Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 25 de junio de 2019.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + 2z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & b \\ 2x - 5y + (a+1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **5 puntos**

Solution: *La matriz ampliada asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intercambiando las filas 1 y 2 obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos las siguientes operaciones en la matriz ampliada

$$\textit{fila 2} \mapsto \textit{fila 2} - 3 \times \textit{fila 1}$$

$$\textit{fila 3} \mapsto \textit{fila 3} - 2 \times \textit{fila 1}$$

y obtenemos la siguiente matriz ampliada equivalente a la anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & 1-3b \\ 0 & -13 & a-1 & -2b \end{pmatrix}$$

Ahora, realizamos las operaciones fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $-$ *fila 2 para obtener*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & 1-3b \\ 0 & 0 & a & b-1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos

(i) *Si* $a \neq 0$, *entonces* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 3$. *El sistema es consitente y determinado con una única solución.*

(ii) *Si* $a = 0$ *el sistema es consistente si y solo si* $b = 1$. *Y en este caso tenemos,* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 2$. *El sistema es consistente e indeterminado dependiente de un parámetro.*

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a y b para los cuales el sistema tiene al menos una solución. **5 puntos**

Solution: *Supongamos primero que* $a \neq 0$. *El sistema lineal de ecuaciones dado será equivalente al siguiente*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x + 4y + z & = & b \\ -13y - z & = & 1-3b \\ az & = & b-1 \end{array}\right.$$

La solución es

$$x = \frac{a(b+4) - 9b + 9}{13a}, \quad y = \frac{3ab - a - b + 1}{13a}, \quad z = \frac{b-1}{a}$$

Supongamos ahora que $a = 0$, $b = 1$. *En este caso el sistema lineal de ecuaciones ser equivalente a*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x + 4y + z & = & 1 \\ -13y - z & = & -2 \end{array}\right.$$

Y la solución es

$$x = 9y - 1, \quad z = 2 - 13y, \quad y \in \mathbb{R}$$

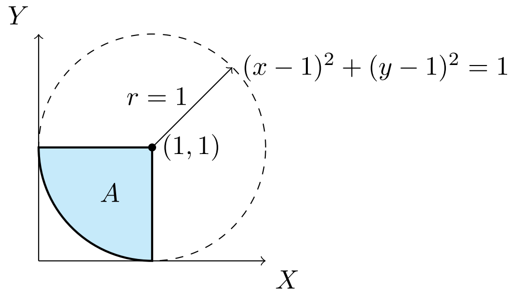
(2) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$ y la función

$$f(x, y) = x - y$$

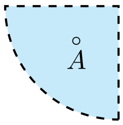
definida en el conjunto A.

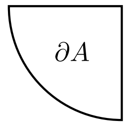
(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Solution: *El conjunto A viene representado en azul en la siguiente figura:*



Si representamos su interior y su frontera quedarán:





El conjunto A es cerrado ya que $\partial A \subset A$. No es abierto al tener $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado y por lo tanto también es compacto. El conjunto A es compacto al ser la interseccin de tres conjuntos de puntos $A = B \cap C \cap D$ tales que

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 1\}$$

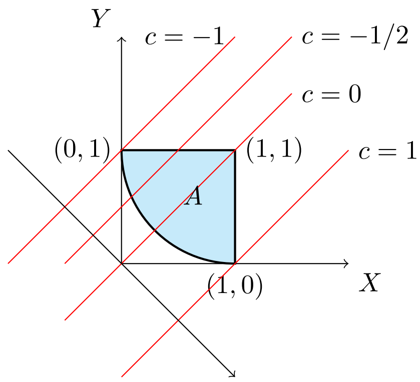
y

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 1\}$$

Siendo la función $g(x) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ convexa. Y por lo tanto B es un conjunto convexo. Los conjuntos C y D son semiplanos y por lo tanto también son convexos. Y como A es la interseccin de conjuntos convexos de puntos, es también convexo.

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Solution: *Como la función $f(x, y) = x - y$ es continua y el conjunto A es compacto, se cumple el teorema de Weierstrass, es decir, la funcin f alcanza su máximo y su mínimo global sobre el conjunto A.*
Las curvas de nivel de la funcin son de la forma $y = x - c$, $c \in \mathbb{R}$. En el siguiente dibujo representamos las curvas de nivel en color rojo. La flecha representa la dirección de crecimiento de la función f:



Gráficamente, podemos observar que el valor mximo se alcanza en el punto $(1, 0)$ y su valor mínimo en el punto $(0, 1)$.

(3) Considere la función $f(x,y) = ax^3 + ay^2 - 2xy$ donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro y $a > 0$.

