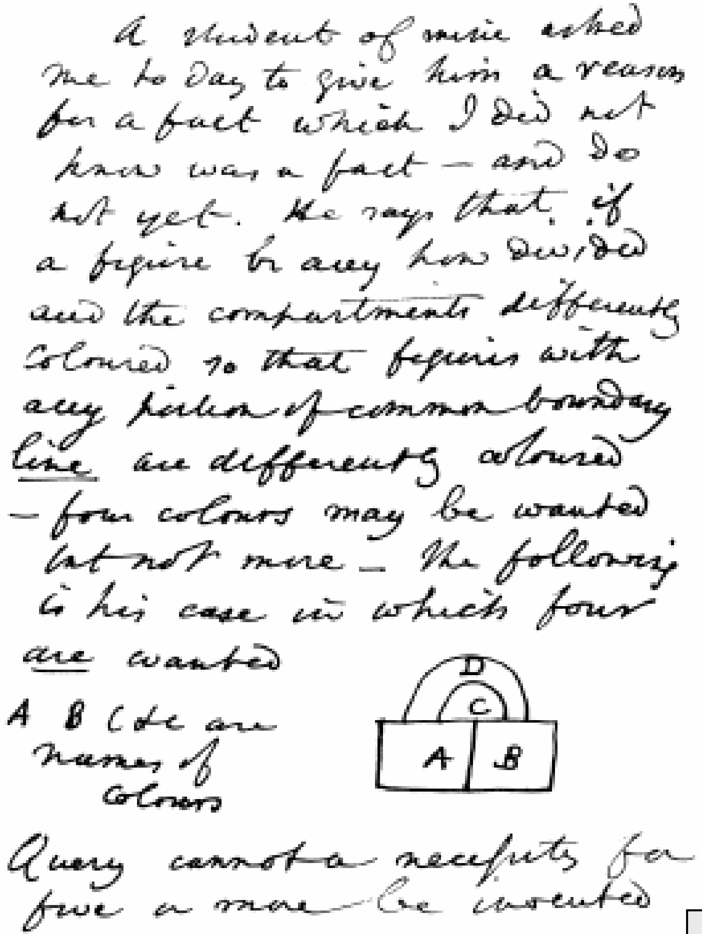
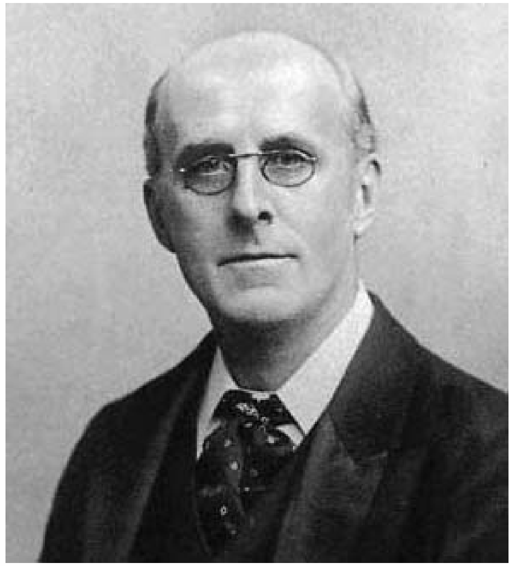
El teorema de los 4 colores

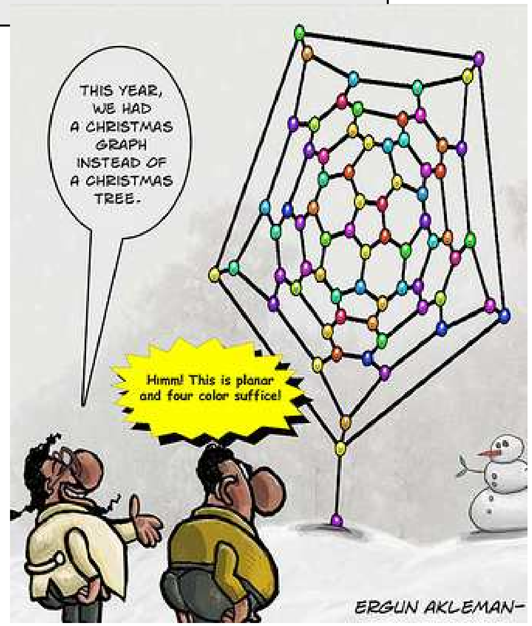

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — The following is his case in which four are wanted

A B C &c are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.





Wolfgang Haken
Smote the Kraken
One! Two! Three! Four!
Quoth he: "the monster is no more".

W.T. Tutte

Granada, 24 de abril de 2009

Guión de la charla

☺Historia de la conjetura de los cuatro colores: de 1852-1996

La “prueba” errónea de Kempe… y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la“demostración” con ayuda de ordenador

¿Está realmente resuelta la conjetura?

Fechas destacables

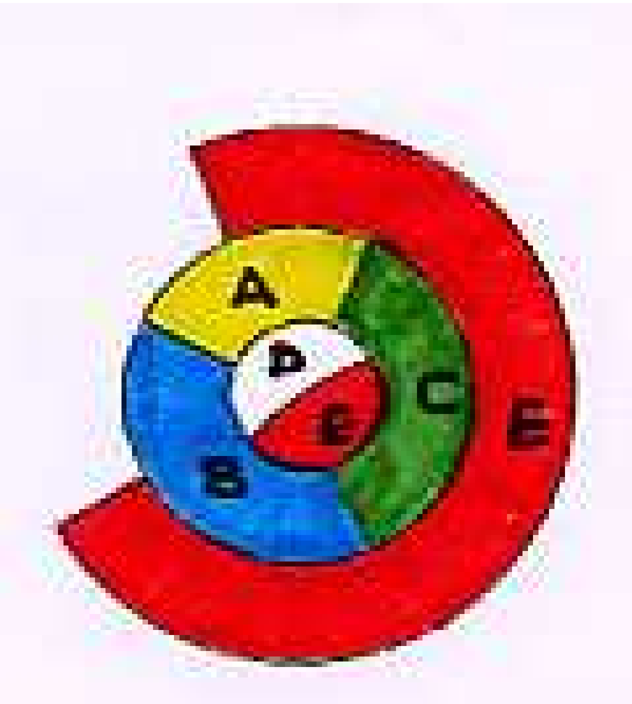
- **1852**: Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y éste a Augustus de Morgan.
- **1878**: Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.
- **1879**: Sir Alfred Bray Kempe publica su demostración.
- **1890**: Percy Heawood descubre un error insalvable en la prueba dada por Kempe.
- **1913**: George Birkhoff introduce la noción de configuración reducible.

