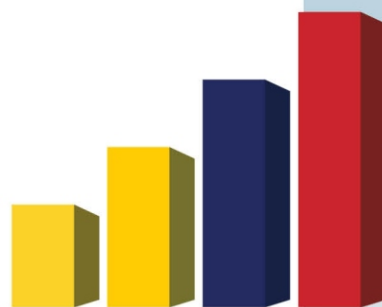


# Analítica

Fecundidad en el Ecuador y su relación con el  
entorno social y evolutivo

Fertility in Ecuador and its relationship with  
social and evolutionary environment

Cintya Lanchimba - Paúl Medina



[www.inec.gob.ec](http://www.inec.gob.ec) | [www.ecuadorencifras.com](http://www.ecuadorencifras.com)



# Fecundidad en el Ecuador y su relación con el entorno social y evolutivo

Cintya Lanchimba<sup>†</sup> y Paúl Medina<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> *Unidad de Análisis de la Información Estadística, Instituto Nacional de Estadística y Censos, Juan Larrea N15-36 y José Riofrío, Quito, Ecuador*

<sup>‡</sup> *Departamento de Ciencias Exactas, Escuela Politécnica del Ejército, Avda. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador*

<sup>‡</sup> *Instituto Gregorio Millán, Universidad Carlos III de Madrid, Avda. de la Universidad 30, 28911, Leganés, España.*

<sup>†</sup>cintya1919@gmail.com, <sup>‡</sup>plmedina@espe.edu.ec

**Recibido:** 1 de agosto de 2010

**Aceptado:** 31 de septiembre de 2010

## Resumen

Este documento analiza la evolución de la fecundidad en Ecuador desde el año 1990 al año 2007, período en el cual se dispone de datos reales. Luego, en base a la evolución (tendencia) detectada se pretende inferir el comportamiento de la fecundidad a corto y mediano plazo, para lo cual se utilizan las *Estadísticas Vitales* desde el año 1990 hasta el año 2007, la Encuesta de Empleo y Desempleo (ENEMDU) en el mismo período y los *Censos de Población y Vivienda de 1990 y 2001*. Los resultados muestran una tendencia decreciente de la tasa de fecundidad en el país, Esta tasa es explicada por la población femenina en edad fecunda, la población total y la tasa de natalidad. Además, se estudia el bono demográfico para el Ecuador, pues conocerlo permitirá que el gobierno tome las medidas adecuadas para su aprovechamiento. Finalmente, del estudio se desprende que el bono demográfico se encontrará situado entre el año 2013 y el año 2022.

**Palabras claves:** tasa de fecundidad, bono demográfico.

## Abstract

This paper analyzes the changes of the female fertility in Ecuador, from 1990 to 2007, period which provided real data. Then, based on the fertility rate detected it tried to infer the behaviors fertility in the short and medium term, for which Vital Statistics are used from years 1990 to 2007, the Survey of Employment and Disemployment ENEMDU in the same period and Censuses on Population and Housing of 1990 and 2001. The results show a decreasing tendency of the rate female fertility in the country; this rate is explained by the female population of fertile age, the total population and the rate of natality. In addition, the demographic bond for Ecuador will be studied, because knowledge will allow the government to take appropriate measures to their use. Finally, this study indicates that the demographic bond will be located between 2013 and 2022.

**Keywords:** fertility rate, demographic bond.

**JEL Codes:** B54, C51.

## 1 Introducción

Durante la década pasada, Ecuador experimentó cambios en el comportamiento de los patrones demográficos, en los cuales la natalidad, mortalidad y fecundidad juegan un papel preponderante. Por ejemplo, en 1990 de cada 1000 personas 5 morían; mientras que 17 años más tarde, sólo 4 personas mueren, es decir, la tasa de mortalidad ha disminuido. Actualmente, la esperanza de vida al nacer de

una persona supera los 75 años, mientras que en 1990 era de 69 años, según UNICEF. Por otra parte, la tasa de natalidad pasó de un 3 % a un 2 % y, la tasa de fecundidad, pasó de 10,64 % a 6,85 %; en el mismo período.

Son muchos los intentos de explicar, a través de distintas teorías, la evolución de los fenómenos demográficos y esclarecer sus consecuencias al margen de cualquier

voluntad normativa. Entre las teorías más utilizadas [10] se destaca la teoría de la transición demográfica, donde la evolución de la mortalidad y fecundidad juegan un papel fundamental. En el presente trabajo nos basaremos en la teoría citada.

La alta fecundidad de las sociedades antiguas estaba dictada sin lugar a dudas por el imperativo de la supervivencia. Durante largo tiempo, muchos nacimientos no fueron más que nacimientos de reemplazo destinados simplemente a compensar la desaparición de los primogénitos muertos. Posteriormente, la limitación de los nacimientos fue compensada por una mejora de la supervivencia antes de las edades fecundas. Sin embargo, la fuerte reducción de finales de siglo XX, fruto del descenso del número de hijos no deseados y la revisión a la baja del número de hijos deseados, no ha llegado a compensarse con las mejoras en la supervivencia de los más jóvenes [8].

En resumen, la cronología del descenso de la fecundidad sigue el guión marcado por la teoría de transición demográfica, el mismo que se basa en la baja de la mortalidad y fecundidad, las cuales están correlacionadas con el proceso de modernización de la sociedad.

Por otra parte, la tasa de fecundidad es un indicador importante en la transición demográfica de un país, su estudio es útil para hallar estimaciones de la población en el futuro, si tomamos en cuenta que su importancia radica en que los niños que nacen serán el sustento del futuro y, que los mismos pueden representar un bono demográfico. Por tanto, el objetivo de este trabajo es llegar a estimar la tasa de fecundidad y, principalmente, determinar cuales son las variables que la determinan.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se detalla la metodología a utilizar, en la sección 3 se detallan varias teorías para el análisis demográfico del país y, finalmente, en la sección 4 se detallan las conclusiones.

## 2 Modelo

Al hablar de la tasa de fecundidad no podemos dejar de lado ciertos conceptos que están asociados a la misma; es el caso de la tasa de natalidad, mortalidad y la población de un país. Por esta razón eso que antes de empezar a estimar la tasa de fecundidad ecuatoriana es necesario conocer primero los conceptos anteriormente citados.

### 2.1 Definiciones

Las definiciones que se presentan a continuación son fundamentales en el desarrollo del presente trabajo, pues a partir de ellas se estudian y construyen los distintos modelos estadísticos.

**DEFINICIÓN 1** (Tasa de fecundidad ( $Y$ )). Se define como la razón que existe entre el número de nacimientos ( $Nn$ ) ocurridos

en un cierto período (años, meses, días) y la cantidad de población femenina en edad fértil ( $Pf$ ), en el mismo periodo. Algebraicamente se puede representar la relación como:

$$Y_i = \frac{Nn_i}{Pf_i}, \quad (1)$$

donde, el subíndice " $i$ " indicará el período de tiempo en el que se mide la tasa, generalmente años.

**DEFINICIÓN 2** (Tasa de natalidad ( $W$ )). Se define como la razón que existe entre el número de nacimientos ( $Nn$ ) ocurridos y la cantidad total de personas ( $pt$ ), en el mismo periodo de tiempo. Algebraicamente se puede representar la relación como:

$$W_i = \frac{Nn_i}{pt_i}, \quad (2)$$

donde, el subíndice " $i$ " indicará el período de tiempo en el que se mide la tasa, generalmente años.

**DEFINICIÓN 3** (Tasa de mortalidad ( $Z$ )). Se define como la razón que existe entre el número de defunciones ( $m$ ) y la cantidad total de personas ( $pt$ ), en el mismo periodo de tiempo. Algebraicamente se puede representar la relación como:

$$Z_i = \frac{m_i}{pt_i}, \quad (3)$$

donde, el subíndice " $i$ " indicará el período de tiempo en el que se mide la tasa, generalmente años.

**DEFINICIÓN 4** (Relación de dependencia poblacional ( $RD$ )). Se define como la razón entre la población mayor a 65 años ( $P_{65}$ ), más la población menor a 15 años ( $P_{15}$ ) y, la población que se encuentra entre los 15 y 64 años ( $PT$ ). Algebraicamente se puede representar la relación como:

$$RD = \frac{P_{65} + P_{15}}{PT}. \quad (4)$$

Dentro de la dinámica de poblaciones existen varios modelos para representar y estudiar el comportamiento poblacional [1, 11]. Los pioneros del estudio matemático son Malthus [13], Verhulst [19], Lotka [12] y Volterra [20] cuyos trabajos se publicaron en los años 20 y 30 del siglo pasado, respectivamente. Sin embargo, el modelo representado por la ecuación logística de población [19, 21] es uno de los más aceptados y utilizados para realizar aproximaciones del tamaño poblacional. Por tal motivo, en el presente trabajo utilizaremos este modelo.

**DEFINICIÓN 5** (Ecuación Logística de la Población). Si  $P$  representa el tamaño de la población y  $t$  representa el tiempo, la ecuación logística de la población, queda formalizada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \quad (5)$$

donde  $a$  corresponde a la tasa de natalidad y  $b$  a la tasa de mortalidad.

*Observación:* Si se cumple la relación  $b \ll a$ , de tal modo que si  $P$  no es demasiado grande, entonces el término  $-bP^2$  es insignificante comparado con  $aP$ , de donde se deduce que la población crece exponencialmente [21].

Considérese ahora la ecuación logística (5) para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si  $P_0$  es la población en el tiempo  $t_0$ , entonces  $P(t)$ , la población en el tiempo  $t$ , dado por la ecuación (5), cumplirá que:

$$P(t_0) = P_0. \quad (6)$$

A la igualdad (6) se la conoce como condición inicial para la ecuación (5).

La ecuación (5) junto con la condición inicial (6), definen un problema de *Valor Inicial*, cuya solución es:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at_0}}. \quad (7)$$

**DEFINICIÓN 6** (Tasa Ocupacional femenina ( $O$ )). Se define como la razón entre el total de personas ocupadas ( $Of$ ) y la población femenina en edad para trabajar ( $Pe$ ), en el mismo período de tiempo.

$$O_i = \frac{Of_i}{Pe_i}, \quad (8)$$

donde, el subíndice "i" indicará el período de tiempo en el que se mide la tasa, generalmente años.

## 2.2 Etapas del modelo

Para la estimación de la tasa de fecundidad, en el caso ecuatoriano se siguió las siguientes etapas:

1. Selección de los datos a utilizar,
2. Construcción de las variables a utilizar,
3. Construcción y análisis de varios modelos y,
4. Selección del mejor modelo.

### 2.2.1 Selección de los datos a utilizar

Los datos utilizados se obtuvieron de las siguientes fuentes de información: las *Estadísticas Vitales* entre el año 1990 y el año 2007, las *ENEMDU* en el mismo período de tiempo y, los *Censos de Población y Vivienda del año 1990 y 2001*.

**Empleo de las Estadísticas Vitales.** Las Estadísticas Vitales de Nacimientos registran año a año los nacimientos de los ecuatorianos. Un hecho particular es la no coincidencia entre el año de nacimiento y el año de inscripción de los infantes, debido a que hay infantes que son inscritos muchos años más tarde.

La particularidad señalada obliga a considerar únicamente datos desde el año 1990 al año 2007, pues si se consideraran datos posteriores al año 2007 se podría tener datos inconsistentes; por lo que se filtro esta información, de

la base original, tomando en cuenta el año de inscripción de los menores. Esto se evidencia cuando, al analizar los registros, la edad a la que las madres tienen sus hijos está correlacionada negativamente con el año de inscripción del menor, ver Tabla 1.

	Diferencia*	Edad de las madres
Diferencia*	1	-0,016
Edad de las madres	-0,016	1
Significancia	$1,17 \times 10^{-286}$	$1,17 \times 10^{-286}$

\*El término **diferencia** significa la diferencia anual entre el año de inscripción y el año de nacimiento de un menor.

**Tabla 1.** Cuadro de correlaciones de los años de inscripción y la edad de la madre. Fuente: Elaboración propia.

Una posible explicación para la correlación negativa podría ser que mientras más joven es la madre más largo es el tiempo que tarda en inscribir a un menor en el Registro Civil. Sin dejar de lado que esta correlación es muy pequeña.

Por otra parte, dentro de las *Estadísticas Vitales* se registran las Estadísticas de Defunciones. Esto sirvió para determinar la tasa de mortalidad; de manera particular, se calculó la tasa de mortalidad de las mujeres en edad fértil.

**Encuesta de Empleo y Desempleo Urbano (ENEMDU).** A partir de la encuesta anual, que se realiza en el mes de diciembre, se determinó la tasa ocupacional femenina.

**Censos de Población y Vivienda 1990 y 2001.** Dado que los Censos reflejan el estado actual de toda la población, a partir de ellos se determinarán las tasas correspondientes al sexo y el rango de edad según estándares internacionales. Datos necesarios para el estudio.

### 2.2.2 Construcción de las variables a utilizar

A continuación, se describirá cada una de las metodologías utilizadas para construir las variables necesarias en el estudio.

**Estimación de la Población.** Utilizando la ecuación (7), para estimar la población en un período de tiempo determinado, es necesario conocer las tasas de natalidad  $a$ , de mortalidad  $b$  y una población inicial  $P_0$ .

Basados en las consideraciones establecidas estimaremos, en primer lugar, la población en la década de los 90; para ello, utilizaremos las definiciones 2 y 3 para calcular la tasa de natalidad y mortalidad, respectivamente. Además, como condición inicial consideramos:

$$P_0 = P_{1990} = 9'648,189,$$

donde  $P_0 = P_{1990}$  es la población de Ecuador en 1990, es decir, será el año base o inicial.

