doppelt so gross, als der andere; welches ist der Ort der Spitze?

Aufg. 13. Theile einen Kreisbogen in drei gleiche Theile.

Der Theilpunkt wird als der Durchschnitt des gegebenen Bogens mit einer gewissen Hyperbel bestimmt.

Aufg. 14. Die Basis und der Inhalt eines Dreiecks sind gegeben; man soll den Ort des Punktes finden, in welchem seine drei Höhenperpendikel sich schneiden.

Aufg. 15. Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises finden, welcher zwei andere Kreise berührt, oder welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt.

Aufg. 16. Die Basis eines Dreiecks und die Länge des durch die Seiten in einer gegebenen geraden Linie gebildeten Abschnitts ist gegeben; man soll den Ort der Spitze bestimmen.

Aufg. 17. Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; der Ort der dritten Ecke ist zu finden.

Aufg. 18. Zwei Ecken eines Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien, indess seine Seiten sich um feste Punkte drehen; man soll den Ort der dritten Ecke bestimmen.

Aufg. 19. Welches ist der Ort des Centrums eines Kreises, der in zwei gegebenen geraden Linien vorgeschriebene Abschnitte macht.

Aufg. 20. Ein Dreieck ABC ist einem gegebenen Kreis umschrieben, der Winkel an C ist gegeben und B bewegt sich längs einer festen geraden Linie; man soll den Ort von A finden.

Wir wenden Polar-Coordinaten an, deren Pol das Centrum des Kreises ist und deren Winkel gegen die Normale auf die feste gerade Linie gemessen werden, und bezeichnen in diesem Sinne die Coordinaten von A, B durch ϱ, ϑ; ϱ', ϑ'. Dann ist $\varrho' \cos \vartheta' = p$. Aber es ist leicht zu sehen, dass der Winkel AOB gegeben ist ($= \alpha$); und da die Höhe des Dreiecks AOB gegeben ist, gilt die Gleichung

$$r = \frac{\varrho \varrho' \sin \alpha}{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos \alpha)}}.$$

Aus ihr geht durch die Substitution von $\vartheta + \vartheta' = \alpha$ die Polar-Gleichung des Ortes $r^2 = \dfrac{p^2 \varrho^2 \sin^2\alpha}{\varrho^2 \cos^2(\alpha - \vartheta) + p^2 - 2p\varrho \cos(\alpha - \vartheta)}$ hervor, eine Gleichung, welche einen Kegelschnitt darstellt.

Aufg. 21. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie stets einen festen Kegelschnitt berührt; in jeder ihrer Lagen bestimmt man ihren Pol in Bezug auf einen andern festen Kegelschnitt, welches ist der von diesem Pol durchlaufene Ort?

Wenn wir die beiden Kegelschnitte durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ und } Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=o.$$

repräsentiren, so ist die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf den zweiten nach Art. 101

$$(2Ax'+By'+D)x+(2Cy'+Bx'+E)y+Dx'+Ey'+2F=o,$$

Aber die Bedingung, unter welcher diese gerade Linie den ersten Kegelschnitt berührt, ist nach Art. 169, Aufg. 1

$$a^2(2Ax'+By'+D)^2+b^2(2Cy'+Bx'+E)^2=(Dx'+Ey'+2F)^2.$$

Diese Bedingung, welche durch die Coordinaten des Punktes befriedigt werden muss, ist die Gleichung seines Ortes und offenbar vom zweiten Grade.

228. Wir geben in diesem Artikel einige auf die Focal-Eigenschaften der Kegelschnitte bezügliche Aufgaben und Sätze und fordern den Leser auf, die fehlenden Beweise zu entwickeln.

Aufg. 1. In einem Kegelschnitt ist die Focal-Distanz eines jeden Punktes der bis zum Durchschnitt mit der Tangente am Endpunkt der Brennpunkts-Ordinate verlängerten Ordinate des Punktes gleich.

Aufg. 2. Vom Brennpunkt eines Kegelschnittes aus werden gegen die Tangenten desselben unter gegebenem Winkel gerade Linien gezogen; man soll den Ort ihrer Fusspunkte bestimmen.

Aufg. 3. Den Ort des Poles einer festen geraden Linie in Bezug auf eine Reihe concentrischer und confocaler Kegelschnitte zu finden.

Wir wissen, dass der Pol einer geraden Linie $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ aus den Gleichungen $mx=a^2$ und $ny=b^2$ (Art. 169) gefunden wird; wenn die Brennpunkte des Kegelschnitts gegeben sind, so ist $a^2-b^2=c^2$ bestimmt, und der Ort des Pols der festen geraden Linie ist durch $mx-ny=c^2$ repräsentirt, welches die Gleichung einer zur gegebenen geraden Linie senkrechten Geraden ist.

Wenn die gegebene Linie einen der Kegelschnitte berührt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt; d. i. die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten, in denen die Tangente eines confocalen Kegelschnitts ihn schneidet, begegnen sich in der Normale des letzteren.

Aufg. 4. Für Polar-Coordinaten, deren Pol mit dem Brennpunkt zusammenfällt, soll man beweisen, dass die Polargleichung der Tangente in dem Punkte, dessen Winkelcoordinate α ist, durch

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos\vartheta + \cos(\vartheta - \alpha)$$

repräsentirt ist.

Aufg. 5. Beweise, dass die Polar-Gleichung der Sehne, welche die Punkte von den Winkel-Coordinaten $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ verbindet,

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos\vartheta + \sec\beta \cos(\vartheta - \alpha)$$

ist.

Man findet diese Gleichung nützlich in Untersuchungen über Sätze, welche sich auf Winkel am Brennpunkte beziehen. Für diese Untersuchungen werden wir jedoch später (Kap. XIV) noch einfachere Methoden entwickeln.

Aufg. 6. Wenn eine Sehne PP' eines Kegelschnitts durch einen festen Punkt O geht, so ist $\tan\frac{1}{2}PFO \,.\, \tan\frac{1}{2}P'FO$ constant.

Wir geben einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes. Denken wir irgendwo in PP' einen Punkt O genommen, und sei die Entfernung FO das e'fache der Entfernung von O von der Directrix; so gelten, da die Entfernungen von P und O von der Directrix zu PD und OD proportional sind, die Gleichungen:

$$\frac{FP}{PD} : \frac{FO}{OD} = \frac{e}{e'} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin PDF}{\sin PFD} : \frac{\sin ODF}{\sin OFD} = \frac{e}{e'}\,.$$

Also nach Art. 194

$$\frac{\cos OFT}{\cos PFT} = \frac{e}{e'}\,;$$

oder, weil (Art. 193) PFT die Hälfte der Summe und OFT die Hälfte der Differenz der Winkel PFO und $P'FO$ ist

$$\tan\tfrac{1}{2}PFO \,.\, \tan\tfrac{1}{2}P'FO = \frac{e - e'}{e + e'}\,.$$

Es ist offenbar, dass das Product dieser Tangenten constant bleibt, selbst wenn O nicht constant verbliebe, sondern sich auf einem Kegelschnitt bewegte, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat, wie der gegebene Kegelschnitt.

Aufg. 7. Wenn in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne die Normalen gezogen sind, so halbirt eine durch ihren Durchschnittspunkt der Achse parallel gezogene gerade Linie die Sehne.