Fechas destacables

- **1960**: Se introduce el llamado método de descarga.
- **1969**: Avances de Heinrich Heesch en reducibilidad y obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.
- **1976**: Ken Appel y Wolfgang Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1.482 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).
- **1996**: N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas mejoran la demostración con ayuda de ordenador (sólo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

¿Qué dice la conjetura?

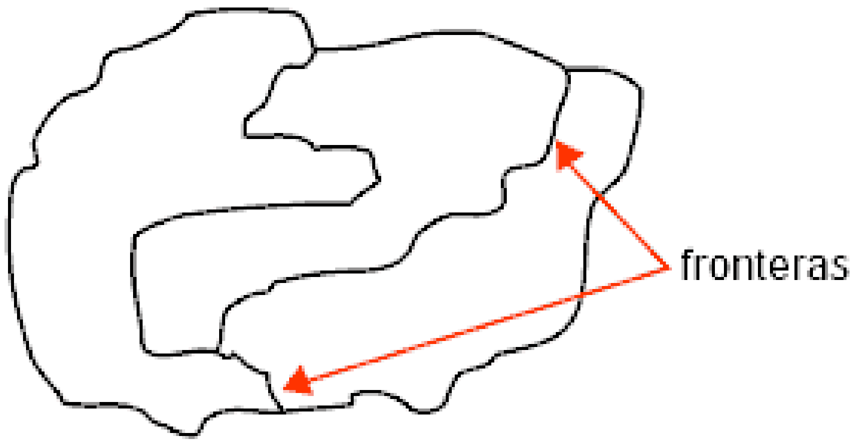
Bastan 4 colores para colorear un **mapa** geográfico plano, de modo que dos países con **frontera** común tengan diferente color.



Un **mapa** es conexo (de una pieza) y cada una de sus regiones también es conexa, es decir, no se admite una figura como la adjunta.

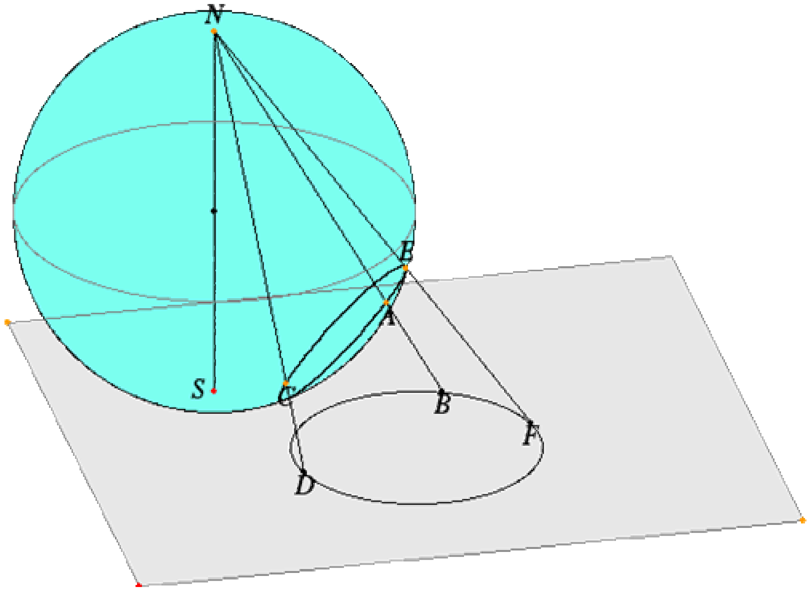
¿Qué dice la conjetura?

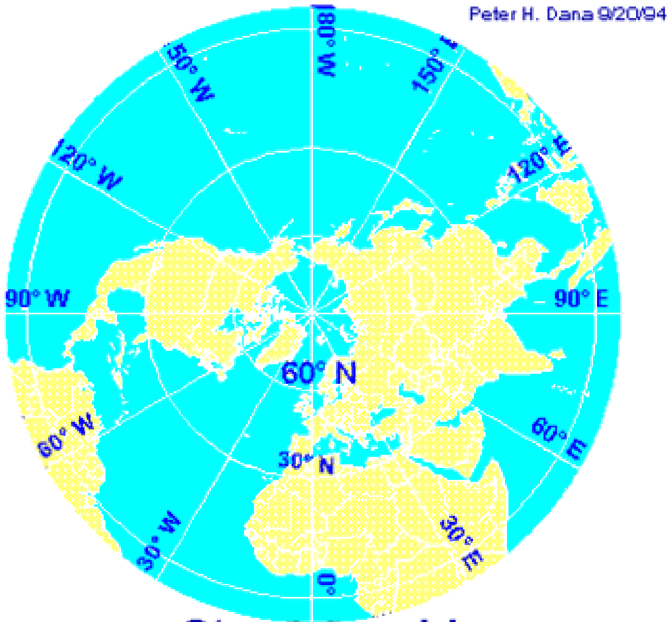
Dos regiones no pueden tocarse sólo en un punto, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.



Es un *problema topológico*: no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas unas respecto a otras.