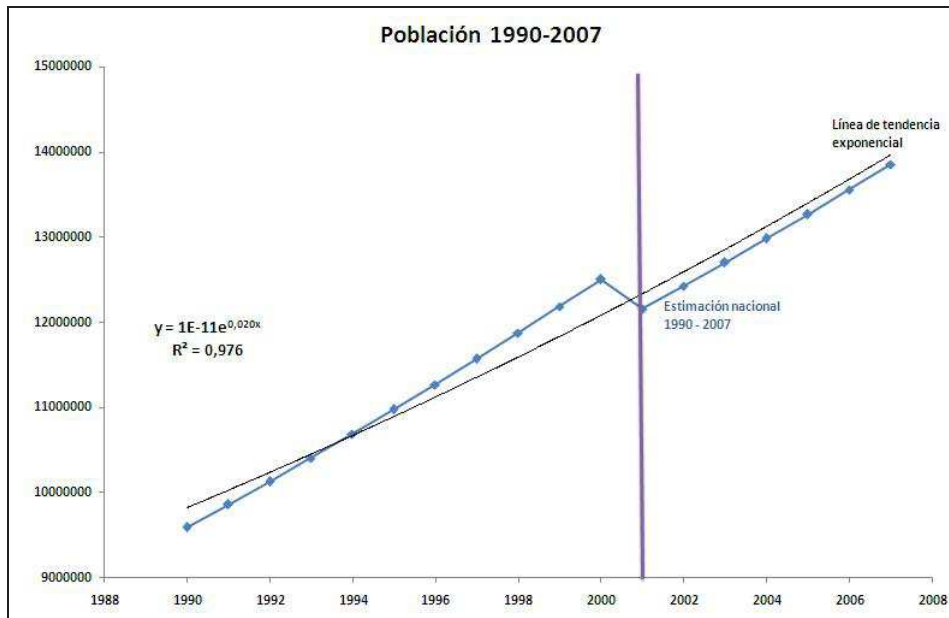
Para los años 2001, 2002, ..., 2007 volvemos a repetir los cálculos, considerando para ello el Censo de Población y Vivienda del año 2001. Aquí, la condición inicial es:

$$P_0 = P_{2001} = 12'156,608,$$

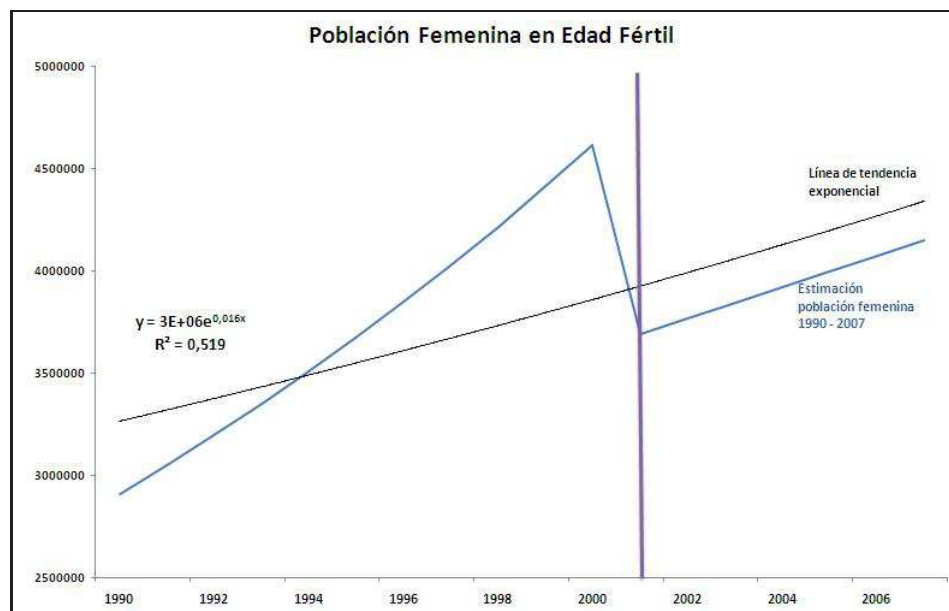
donde  $P_0 = P_{2001}$  es la población de Ecuador en 2001, es

decir, será el año base o inicial.

Además, se consideró las definiciones 2 y 3 para calcular la tasa de natalidad y mortalidad, respectivamente. Los resultados de la estimación de la población ecuatoriana entre el año 1990 y el año 2007, utilizando la ecuación (7) que se muestran en la Figura 1.



**Figura 1.** Estimación de la población del Ecuador en el período de tiempo 1990-2007. Se evidencia una tendencia creciente, con un comportamiento exponencial. El punto de cambio en la continuidad de la recta representa el cambio de datos (tasas) en el modelo (Censo 2001). Fuente: Elaboración propia.



**Figura 2.** Estimación de la población femenina en edad fértil en el período de tiempo 1990-2007. Se evidencia una tendencia creciente, con un comportamiento exponencial. El punto de cambio en la continuidad de la recta, representa el cambio de datos (tasas) en el modelo (Censo 2001). Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, a los datos mostrados se estimó la población femenina en edad fértil. Estos cálculos se los realizó de manera similar a los efectuados para estimar la población nacional total. Los resultados se pueden observar en la Figura 2.

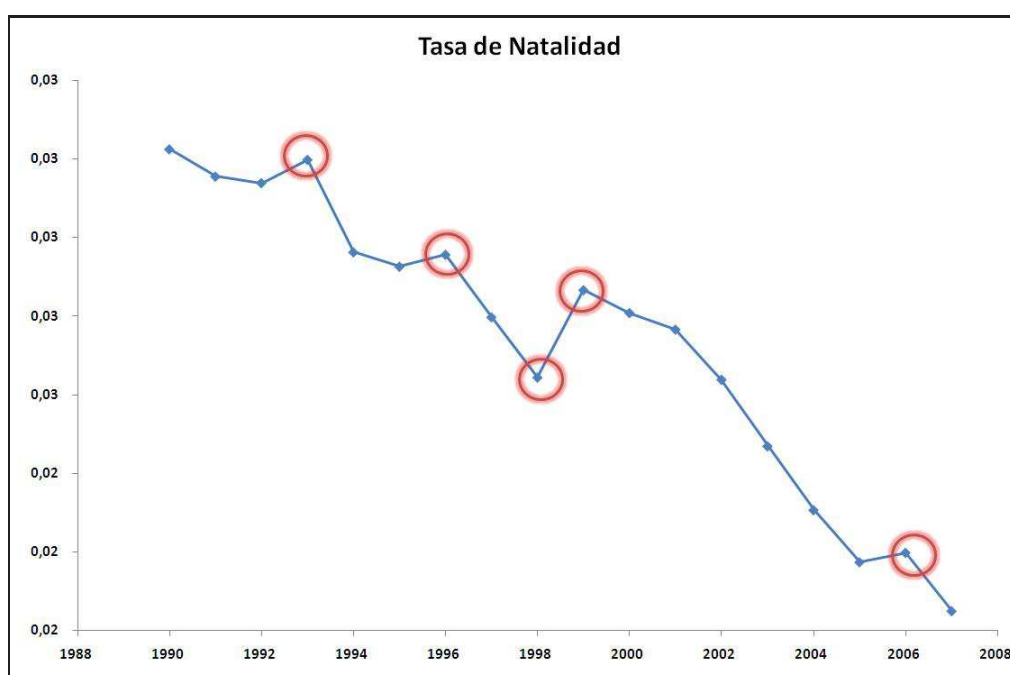
**Tasa de Natalidad (TN).** De acuerdo a la definición 2 para el cálculo de la tasa de natalidad es necesario conocer el número de nacimientos y la población nacional total en el mismo período. Los resultados obtenidos, de la estimación de la tasa de natalidad, entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 2.

Los resultados de la Tabla 2, que muestran un descenso de la tasa de natalidad, pueden ser mejor apreciados

en la Figura 3.

Año	TN (%)	Año	TN (%)	Año	TN (%)
1990	3,22	1996	2,96	2002	2,65
1991	3,16	1997	2,80	2003	2,48
1992	3,14	1998	2,64	2004	2,32
1993	3,20	1999	2,87	2005	2,18
1994	2,96	2000	2,81	2006	2,21
1995	2,93	2001	2,78	2007	2,06

**Tabla 2.** Evolución de la Tasa de Natalidad en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.



**Figura 3.** Evolución de la Tasa de Natalidad en el período de tiempo 1990-2007. Puede observarse un constante decrecimiento de la tasa de natalidad con ciertos puntos de corrección, los cuales no hacen más que ratificar la tendencia decreciente. Fuente: Elaboración propia.

**Tasa de Mortalidad (TM).** De acuerdo a la definición 3, para el cálculo de la tasa de mortalidad es necesario conocer el número de muertes y la población total nacional en el mismo período. Los resultados obtenidos de la estimación de la tasa de mortalidad, entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 3.

Los resultados de la Tabla 3, que muestran un descenso de la tasa de mortalidad, pueden ser mejor apreciados en la Figura 4.

Año	TM (%)	Año	TM (%)	Año	TM (%)
1990	0,52	1996	0,46	2002	0,45
1991	0,54	1997	0,45	2003	0,42
1992	0,53	1998	0,46	2004	0,42
1993	0,50	1999	0,46	2005	0,43
1994	0,48	2000	0,45	2006	0,43
1995	0,46	2001	0,46	2007	0,42

**Tabla 3.** Evolución de la Tasa de Mortalidad en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.



Figura 4. Evolución de la Tasa de Mortalidad en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

La tasa de mortalidad tiene una tendencia decreciente y las distintas variaciones que se observan en la serie temporal, logran que el decrecimiento en de esta tasa no sea tan abrupto. Además, se evidencia períodos en los que existe cierta estabilidad en la tasa de mortalidad ecuatoriana.

**Tasa de Fecundidad (TF).** De acuerdo a la definición 1 para el cálculo de la tasa de fecundidad es necesario conocer el número de nacimientos y la población nacional femenina en edad fértil, en el mismo periodo de tiempo. Se debe tener presente que el dato de la población femenina fue estimado año a año mediante la ecuación (7). Los resultados obtenidos de la estimación de la tasa de fecundidad, entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 4.

Año	TF (%)	Año	TF (%)	Año	TF (%)
1990	10,64	1996	8,66	2002	8,70
1991	10,21	1997	8,03	2003	8,15
1992	9,95	1998	7,45	2004	7,63
1993	9,94	1999	7,92	2005	7,22
1994	9,03	2000	7,61	2006	7,32
1995	8,74	2001	9,10	2007	6,85

Tabla 4. Evolución de la Tasa de Fecundidad en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la Tabla 4, que muestran un descenso de la tasa de fecundidad, pueden ser mejor apreciados en la Figura 5.

La tasa de fecundidad presenta una tendencia decreciente, con un punto atípico en el año 2001 y otra vez un decrecimiento, pero no debemos olvidar que los datos de la población femenina son reales sólo en el año 1990 y en

el año 2001. Esto se debe al cambio en los parámetros para estimar la población, debido a que se considera el Censo de Población y Vivienda 2001. A pesar de que existe un cambio en la valoración de la población, se observa que la tendencia decreciente se mantiene e incluso su pendiente aumenta, hasta el año 2006 que se da un punto de corrección.

**Tasa Ocupacional Femenina (TOF).** De acuerdo a la definición 6 para el cálculo de la tasa ocupacional femenina es necesario conocer el total de mujeres ocupadas y el total de mujeres en edad de trabajar (que esta directamente relacionada con la PEA femenina que se encuentra calculada más adelante). Sin embargo, debido a las características del estudio, consideramos la población en edad fértil, esto es de 12 a 49 años. Los resultados obtenidos de la estimación de la TOF, entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 5.

Año	TOF (%)	Año	TOF (%)	Año	TOF (%)
1990	31,05	1996	35,68	2002	41,31
1991	34,63	1997	37,16	2003	24,15
1992	34,79	1998	27,34	2004	27,99
1993	34,28	1999	37,24	2005	19,56
1994	36,09	2000	25,80	2006	18,91
1995	36,37	2001	31,49	2007	20,30

Tabla 5. Evolución de la Tasa Ocupacional femenina en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la Tabla 5, que muestran la tendencia de la TOF, pueden ser mejor apreciados en la Figura 6.



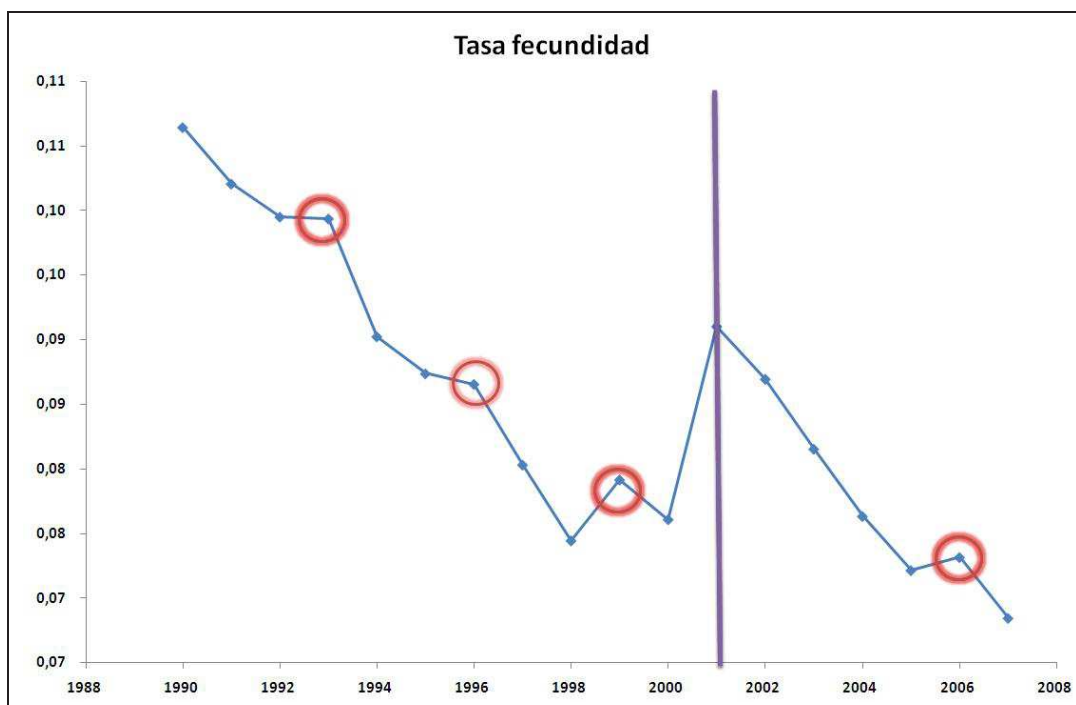


Figura 5. Evolución de la tasa de fecundidad en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