Für einen Punkt in der Directrix, dessen Coordinaten durch

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad y = \beta,$$

ausgedrückt sind, ist die Gleichung seiner durch den Brennpunkt gehenden Polare $\frac{x}{c} + \frac{\beta y}{b^2} = 1.$

Indem wir den aus dieser Gleichung entspringenden Werth von x in die Gleichung der Curve einsetzen, so erhalten wir die Coordinaten der Punkte, in welchen diese Linie die gegebene Curve schneidet, durch die Gleichung $(b^2 + e^2\beta^2)y^2 - 2b^2e^2\beta y - \frac{b^6}{a^2} = o.$

Wenn also y', y'' die Ordinaten der Durchschnittspunkte sind, so ist

$$y' + y'' = \frac{2b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2}, \quad y'y'' = \frac{-b^6}{a^2(b^2+e^2\beta^2)},$$

aber (Art. 182, Aufg. 4)

$$\therefore \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^4}\, y'y''\beta = \frac{b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2} = \frac{y' + y''}{2}.$$

Es wird in derselben Weise gefunden, dass die Abscissen des Durchschnittspunkts der Sehne mit der Curve durch die Gleichung bestimmt sind

$$(b^2 + e^2\beta^2)x^2 - 2b^2cx + c^2(b^2 - \beta^2) = o,$$

so dass $\quad x' + x'' = \frac{2b^2c}{b^2+e^2\beta^2}, \quad x'x'' = \frac{c^2(b^2-\beta^2)}{b^2 + e^2\beta^2};$

und die Abscisse des Durchschnitts der Normalen ist

$$x = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}.$$

Aufg. 8. Wenn eine Sehne durch einen Brennpunkt geht, so geht die gerade Linie, welche den Durchschnittspunkt der Tangenten an ihren Endpunkten mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Normalen verbindet, durch den andern Brennpunkt.

Die Gleichung der bezeichneten Verbindungslinie ist

$$c\beta(x + c) = (a^2 + c^2)\,y.$$

Aufg. 9. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen an den Enden einer Brennpunkts-Sehne.

Indem wir aus $\quad x = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}$

für β^2 auflösen, haben wir

$$\beta^2 = \frac{b^2(c^3 - a^2x)}{c^2(c + x)}, \quad b^2 + e^2\beta^2 = \frac{b^2c(a^2 + c^2)}{a^2(c + x)}.$$

Weil aber $\quad y = \frac{b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2},$

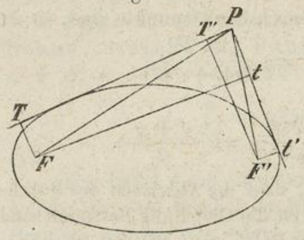
ist, so haben wir $\quad \beta = \frac{(a^2 + c^2)y}{c(c + x)},$

also $$\frac{(a^2+c^2)^2y^2}{c^2(c+x)^2} = \frac{b^2(c^3-a^2x)}{c^2(c+x)}$$
und der Ort ist eine Ellipse
$$(a^2+c^2)^2y^2 = b^2(c+x)(c^3-a^2x)$$
oder $$(a^2+c^2)^2y^2 + a^2b^2x^2 + b^4cx = b^2c^4.$$

Für einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts wird der Ort, welchen der Durchschnittspunkt der Normalen für die Endpunkte einer um ihn drehenden Sehne beschreibt, vom dritten Grade.

Aufg. 10. Wenn ϑ der Winkel zwischen den von einem Punkte P (Fig. 78.) an die Ellipse gezogenen Tangenten ist, und $\varrho\,\varrho'$ die Entfernungen dieses Punktes vom Brennpunkt bezeichnen, so soll bewiesen werden, dass $\cos\vartheta = \frac{\varrho^2+\varrho'^2-4a^2}{2\varrho\varrho'}$ ist.

Fig. 78.



Denn nach Art. 189 ist
$$\sin TPF.\sin tPF = \frac{FT.F'T'}{PF.PF'} = \frac{b^2}{\varrho\varrho'}.$$
Aber man hat
$$\cos FPF' - \cos TPt = 2\sin TPF.\sin tPF,$$
und somit $$2\varrho\varrho'\cos FPF' = \varrho^2 + \varrho'^2 - 4a^2.$$

Aufg. 11. Wenn ein Punkt M in der Ebene eines Kegelschnitts mit den Brennpunkten F, F' desselben verbunden wird, und die Schnittpunkte dieser geraden Verbindungs-Linien mit der Curve resp. durch A, B; C, D bezeichnet werden, so ist
$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}.$$

Wir bezeichnen den Durchschnittspunkt der Linien AD und BC durch P und den von AC und BD durch Q; dann ist PM die Polare von Q und QM die Polare von P, die Geraden MA, MP, MC, MQ bilden ein harmonisches Büschel, in welchem MP und MQ die Halbirungslinien der durch die Geraden AB und CD gebildeten Winkel sind. (Vergl. die Note des Art. 187.)

Nach einem bekannten einfachen Satze über die Dreiecksflächen, welche von einer um einen festen Punkt gedrehten Geraden mit zwei festen geraden Linien gebildet werden (siehe Art. 31, Aufg.) hat man aber
$$\frac{1}{\Delta AMP} \pm \frac{1}{\Delta BMP} = \frac{1}{\Delta CMP} \pm \frac{1}{\Delta DMP}.$$
Man leitet daraus durch Substitution bekannter Ausdrücke für die Dreiecksflächen
$$\frac{1}{MP.\sin AMP}\left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}\right) = \frac{1}{MP.\sin CMP}\left(\frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}\right)$$

her, und hieraus die zu beweisende Gleichung, indem man bemerkt, dass

$$\angle AMP = \angle CMP$$

ist.

Es ist nicht schwer, denselben Satz rein analytisch zu beweisen; wir empfehlen es als eine nützliche Uebung.

229. Wir geben in diesem Artikel einige speciell auf die Parabel bezüglichen Aufgaben.

Aufg. 1. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zwei Tangenten in den Punkten (x', y'), (x'', y'') der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen.

Aufl. $$y = \frac{y' + y''}{2}, \quad x = \frac{y'y''}{p}.$$

Aufg. 2. Die Höhenperpendikel des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks schneiden sich in der Directrix.

Die Gleichung einer dieser Senkrechten ist nach Art. 42

$$\frac{y'y''' - y'y''}{p}\left(x - \frac{y''y'''}{p}\right) + \frac{y''' - y''}{2}\left(y - \frac{y'' + y'''}{2}\right) = o;$$

sie nimmt durch die Division mit $(y''' - y'')$ die Form

$$y'\left(x + \frac{p}{4}\right) - \frac{y'y''y'''}{p} + \frac{py}{2} - \frac{p(y' + y'' + y''')}{4} = o$$

an, und man erkennt aus der Symmetrie der Gleichung, dass die drei fraglichen Senkrechten sich in der Directrix in der Höhe

$$y = \frac{2y'y''y'''}{p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{2}$$

schneiden.

Aufg. 3. Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks, welches durch die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte gebildet wird.

Substituiren wir die Coordinaten der Ecken des Dreiecks in die Formel des Artikels 31, so finden wir für den letzt bezeichneten Inhalt den Ausdruck $\frac{1}{2p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')$ und für den ersteren die Hälfte derselben Grösse.

Aufg. 4. Bestimme den Radius des Kreises, welcher einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umschrieben ist.

Der Radius des umschriebenen Kreises eines Dreiecks, welches die Seitenlängen d, e, f und den Inhalt Σ besitzt, wird durch $\frac{def}{4\Sigma}$ ausgedrückt.

Wenn aber d die Länge der Sehne zwischen den Punkten (x'', y''), (x''', y''') und ϑ' der Winkel ist, welchen diese Sehne mit der Achse macht, so ist offenbar $$d \sin \vartheta' = y'' - y'''.$$
Durch Einsetzen des in der letzten Aufgabe abgeleiteten Ausdrucks für den Inhalt ergiebt sich der fragliche Halbmesser
$$R = \frac{p}{2 \sin \vartheta' . \sin \vartheta'' \sin \vartheta'''}.$$
Wir können diesen Radius auch durch die zu den Seiten des Dreiecks parallelen Brennpunkts-Sehnen ausdrücken; denn nach Art. 195, Aufg. 2 ist die Länge einer Sehne, welche den Winkel ϑ mit der Achse bildet,
$$c = \frac{p}{\sin^2 \vartheta}.$$
Also $$R^2 = \frac{c' c'' c'''}{4p}.$$
Aus Art. 214 ergiebt sich, dass c', c'', c''' die Parameter der Durchmesser sind, welche die Seiten des Dreiecks halbiren.