Mapas esféricos



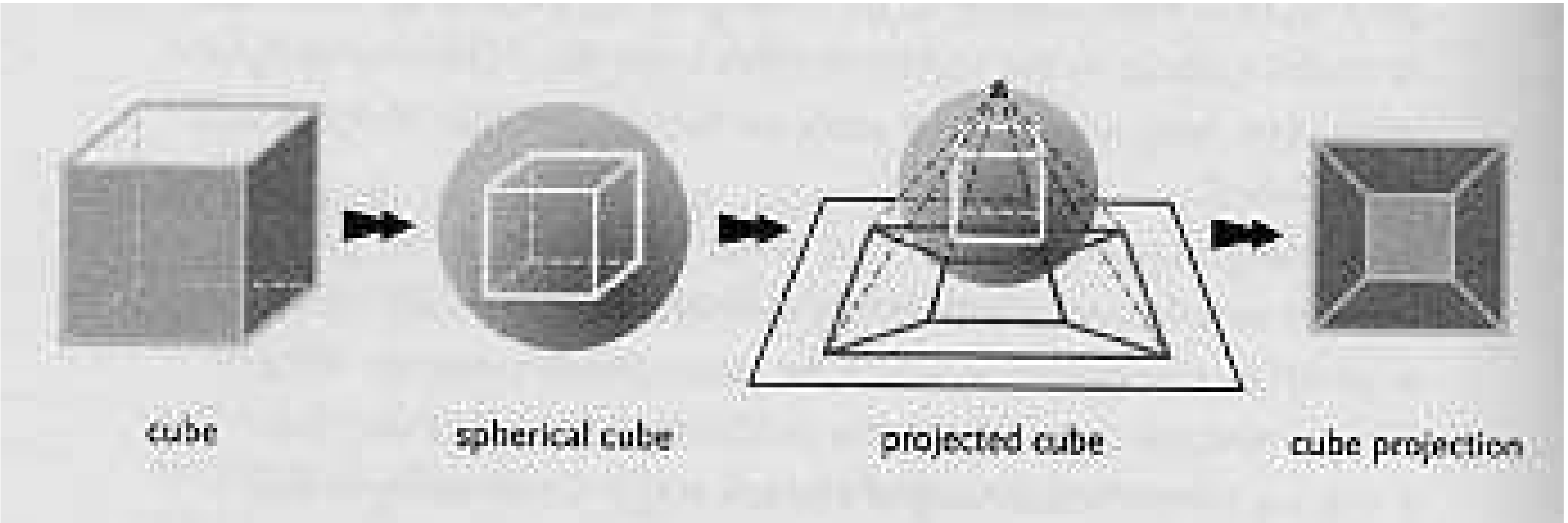


Stereographic
North Polar Aspect

La conjetura de 4-coloreado sobre mapas planos equivale al problema de 4-coloreado sobre mapas esféricos… basta con proyectar estereográficamente.

La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Paso de poliedros a mapas: se infla el poliedro sobre una esfera, se proyecta estereográficamente y se tiene el poliedro proyectado sobre el plano.

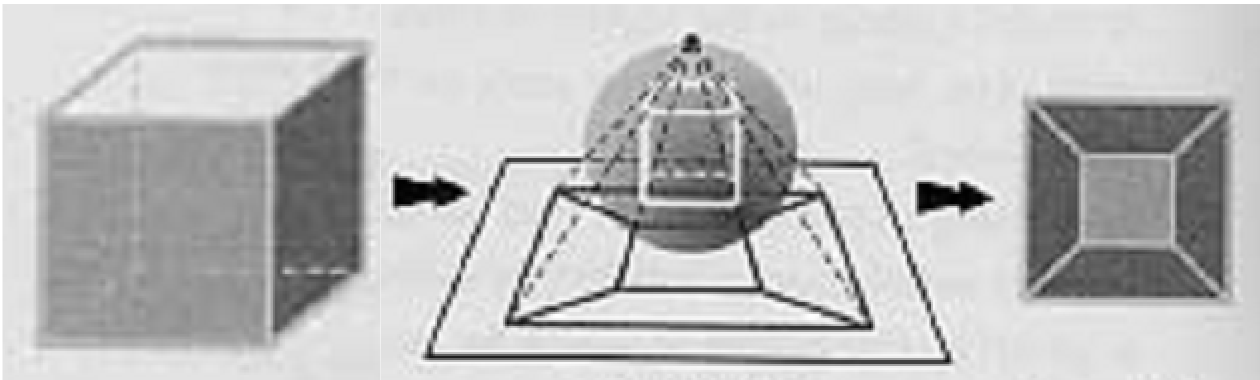


La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

La ***fórmula de Euler*** para poliedros:

Núm(caras) – Núm(aristas) + Núm(vértices) = 2

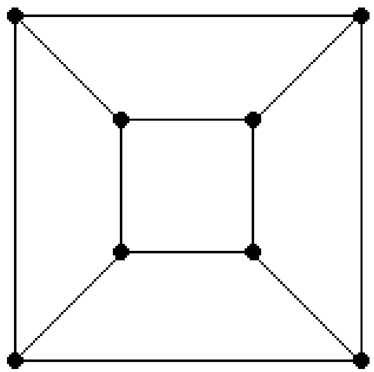
CUADRADO: 6 -12 + 8 = 2



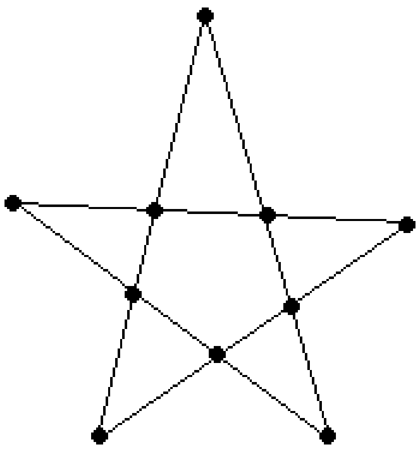
La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Puede hablarse de la ***fórmula de Euler para mapas*** (sin olvidarse de la región exterior):