(a) Calcule el vector gradiente y la matriz Hessiana de la función f. Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f, centrado en el punto $x = 0$, $y = 1$. Calcule los puntos críticos de f. **5 puntos**

Solution: *El gradiente de la función es*

$$\nabla f(x,y) = \big(3ax^2 - 2y, 2ay - 2x\big)$$

También obtenemos la matriz hessiana

$$Hf(x,y)\begin{pmatrix} 6ax & -2 \\ -2 & 2a \end{pmatrix}$$

Observar que $f(0,1) = a$. El gradiente evaluado en el punto $x = 0$, $y = 1$ es

$$\nabla f(0,1) = (-2, 2a)$$

Y la matriz hessiana evaluada en el punto $x = 0$, $y = 1$ es

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2a \end{pmatrix}$$

As, el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f centrado en el punto $x = 0$, $y = 1$ es

$$P_2 = a - 2x + 2a(y-1) + \frac{1}{2}(2a(y-1)^2 - 4x(y-1)) = ay^2 - 2xy$$

Calculamos los puntos crticos, que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$3ax^2 - 2y = 0, \quad ay - x = 0$$

Cuyas soluciones son

$$x = 0, \quad y = 0$$

and

$$x = \frac{2}{3a^2}, \quad y = \frac{2}{3a^3}$$

(b) Determine, de acuerdo a los valores del parámetro a, el mayor conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava o convexa. **5 puntos**

Solution: *Los menores principales de la matriz hessiana son*

$$D_1 = 6ax, \quad D_2 = 12a^2x - 4$$

Si $x > \frac{1}{3a^2}$, entonces $D_1, D_2 > 0$. Además, la funcií es estrictamente convexa en el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{3a^2}\}$$

Por otro lado, f no puede ser cóncava, porque $D_1 < 0$ si y solo si $x < 0$. Pero, entonces $D_2 < 0$ y la forma cuadrtica asociada sera indefinida.

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy + zy^2 &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, 1, 1)$. **4 puntos**

Solution: *Primero comprobamos que* $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ *es una solucin del sistema de ecuaciones. Las funciones* $f_1(x, y, z) = xy + zy^2$ *y* $f_2(x, y, z) = x + y - z$ *al ser polinómicas son de clase* C^∞*. Calculamos el valor de*

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(x,y,z)=(0,1,1)} = \left|\begin{matrix} x + 2zy & y^2 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right|_{(x,y,z)=(0,1,1)} = \left|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right| = -3$$

Por el teorema de la funcin implcita sabemos que el sistema de ecuaciones dado nos determina de forma implícita dos funciones diferenciables $y(x)$ *y* $z(x)$ *en un entorno del punto solución* $(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

(b) Calcule

$$y'(0), z'(0)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 0$. **6 puntos**

Solution: *Derivando implícitamente con respecto a la variable* x,

$$\begin{aligned} y + xy' + z'y^2 + 2zyy' &= 0 \\ 1 + y' - z' &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en el sistema las coordenadas del punto $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} 1 + z'(0) + 2y'(0) &= 0 \\ 1 + y'(0) - z'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Así,

$$z'(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de primer orden de la función $y(x)$ *en el punto* $x_0 = 0$ *es*

$$P_1(x) = y(0) + y'(0)x = 1 - \frac{2}{3}x$$

y el polinomio de Taylor de primer orden de la función $z(x)$ *en el punto* $x_0 = 0$ *es*

$$Q_1(x) = z(0) + z'(0)x = 1 + \frac{1}{3}x$$

(5) Considere la función

$$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$$

(a) Determine los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

(b) Clasifique los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$ y justifique si se trata de un máximo/mínimo local o global. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Solution: *La funcin f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$. Calculamos el vector gradiente de la función f*

$$\nabla f(x,y) = (y - 3x^2, x - 2y)$$

. Los puntos críticos son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$y - 3x^2 = 0, \quad x - 2y = 0$$

Las soluciones son

$$(0,0) \quad y \quad \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

La matriz hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Evaluada en el punto $(0,0)$ obtenemos

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como, $D_2 = -1 < 0$. La forma cuadrtica asociada a la matriz es indefinida y el punto $(0,0)$ es un punto de silla.
En el punto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ obtenemos

$$Hf\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

con $D_1 = -1 < 0$, $D_2 = 1 > 0$, el signo de la matriz hessiana es definida negativa y por tanto el punto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ corresponde a un máximo local. Además como,

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \infty$$

el punto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ no se puede corresponder con un máximo global.

(6) Considere la función

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$$

y el conjunto

$$S = \{(x,y,z) : x+y+z = 1\}$$

(a) Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange **5 puntos**

(b) Utilizando el método de Lagrange encuentre el mínimo global de f $f(x,y,z)$ en el conjunto S. **5 puntos**

Solution: *Los candidatos a extremos globales condicionados de la función tienen que satisfacer las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange. La función lagrangiana es*

$$\mathcal{L}(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + \lambda(x+y+z-1)$$

Las condiciones de primer orden de Lagrange (ecuaciones de Lagrange) son:

$$\mathcal{L}_x(x,y,z) = \qquad \lambda + 2(x-1) = 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_y(x,y,z) = \qquad \lambda + 2(y-2) = 0 \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_z(x,y,z) = \qquad \lambda + 2(z-3) = 0 \tag{3}$$

$$x + y + z = 1 \tag{4}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la solución

$$x = -\frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{4}{3}, \quad \lambda = \frac{10}{3}$$

Si observamos que la matriz hessiana de la función lagrangiana

$$HL(x,y,z;\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene signo definida positiva y el conjunto factible de puntos es un conjunto convexo por ser un plano en el espacio, podemos afirmar que el punto crtico encontrado se corresponde con mnimo local y global.