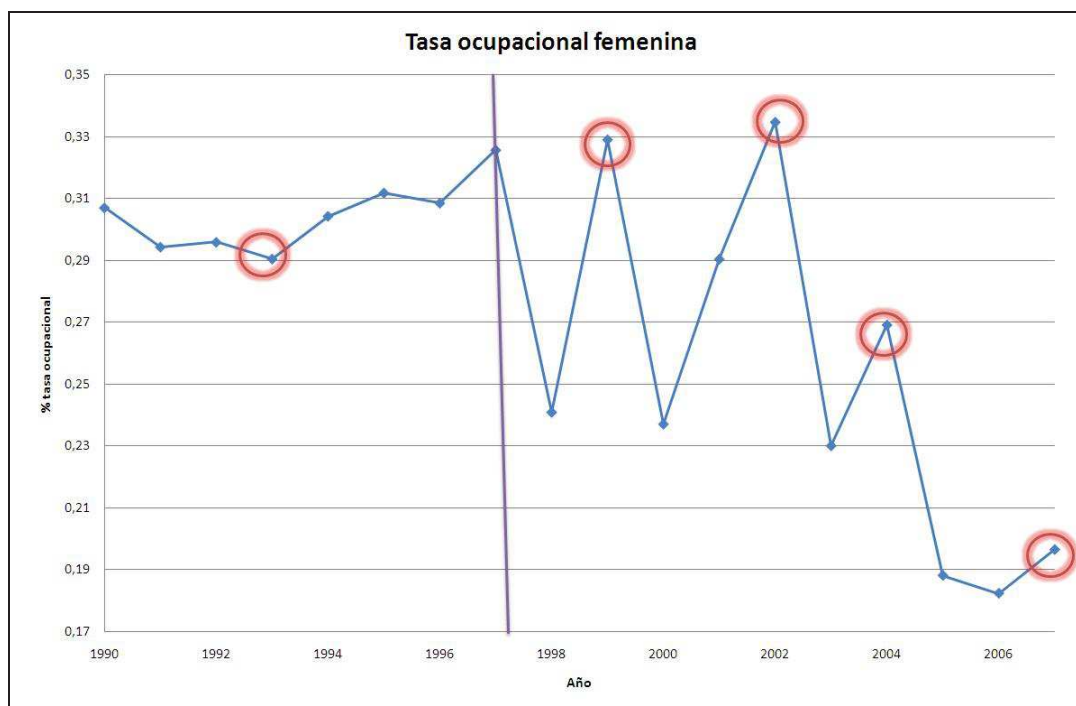


Figura 6. Evolución de la tasa de ocupacional femenina en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

La tasa ocupacional femenina durante los años 1990 y 1997 tiene una tendencia creciente. Esta pasa de 31,05 % a 37,16 %, respectivamente. Después del año 1997 se observan fuertes oscilaciones en la tasa ocupacional femenina,

sin que se pueda evidenciar una tendencia. En el año 2004 se establece una cota superior para la tasa, pues a partir de este año ninguno de los otros valores vuelve a superar dicha cota. En resumen, se podría decir que a partir del año

2002, la tasa ocupacional femenina tiene una tendencia decreciente, sin que se pueda esperar una recuperación a los niveles alcanzados en la década de los noventa.

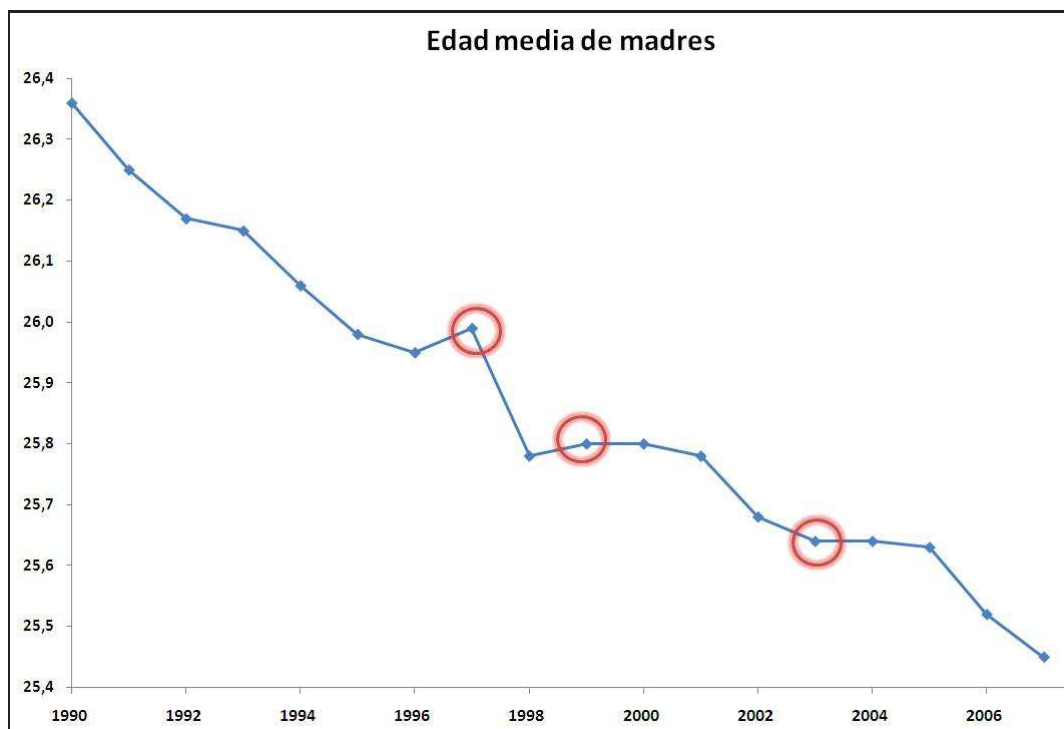
**Edad media de las madres.** Se considera como edad media de las madres la edad promedio en la que una mujer tiene un hijo. Este promedio fue realizado de manera anual. Se tomó únicamente las mujeres cuya edad está entre los 12 y 49 años, pues por cuestiones naturales, en la

mujer su período de fertilidad no puede ser inferior ni superior a este rango de edad. Las posibles excepciones (datos atípicos: madres menores de 12 años y mayores a 49), no se han considerado. Los resultados obtenidos de la estimación de la edad media de las madres, entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 6.

Los resultados de la Tabla 6, que muestran un decrecimiento de la edad media de las madres, pueden ser mejor apreciados en la Figura 7.

Año	Edad Media años	Año	Edad Media años	Año	Edad Media años
1990	26,36	1996	25,95	2002	25,68
1991	26,25	1997	25,99	2003	25,64
1992	26,17	1998	25,78	2004	25,64
1993	26,15	1999	25,80	2005	25,63
1994	26,06	2000	25,80	2006	25,52
1995	25,98	2001	25,78	2007	25,42

**Tabla 6.** Evolución de la edad media de las madres a la hora de tener hijos en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.



**Figura 7.** Evolución de la edad media de las madres a la hora de tener hijos en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

La edad media de las madres en el momento de tener hijos tiene una tendencia decreciente, con puntos de corrección, y fluctúa dentro de un rango pequeño ( $0,94 < 1$ ), pues se encuentra entre los 25.42 y 26.36 años. Además, se puede apreciar que en 17 años no ha habido un cambio significativo en la edad media de las madres a la hora de tener hijos.

**Número de niños.** Para el cálculo del número de niños se considera el total de niños nacidos en el país durante el período de tiempo al que hacemos referencia. Los resultados obtenidos, de la estimación del número de niños entre el año 1990 y el año 2007, se muestran en la Tabla 7.

Los resultados de la Tabla 7, que muestran el número de niños nacidos, pueden ser mejor apreciados en la Figura 8.

Año	Total de niños	Año	Total de niños	Año	Total de niños
1990	309 453	1996	333 223	2002	327 911
1991	311 150	1997	323 675	2003	313 709
1992	317 993	1998	314 042	2004	299 531
1993	332 787	1999	349 382	2005	288 534
1994	316 676	2000	351 251	2006	298 080
1995	321 195	2001	336 266	2007	283 984

Tabla 7. Evolución del número de niños nacidos en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

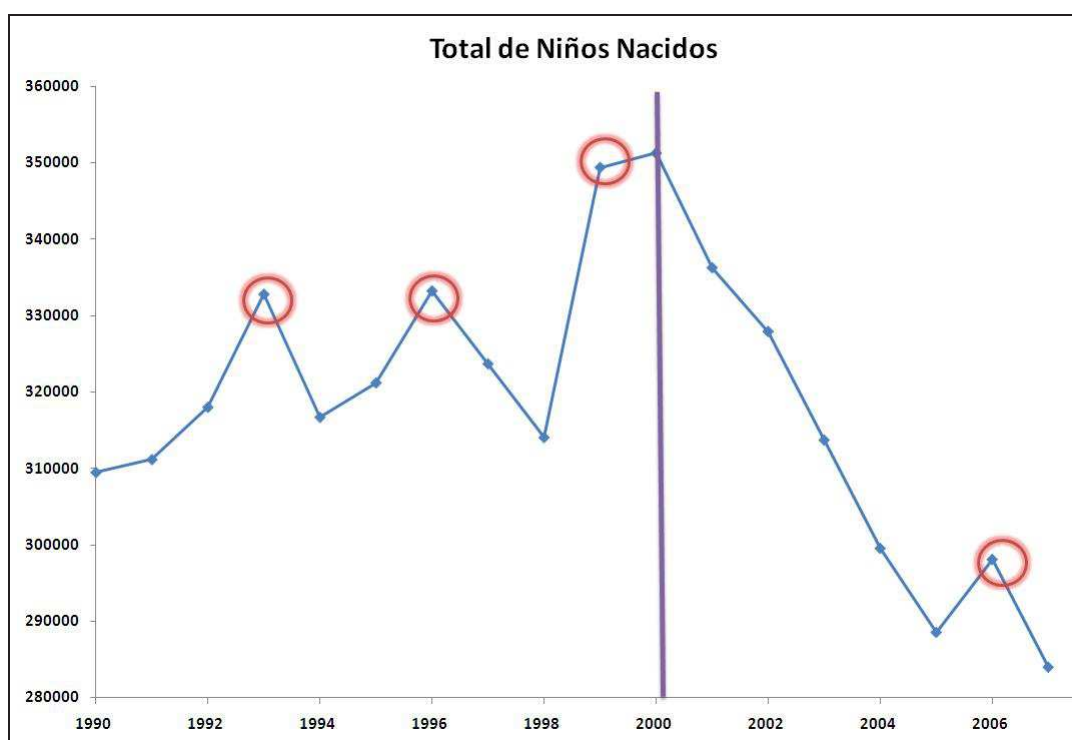


Figura 8. Evolución del número de niños nacidos en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

Desde el año 1990 hasta el año 1999 puede observarse un comportamiento irregular del número de niños nacidos. Se podría decir que tiene un leve comportamiento creciente. Por otra parte, a partir del año 2000, el comportamiento decreciente es evidenciado. Los cambios en la línea de tendencia están directamente relacionados con los cambios en la tasa de natalidad.

#### Población Femenina Económicamente Activa (PEAf).

La población económicamente activa femenina toma en cuenta el total de mujeres en edad para trabajar: esto es de los 15 a 65 años. Los resultados obtenidos de la estimación de la PEAf entre el año 1990 y el año 2007 se muestran en la Tabla 8.

Los resultados de la Tabla 8 que, en general, muestran un crecimiento en la PEA femenina, pueden ser mejor apreciados en la Figura 9.

Año	PPEAf	Año	PEA PEAf	Año	PEAf
1990	11 592	1996	12 262	2002	7 888
1991	12 363	1997	12 181	2003	24 668
1992	12 237	1998	13 299	2004	25 251
1993	12 169	1999	13 257	2005	23 691
1994	11 985	2000	19 143	2006	23 934
1995	11 985	2001	18 532	2007	23 702

Tabla 8. Evolución de la Población Económicamente Activa Femenina en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

La PEA femenina muestra una ligera tendencia creciente hasta el año 2001, luego se produce una drástica caída en el año 2002, la cual se podría explicar por el fenómeno de la migración. Posterior al año 2002, se observa una recuperación que alcanza su máximo en el año 2004 y permanece estable por el resto de período de estudio.

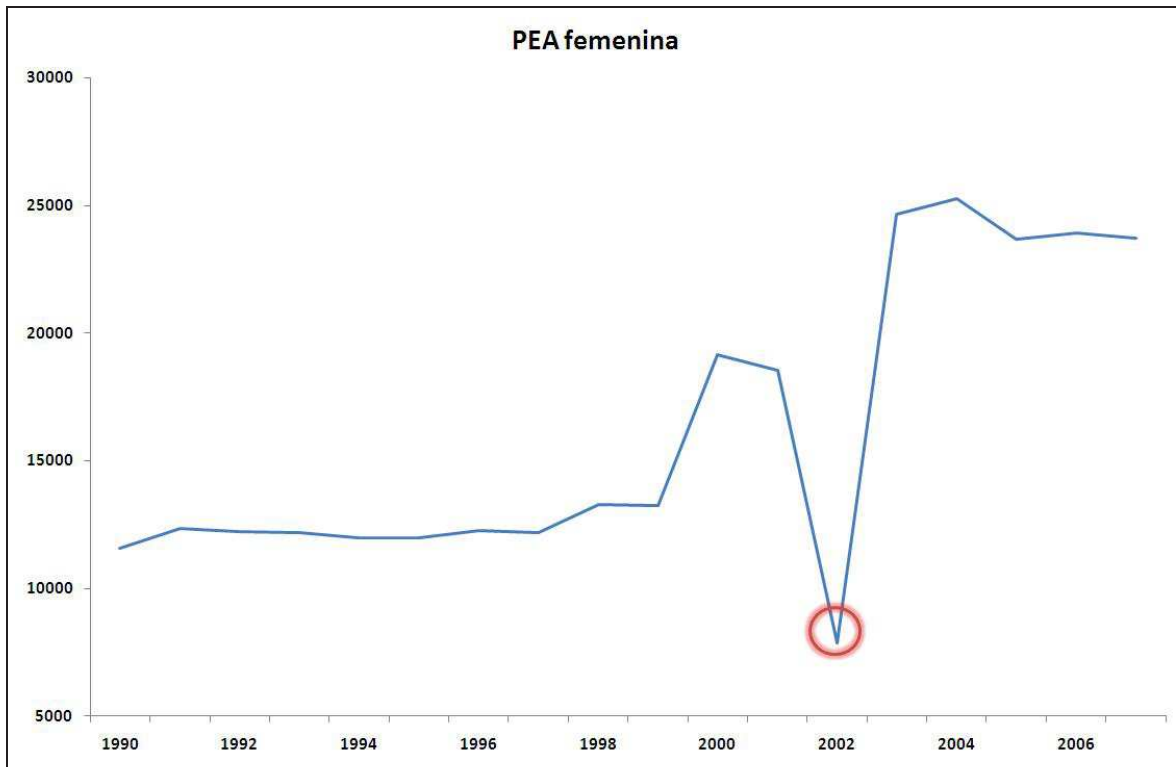


Figura 9. Evolución de la Población Económicamente Activa Femenina en el período 1990-2007. Fuente: Elaboración propia.