Núm(regiones) – Núm(líneas frontera) + Núm(puntos encuentro) = 2



6 -12 + 8 = 2

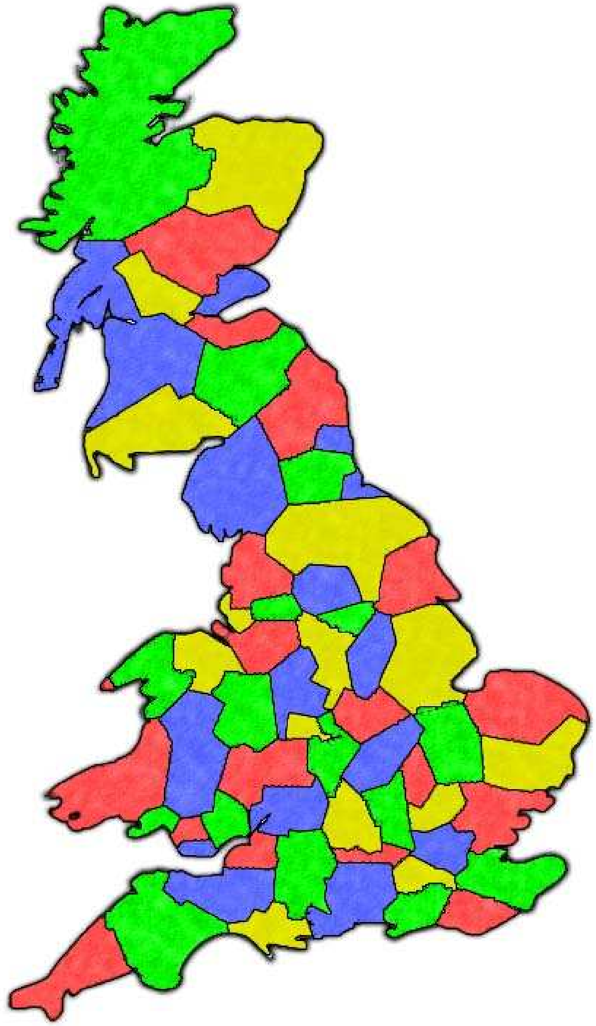


7 -15 + 10 = 2

Francis Guthrie

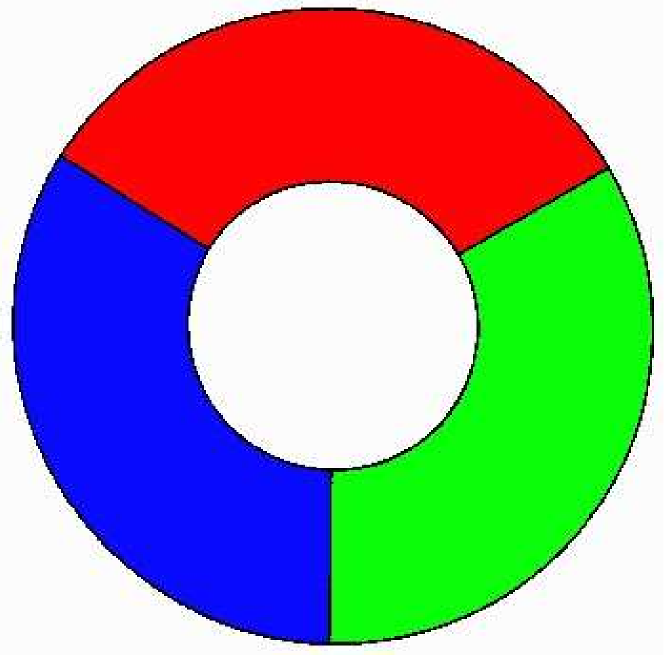
Francis Guthrie (1839-1899) abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con 4 colores..

En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick (University College London) y a éste a Augustus de Morgan.



Francis Guthrie

Francis Guthrie observa que 3 colores no son suficientes, con el ***diagrama crítico***:



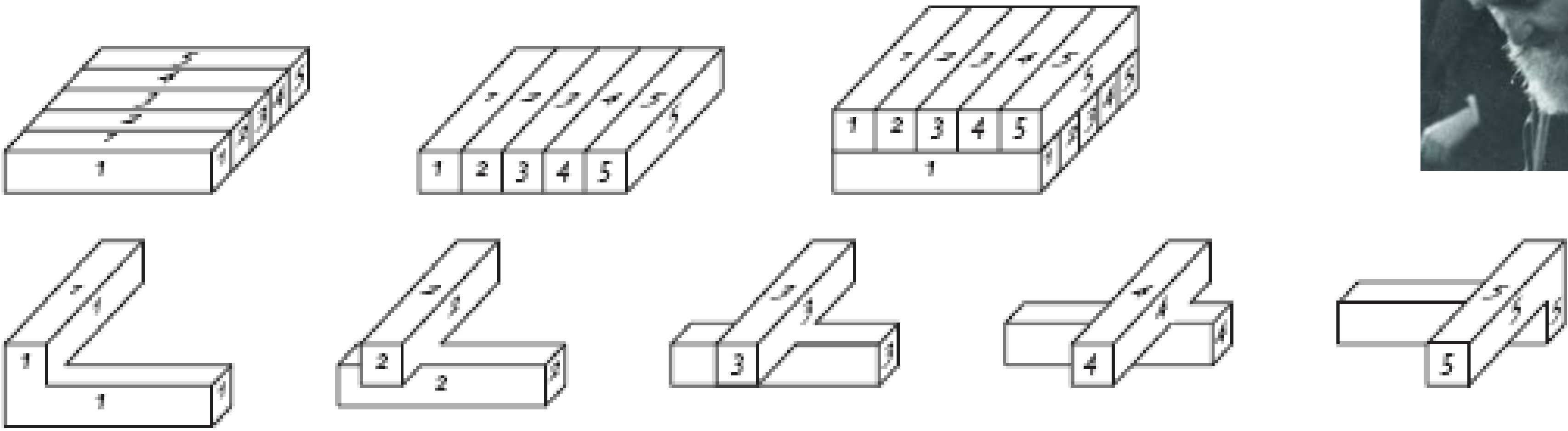
Francis Guthrie

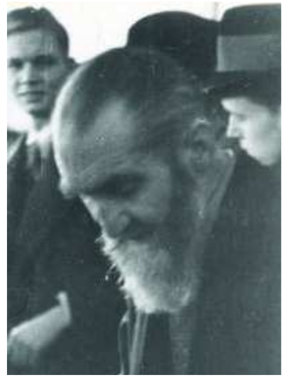
Francis Guthrie va a vivir en 1861 a Sudáfrica, donde trabaja como profesor de matemáticas. Es un botánico entusiasta y estudia la flora local. Tres especies raras llevan su nombre:
Cyrtanthus guthrieae, Gladiolous guthriei y Homoglossum guthriei

Frederick Guthrie

Frederick Guthrie, fundador de la Physical Society en 1874, fue el primero en observar que el problema de los cuatro colores no se podía generalizar a dimensión 3.

En efecto, según un ejemplo posterior de Heinrich Tietze, en dimensión 3 se puede construir un ejemplo de mapa tridimensional que precise tantos colores como se desee...





La propuesta de Tietze consistía en tomar barras numeradas de **1** hasta ***n****.* Se sitúan, ordenadas de manera horizontal como muestra la figura, y sobre ellas se colocan ***n*** barras numeradas de **1** hasta ***n*** en sentido vertical.

De este modo, tenemos un **mapa tridimensional** con ***n*** países, y que necesita exactamente ***n*** colores para no contradecir las reglas de la conjetura… En la figura se representa el caso de ***n* = *5.***