Aufg. 5. Drücke den Radius des Kreises, welcher dem von drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umschrieben ist, in Function der Winkel aus, welche dieselben mit der Achse bilden.

Aufl. $$R = \frac{p}{8 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin \vartheta'''}$$
oder $$R^2 = \frac{p' p'' p'''}{64 p},$$
wenn p', p'', p''' die Parameter derjenigen Durchmesser sind, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen. (Art. 214.)

Aufg. 6. Bestimme den Winkel, welchen die zwei vom Punkte (x', y') an die Parabel $y^2 = 4mx$ gezogenen Tangenten bilden.

Die Gleichung des Tangentenpaares wird wie in Art. 107 ermittelt und ist $$(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = [yy' - 2m(x + x')]^2.$$
Die Gleichung zweier durch den Coordinatenanfangspunkt zu ihnen gezogenen Parallelen ist alsdann
$$x'y^2 - y'xy + mx^2 = o,$$
und der von denselben eingeschlossene Winkel wird nach Art. 76 durch
$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{(y'^2 - 4mx')}}{x' + m}$$
bestimmt.

Aufg. 7. Den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel zu bestimmen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.

Aufl. Die Hyberbel
$$y^2 - 4mx = (x + m)^2 \tan^2 \varphi \text{ oder } y^2 + (x - m)^2 = (x + m)^2 \sec^2 \varphi.$$
Aus der letztern Form der Gleichung geht hervor, dass die Hyperbel denselben Brennpunkt und die nämliche Directrix wie die Parabel besitzt, und dass ihre Excentricität $= \sec \varphi$ ist.

Aufg. 8. Den Ort des Fusspunktes der Senkrechten zu bestimmen, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird.

Die Länge der Senkrechten von (m, o) auf

$$2m(y - y') + y'(x - x') = o$$

ist
$$\frac{y'(x' + m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \sqrt{[x'(x' + m)]}.$$

Wenn aber ϑ der durch die Senkrechte mit der Achse der x gebildete Winkel ist (Art. 214), so ist $\sin\vartheta = \sqrt{\left(\frac{m}{x' + m}\right)}$, $\cos\vartheta = \sqrt{\left(\frac{x'}{x' + m}\right)}$, und die Polar-Gleichung des Ortes ist daher

$$\varrho = \frac{m\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Sie liefert die Gleichung $y^2 = mx$ für Cartesische Coordinaten.

Aufg. 9. Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem die den Punkten (x', y') (x'', y'') entsprechenden Normalen sich schneiden.

Aufl. $x = 2m + \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{4m}$, $y = -\frac{y'y''(y' + y'')}{8m^2}$.

Wenn durch α, β die Coordinaten des Durchschnittspunktes der entsprechenden Tangenten bezeichnet sind (Aufg. 1), so hat man auch:

$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

Aufg. 10. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen in den Endpunkten der durch (x', y') gehenden Sehnen.

Wir haben dann die Relation

$$\beta y' = 2m(x' + \alpha),$$

und erhalten durch die Substitution des aus dieser Relation abgeleiteten Werthes in die Resultate des letzten Beispiels,

$$2mx + \beta y' = 4m^2 + 2\beta^2 + 2mx'; \quad 2m^2 y = 2\beta m x' - \beta^2 y';$$

sodann durch Elimination von β

$$2[2m(y - y') + y'(x - x')]^2 = (4mx' - y'^2)(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2),$$

die Gleichung einer Parabel, deren Achse zu der Senkrechten von dem Punkte auf seine Polare parallel ist.

Aufg. 11. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der zu einander rechtwinkligen Normalen.

In diesem Falle ist

$$\alpha = -m, \quad x = 3m + \frac{\beta^2}{m}; \quad y = \beta; \quad y^2 = m(x - 3m).$$

Aufg. 12. Man soll aus den Längen zweier Tangenten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ω den Parameter finden.

Man ziehe den die Berührungs-Sehne halbirenden Durchmesser, so ist der Parameter desselben $p' = \frac{y^2}{x}$ und der Hauptparameter ist

$$p = \frac{y^2 \sin^2\vartheta}{x} = \frac{w^2 y^2}{4x^3},$$

wo w die Länge der vom Durchschnittspunkt der Tangenten auf die Sehne gefällten Senkrechten ist. Aber

$$2wy = ab \sin\omega \text{ und } 16x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega;$$

also
$$p = \frac{4ab\sin\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Art. 211.)

Aufg. 13. Zeige aus der Gleichung des einem Tangentendreieck der Parabel umschriebenen Kreises, dass er durch den Brennpunkt der Curve geht.

Die Gleichung des einem Dreieck umschriebenen Kreises ist nach Art. 134 $\quad \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o;$

das absolute Glied in dieser Gleichung wird durch Einführung der Werthe gefunden, welche die Symbole α, β, γ vertreten

$$p'p'' \sin(\beta - \gamma) + p''p \sin(\gamma - \alpha) + pp' \sin(\alpha - \beta).$$

Wenn aber die Linie α eine Tangente der Parabel ist und der Ursprung der Brennpunkt, so ist (Art. 221)

$$p = \frac{m}{\cos\alpha}$$

und das absolute Glied

$$= \frac{m^2}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}\left[\sin(\beta - \gamma)\cos\alpha + \sin(\gamma - \alpha)\cos\beta + \sin(\alpha - \beta)\cos\gamma\right],$$

d. h. mit Null identisch.

Aufg. 14. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist entweder 1.) das Product des Sinus oder 2.) das der Tangenten, 3.) die Summe oder 4.) die Differenz der Cotangenten der Winkel, die sie mit der Achse bilden.

Im ersten Falle ein Kreis, im zweiten eine gerade Linie, im dritten eine gerade Linie, im vierten eine Parabel.

230. Wir schliessen einige vermischte Beispiele an.

Aufg. 1. Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umschrieben ist, so geht sie auch durch den Durchschnittspunkt seiner Höhen.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Achsen in gegebenen Punkten schneidet, ist (Aufg. 1, Art. 111)

$$bb'x^2 + Bxy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = o.$$

Für rechtwinklige Achsen repräsentirt diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel (Art. 175), wenn

$$aa' = - bb'.$$

Wenn daher eine Seite des gegebenen Dreiecks und die von der Gegenecke auf sie gefällte Senkreckte zu Achsen genommen werden, so sind die Abschnitte a, a', b gegeben und b' ist daher auch bekannt; die Curve schneidet aber die Senkrechte, d. i. die Achse der y in dem festen Punkt

$$y = - \frac{aa'}{b},$$

welcher nach Aufg. 7, Art. 42 der Durchschnittspunkt der Höhen im Dreieck ist.

Aufg. 2. Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umschriebene Kreis durch das Centrum der Curve*).

Wir wählen zwei Seiten des Dreiecks zu Coordinatenachsen. Der Pol der Achse der x in Bezug auf einen durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt liegt in dem Durchmesser, der die zur x Achse parallelen Sehnen halbirt $(2Ax + By + D = o)$ und auch in der Polare des Coordinatenanfangs $(Dx + Ey + 2F = o)$.

Wenn die Relation $DE = 2BF$ besteht, so schneiden diese beiden Linien die Achse der y in demselben Punkt, und der Pol der Achse der x ist der Punkt $y = - \frac{D}{B}$ in der Achse der y. In demselben Fall ist der Pol der Achse der y der Punkt in der Achse der x, für welchen

$$x = - \frac{E}{B}.$$

Die Gleichung des Kreises durch diese zwei Punkte und den Coordinatenanfangspunkt ist

$$B(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + Ex + Dy = o$$

oder

$$x(2Cy + Bx + E) + y(2Ax + By + D) - 2(A + C - B \cos \omega)xy = o,$$

eine Gleichung, welcher offenbar durch die Coordinaten des Centrums genügt wird, vorausgesetzt, dass wir haben

$$A + C = B \cos \omega,$$

d. h. vorausgesetzt, dass die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist. (Art. 76, 175.)