### 2.2.3 Construcción de modelos

Un modelo lineal múltiple, en general, relaciona la variable dependiente  $Y$  con  $k$  variables explicativas  $X_r$  ( $r=1, \dots, k$ ) o cualquier transformación de éstas, las cuales generan un hiperplano de parámetros  $\beta_r$  desconocidos. El modelo puede representarse de la siguiente manera:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{r=1}^k \beta_r X_r + \epsilon, \quad (9)$$

donde  $\epsilon$  es una variable aleatoria independiente que sigue una ley normal  $N(0, \sigma^2)$ . Además, esta variable recoge todos aquellos factores de la realidad no controlables u observables.

Un modelo de *Regresión Lineal Múltiple* con  $k$  variables predictoras y basado en  $n$  observaciones es de la forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_{i}, \quad (10)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Generalmente para la estimación de los parámetros  $\beta_r$  se utiliza la técnica de Mínimos de Cuadrados Ordinarios [5].

Como paso previo a la construcción de un modelo lineal múltiple se realizó un cambio de escala de las variables a utilizar, pues al considerar tasas y totales poblacionales (distintas escalas), el empleo de la regresión lineal múltiple directamente tendría problemas [5]. Además, se considerará un nivel de confianza del 95% (nivel de significancia de 5%) para las distintas pruebas de hipótesis a realizar, con el objeto de validar el modelo.

Para encontrar el modelo adecuado se desarrollaron dos fases. En la primera fase se construyeron varios modelos tratando de encontrar el más adecuado. Aquí se presenta un primer modelo realizado con todas las variables estudiadas y un resumen de los varios modelos analizados junto con un segundo modelo que de acuerdo a las pruebas de significancia es el más consistente.

En la segunda fase, tras el estudio de diferentes autores con respecto a la estimación de la tasa de fecundidad [15, 17], se notó que existen otras variables que probablemente puedan explicar de mejor manera esta tasa; por lo que se construyó otro modelo que toma en cuenta variables como: la población nacional, la tasa de natalidad, número total de niños nacidos vivos, número total de niños nacidos muertos y la población total económicamente activa femenina y masculina.

A continuación, se presentan las fases descritas para la construcción del modelo:

**Fase I.** En esta fase se construirán varios modelos, pero explícitamente se presentarán dos: el *Modelo 1* será el elaborado considerando todas las variables en estudio y el *Modelo 2* será el óptimo de entre todos los modelos analizados. Se presenta, además, un resumen de los modelos elaborados.

**Modelo 1:** Este modelo considera todas las variables en estudio, las cuales son:

- $Y_i$ : Tasa de Fecundidad en el año  $i$ .
- $X_{1i}$ : Tasa ocupacional de la mujer en el año  $i$ .
- $X_{2i}$ : Edad de las madres en el año  $i$ .
- $X_{3i}$ : Número de niños nacidos en el año  $i$ .
- $X_{4i}$ : Ingresos de las mujeres ocupadas en el año  $i$ .
- $X_{5i}$ : Número de mujeres ocupadas en el año  $i$ .
- $X_{6i}$ : Hogares con mujeres en edad fértil en el año  $i$ .
- $X_{7i}$ : Población femenina ocupada en el año  $i$ .
- $X_{8i}$ : Población femenina en edad para trabajar (15-65 años) en el año  $i$ .

El modelo lineal múltiple formalizado por todas las variables descritas es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_5 X_{5i} + \beta_6 X_{6i} + \beta_7 X_{7i} + \beta_8 X_{8i} + \epsilon_i. \quad (11)$$

A la relación establecida en la ecuación (11) lo llamaremos *Modelo 1*. Los resultados obtenidos al estimar los coeficientes  $\beta_r, r = 0, \dots, 8$ , son:

Coefficiente	Valor
$\beta_0$	$-3,97 \times 10^{-11}$
$\beta_1$	0,16
$\beta_2$	$3,89 \times 10^{-02}$
$\beta_3$	0,63
$\beta_4$	$-3,14 \times 10^{-02}$
$\beta_5$	0,33
$\beta_6$	-0,15
$\beta_7$	$-3,81 \times 10^{-02}$
$\beta_8$	-0,94

**Tabla 9.** Resultados de los regresores, Modelo 1, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

Explícitamente el *Modelo 1* es:

$$Y_i = -3,97 \times 10^{-11} + 0,16X_{1i} + 3,89 \times 10^{-02}X_{2i} + 0,63X_{3i} - 3,14 \times 10^{-02}X_{4i} + 0,33X_{5i} - 0,15X_{6i} - 3,81 \times 10^{-02}X_{7i} - 0,94X_{8i} + \epsilon_i. \quad (12)$$

A continuación se realizaron *pruebas de hipótesis* a los parámetros del modelo. La prueba para cada uno de los parámetros es:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_r = 0 \\ H_a : \beta_r \neq 0 \end{cases}$$

Utilizando el estadístico *t-student* a un nivel de confianza del 95 %, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 10.

Coefficiente	T-valor	Sign.	Decisión
$\beta_0$	0	1	Acepto
$\beta_1$	1,44	0,18	Acepto
$\beta_2$	1,82	0,09	Acepto
$\beta_3$	37,31	0	Rechazo
$\beta_4$	-1,68	0,12	Acepto
$\beta_5$	1,36	0,20	Acepto
$\beta_6$	-1,56	0,15	Acepto
$\beta_7$	-0,11	0,92	Acepto
$\beta_8$	-25,43	0	Rechazo

**Tabla 10.** Resultados de las pruebas de hipótesis para los parámetros del Modelo 1. Fase I. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 10 encontramos que  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$  son nulos, pues su razón  $t$  en valor absoluto es inferior a la razón  $t$  al 95 %; esto es 2,20. Por otra parte, el valor de la significancia para cada uno de los parámetros mencionados es superior a 0,05, lo cual confirma lo anteriormente dicho, es decir, los parámetros son nulos.

Por otra parte, los datos mostrados en la Tabla 11, correspondientes al Modelo 1, no hacen más que ratificar que el modelo no es válido, pues su  $p$ -valor es menor a 0,05 y el valor de  $F$  es muy superior al valor  $F$  - crítico.

Nombre	Valor
$R^2$	0,851
$F$	8,68
$p$ -valor	0,0009
$F$ - crítico	3,14

**Tabla 11.** Resultados de los parámetros  $R^2, F, F$ -crítico y  $p$ -valor. Modelo 1, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

En resumen, un modelo que considere todas las variables independientes mostradas ( $X_1, \dots, X_8$ ), no aproxima de manera adecuada la tasa de fecundidad.

Por lo señalado, a fin de tener un modelo más consistente se realizaron diferentes combinaciones entre las variables. Algunas de las combinaciones realizadas se muestran en la Tabla 12.

Luego de realizar todas las combinaciones posibles, la combinación de variables más adecuada para determinar la tasa de fecundidad es la formada por las variables  $X_3, X_6, X_7$  y  $X_8$ . El modelo formado por las variables mencionadas, es al que llamaremos *Modelo 2*.

		1 REGRESOR			2 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor	Decisión	Valor	T-valor	Decisión	
$\beta_0$	$-8,21 \times 10^{-11}$	0	Accept Ho	$-9,72 \times 10^{-11}$	0	Accept Ho	
$\beta_1$	0,56	2,78	Reject Ho	0,66	2,77	Reject Ho	
$\beta_2$				0,19	0,79	Accept Ho	
$\beta_3$							
$\beta_4$							
$\beta_5$							
$\beta_6$							
$\beta_7$							
$\beta_8$							
R-cuadrado	0,31			0,34			
		3 REGRESORES			4 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor	Decisión	Valor	T-valor	Decisión	
$\beta_0$	$-1,13 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho	$-1,12 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho	
$\beta_1$	0,6	3,14	Reject Ho	0,68	2,95	Reject Ho	
$\beta_2$	$-9,93 \times 10^{-03}$	0,05	Accept Ho	$-6,70 \times 10^{-02}$	0,3	Accept Ho	
$\beta_3$	0,53	3,11	Reject Ho	0,51	2,81	Reject Ho	
$\beta_4$				-0,13	-0,64	Accept Ho	
$\beta_5$							
$\beta_6$							
$\beta_7$							
$\beta_8$							
R-cuadrado	0,59			0,61			
		5 REGRESORES			6 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor	Decisión	Valor	T-valor	Decisión	
$\beta_0$	$-8,51 \times 10^{-11}$	0	Accept Ho	$-8,51 \times 10^{-11}$	0	Accept Ho	
$\beta_1$	0,24	0,72	Accept Ho	$2,43 \times 10^{-01}$	0,72	Accept Ho	
$\beta_2$	$1,68 \times 10^{-02}$	0,08	Accept Ho	$1,68 \times 10^{-02}$	0,08	Accept Ho	
$\beta_3$	0,53	3,13	Reject Ho	0,53	3,13	Reject Ho	
$\beta_4$	-0,17	-0,91	Accept Ho	-0,17	-0,91	Accept Ho	
$\beta_5$	-0,51	-1,7	Accept Ho	-0,51	-1,70	Accept Ho	
$\beta_6$				0,68			
$\beta_7$							
$\beta_8$							
R-cuadrado	0,68			0,68			
		7 REGRESORES			8 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor	Decisión	Valor	T-valor	Decisión	
$\beta_0$	$-8,36 \times 10^{-11}$	0	Accept Ho	$-4,16 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho	
$\beta_1$	$9,77 \times 10^{-02}$	0,12	Accept Ho	-1,42	-1,88	Accept Ho	
$\beta_2$	$2,52 \times 10^{-02}$	0,11	Accept Ho	$-3,72 \times 10^{-02}$	-0,23	Accept Ho	
$\beta_3$	0,53	3,01	Reject Ho	0,63	4,82	Reject Ho	
$\beta_4$	-0,19	-0,89	Accept Ho	$-9,32 \times 10^{-02}$	-0,59	Accept Ho	
$\beta_5$	-0,73	-0,61	Accept Ho	3,77	2,4	Reject Ho	
$\beta_6$	0,12	0,19	Accept Ho	1,27	2,19	Accept Ho	
$\beta_7$				-6,55	-3,44	Reject Ho	
$\beta_8$							
R-cuadrado	0,68			0,85			

Tabla 12. Resultados al realizar distintas combinaciones entre las variables. Fuente: Elaboración propia.

**Modelo 2:** El modelo lineal múltiple formalizado por todas las variables más consistentes es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_3 X_{3i} + \beta_6 X_{6i} + \beta_7 X_{7i} + \beta_8 X_{8i} + \varepsilon_i. \quad (13)$$

Los resultados obtenidos al estimar los coeficientes  $\beta_r$ ,  $r = 0, 3, 6, 7, 8$ , son:

Coefficiente	Valor
$\beta_0$	$-7,52 \times 10^{-11}$
$\beta_3$	0,64
$\beta_6$	0,70
$\beta_7$	$-0,67 \times 10^{-02}$
$\beta_8$	-0,89

**Tabla 13.** Resultados de los regresores, Modelo 2, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

Explícitamente el Modelo 2<sup>1</sup> es:

$$Y_i = -7,52 \times 10^{-11} + 0,64X_{3i} + 0,70X_{6i} - 0,67 \times 10^{-2}X_{7i} - 0,89X_{8i} + \varepsilon_i. \quad (14)$$

A continuación se realizaron pruebas de hipótesis a los parámetros del modelo. La prueba para cada uno de los parámetros es:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_r = 0 \\ H_a : \beta_r \neq 0 \end{cases}$$

Utilizando el estadístico *t-student* a un nivel de confianza del 95 %, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 14.

Coefficiente	T-valor	Sign.	Decisión
$\beta_0$	0	1	Acepto
$\beta_3$	35,27	0	Rechazo
$\beta_6$	2,87	0,012	Rechazo
$\beta_7$	-2,59	0,02	Rechazo
$\beta_8$	-26,58	0	Rechazo

**Tabla 14.** Resultados de las pruebas de hipótesis para los estimadores. Modelo 2, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 14 se puede observar que, salvo el coeficiente  $\beta_0$ , ninguno de los otros coeficientes es nulo, ya que se rechaza la hipótesis nula ( $\beta_r$  es cero) para cada uno de ellos, pues su razón *t* en valor absoluto es superior a la razón *t* al 95 %; esto es 2,16. Además, esto se confirma con el valor de significancia obtenido para cada coeficiente.

Cabe señalar que la nulidad del coeficiente  $\beta_0$ , esto es que la tasa de fecundidad (*Y*) sería igual a 0 si las otras variables ( $X_3, X_6, X_7, X_8$ ) son 0; se podría considerar como

<sup>1</sup>A pesar de que este modelo se podría considerar como definitivo, los parámetros no pueden ser interpretados hasta que se expresen en la escala correspondiente.

<sup>2</sup>Numéricamente cero  $3,32 \times 10^{-16} \approx 0$

un indicador de la coherencia del modelo obtenido, ya que el mismo señala que si no nacen niños ( $X_3 = 0$ ), que si los hogares no tienen mujeres en edad fértil ( $X_6 = 0$ ), que si no existe población femenina ocupada ( $X_7 = 0$  y que si no hay población femenina en edad para trabajar ( $X_8 = 0$ ); obviamente, la tasa de fecundidad sería ( $Y = 0$ ).