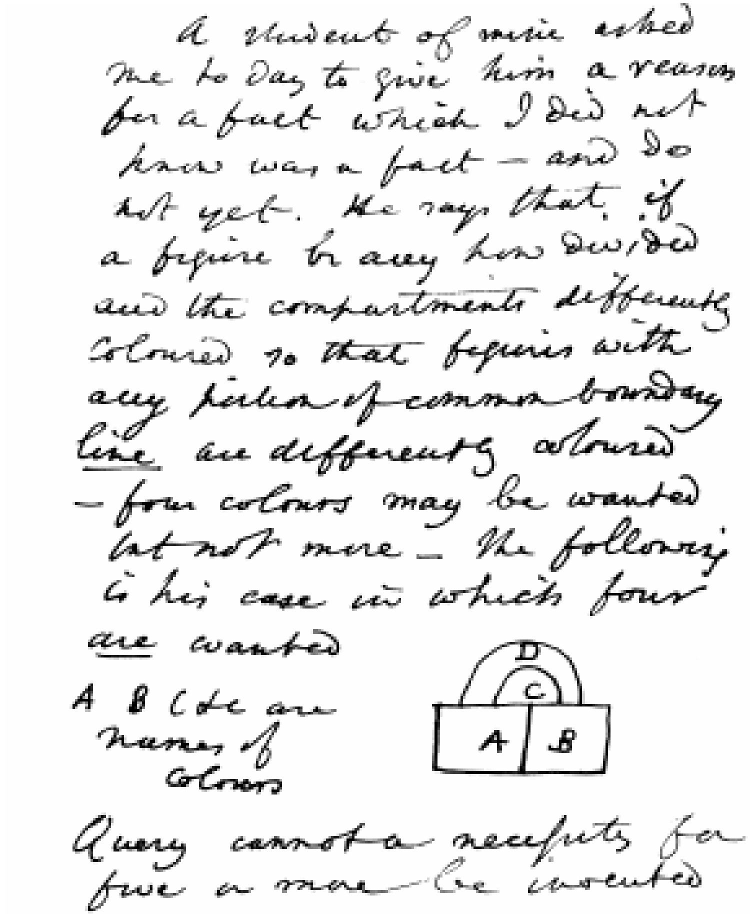
Augustus de Morgan

Augustus de Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los 4 colores y difundió entre sus colegas su importancia.

Una de las primeras personas con las que “habló” fue con el matemático y físico irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que no compartía el interés de De Morgan por el problema. Le escribe una carta el 23 de octubre de 1852…

Augustus de Morgan

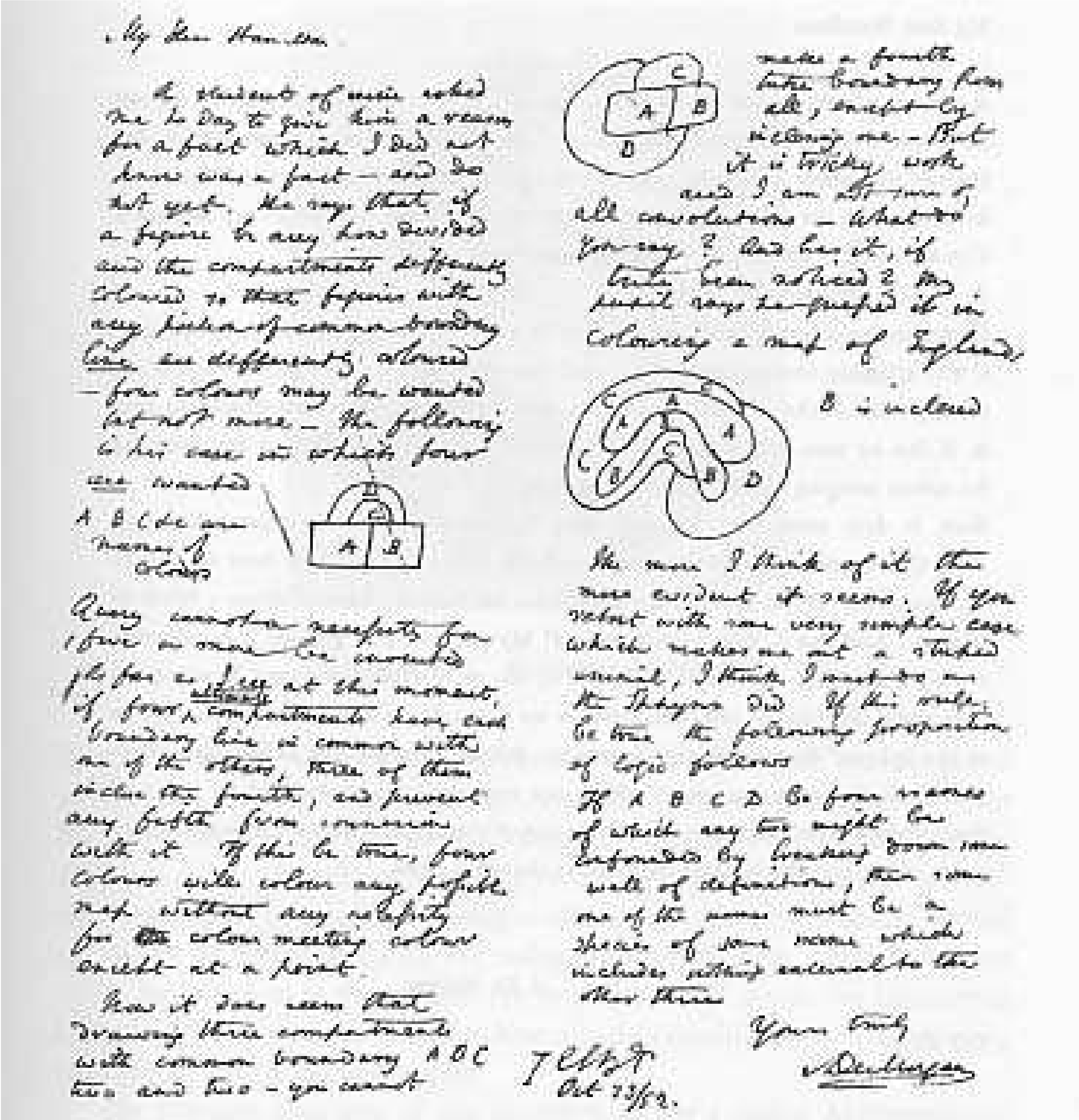
A student of mine [Guthrie] *asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted, but not more - the following is the case in which four colours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented...*


A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.



My dear Hamilton

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two — you cannot make a fourth take boundary from all, except by inclosing one — But it is tricky work and I am not sure of all convolutions — What do you say? And has it, if true been noticed? My pupil says he guessed it in colouring a map of England.

B is inclosed

The more I think of it the more evident it seems. If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be confounded by breaking down some wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes nothing external to the other three.

Yours truly
A De Morgan

7 Camden St
Oct 23/52

Extract from de Morgan's original letter to Hamilton,
printed with kind permission from
The Board of Trinity College, Dublin.

Cuatro días después, Hamilton le contesta:

"I am not likely to attempt your "quaternion" of colours very soon"

Augustus de Morgan

Decepcionado por el desinterés de Hamilton, De Morgan se puso en contacto con otros matemáticos.