*) Dies ist ein specieller Fall eines im nächsten Kapitel zu beweisenden Satzes.

Wenn DE nicht gleich $2BF$ wäre, so ist doch bewiesen, dass der Kreis durch das Centrum geht, den man durch den Coordinatenanfang und die Punkte $\left(o, -\frac{D}{B}\right)$ und $\left(-\frac{E}{B}, o\right)$ legen kann, d. h. durch die Punkte, indem jede der beiden Achsen den Durchmesser schneidet, welche die zur andern parallelen Sehnen halbirt, d. h. Ein durch das Centrum einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei beliebige Punkte beschriebener Kreis geht auch durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien, welche durch jeden dieser Punkte parallel zur Polare des andern gezogen werden können.

Aufg. 3. Wenn man in den Endpunkten zusammen fallender Focalsehnen in zwei confocalen Kegelschnitten die Tangenten dieser letztern construirt, so sind dieselben zugleich Tangenten einer Parabel, die diese Focalsehne zur Directrix und den Brennpunkt, durch welchen sie nicht gezogen ist, zum Brennpunkt hat; diese Parabel tangirt überdies die Nebenachse der beiden Kegelschnitte und jede Tangente, welche ihr und einem der beiden Kegelschnitte gemeinsam ist, wird von ihrem Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen.

Aufg. 4. Wenn auf einer Tangente eines Kegelschnitts Punkte A und B so gewählt werden, dass AB constant ist, welches ist alsdann der Ort des Durchschnittspunkts der von A und B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten? *)

Die Punkte, in denen ein Tangentenpaar des durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitts die Achse der x schneidet, werden nach Art. 107 aus der Gleichung gefunden

$$\begin{aligned}&[(4AC - B^2)y'^2 + (4AE - 2BD)y' + 4AF - D^2]\,x^2 \\ &+ 2[(BD - 2AE)x'y' + (2CD - BE)y'^2 + (D^2 - 4AF)x' \\ &+ (DE - 2BF)y']x + [(4AF - D^2)x'^2 + (4BF - 2DE)x'y' \\ &+ (4CF - E^2)y'^2] = o.\end{aligned}$$

Indem wir die Differenz der Wurzeln dieser Gleichung bilden und sie einer Constanten gleich setzen, erhalten wir die Gleichung des Ortes; sie ist im Allgemeinen vom 4. Grade. Für $D^2 = 4AF$ berührt jedoch die Achse der x den gegebenen Kegelschnitt, und die Gleichung des Ortes wird durch y^2 theilbar und reducirt sich dadurch auf den zweiten Grad. Mit Hilfe derselben Gleichung würden wir auch den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten finden, wenn die Summe, das Product u. s. w. der in der Achse gebildeten Abschnitte gegeben wäre.

*) Man vergleiche den Abschnitt des letzten Kapitels über die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

Der excentrische Winkel.

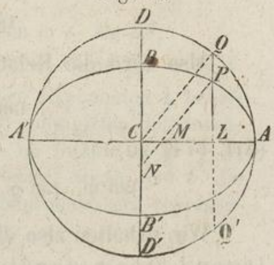
231. Es ist vortheilhaft, die Lage eines Punktes in einer Curve, wenn möglich, durch eine einzige unabhängige Veränderliche auszudrücken, statt durch die zwei Coordinaten x', y'. So ist es im Falle der Ellipse von grossem Nutzen für die Discussion ihrer Eigenschaften, eine ähnliche Substitution zu machen, wie die in Artikel 129 in dem Fall des Kreises angewendete. Wir nehmen an $x' = a \cos \varphi, \quad y' = b \sin \varphi,$
eine Substitution, welche offenbar mit der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

verträglich ist.

Die geometrische Bedeutung des Winkels φ ist leicht zu erkennen. Wenn wir einen Kreis über der grossen Achse als Durchmesser beschreiben (Fig. 79), und die Ordinate in P bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in Q verlängern, so ist der Winkel

Fig. 79.



$$QCL = \varphi,$$

denn $CL = CQ . \cos QCL,$

oder $x' = a \cos \varphi;$

und $PL = \frac{b}{a}\, QL$

(Art. 163), und weil $QL = a \sin \varphi$,
$y' = b \sin \varphi$.

232. Wir ziehen zuerst einige Folgerungen aus dieser Construction. Wenn durch P eine Parallele PN zum Radius CQ gelegt wird, so ist $PM : CQ = PL : QL = b : a$;
aber $CQ = a$, daher $PM = b$.

PN, parallel zu CQ, ist übrigens $= a$.

Wenn also von irgend einem Punkte der Ellipse eine Linie $= a$ bis zur kleinen Achse gezogen wäre, so ist der durch die grosse Achse in ihr bestimmte Abschnitt $= b$. Würde die Ordinate PQ bis zum fernern Durchschnitt Q' mit dem Kreise verlängert, so ergiebt sich ebenso, dass in einer durch P zum Radius CQ' gezogenen Parallelen von den Achsen Theile von constanter Länge abgeschnitten werden. Wenn daher umgekehrt, eine Linie

MN von constanter Länge sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels fortbewegt, und ein Punkt P so genommen ist, dass MP constant bleibt, so beschreibt P eine Ellipse, deren Achsen $= MP$ und NP sind. (Art. 227. Aufg. 1.)

Nach diesem Princip ist ein Instrument zur Erzeugung der Ellipse durch eine continuirliche Bewegung construirt worden, welches man den elliptischen Zirkel genannt hat. CA, CD' sind zwei feste Lineale, MN ein drittes Lineal von constanter Länge, welches so beweglich ist, dass seine Endpunkte die Linien CA, CD' durchlaufen; alsdann beschreibt ein in einem Punkt von MN befestigter Stift eine Ellipse. Wenn der Stift im Mittelpunkt von MN befestigt ist, so beschreibt er einen Kreis.

233. Die Betrachtung des Winkels φ liefert eine einfache Methode zur geometrischen Construction des Durchmessers, welcher einem gegebenen conjugirt ist, denn

$$\tan\vartheta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\tan\varphi.$$

Also wird die Relation

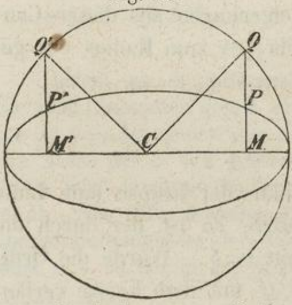
$$\tan\vartheta \,.\, \tan\vartheta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

(Art. 174) zu

$$\tan\varphi \,.\, \tan\varphi' = -1 \text{ oder } \varphi - \varphi' = 90^0.$$

Wir erhalten also die folgende Construction, um den zu irgend einem gegebenen conjugirten Durchmesser zu ziehen: Man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes P (Fig. 80) bis zum Durchschnitt Q mit dem über der grossen Achse beschriebenen Halbkreis, ziehe CQ und errichte CQ' senkrecht zu ihm; dann bestimmt die von Q' auf die Achse gefällte Senkrechte einen Punkt P' der Ellipse, welcher dem fraglichen conjugirten Durchmesser angehört.

Fig. 80.



Auch können auf diese Weise die in Artikel 173 gegebenen Coordinaten von P' leicht gefunden werden; denn aus

$$\cos\varphi' = \sin\varphi \text{ folgt } \frac{x''}{a} = \frac{y'}{b},$$

und aus $\quad \sin\varphi' = -\cos\varphi$ sodann $\dfrac{y''}{b} = -\dfrac{x'}{a}$.