Nombre	Valor
$R^2$	0,995
<i>F</i>	752
<i>p-valor</i>	$3,32 \times 10^{-16}$
<i>F-crítico</i>	3,34

**Tabla 15.** Resultados de la significancia de los regresores. Modelo 2, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

Por lo visto en la Tabla 15, el Modelo 2 estima adecuadamente la tasa de fecundidad. Esto se ratifica al observar que el *p-valor*<sup>2</sup> es menor que 0,05 y que el estadístico *F* calculado es mayor que el *F-crítico* (se rechaza la hipótesis nula que de todos coeficientes  $\beta_r$  son nulos de manera simultánea).

En resumen, los resultados obtenidos, ver Tablas 15 y 14, permiten concluir que la tasa de fecundidad es estimada adecuadamente con el Modelo 2.

Antes de realizar los cambios de escala correspondientes, se realizará un análisis de residuos. Cabe recordar que el análisis de residuos, de manera general, indicará la consistencia o no del modelo lineal, pues los residuos obtenidos deberán tener una varianza constante (homocedasticidad, lo contrario es conocido como heterocedasticidad) y estar normalmente distribuidos.

Para saber si los residuos tienen una varianza constante se realizó la prueba de la razón de los máximos de verosimilitud [5]; la cual, básicamente prueba la siguiente hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \\ H_1 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2) \end{cases}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Al realizar la prueba se calculó el estadístico  $\hat{\chi}^2$ , el cual fue de 0,4. Luego, se comparó el resultado obtenido con el valor del estadístico a un nivel de confianza del 95 %; el valor del estadístico fue de  $\chi_{0,95}^2 = 5$ . Al comparar los dos valores se observa que  $\hat{\chi}^2 < \chi_{0,95}^2$ , por lo que se acepta  $H_0$ , es decir, la varianza de los residuos es constante.

Para saber si los residuos están normalmente distribuidos se utilizará el gráfico del histograma y el gráfico P-P normal de regresión, que son mostrados en la Figura 10. Para el análisis se compara la curva normal con la distribución empírica en el histograma y, se evalúa el alejamiento de los puntos representados con respecto a la diagonal.

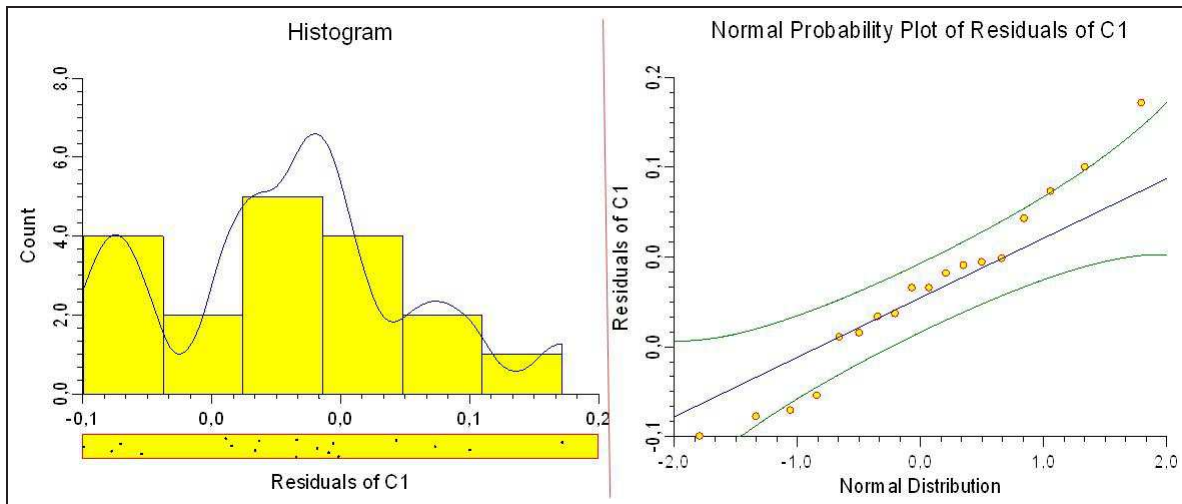


Figura 10. Histograma y Gráfico P-P normal. Modelo 2, Fase I. Fuente: Elaboración propia.

Con base en lo observado en la Figura 10, izquierda, podemos concluir que existen desviaciones de la curva normal en las colas. Sin embargo, se podría considerar que los datos se distribuyen normalmente. Esto se ratifica al observar la distribución de los puntos en el gráfico P-P normal (Figura 10, derecha).

A continuación se aplica los cambios de escala correspondientes a la ecuación (14) [5]. Así, el Modelo 2 explícitamente es:

$$Y_i = 0,10 + 2,48 \times 10^{-07} X_{3i} + 1,39 \times 10^{-06} X_{6i} - 1,31 \times 10^{-06} X_{7i} - 2,49 \times 10^{-08} X_{8i} + \varepsilon_i. \quad (15)$$

Una vez realizado el cambio de escala, podemos dar

una interpretación a la ecuación y a sus parámetros. Así, los signos de la ecuación (15) muestran que a medida que la población femenina en edad para trabajar aumenta, la tasa de fecundidad disminuye, si el resto de variables se mantienen constantes; por ejemplo, si consideramos las variable  $X_{7i}$ <sup>3</sup>, considerando su coeficiente, podemos decir por cada 1'000.000 de mujeres que ingresan a la edad para trabajar, la tasa de fecundidad disminuye 1,31 veces. Un análisis similar se puede realizar para el resto de variables.

Con el fin de profundizar el análisis sobre la tasa de fecundidad en Ecuador, se realizó una estimación de cada una de las variables que la componen, mediante números aleatorios normales, hasta el año 2030. La Figura 11 muestra los resultados:

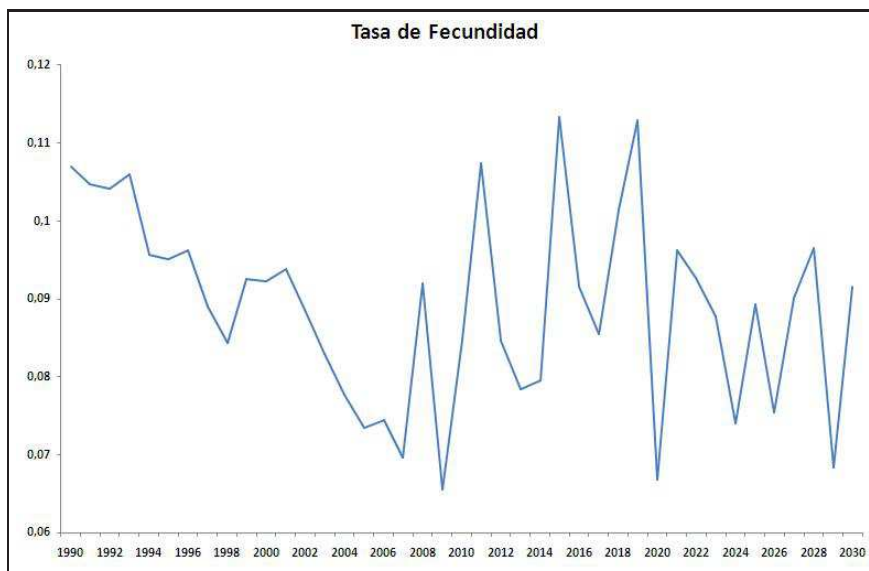
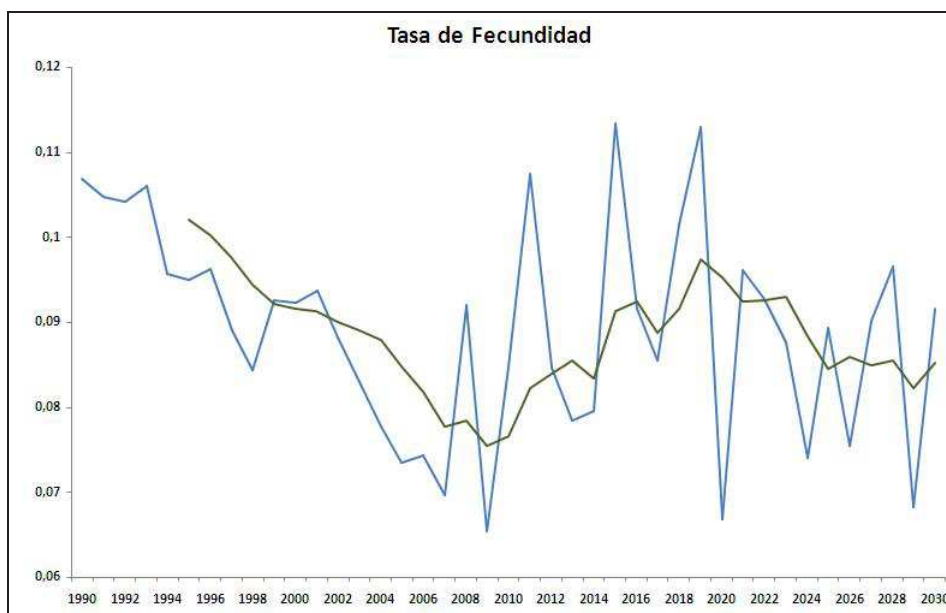


Figura 11. Evolución de la Tasa de Fecundidad en el período 1990-2030. Se observa que a partir del año 2008 no se distingue una tendencia; sin embargo, no debemos olvidar que estos son datos simulados, por lo que se aplicará una media móvil para tener un mejor acercamiento a la realidad. Fuente: Elaboración propia.

<sup>3</sup>Población femenina ocupada en el año  $i$





**Figura 12.** Evolución de la Tasa de Fecundidad en el período 1990-2030. Puede apreciarse una mejor aproximación de la tasa de fecundidad, que mantiene una tendencia decreciente con algunos puntos de corrección. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 12 se muestran los datos ajustados mediante una media móvil (4 períodos).

Hasta aquí el estudio de la primera fase.

**Fase II.** Como ya se mencionó, tras el estudio de diferentes autores con respecto a la estimación de la tasa de fecundidad [15, 17] se notó que existen otras variables que probablemente puedan explicar de mejor manera esta tasa. Así, en esta fase se contemplo las siguientes variables:

$Y_i$ : Tasa de Fecundidad en el año  $i$ .

$X_{1i}$ : La población femenina en edad fecunda en el año  $i$ .

$X_{2i}$ : La población total estimada en el año  $i$ .

$X_{3i}$ : La tasa de natalidad en el año  $i$ .

$X_{4i}$ : La población económicamente activa masculina en el año  $i$ .

$X_{5i}$ : La población económicamente activa femenina en el año  $i$ .

$X_{6i}$ : El número de nacidos vivos en el año  $i$ .

$X_{7i}$ : El número de nacidos muertos en el año  $i$ .

Luego de construir los modelos de regresión respectivos, se observa que la tasa de fecundidad con respecto a las variables anteriormente citadas, no es estimada adecuadamente. En otras palabras, las variables consideradas no

son útiles para modelar la fecundidad. Un breve resumen de los modelos construidos se muestra en la Tabla 17.

Como se puede observar en la Tabla 17 ninguno de los modelos construidos con 7, 6, 5 y 4 variables es lo suficientemente consistente para adoptarlo. Sin embargo, dentro de los modelos con 3 variables, se encontró el que mejor ajusta los datos; por lo que a continuación presentamos la mejor aproximación obtenida.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i, \quad (16)$$

donde

$Y_i$ : La tasa de fecundidad.

$X_{1i}$ : Población femenina en edad fecunda (12-49 años) en el año  $i$ .

$X_{2i}$ : La población total estimada.

$X_{3i}$ : La tasa de natalidad.

Los resultados obtenidos al estimar los coeficientes  $\beta_r$  son:

Coefficiente	Valor
$\beta_0$	-0,008
$\beta_1$	$-2,11 \times 10^{-08}$
$\beta_2$	$6,9 \times 10^{-09}$
$\beta_3$	3,34

**Tabla 16.** Resultados de los regresores. Fase II. Fuente: Elaboración propia.

7 REGRESORES				6 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor	Accept Ho	Valor	T-valor	Decisión
$\beta_0$	$1,87 \times 10^{-10}$	0	Reject Ho	$1,86 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho
$\beta_1$	-0,78	-12,20	Reject Ho	-0,78	-12,68	Reject Ho
$\beta_2$	0,85	2,65	Reject Ho	0,77	3,15	Reject Ho
$\beta_3$	1,26	3,36	Accept Ho	1,16	4,01	Reject Ho
$\beta_4$	0,78	1,31	Accept Ho	0,83	1,47	Accept Ho
$\beta_5$	-0,76	-1,29	Accept Ho	-0,81	-1,44	Accept Ho
$\beta_6$	$-9,29 \times 10^{-02}$	-0,57	Accept Ho	$-4,23 \times 10^{-02}$	-0,38	Accept Ho
$\beta_7$	$1,93 \times 10^{-02}$	0,43				
R-cuadrado	0,99			0,996827		
5 REGRESORES				4 REGRESORES		
Coefficiente	Valor	T-valor		Valor	T-valor	Decisión
$\beta_0$	$1,81 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho	$1,38 \times 10^{-10}$	0	Accept Ho
$\beta_1$	-0,79	-14,48	Reject Ho	-0,85	-23,02	Reject Ho
$\beta_2$	0,69	6,32	Reject Ho	0,79	9,01	Reject Ho
$\beta_3$	1,06	14,26	Reject Ho	1,11	16,38	Reject Ho
$\beta_4$	0,79	1,48	Accept Ho	$2,07 \times 10^{-02}$	0,70	Accept Ho
$\beta_5$	-0,76	-1,44	Accept Ho			
R-cuadrado	0,99			0,99		

Tabla 17. Regresiones. Fuente: Elaboración propia.

Explícitamente el modelo es<sup>4</sup>:

$$Y_i = -0,008 - 2,11 \times 10^{-08}X_{1i} + 6,9 \times 10^{-09}X_{2i} + 3,34X_{3i} + \varepsilon_i. \quad (17)$$

A continuación se realizaron *pruebas de hipótesis* a los parámetros del modelo. La prueba para cada uno de los parámetros es:

$$\begin{cases} H_0: \beta_r = 0 \\ H_a: \beta_r \neq 0 \end{cases}$$

Utilizando el estadístico *t-student* a un nivel de confianza del 95 %, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 18.