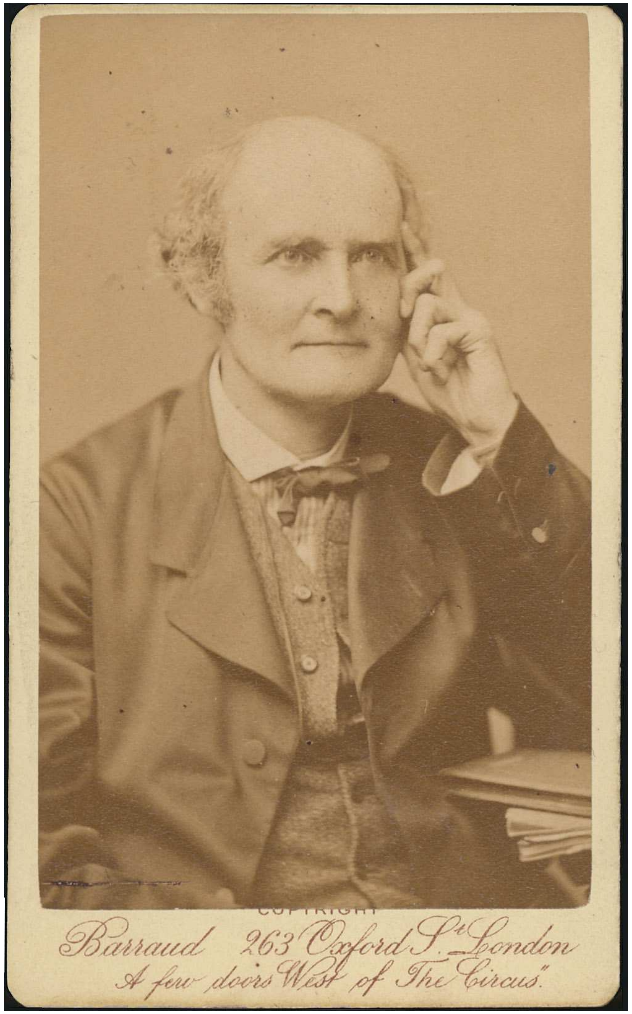
En 1853, escribe al conocido filósofo **William Whewell** (1794-1866, Cambridge), describiendo Su observación como un axioma matemático.

Augustus de Morgan

El problema de los 4 colores cruza el Atlántico y llega hasta el matemático, filósofo y lógico **Charles Sanders Peirce** (1839-1914), que da un seminario sobre la demostración… aunque nunca la escribió.

Tras la muerte de De Morgan en 1871, el problema de los 4 colores parece dormido. Peirce continúa intentando probarlo en EE.UU., pero ninguno de los amigos británicos de De Morgan lo mencionan…

Arthur Cayley



Pero, el problema no está del todo olvidado gracias a **Arthur Cayley** (1821-1895) de la Universidad de Cambridge.

Cayley ejerció de abogado, y continúo durante esa época con sus investigaciones matemáticas, en particular es uno de los padres fundadores del álgebra de matrices.

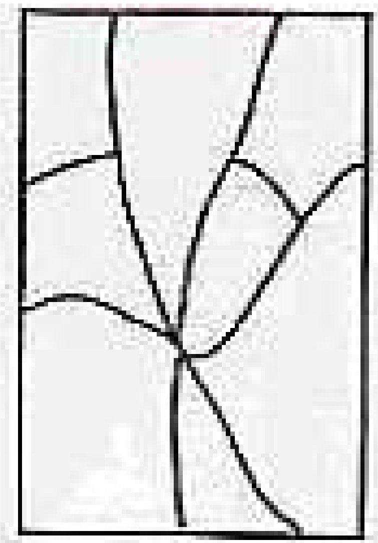
Arthur Cayley

En junio de 1878, Arthur Cayley acude a un Encuentro de la London Mathematical Society, donde hace la pregunta:
"Has a solution been given of the statement that in colouring a map of a country, divided into counties, only four colours are required, so that no two adjacent counties should be painted in the same colour?"

En 1879 publica una nota en los "Proc. Royal Geographical Soc.", donde explica la dificultad del tema. Entre otros, observa que cuando se intenta probar el teorema de los 4 colores, pueden imponerse condiciones más restrictivas sobre los mapas a colorear; en particular, basta con limitarse a ***mapas cúbicos***, es decir, aquellos en los que hay <u>exactamente</u> **3** regiones en cada punto de encuentro: en efecto…

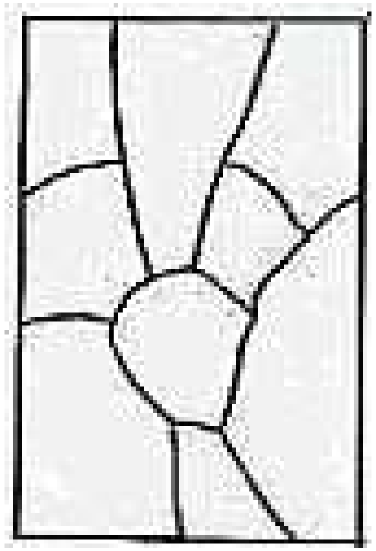
Arthur Cayley

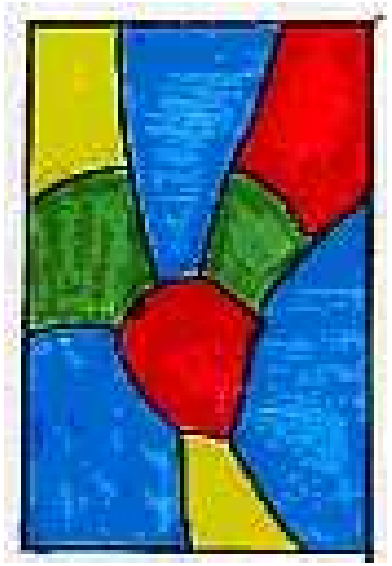
… en efecto, supongamos un mapa en el que hay más de 3 regiones en alguno de los puntos de encuentro. Sobre este punto puede pegarse un pequeño parche, que produce un mapa cúbico. Si se puede colorear este mapa con cuatro colores, se obtiene un 4-coloreado del mapa original, simplemente aplastando el parche en un punto…