Aus diesen Werthen geht auch hervor, dass die Dreiecke PCM, $P'CM'$ von gleichem Inhalt sind.

Aufg. 1. Die Längen zweier conjugirten Halbdurchmesser in Function des Winkels φ auszudrücken.

Aufl. $a'^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi, \quad b'^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi.$

Aufg. 2. Die Gleichung einer Sehne der Ellipse aus den Winkeln φ und φ' zu bestimmen *).

Aufl. $\dfrac{x}{a} \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \dfrac{y}{b} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').$

Aufg. 3. Drücke in derselben Weise die Gleichung der Tangente aus.

Aufl. $\qquad \dfrac{x}{a} \cos\varphi + \dfrac{y}{b} \sin\varphi = 1.$

Aufg. 4. Die Länge der, zwei Punkte α, β verbindenden Sehne, zu bestimmen.

Aufl. $D^2 = a^2 (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + b^2 (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$

$$D = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach Aufg. 1 repräsentirt die mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ behaftete Grösse die Länge des dem Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ conjugirten Halbdurchmesser, und nach Aufg. 2, 3 ist die Tangente im Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ parallel zu der die Punkte α, β verbindenden Sehne; wenn also b' die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbdurchmessers repräsentirt, so ist $\quad D = 2b' \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

Aufg. 5. Den Inhalt des durch drei Punkte α, β, γ gebildeten Dreiecks zu finden.

Nach Art. 31 ist

$$2\Sigma = ab\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)\right]$$

$$= ab\left[2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)\right]$$

$$= 4ab \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha),$$

oder $\quad \Sigma = 2ab \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha).$

Aufg. 6. Den Radius des Kreises zu finden, welcher dem durch drei Punkte α, β, γ bestimmten Dreiecke umschrieben ist.

Der fragliche Halbmesser ist

$$R = \frac{def}{4\Sigma} = \frac{b'b''b'''}{ab},$$

*) Vergleiche Art. 129.

wenn durch d, e, f die Seiten des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks und durch b', b'', b''' die zu ihnen resp. parallelen Halbdurchmesser bezeichnet werden. Bedeuten endlich c', c'', c''' die denselben Seiten resp. parallelen Brennpunkts-Sehnen, so ist

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}.$$

(Art. 229, Aufg. 4.)

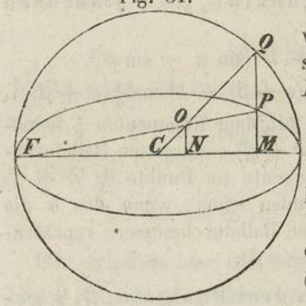
Aufg. 7. Die Gleichung dieses Kreises zu entwickeln.

Aufl. $x^2 + y^2 - \frac{2(a^2-b^2)x}{a} \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$
$- \frac{2(b^2-a^2)y}{b} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) =$
$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma+\alpha)\right].$

Aus dieser Gleichung kann man leicht die Coordinaten seines Centrums bestimmen.

Aufg. 8. Welches ist der Ort des Punktes, in dem der Brennstrahl FP den Halbdurchmesser des Kreises CQ schneidet?

Fig. 81.



Bezeichnen wir die Central-Coordinaten von P durch x', y', die von O durch x, y, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken FON, FPM

$$\frac{y}{x+c} = \frac{y'}{x'+c} = \frac{b\sin\varphi}{a(e+\cos\varphi)}.$$

Weil nun φ der von dem Radius vector des Punktes O mit der Achse der x gebildete Winkel ist, so erhalten wir die Polar-Gleichung des Ortes, indem wir $\varrho\cos\varphi$ für x, $\varrho\sin\varphi$ für y schreiben,

$$\frac{\varrho}{c+\varrho\cos\varphi} = \frac{b}{a(e+\cos\varphi)}$$

oder
$$\varrho = \frac{bc}{c+(a-b)\cos\varphi}.$$

Demnach ist der Ort eine Ellipse, von welcher C der eine Brennpunkt ist, und man kann leicht nachweisen, dass der andre mit F zusammenfällt.

Aufg. 9. Die Normale des Punktes P wird bis zum Durchschnitt mit CQ verlängert, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes?

Die Gleichung der Normale (Art. 181) ist

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2,$$

oder (Art. 231)
$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2;$$

da aber, wie in der letzten Aufgabe $\varrho \cos \varphi$ für x und $\varrho \sin \varphi$ für y substituirt werden kann, so geht dieselbe in

$$(a - b)\,\varrho = c^2 \text{ oder } \varrho = a + b$$

über. Der fragliche Ort ist daher ein mit der Ellipse concentrischer Kreis.

Aufg. 10. Es ist in der Astronomie nützlich, den Winkel PFC vermittelst des Winkels φ auszudrücken.

Man findet $$\tan \tfrac{1}{2} PFC = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Aufg. 11. Wenn vom Scheitel der Ellipse ein Radius vector nach einem Punkte der Curve und durch das Centrum eine Parallele zu ihm gezogen wird, so soll man den Ort des Punktes bestimmen, in welchem diese letztere die Tangente des Punktes schneidet.

Die trigonometrische Tangente des durch den Radius vector vom Scheitel mit der Achse gebildeten Winkels ist $= \dfrac{y'}{x' + a}$; daher ist die Gleichung der durch das Centrum gezogenen Parallellinie

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x' + a} = \frac{b \sin \varphi}{a(1 + \cos \varphi)} = \frac{b}{a} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

oder $$\frac{y}{b} \sin \varphi + \frac{x}{a} \cos \varphi = \frac{x}{a};$$

sonach wird der Ort des Durchschnitts dieser Linie mit der Tangente

$$\frac{y}{b} \sin \varphi + \frac{x}{a} \cos \varphi = 1$$

durch $\dfrac{x}{a} = 1$ repräsentirt, d. h. der fragliche Ort ist die Tangente am andern Ende der Achse.

Dieselbe Untersuchungsmethode bleibt anwendbar, wenn der erste Radius vector durch einen beliebigen Punkt (x', y') in der Curve gezogen ward; man substituirt alsdann a' und b' für a und b, und der Ort ist die Tangente an dem diametral entgegengesetzten Punkt.

234. Die Methoden des vorigen Artikels können nicht direct auf die Hyperbel angewendet werden.

Wir können aber für dieselbe die Substitutionen

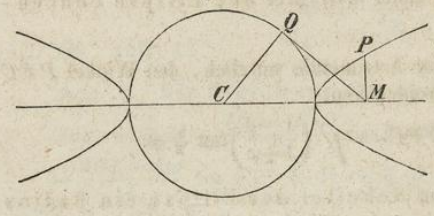
$$x' = a \sec \varphi, \quad y' = b \tan \varphi$$

mit ähnlichem Vortheil benutzen. Sie sind statthaft, weil

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Winkel φ kann geometrisch dargestellt werden, indem man eine Tangente MQ (Fig. 82) vom Fusspunkt der Ordinate M an den über der Hauptachse beschriebenen Kreis zieht; dann ist der Winkel

Fig. 82.



$$QCM = \varphi,$$

weil $CM = CQ . \sec QCM$. Wir haben auch

$$QM = a \tan \varphi,$$

und $PM = b \tan \varphi$.

d. h.: wenn man vom Fusspunkt einer Ordinate der Hyperbel eine Tangente zu dem über der Hauptachse beschriebenen Kreise zieht, so ist diese in einem constanten Verhältniss zur Ordinate.