Coefficiente	T-valor	Sign.	Decisión
$\beta_0$	-0,677	0,510	Acepto
$\beta_1$	-24,081	$8,56 \times 10^{-13}$	Rechazo
$\beta_2$	9,375	$2,07 \times 10^{-07}$	Rechazo
$\beta_3$	16,82	$1,11 \times 10^{-10}$	Rechazo

Tabla 18. Resultados de las pruebas de hipótesis para los estimadores. Fase II. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 18 se puede observar que, salvo el coeficiente  $\beta_0$ , ninguno de los otros coeficientes es nulo, ya que se rechaza la hipótesis nula ( $\beta_r$  es cero) para cada uno de

<sup>4</sup>A pesar de que este modelo se podría considerar como definitivo, los parámetros no pueden ser interpretados hasta que se expresen en la escala correspondiente.

<sup>5</sup>Numéricamente cero  $4,05 \times 10^{-17} \approx 0$

ellos, pues su razón *t* en valor absoluto es superior a la razón *t* al 95 %; esto es 2,14. Además, esto se confirma con el valor de significancia obtenido para cada coeficiente.

Cabe señalar que la nulidad del coeficiente  $\beta_0$ , esto es que la tasa de fecundidad (*Y*) sería igual a 0 si las otras variables ( $X_1, X_2, X_3$ ) son 0; se podría considerar como un indicador de la coherencia del modelo obtenido, ya que el mismo señala que si no existe población femenina en edad fértil ( $X_1 = 0$ ), que si la población es casi cero ( $X_2 = 0$ ) (esta es únicamente una consideración teórica) y que si la tasa de natalidad es cero ( $X_3 = 0$ ); obviamente, la tasa de fecundidad sería ( $Y = 0$ ).

Nombre	Valor
$R^2$	0,996
<i>F</i>	202
<i>p-valor</i>	$4,05 \times 10^{-17}$
<i>F-crítico</i>	3,68

Tabla 19. Resultados de la significancia de los regresores. Fase II. Fuente: Elaboración propia.

Por lo visto en la Tabla 19, el modelo de la Fase II estima adecuadamente la tasa de fecundidad. Esto se ratifica al observar que el *p-valor*<sup>5</sup> es menor que 0,05 y que el estadístico *F* calculado es mayor que el *F-crítico* (se rechaza la hipótesis nula que de todos coeficientes  $\beta_r$  son nulos de

manera simultanea).

En resumen, los resultados obtenidos, ver Tablas 18 y 19, permiten concluir que la tasa de fecundidad es estimada adecuadamente por el modelo construido.

Antes de realizar los cambios de escala correspondientes, se realizará un análisis de residuos (similar a lo hecho en la Fase I). Cabe recordar que el análisis de residuos, de manera general, indicará la consistencia o no del modelo lineal, pues los residuos obtenidos deberán tener una varianza constante (homocedasticidad, lo contrario es conocido como heterocedasticidad) y estar normalmente distribuidos.

Para saber si los residuos tienen una varianza constante se realizó la prueba de la razón de los máximos de verosimilitud [5]; la cual, básicamente prueba la siguiente

hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \\ H_1 : \epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2) \end{cases}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Al realizar la prueba se calculó el estadístico  $\hat{\chi}^2$ , el cual fue de 1.24. Luego, se comparó el resultado obtenido con el valor del estadístico a un nivel de confianza del 95%; el valor del estadístico fue de  $\chi_{0,95}^2 = 5$ . Al comparar los dos valores se observa que  $\hat{\chi}^2 < \chi_{0,95}^2$ , por lo que se acepta  $H_0$ , es decir, la varianza de los residuos es constante.

Para saber si los residuos están normalmente distribuidos se utilizará el gráfico del histograma y el gráfico P-P normal de regresión, que son mostrados en la Figura 13. Para el análisis se compara la curva normal con la distribución empírica en el histograma y, se evalúa el alejamiento de los puntos representados con respecto a la diagonal.

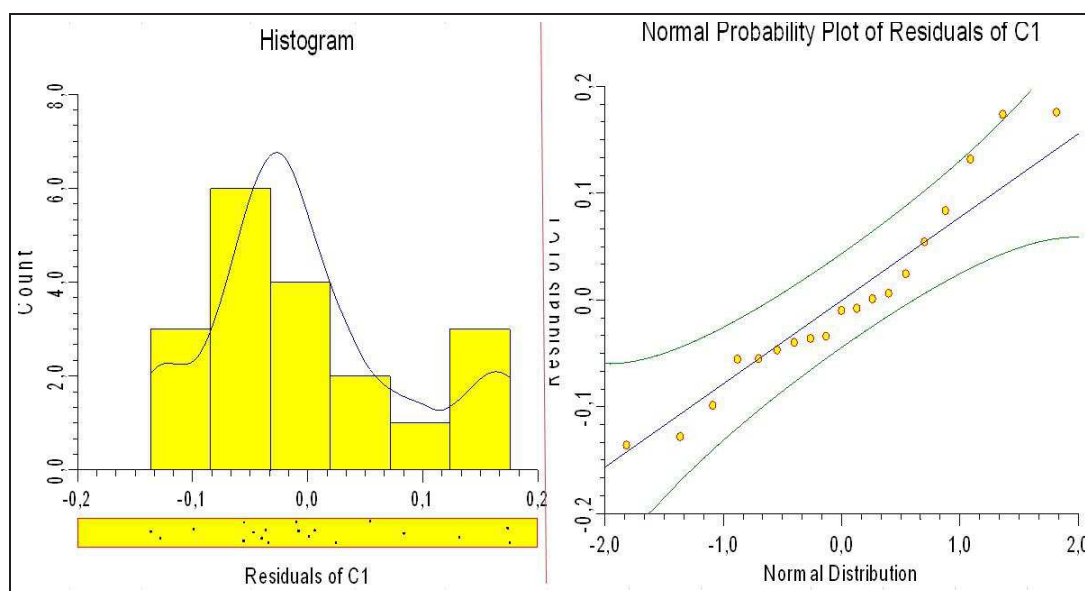


Figura 13. Histograma y Gráfico P-P normal. Fase II. Fuente: Elaboración propia.

En base a lo observado en la Figura 13, izquierda, podemos concluir que existen desviaciones de la curva normal en las colas, particularmente en la cola derecha. Sin embargo, se podría considerar que los datos se distribuyen normalmente, aún más, se distribuyen de mejor manera a los resultados obtenidos en el Modelo 2. Esto se ratifica al observar la distribución de los puntos en el gráfico P-P normal (Figura 13, derecha).

A pesar de las pruebas realizadas, para confirmar los resultados obtenidos, se realizarán pruebas de multicolinealidad<sup>6</sup>, pues se tiene la sospecha que podría existir este problema.

<sup>6</sup>La multicolinealidad se produce cuando hay una fuerte correlación entre los regresores. Si la correlación es fuerte afecta a la precisión de los estimadores y a las pruebas de hipótesis

<sup>7</sup>Los factores de inflación de la varianza FIV son los valores ubicados en la diagonal de la matriz de correlaciones. Un factor de inflación de la varianza superior a 10 es un fuerte indicio de multicolinealidad.

Comenzaremos calculando el factor de inflación de la varianza (FVI)<sup>7</sup>. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 20.

Nombre	Valor
FVI1	4,59
FVI2	25,09
FVI3	14,95

Tabla 20. Pruebas de Multicolinealidad. Fase II. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 20, los *FVI* son superiores a 10. En otras palabras, se puede decir que existe un fuerte indicio de multicolinealidad. Sin embargo, para corroborar esto aplicaremos el índice de condicionamiento<sup>8</sup>, el cual es un indicador de multicolinealidad.

Luego de realizar los análisis y cálculos respectivos, el índice de condicionamiento es

$$IC = 107,29.$$

Dado que el *IC* es mayor que 15, lo cual nos indica que existe una fuerte multicolinealidad, es necesario aplicar las medidas remediadoras pertinentes, es decir, aplicar un método de regresión con componentes principales [5]<sup>9</sup>.

Luego de las correcciones y ajuste necesarios, el modelo corregido (disminución de la multicolinealidad) es:

$$Y_i = -0,056 - 2,89 \times 10^{-09}X_{1i} + 1,61 \times 10^{-09}X_{2i} + 4,85 \times 10^{-09}X_{3i} + \varepsilon_i. \quad (18)$$

Una vez realizado el cambio de escala, podemos dar una interpretación a la ecuación y a sus parámetros. Así, los signos de la ecuación (15) muestran que a medida que

la población femenina en edad para trabajar aumenta, la tasa de fecundidad disminuye, si el resto de variables se mantienen constantes; por ejemplo, si consideramos las variable  $X_{7i}$  (población femenina ocupada), considerando su coeficiente, podemos decir por cada 1'000.000 de mujeres que ingresan a la edad para trabajar, la tasa de fecundidad disminuye 1,31 veces. Un análisis similar se puede realizar para el resto de variables.

La tasa de fecundidad muestra una correlación positiva con la población total estimada y con la tasa de natalidad, es decir, si la tasa de natalidad aumenta o si la población aumenta, la tasa de fecundidad también lo hará. Luego, considerando la población femenina en edad fecunda, podemos decir que por cada 1'000.000 de mujeres, la tasa fecundidad disminuirá 2.89 veces. Este valor ratifica el decrecimiento de la tasa de fecundidad. Es de notar que dentro del rango de la población femenina en edad fecunda se encuentra gran parte de la PEA femenina.

Con el fin de profundizar el análisis sobre la tasa de fecundidad en Ecuador, se realizó una estimación de cada una de las variables que la componen, mediante números aleatorios normales, hasta el año 2030. La Figura 14 muestra los resultados:

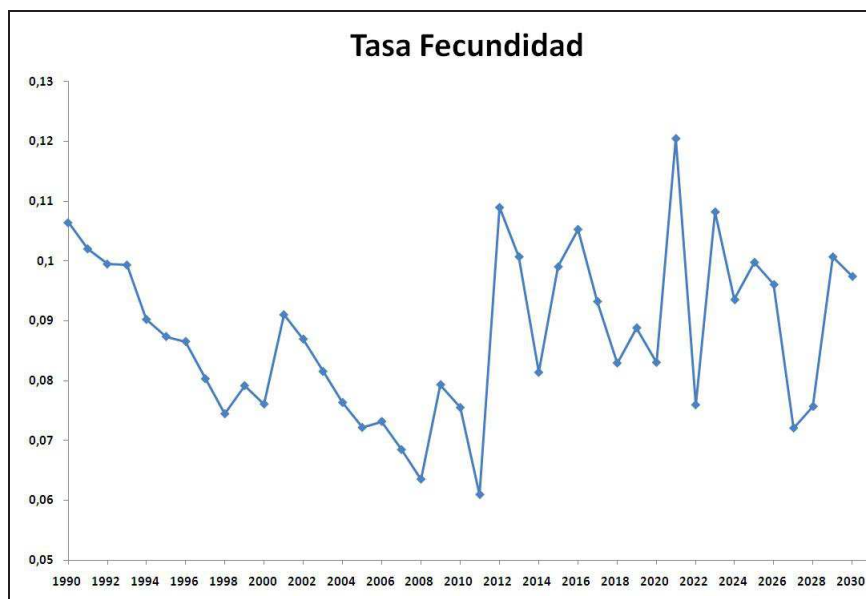


Figura 14. Evolución Tasa de Fecundidad en el período 1990-2030. Fuente: Elaboración propia.

<sup>8</sup>El índice de condicionamiento se define como:

$$IC = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}},$$

donde  $\lambda_{max}$  es el mayor valor propio y,  $\lambda_{min}$  es el menor valor propio de la matriz de correlaciones. Un índice de condicionamiento superior a 15 es un indicio de fuerte multicolinealidad, entre 10 y 15 es moderada y, menor que 10 no es un problema

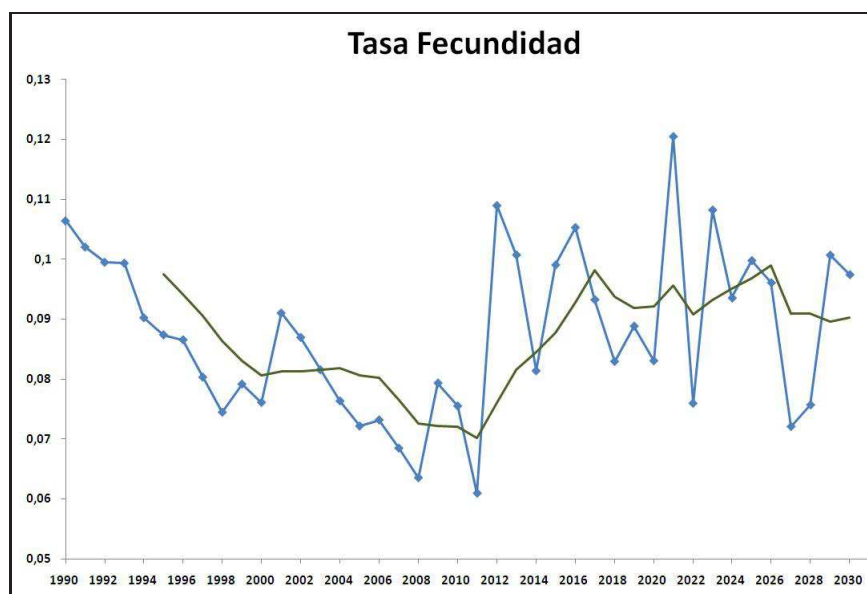
<sup>9</sup>Para la corrección de la multicolinealidad se realiza una regresión con componentes principales. Así, el modelo a desarrollar es

$$Y_i = \alpha C + \varepsilon,$$

donde  $\alpha$  representa a la matriz de coeficientes,  $C$  es la matriz de componentes principales y  $\varepsilon$  es el error. Las hipótesis sobre el término del error son las usuales para una regresión lineal múltiple. El modelo no incluye el término independiente (constante), porque las componentes principales son centradas. Con el fin de disminuir la varianza de los estimadores  $\beta_r$  se eliminan las componentes principales cuyos valores propios son muy pequeños.