original

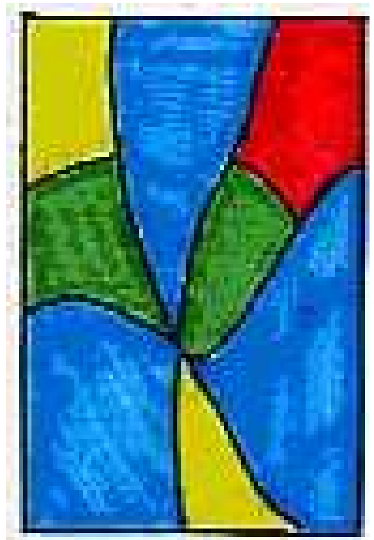
parcheado





coloreado

coloreado final



Guión de la charla

Historia sobre la conjetura de los cuatro colores: de 1852-1996

☺ La “prueba” errónea de Kempe… y sus buenas ideas

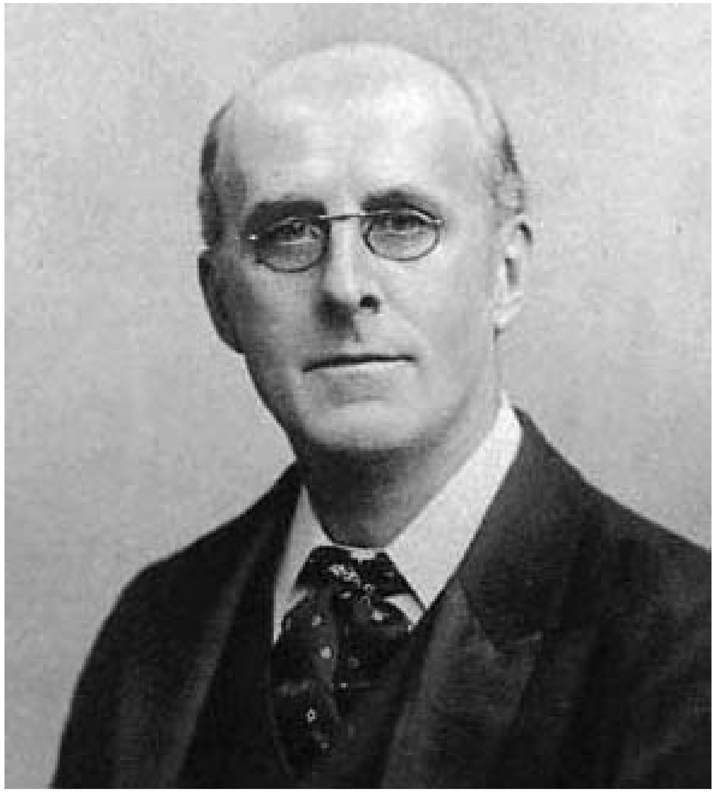
Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

¿Está realmente resuelta la conjetura?

Alfred Bray Kempe

Alfred Bray Kempe (1849-1922) era un soberbio cantante. Aprendió matemáticas de Cayley y se graduó en 1872, con distinción en matemáticas.

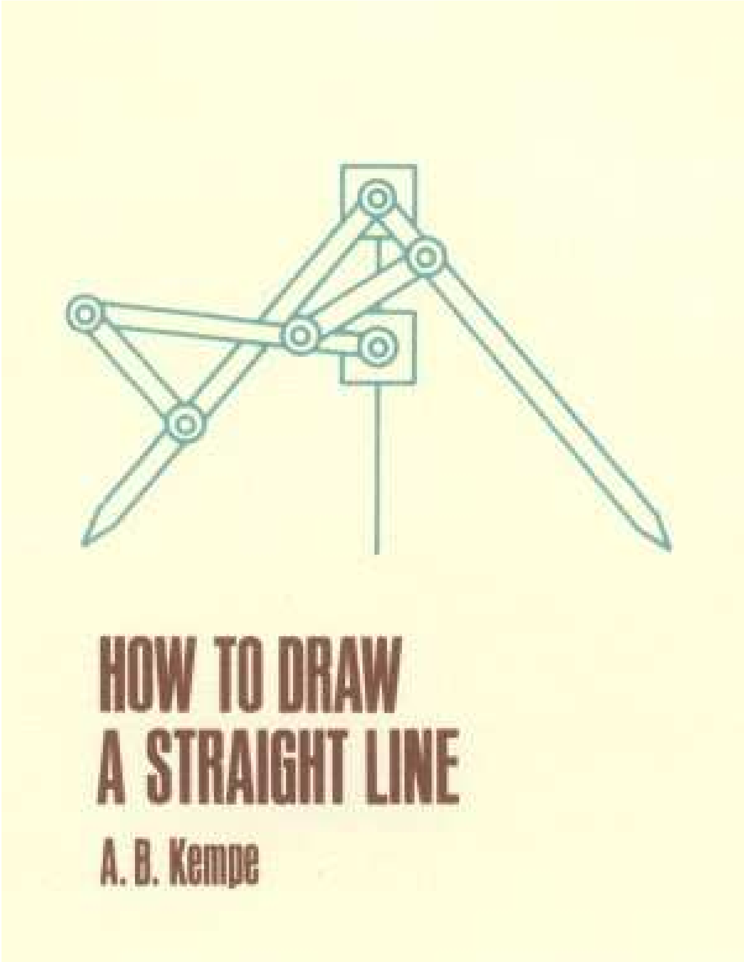
A pesar de su pasión por las matemáticas y la música, eligió la profesión de abogado (especializado en ley eclesiástica), dejando las matemáticas y la música (… y el alpinismo, existe un monte Kempe y un glaciar Kempe cercano en el Antártico) como pasatiempos.



Alfred Bray Kempe

En 1872 escribió su primer trabajo matemático sobre la solución de ecuaciones por medios mecánicos.

Cinco años más tarde, estimulado por un descubrimiento del ingeniero Charles Nicholas Peaucellier (1832–1913) sobre un mecanismo para trazar líneas rectas, publicó su famosa memoria sobre mecanismos titulada ***Como trazar una línea recta.***



Alfred Bray Kempe

Kempe se interesa por el problema de los 4 colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society.

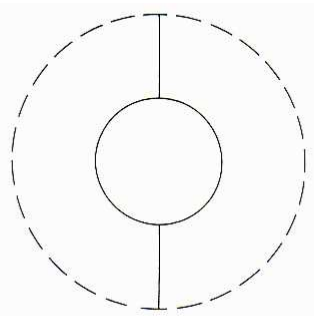
En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los 4 colores y lo publica en el Amer. Journal of Maths.
En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal...