235. Weil die Gleichung der conjugirten Hyperbel ist

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1,$$

so kann irgend ein Punkt in der conjugirten Hyperbel durch

$$y'' = b \sec \varphi' \text{ und } x'' = a \tan \varphi'$$

ausgedrückt werden. Wenn durch ϑ der von einem Durchmesser der Curve mit der Achse der x gebildete Winkel bezeichnet wird,

so ist $$\tan \vartheta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \sin \varphi.$$

Ebenso $$\tan \vartheta' = \frac{y''}{x''} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sin \varphi'},$$

und die zwischen zwei conjugirten Durchmessern stattfindende Relation $$\tan \vartheta \,.\, \tan \vartheta' = \frac{b^2}{a^2}$$

geht in $$\sin \varphi = \sin \varphi' \text{ oder } \varphi = \varphi'$$

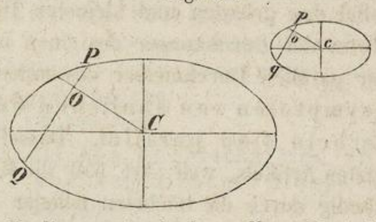
über. (Vergl. Art. 233.)

Aehnliche Kegelschnitte.

236. Irgend zwei Figuren heissen ähnlich und in ähnlicher Lage, wenn die Radien vectoren der ersten von einem gewissen Punkt O (Fig. 83) in einem constanten Verhältniss zu den parallelen Radien vectoren der zweiten von einem andern Punkt o stehen. Wenn es möglich ist, zwei solche Punkte O und o zu fin-

den, so kann man darnach unendlich viele andre bestimmen; denn wenn man einen Punkt C wählt nnd oc parallel zu OC und im constanten Verhältniss $op:OP$ zieht, so ist in den ähnlichen Dreiecken OCP und ocp die Linie cp zu CP parallel und in dem gegebenen Verhältniss. Ebenso kann man von jedem andern durch c gezogenen Radius vector zeigen, dass er zu dem durch C gelegten parallelen Radius vector in demselbem Verhältniss steht. Wenn zwei Centralkegelschnitte einander ähnlich sind, so sind alle Durchmesser des einen proportional den parallelen Durchmessern des andern, weil die Rechtecke $OP.OQ$, $op.oq$ den Quadraten der parallelen Durchmesser proportional sind. (Art. 109.)

Fig. 83.



237. Wir beabsichtigen zunächst, die Bedingung zu suchen, unter welcher zwei Kegelschnitte, von den Gleichungen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o$$

ähnlich und in ähnlicher Lage sind. Die Gleichung des ersten, auf sein Centrum als Ursprung bezogen, muss (Art. 156) von der Form sein
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F',$$
und das Quadrat irgend eines Halbdurchmessers
$$R^2 = \frac{F'}{A\cos^2\vartheta + B\cos\vartheta.\sin\vartheta + C\sin^2\vartheta};$$
das Quadrat des parallelen Halbdurchmessers des zweiten ist
$$r^2 = \frac{f'}{a\cos^2\vartheta + b\cos\vartheta.\sin\vartheta + c\sin^2\vartheta};$$
und das Verhältniss von $\frac{R^2}{r^2}$ kann somit von ϑ nicht unabhängig sein, wenn wir nicht haben
$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Zwei Kegelschnitte sind demnach ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in beiden übereinstimmen oder nur durch einen constanten Factor verschieden sind.

238. Es ist offenbar, dass die Richtungen der Achsen solcher ähnlicher Kegelschnitte dieselben sein müssen, weil die grössten und kleinsten Durchmesser des einen parallel den grössten und kleinsten Durchmessern des andern sind. Wenn der Durchmesser des einen unendlich wird, so muss auch der parallele Durchmesser des andern unendlich werden, d. h. die Asymptoten von ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln sind parallel. Dasselbe folgt aus dem Resultat des letzten Artikels, weil (Art. 156) die Richtungen der Asymptoten vollständig durch die höchsten Glieder der Gleichung bestimmt sind.

Aehnliche Kegelschnitte haben dieselbe Excentricität, denn $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ muss $= \frac{m^2 a^2 - m^2 b^2}{m^2 a^2}$ sein. Aehnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte können also auch als solche definirt werden, deren Achsen parallel sind und welche dieselbe Excentricität haben.

Wenn zwei Hyperbeln parallele Asymptoten haben, so sind sie ähnlich, denn ihre Achsen müssen parallel sein, weil sie die Winkel zwischen den Asymptoten halbiren (Art. 156), und die Excentricität hängt nur von dem Winkel ab, den die Asymptoten einschliessen. (Art. 167).

239. Da die Excentricität aller Parabeln dieselbe, nämlich die Einheit ist, so sind alle Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, deren Achsen dieselbe Richtung haben. In der That, da die Gleichung einer Parabel auf ihren Scheitel bezogen

$$y^2 = px \text{ oder } \varrho = \frac{p \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta},$$

ist, so steht jeder Radius vector der einen Parabel zu dem ihm parallelen der andern in dem constanten Verhältniss $\frac{p}{p'}$.

Aufg. 1. Wenn in einem durch den festen Punkt O gezogenen Radius vector eines Kegelschnitts OQ in einem constanten Verhältniss zu OP genommen wird, den Ort von Q zu bestimmen.

Wir haben in die Polargleichung nur $m\varrho$ für ϱ zu substituiren, und der Ort wird als ein dem ersten Kegelschnitt ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt gefunden.

Der Punkt O kann das Centrum der Aehnlichkeit beider Kegelschnitte genannt werden; und es ist offenbar (s. auch Art. 148) der Punkt, wo sich gemeinschaftliche Tangenten der zwei Kegelschnitte durchschneiden; weil, wenn die Radien vectoren OP, OP' zum ersten Kegelschnitt gleich werden, auch OQ, OQ', die Radien vectoren des andern, gleich werden müssen.

Aufg. 2. Wenn durch ein Centrum der Aehnlichkeit zweier ähnlicher Kegelschnitte ein Paar Radien vectoren gezogen werden, so sind die Verbindungssehnen ihrer Endpunkte entweder parallel oder sie durchschneiden sich in der Radicalachse der Kegelschnitte.

Diess wird genau wie in Art. 149 bewiesen.

Aufg. 3. Die dreien ähnlichen Kegelschnitten entsprechenden sechs Centra der Aehnlichkeit liegen zu dreien in geraden Linien. (Art. 150.)

Aufg. 4. Wenn eine gerade Linie zwei ähnliche und concentrische Kegelschnitte schneidet, so sind die zwischen den Kegelschnitten enthaltenen Abschnitte gleich.

Jede Sehne des äussern Kegelschnitts, welche den innern berührt, wird im Berührungspunkte halbirt.

Dies wird in derselben Art bewiesen, wie die Sätze der Art. 198, 199 bewiesen wurden, welche specielle Fälle des gegenwärtigen Satzes sind; denn die Asymptoten einer Hyperbel können als ein zu ihr ähnlicher Kegelschnitt betrachtet werden, weil die höchsten Glieder in der Gleichung der Asymptoten dieselben, wie die in der Gleichung der Curve sind.

Aufg. 5. Wenn eine Tangente in V, dem Scheitel der innern von zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsen, die äussere in den Punkten T und T' schneidet, so ist jede durch V gezogene Sehne der innern die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äussern durch T und T'.

Aufg. 6. Der Ort, welchen die Schwerpunkte aller der Dreiecke bestimmen, die durch die Brennpunkte und einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnitts gebildet werden, ist ein dem gegebenen ähnlicher und concentrischer Kegelschnitt.

240. Zwei Figuren sind ähnlich, obwohl nicht in ähnlicher Lage, wenn die proportionalen Radien einen constanten Winkel mit einander machen, anstatt parallel zu sein; so dass, wenn wir die eine der Figuren um diesen Winkel gedreht denken, sie beide dann ähnlich und ähnlich gelegen sein werden.

Die Bedingung zu finden, unter welcher die zwei Kegelschnitte

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o$$

ähnlich sind, ohne in ähnlicher Lage zu sein.