Como podemos observar en la Figura 14, a partir del año 2008 se presenta una estacionalidad aparente; sin embargo, no debemos olvidar que estos son datos simulados,

por lo que se intentará diferenciar la línea de tendencia para tener una mejor aproximación a la realidad, ver Figura 15



**Figura 15.** Evolución Tasa de Fecundidad en el período 1990-2030. Podemos observar una tasa de fecundidad que se adapta más a la realidad. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, exponemos las razones para elegir uno de los modelos construidos.

#### 2.2.4 Selección del Modelo

Al analizar las dos fases del estudio podemos observar que el modelo 1, de la Fase I no es válido, pues la mayoría de los estimadores (regresores) son nulos. Por otro lado, el modelo 2 de la misma fase, en el cual los coeficientes no son nulos, se podría considerar un modelo válido. Sin embargo, el modelo presentado en la Fase II, que cumple con las mismas características (coeficientes no nulos), también se podría considerar como válido. Así, potencialmente tenemos dos modelos válidos. Aún más, si consideramos los coeficientes de determinación  $R^2$  de cada uno de los modelos, tendremos que  $R^2 = 0,995$  y que  $R^2 = 0,996$ , respectivamente.

Como se puede notar, existiría un problema si necesitáramos elegir un modelo, pues hasta el momento los dos son estadísticamente válidos. Afortunadamente, por estudios anteriores realizados [15], se sabe la importancia de la tasa de natalidad en la estimación de la tasa de fecundidad. Así, basados en la bibliografía y en los análisis respectivos, podemos decir que el modelo desarrollado en la Fase II es el más adecuado, pues en él se considera la tasa de natalidad.

<sup>10</sup>Es un histograma que está hecho a base de barras cuya altura es proporcional a la cantidad que representa la estructura de la población por sexo y edad.

### 3 Aplicación

Por lo visto en la sección anterior, la tasa de fecundidad tiene una tendencia decreciente, pero esta por sí misma no refleja los cambios poblacionales, por lo que en esta sección se hace uso de los otros elementos poblacionales ya calculados y, mediante el empleo de ciertos indicadores poblacionales se desarrollará algunas teorías demográficas.

Antes de continuar es necesario saber cual ha sido el comportamiento de la población ecuatoriana. Para ello, se analizará las pirámides poblacionales<sup>10</sup> obtenidas a partir de los Censos Poblacionales del año 1990 y del año 2001.

#### 3.1 Pirámide Población Ecuatoriana

La Pirámide Poblacional Ecuatoriana por rango de edades, considerando el censo del año 1990, se muestra en la Figura 16. Los rangos establecidos tienen una amplitud de 5 años, según estándares internacionales.

En el año 1990 la Pirámide Poblacional Ecuatoriana, Figura 16, mostró tener una forma triangular. Esta forma es típica en países en vías de desarrollo y algunos autores la denominan *Torre Eiffel* [2, 9, 10]. En la Pirámide Poblacional; por ejemplo, se puede observar que la población mayor o igual a 85 años es realmente pequeña comparada con la población menor a 14 años. Esto evidencia la población mayoritariamente joven.

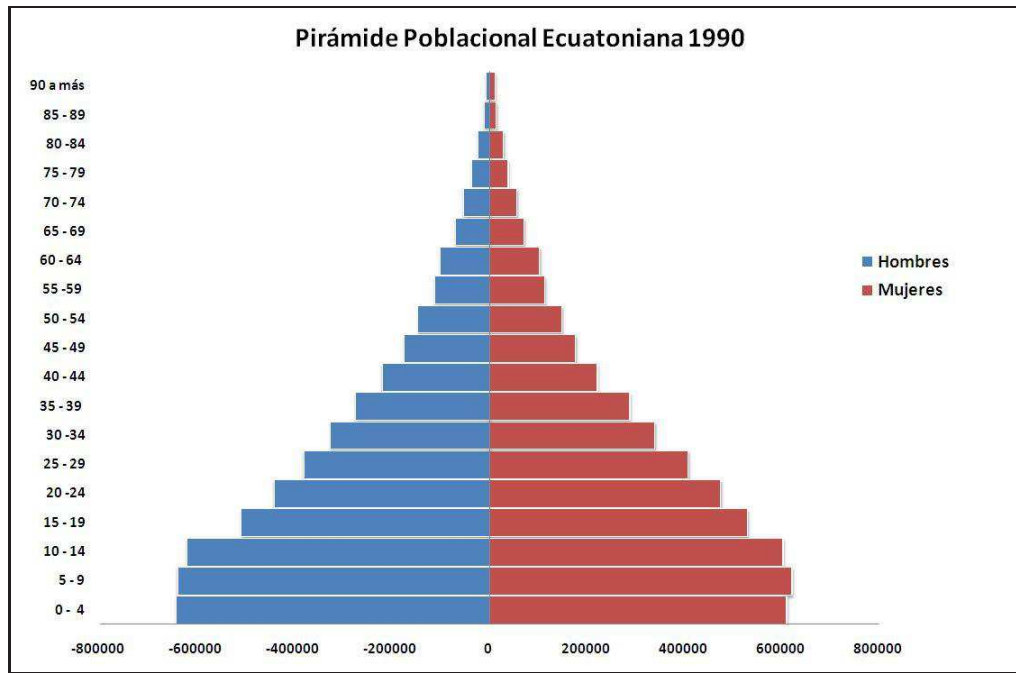


Figura 16. Pirámide Poblacional del Ecuador considerando los datos del censo del año 1990. Fuente: Elaboración propia.

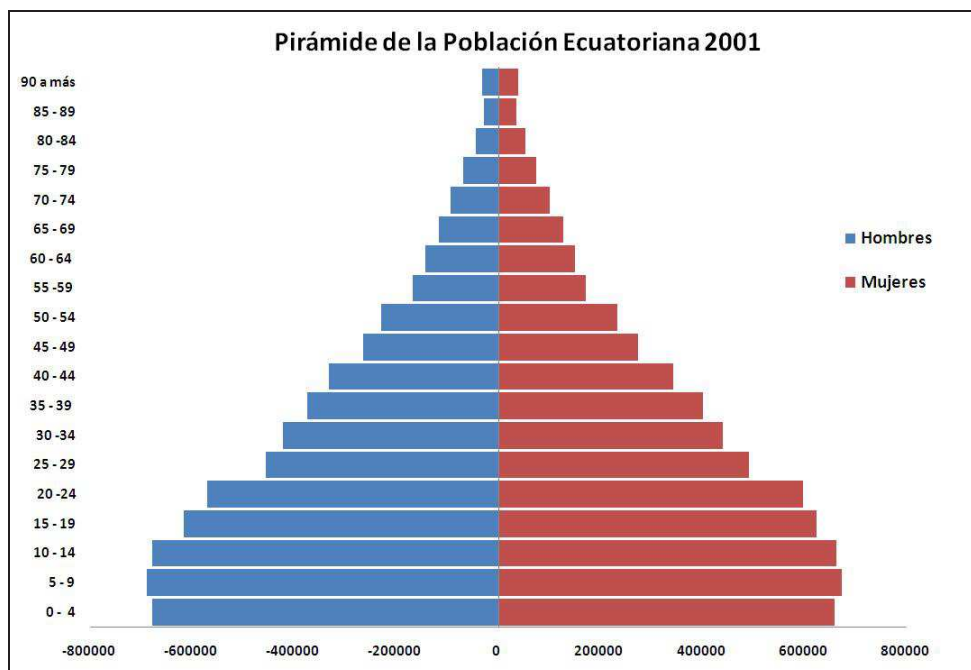


Figura 17. Pirámide Poblacional del Ecuador para el año 2001. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 17 se muestra la Pirámide Poblacional Ecuatoriana considerando el censo del año 2001.

Para el año 2001, la pirámide muestra un ensanchamiento, ya que los ecuatorianos pasamos de 9'648.198 a 12'156.608 habitantes, Figura 17. Esto se debe, en alguna medida, al descenso en la tasa de mortalidad en los últimos años, véase la Figura 4.

Otra particularidad de la pirámide, Figura 17, se puede observar en la población mayor a 85 años. En el año 1990 esta población era casi imperceptible, mientras que en el año 2001 su representatividad ya es notoria.

En resumen, la relación poblacional a cambiado a lo largo de los años, aumentando las personas adultas mayores. Sin embargo, todos los cálculos realizados muestran que la

población ecuatoriana sigue siendo mayoritariamente joven. Esto último se evidencia en el ensanchamiento de la base en la pirámide.

En la Figura 18 se observa que la población ecuatoriana ha sufrido cambios en su composición poblacional<sup>11</sup>. Sin

embargo, estos cambios no son lo suficientemente grandes como en sociedades desarrolladas, donde las pirámides poblacionales casi se han invertido, es decir, la población es mayoritariamente adulta. En Ecuador la población es mayoritariamente joven.

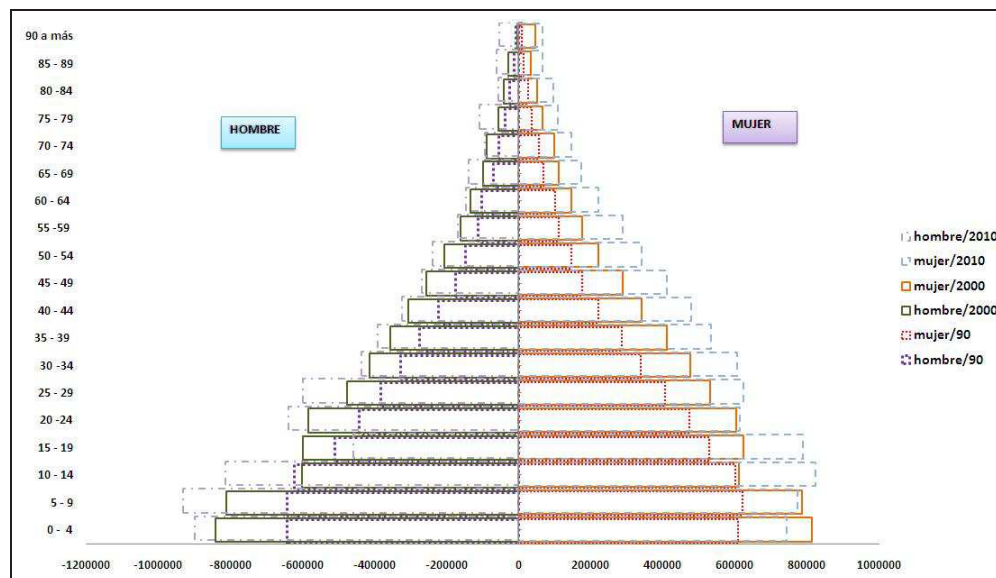


Figura 18. Pirámide Poblacional Ecuatoriana. Fuente: Elaboración propia.

### 3.2 Teoría de la Transición Demográfica

Esta teoría fue desarrollada por el demógrafo Warren Thompson en el año 1929 [2, 4], quien observó los cambios que habrían experimentado en los últimos años las sociedades industrializadas de su tiempo con respecto a la ta-

sa de natalidad y de mortalidad, de acuerdo a la cual una sociedad preindustrial pasa, demográficamente hablando, por cuatro fases antes de derivar en una sociedad plenamente postindustrial (este fenómeno puede visualizarse en la Figura 19) [2].

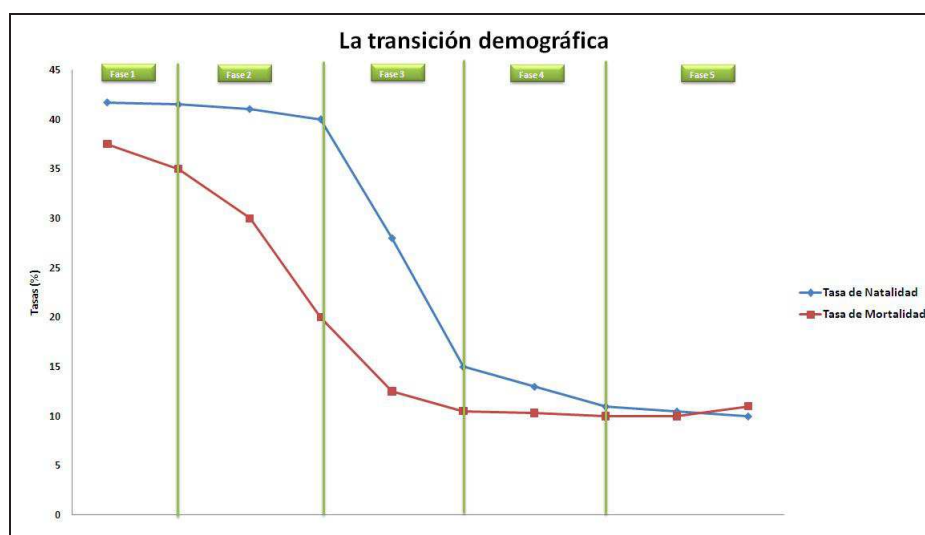


Figura 19. Fases de la Teoría de la Transición Demográfica. Fuente: Elaboración propia.

<sup>11</sup>Otros indicadores que muestran los cambios poblacionales son la tasa de natalidad y de mortalidad, ver Tabla 2 y 3. En las dos tasas se evidencia el descenso en los últimos años.

**Fase 1: Antiguo régimen demográfico.** Se refiere a las sociedades preindustriales, donde las tasas de natalidad y de mortalidad son muy altas, por lo cual el crecimiento natural de la población es muy lento.

**Fase 2: Comienzo de la transición.** Propio de países en vías de desarrollo. Los índices de mortalidad bajan de forma repentina gracias a las mejoras en las técnicas agrícolas, las mejoras tecnológicas, los avances en medicina y alfabetización. Estos cambios contribuyen decisivamente a alargar la esperanza de vida de las personas y a reducir la mortalidad.

**Fase 3: Final de la transición.** Los índices de natalidad inician un importante descenso motivado por: el acceso a la contracepción, la incorporación de la mujer a la educación y al mercado laboral, el acceso al estado del bienestar, el proceso de urbanización, la sustitución de la agricultura de subsistencia por la agricultura de mercado, junto con otros cambios sociales.

**Fase 4: Régimen demográfico moderno.** Típico de las sociedades postindustriales y se caracteriza porque la tasa de mortalidad toca fondo y la de natalidad se iguala prácticamente con ella, el crecimiento natural de la población

se hace muy bajo, por razones totalmente opuestas a las del Antiguo Régimen Demográfico.

**Fase 5 Fase o crecimiento cero.** El paso del tiempo ha permitido la adición de una quinta fase, en la cual la tasa de natalidad se mantiene baja mientras que la mortalidad aumenta ligeramente, debido al envejecimiento de la población. En esas circunstancias el crecimiento natural puede llegar a ser negativo, como ha ocurrido en los países del Este de Europa, [2].

### 3.2.1 Cálculo de la fase demográfica para el Ecuador.

Dado que una sociedad puede encontrarse en alguna de las 5 fases anteriormente descritas, condicionadas éstas por la tasa de natalidad y mortalidad (ver Tablas 2 y 3), analizaremos en qué fase nos encontramos, basados en los datos mostrados en la Figura 20.

Como podemos observar en la Figura 20 el Ecuador se encontraría en la **fase tres**, donde los índices de natalidad inician un importante descenso. Según esta teoría, el descenso en la natalidad, podría estar motivado por la incorporación de la mujer a la educación, al mercado laboral, a mejoras en el sistema de salud y a procesos de urbanización, junto con otros cambios sociales.

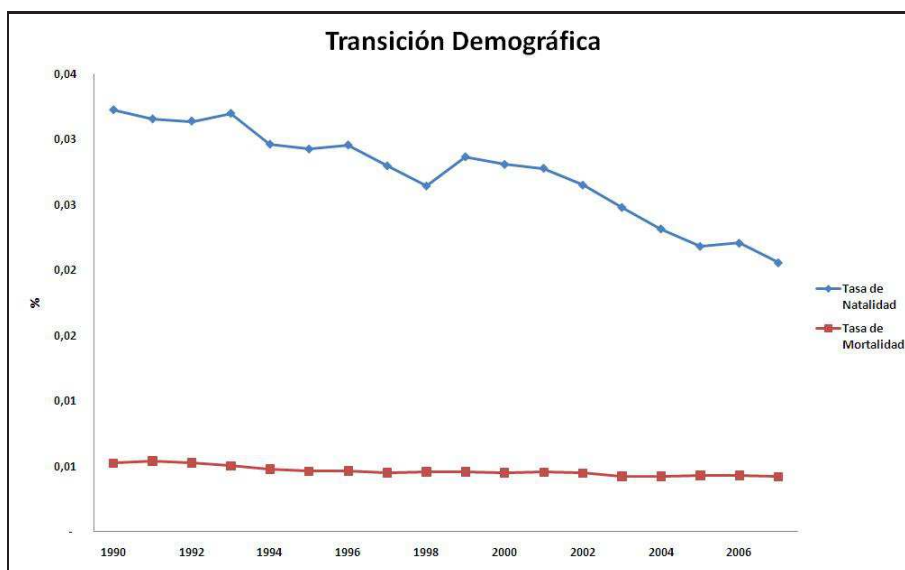


Figura 20. Transición Demográfica Ecuatoriana. Fuente: Elaboración propia.

### 3.3 Bono Demográfico Ecuatoriano

El mundo actual vive un proceso de transformación demográfica, pues hay un descenso de mortalidad y fecundidad como resultado de la industrialización, los avances médicos y sobre todo el mejoramiento de la calidad vida. Así, el descenso de la mortalidad, antes que la fecundi-

dad, produjo en el mundo la manifestación del crecimiento acelerado de la población, con repercusiones significativas, principalmente en los países en desarrollo. A este fenómeno la opinión mundial prestó atención y, llevó al debate internacional la discusión del crecimiento demográfico donde sobresalen opiniones en su favor, en contra y las que abarcan las dos opciones [10].

<sup>12</sup>Ver definición 4.



El crecimiento demográfico produce nuevas oportunidades, denominadas bono demográfico. El bono demográfico se da cuando las relaciones de dependencia<sup>12</sup> se reducen. En otras palabras, la población menor a 15 años y mayor a 65 años es inferior a la población que se encuentra entre los 15 y 65 años (población que se encuentra produciendo). Por tanto, las poblaciones productivas son numerosas y generan mayores ingresos, que contribuyen al desarrollo económico de las naciones. Sin embargo, para que este bono se convierta en un beneficio es necesaria la implementación de una serie de políticas que con anticipación preparen su aprovechamiento.

Por lo expuesto a continuación, estimaremos el bono demográfico para el Ecuador.

### 3.3.1 Estimación del Bono Demográfico Ecuatoriano

La perspectiva demográfica en el futuro se basa en proyecciones de la población bajo determinados supuestos. Para la estimación del bono demográfico ecuatoriano, en primer lugar, vamos a estimar la población hasta el año

2030. Esto con el objeto de saber si desde el año 1990 hasta la actualidad (2010) se ha presentado o no un bono demográfico y, si en años posteriores podría presentarse.

Para la estimación de población nacional total, utilizaremos la metodología expuesta en las anteriores secciones, es decir, con la ayuda de los censos de los años 1990 y 2001, respectivamente, estimaremos la población total considerando la ecuación logística de población, ecuación (7). Luego, es necesario conocer la población clasificada por sexo y por edad, desde el año 1990 hasta el año 2030. Para esto consideraremos el censo del año 1990, donde conocemos la distribución de la población por sexo y por edad.

A partir de la información obtenida dividimos los datos en rangos de 5 años, según estándares internacionales. Los rangos considerados son de 0 a 4 años, de 5 a 10 años, de 11 a 16 años, etc.<sup>13</sup>

Finalmente, utilizando la definición 4, se determinó la relación de dependencia, para poder comparar con la población en edad productiva. Los resultados pueden observarse en la Figura 21.

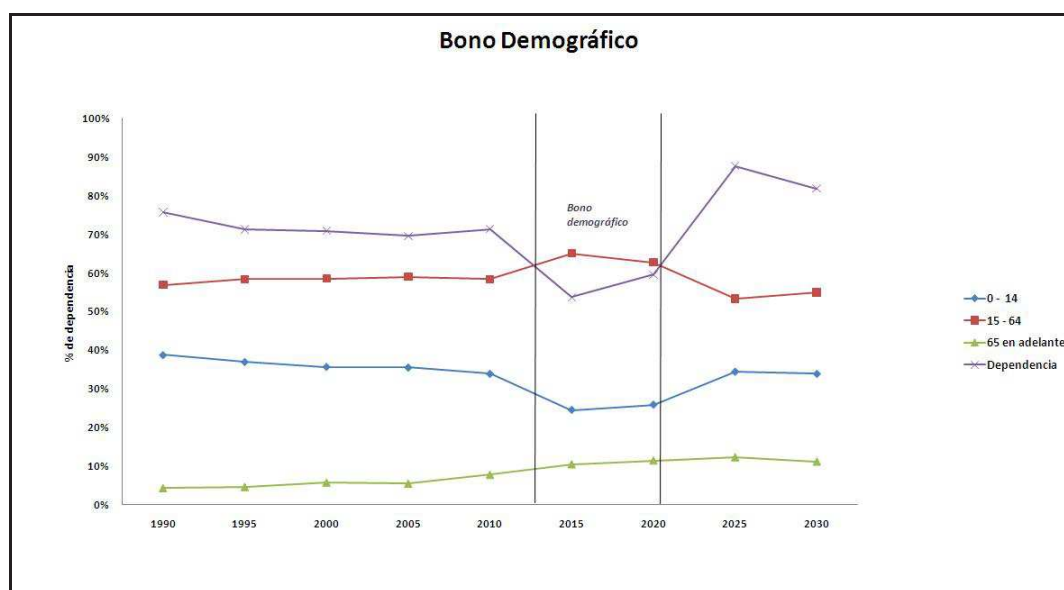


Figura 21. Bono Demográfico Ecuatoriano. Se evidencia el bono demográfico entre el año 2013 y 2022. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la Figura 21 la relación de dependencia entre el año 1990 y el año 2010 evidencia una ligera tendencia decreciente, a partir del año 2010 se visualiza un decrecimiento más pronunciado, encontrando en el año 2015 el punto más bajo de la tendencia y, el punto más alto se ubica en el año 2025. Por otra parte, la población en edad productiva muestra una tendencia creciente hasta el año 2015, a partir de ese año se puede apreciar una tendencia decreciente hasta el año 2025; luego, puede observarse

un tenue crecimiento.

Determinando la intersecciones correspondientes, puede notarse que en el Ecuador el umbral del bono demográfico se ubicará plenamente entre el año 2013 y el año 2022; en ese período la relación de dependencia es inferior a las personas es edad productiva. Así, se tendrán relaciones de dependencia cercanas o inferiores a 60, potencialmente inactivos, por cada 100, potencialmente activos, que sería el inicio, año 2013. En el año 2015 se observa que la re-

<sup>13</sup>En cada uno de los rangos considerados, obviamente, se suscitarán nacimientos y defunciones, los cuales han sido considerados y ubicados en los rangos correspondientes; por ejemplo, la población en 1995 habrá avanzado un rango, entre 1991 y 1995 se suscitaran un sin número de nacimientos y defunciones que en 1995 se ubicarán en el rango de 0 a 4 años.

lación de dependencia obtendría su menor valor, mientras que la población en edad productiva alcanzará su mayor valor. En adelante, se visualiza un descenso de las personas en edad productiva y un creciendo de las personas dependientes hasta el año 2022, en el cual se intersecan.

Al contar con períodos de tiempo donde la población en edad productiva es superior a la población dependiente, se generan mayores ingresos para el país. Esto debe ser canalizado a través del gobierno mediante políticas sociales que aprovechen esta relación. Así, por ejemplo, la mejora en la salud pública conduce a una baja en la tasa de mortalidad, lo cual produce un descenso de la fecundidad; esto, a su vez, podría acelerar la transición demográfica, intensificando potencialmente los beneficios económicos y, podría en un futuro sacar al país de un ciclo de pobreza [10].

## 4 Conclusiones

Se ha trabajado con datos de *las Estadísticas vitales, la Encuesta ENEMDU y los Censos Poblacionales de 1990 y 2001*, con éstos se ha construido una regresión por mínimos cuadrados ordinarios que nos ha permitido concluir que la tasa de fecundidad es explicada por la tasa de natalidad, la población femenina en edad fecunda y la población total del país.

Para la selección de variables se consideró como hipótesis la relación directa entre la tasa ocupacional femenina y la tasa de fecundidad, sustentada en qué a medida que las sociedades se desarrollan los niveles de fecundidad decrecen. En el caso ecuatoriano sucedió lo contrario, es decir, la tasa ocupacional femenina no explica la tasa de fecundidad, pero si lo hace la tasa de natalidad.

La realidad demográfica del país fue plasmada con la estimación de la población, que permitió encontrar un bono demográfico (la población en relación de dependencia es menor que la población en edad productiva), el cual se encontrará entre el año 2013 y el año 2022. El aprovechamiento del bono demográfico debería ser canalizado a través de políticas sociales, principalmente en el área de salud y educación, pues esto representa una oportunidad de crecimiento económico en el futuro.

La tasa de natalidad y mortalidad muestran un lento descenso en los últimos años, por lo que pasará mucho tiempo antes que la población ecuatoriana sufra una transición demográfica notable.

## Agradecimientos

Los autores queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a Byron Villacis, Jorge Garcia, Hugo Freire y Livino Armijos por las sugerencias, colaboración y ayuda recibida en la elaboración del presente estudio.

## Referencias

- [1] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, "Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology," Springer-Verlag, (2000).
- [2] H. Cabeza, "Teoría de la Transición Demográfica," Perú, (2008).
- [3] J. Chackiel, "Métodos de Estimación de la Fecundidad y la Mortalidad a partir de Censos, una aplicación a los pueblos indígenas de Panamá," CEPAL, (2000).
- [4] L. Campos, "La transición demográfica en el primer tercio del siglo XX," Universidad de Málaga, (1999).
- [5] A. Castro, "Apuntes de Econometría," Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, (2008).
- [6] R. Cervantes, "Envejecimiento y Calidad de Vida," Universidad de las Américas, Puebla, México, (2003).
- [7] M. Di Cesare, "Interacciones entre transición demográfica y epidemiológica en Nicaragua: implicancias para las políticas públicas en salud," CEPAL, (2007).
- [8] F. Fernandez, "Fecundidad y formación de familias en Andalucía," Instituto de Estadística de Andalucía, (2000).
- [9] C. Flores, "Fecundidad Adolescente y Desigualdad en Colombia y la Región de América Latina y el Caribe," CEPAL, (2006).
- [10] M. Flores, "Bono Demográfico en Honduras," Córdoba, Argentina, (2008).
- [11] H. Freedman, "Deterministic Mathematical Models in Population Ecology," Marcel Dekker, (1980).
- [12] A. J. Lotka, "Analytical Note on Certain Rhythmic in Organic Systems," Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 6, 410-415, (1920).
- [13] T. Malthus, "Primer ensayo sobre la población," Minerva Ediciones, Madrid, (2010).
- [14] M. Marín, "La tasa de actividad femenina en relación a la natalidad," Universidad de Cádiz, (2000).
- [15] A. Montalvo, "Variables relacionadas con la natalidad en los sectores urbano y rural de la provincia del Guayas," Escuela Politécnica del Litoral, Guayaquilo, Ecuador, (2007).
- [16] P. Saad, "Juventud y bono demográfico en Iberoamérica," CEPAL, Chile, (2008).
- [17] J. Sánchez, "Fecundidad y actividad económica de las mujeres en España," Universidad de Malaga, (2005).

- [18] J. Ulloa, "El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos," Córdoba, Argentina, Revista Electrónica de Veterinaria, Vol. 11, Núm. 03, (2010).
- [19] P. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement," Correspondance mathématique et physique, 10, 113-121, (2009).
- [20] V. Volterra, "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi," Mem. Acad. Lincei Roma, 2, 31-113, (1926).
- [21] D. Zill, "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado," Primera edición, International Thomson Editores, México, (1997).