Wir haben nur die erste Gleichung zu Achsen zu transformiren, welche mit den gegebenen irgend einen Winkel ϑ' machen und zu untersuchen, ob dem ϑ ein Werth beigelegt werden kann, welcher die neuen Coefficienten A, B, C den alten a, b, c proportional macht. Sei

$$A' = ma,\ B' = mb,\ C' = mc,$$

so sahen wir für rectanguläre Achsen im Artikel 157, dass die Grössen $B^2 - 4AC$ und $A + C$ durch Transformation der Coordinaten unverändert bleiben, und dass also

$$A + C = A' + C' = m(a + c),$$

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = m^2(b^2 - 4ac).$$

Demnach ist die geforderte Bedingung

$$\frac{B^2 - 4AC}{(A + C)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(a + c)^2}.$$

Für schiefe Achsen findet man in derselben Art nach Artikel 158 die Bedingung der Aehnlichkeit

$$\frac{B^2 - 4AC}{(A + C - B\cos\omega)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(a + c - b\cos\omega)^2}.$$

Aus den Artikeln 76, 97 geht als die geometrische Bedeutung der gefundenen Bedingung hervor, dass der Winkel zwischen den reellen oder imaginären Asymptoten der einen Curve gleich dem Winkel ist, welcher von denen der andern gebildet wird.

Die Berührung von Kegelschnitten.

241. Wir bewiesen im Artikel 15, dass zur Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Curven des m^{ten} und n^{ten} Grades eine Gleichung des mn^{ten} Grades erhalten wird. Zwei Kegelschnitte schneiden einander daher im Allgemeinen in vier Punkten.

Wenn zwei von diesen Durchschnittspunkten zusammenfallen, so werden die Kegelschnitte als einander berührend bezeichnet und die gerade Linie, welche die zusammenfallenden Punkte verbindet, heisst die gemeinschaftliche Tangente.

Sind die Gleichungen der Kegelschnitte, bezogen auf ihre Tangente und Normale (Art. 182. Aufg. 2)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o,$$

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + E'y = o,$$

so ist die Gleichung der Linie (LM), die die andern zwei Durchschnittspunkte verbindet, wie in Aufg. 2, Art. 182

$$(BA' - AB')x + (CA' - AC')y + (EA' - AE') = o.$$

Man bezeichnet diese Berührung als eine **Berührung der ersten Ordnung**. (Fig. 84.)

Die Berührung der Kegelschnitte ist aber offenbar eine engere, wenn drei ihrer Durchschnittspunkte zusammenfallen. In diesem Falle muss einer der Punkte L, M mit T zusammenfallen; die Linie LM muss somit durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen und die Bedingung

$$EA' - AE' = o$$

muss erfüllt sein.

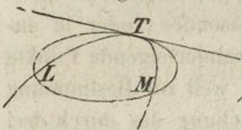


Fig. 84.

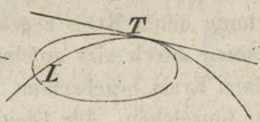


Fig. 85.

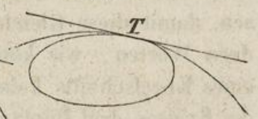


Fig. 86.

Dies liefert eine **Berührung der zweiten Ordnung**. (Fig. 85.)

Curven, welche eine höhere Berührung als der ersten Ordnung haben, heissen **osculirende Curven** und man erkennt, dass **Kegelschnitte, welche osculiren, einander im Allgemeinen nur in einem andern Punkte schneiden.**

Die Berührung zweier Kegelschnitte ist die möglichst engste, wenn sie **vier** aufeinanderfolgende Punkte gemeinschaftlich haben. In diesem Falle muss die Linie LM mit der Tangente in $T(y = o)$ zusammenfallen, d. h. die zwei Bedingungen

$$EA' - AE' = o, \quad BA' - AB' = o$$

müssen erfüllt sein. Die Kegelschnitte haben nun — sagt man — eine **Berührung der dritten Ordnung**. (Fig. 86.) Und da zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte mit einander gemein haben können, so ist dies die höchste Ordnung der Berührung, welche zwischen zwei verschiedenen Kegelschnitten stattfinden kann. Wenn die Gleichung der einen Curve durch

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

repräsentirt ist, so muss die der andern:

$$x^2 + Bxy + C'y^2 + Ey = o$$

sein.

242. Sonach giebt es unendlich viele Kegelschnitte, welche in einem gegebenen Punkte eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt haben und erst durch eine weitere Bedingung wird der berührende Kegelschnitt völlig bestimmt. So z. B. ist die Parabel, die eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

hat, durch $$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4} y^2 + Ey = o$$

repräsentirt.

Wir können keinen Kreis beschreiben, der eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt besitzt, weil zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit diese Gleichung einen Kreis repräsentire; oder in andern Worten, wir können durch vier aufeinanderfolgende Punkte eines Kegelschnitts keinen Kreis beschreiben, weil zur Bestimmung des Kreises drei Punkte hinreichen. Die Gleichung des durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gehenden Kreises kann man aber leicht finden.

Für die Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

und unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten ist die Gleichung eines die Curve berührenden Kreises

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 - 2r \sin \omega . y = o,$$

und die Bedingung, dass dieser Kreis osculirend sei (Art. 241), ist

$$E = 2Ar \sin \omega, \quad r = \frac{E}{2A \sin \omega}.$$

Ein solcher Kreis heisst der osculirende oder Krümmungskreis und die Grösse r der Radius der Krümmung des Kegelschnitts im Punkte T.

243. Einen Ausdruck für den Krümmungs-Radius in einem Punkt der Ellipse zu finden.

Wenn man den Durchmesser, welcher dem gegebenen Punkte entspricht, durch a' und den zu ihm conjugirten durch b' bezeichnet und den letztern zur Achse der x wählt, so ist

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse; verlegt man hierauf den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkte selbst, so dass der Durchmesser, welcher nach ihm hingeht, und die Tangente, welche in ihm die Curve berührt, zu Achsen werden, so entspricht dem die Substitution $y + a'$ für y und die Gleichung wird somit

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{(y + a')^2}{a'^2} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} + \frac{2y}{a'} = o.$$

Daraus entspringt für den Krümmungs-Radius der Ausdruck

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin \omega};$$

und da $a' \sin \omega$ die vom Centrum der Curve auf die Tangente gefällte Senkrechte ist, nach Artikel 176

$$r = \frac{b'^2}{\frac{a\,b}{b'}} = \frac{b'^3}{a\,b}.$$

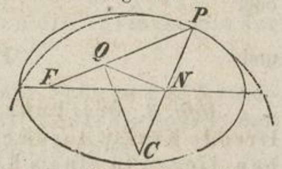
Dieser Ausdruck liefert eine einfache Construction für den Krümmungs-Radius, der einem beliebigen Punkte der Ellipse entspricht.

Wir zeigten im Artikel 182, dass die Länge der Normale $= \frac{bb'}{a}$ und dass $\cos \psi = \frac{b}{b'}$, wenn ψ der vom Brennstrahl mit der Normale gebildete Winkel ist; dies gestaltet den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser um in

$$R = \frac{N}{\cos^2 \psi}.$$

Wenn wir daher eine Senkrechte zur Normale in dem Punkte errichten, wo sie die Achse schneidet, (Fig. 87) und ferner im Punkt Q, in welchem diese Senkrechte den Brennstrahl trifft, CQ senkrecht zu ihm bis zur Normale ziehen, so ist C das Centrum der Krümmung und CP der Krümmungs-Radius.

Fig. 87.



Eine andre Construction kann auf die Bemerkung gegründet werden, dass die Durchschnittssehnen eines Kreises mit einem Kegelschnitt mit der Achse des letztern gleiche Winkel bilden. Denn weil die Rechtecke unter den Segmenten der Sehnen gleich sind (Eukl. III, 35), so sind es auch die parallelen Durchmesser des

Kegelschnitts (Artikel 109) und dieselben machen also mit der Achse gleiche Winkel. (Art. 162.)

Nun ist in dem Falle des Krümmungskreises die Tangente in T die eine und die Linie TL die andre Durchschnittssehne; man hat daher nur TL so zu ziehen, dass sie mit der Achse den nämlichen Winkel, wie mit der Tangente bildet; alsdann ist der durch die Punkte P und L beschriebene Kreis, welcher den Kegelschnitt in T berührt, der Krümmungskreis.

Diese Construction zeigt, dass der in einem Scheitel der Curve osculirende Kreis eine Berührung der dritten Ordnung mit ihr hat.

Aufg. 1. Man soll unter Anwendung der Bezeichnungsweise des excentrischen Winkels die Bedingung aufstellen, unter welcher 4 Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in einem Kreise liegen.

Die Sehne, welche zwei der Punkte verbindet, muss mit einer Seite der Achse denselben Winkel machen, wie die die beiden andern verbindende Sehne mit der andern; die Sehnen sind durch

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)$$

repräsentirt, und man hat somit

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tan\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=o,$$

d. i. $$\alpha+\beta+\gamma+\delta=o,$$

oder $$=2m\pi.$$

Aufg. 2. Bestimme die Coordinaten des Punktes, in welchem der osculirende Kreis den Kegelschnitt ferner schneidet.

Wir haben $$\alpha=\beta=\gamma,$$

also $$\delta=-3\alpha,$$

oder $$X=\frac{4x'^3}{a^2}-3x',$$

und $$Y=\frac{4y'^3}{b^2}-3y'.$$

Aufg. 3. Drei Punkte eines Kegelschnitts, deren osculirende Kreise durch einen gegebenen Punkt der Curve gehen, liegen in einem Kreise, welcher diesen Punkt enthält und bilden ein Dreieck, für welches das Centrum der Curve der Durchschnittspunkt der Seitenhalbirungs-Linien ist.

Aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt δ der osculirenden Kreise folgt zur Bestimmung des Berührungspunktes

$$\alpha=-\frac{\delta}{3},$$

und da der sinus und cosinus von δ unverändert bleiben, wenn δ um 360^0 vermehrt wird, so ergiebt sich ebenso

$$\alpha = -\frac{\delta}{3} + 120^0, \ \alpha = -\frac{\delta}{3} + 240^0.$$

Nach der ersten Aufgabe liegen diese drei Punkte in einem durch δ gehenden Kreise.

Wenn wir in der letzten Aufgabe X, Y als gegeben voraussetzen, so ist, weil den x', y' bestimmenden cubischen Gleichungen die zweiten Glieder fehlen, die Summe der drei Werthe von x und y respective gleich, und daher ist nach der 4. Aufgabe des Art. 7 der Anfangspunkt der Coordinaten der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Seiten des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks. Wir erkennen auch, dass die Normalen in diesen Punkten die drei Höhen des Dreiecks sind und dass sie sich daher in einem Punkte schneiden.

244. Den Krümmungs-Radius der Parabel zu bestimmen.

Aus der auf einen Durchmesser und die Tangente bezogenen Gleichung der Parabel finden wir durch dieselbe Methode, wie in Artikel 243,

$$R = \frac{p'}{2 \sin \vartheta} = \frac{p'^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}$$

(Art. 214.), oder weil (Art. 215, 216)

$$N = \frac{p'}{2} \sin \vartheta, \ R = \frac{N}{\sin^2 \vartheta} = \frac{N}{\cos^2 \psi};$$

die in dem letzten Artikel angegebene Construction bleibt daher auch für die Parabel gültig.

Aufg. 1. In allen Kegelschnitten ist der Krümmungs-Radius gleich dem Quotienten aus dem Cubus der Normale und dem Quadrat des Halbdurchmessers.

Aufg. 2. Drücke den Krümmungs-Radius einer Ellipse in Function des Winkels aus, welchen die Normale mit der Achse einschliesst.

Aufg. 3. Bestimme die Längen der Sehnen des Krümmungskreises, welche durch das Centrum oder den Brennpunkt eines Centralkegelschnitts gehen.

Aufl. $\frac{2b'^2}{a'}$ und $\frac{2b'^2}{a}$.

Aufg. 4. Die Brennpunktssehne des Krümmungskreises für einen Punkt im Kegelschnitt ist einer Brennpunkts-Sehne des Kegelschnitts gleich, welche der Tangente in dem Punkte parallel gezogen ist.

Aufg. 5. In der Parabel ist die Brennpunkts-Sehne des Krümmungskreises dem Parameter des durch den Punkt gehenden Durchmessers gleich.

245. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums für einen Centralkegelschnitt zu bestimmen.

Sie werden gefunden, indem man von den Coordinaten des Punktes im Kegelschnitt die Projectionen des Krümmungshalbmessers auf die Coordinatenachsen abzieht. Nun ist offenbar, dass dieser Radius zu seiner Projection in demselben Verhältniss steht, wie die Normale zur Ordinate y. Wir erhalten daher die Projection des Krümmungsradius auf die Achse der y, indem wir den Radius $\frac{b'^2}{p}$ durch $\frac{y'}{N}$ multipliciren, $= \frac{b'^2 y'}{b^2}$; die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist daher $= \frac{b^2 - b'^2}{b^2} y'$,

d. i. weil $b'^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y'^2$,

$$Y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y'^3.$$

In gleicher Art ergiebt sich seine Abscisse

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x'^3.$$

Wir würden dieselben Werthe erhalten haben, indem wir in Artikel 233, Aufg. 7, $\alpha = \beta = \gamma$ in die für die Coordinaten des Centrums erhaltenen Ausdrücke substituirten.

Wir bemerken ferner, dass das Centrum des einem Dreieck umschriebenen Kreises der Durchschnitt der Senkrechten ist, welche auf den Seiten in ihren Mittelpunkten errichtet werden; dass also, wenn das Dreieck durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gebildet wird, zwei seiner Seiten aufeinanderfolgende Tangenten der Curve und die Senkrechten zu ihnen die entsprechenden Normalen sind. Das Centrum der Krümmung irgend einer Curve ist daher der Durchschnittspunkt zweier aufeinanderfolgenden Normalen.

Wenn wir in der Aufg. 4 des Art. 182

$$x' = x'' = X, \quad y' = y'' = Y$$

einsetzen, so erhalten wir in der That dieselben Werthe, wie die eben bestimmten.

246. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums bei der Parabel zu bestimmen.

Die Projection des Krümmungshalbmessers auf die Achse der y wird wie vorher durch Multiplication seiner Länge $\frac{N}{\sin^2\vartheta}$ mit $\frac{y'}{N}$ gefunden, und ist also $= \frac{y'}{\sin^2\vartheta}$; indem wir diese Grösse von y' abziehen, erhalten wir die Ordinate

$$Y = -\frac{y'}{\tan^2\vartheta} = -\frac{4y'^3}{p^2}$$

(Art. 214). Ebenso ergiebt sich die Abscisse

$$X = x' + \frac{p}{2\sin^2\vartheta} = x' + \frac{p + 4x'}{2}.$$

Dieselben Werthe können aus der Auflösung der 9. Aufgabe des Art. 229 abgeleitet werden.

247. Die Evolute einer Curve ist der Ort der Krümmungs-Centra ihrer verschiedenen Punkte.

Um die Evolute eines Centralkegelschnitts zu finden, würden wir die Coordinaten x', y' durch diejenigen (x, y) des Krümmungsmittelpunktes ausdrücken und die erhaltenen Werthe in die Gleichung der Curve substituiren; wir erhielten so (indem wir $\frac{c^2}{a} = A$, $\frac{c^2}{b} = B$ schreiben)

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

Ebenso wird die Gleichung der Evolute der Parabel gefunden

$$27py^2 = 16(x - \tfrac{1}{2}p)^3;$$

man nennt diese Curve die semicubische oder auch die Neil'sche Parabel.