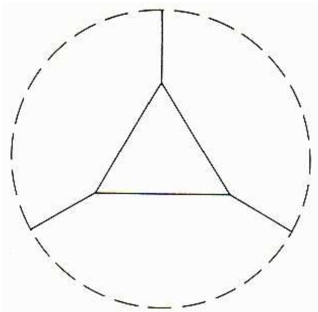
Alfred Bray Kempe

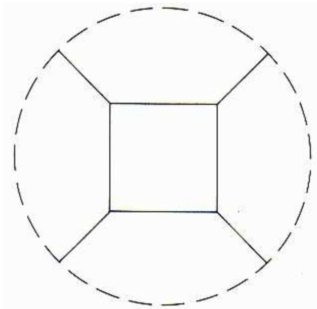
Kempe usa la fórmula de Euler para mapas cúbicos para obtener la llamada ***counting formula*****,** que permite probar:

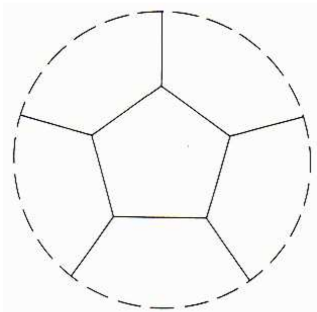
Todo mapa tiene al menos una región con ≤ 5 regiones vecinas.

Es decir, cada mapa contiene al menos un digon, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.









Alfred Bray Kempe

En efecto, si C_i representa la cantidad de regiones que tienen **i** regiones vecinas en el mapa, demuestra que:

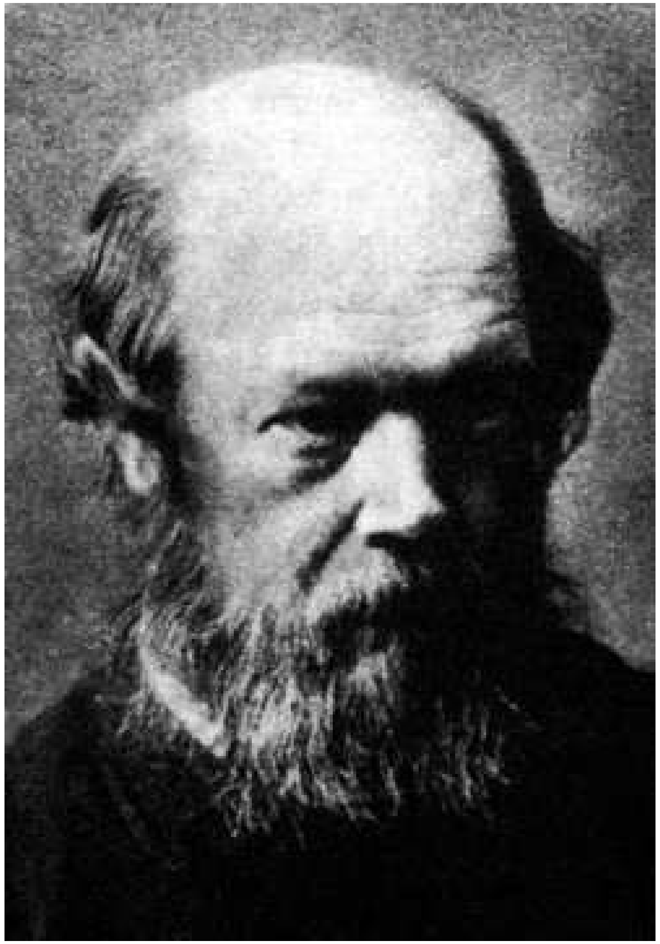
$$4C_2 + 3C_3 + 2C_4 + C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \ldots = 12,$$

por lo que existe C_i (i = 2, 3, 4, 5) no nulo.

Además, si $C_i = 0$ para i = 2, 3 y 4, debe ser $C_5 \geq 12$, es decir:

Un mapa cúbico que no contiene digones, triángulos o cuadrados debe contener al menos 12 pentágonos.

Alfred Bray Kempe



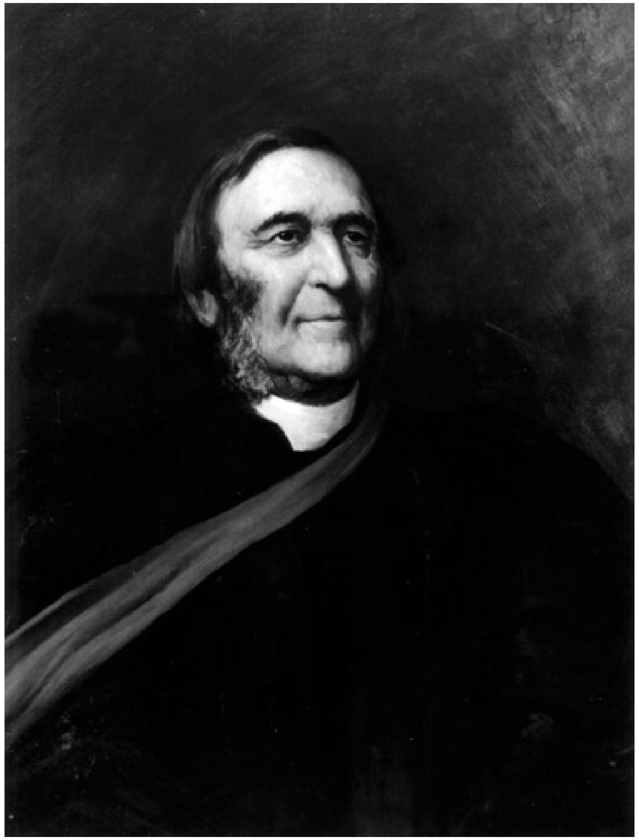
Peter Guthrie Tait (1831-1901), profesor de Filosofía Natural, físico-matemático de la Universidad de Edimburgo, da una prueba alternativa en 1880, también con un error.

Tait era gran aficionado al golf y estudiaba los modelos de trayectorias y el comportamiento de materiales por impacto.

El problema es popular...

Todos pensaban que la prueba tenía que ser más corta…

En 1887, el director del Clifton College organiza un concurso para encontrar una demostración del teorema de los 4 colores que ocupase ***“menos de 30 líneas y una página de diagramas”.***



Entre otros, presenta una prueba el obispo de Londres, que más tarde sería el arzobispo de Canterbury (**Frederick Temple**, 1891-1902) en el *Journal of Education* en 1889…

El problema es popular...

Uno de los ingleses victorianos que se divirtió con el teorema de los 4 colores fue Charles Lutwidge Dodgson “Lewis Carroll” (1832-1898). A Carroll le encantaba inventar puzzles y juegos. Uno de ellos es:

- ***A is to draw a fictitious map divided into counties.***
- ***B is to colour it (or rather mark the counties with names of colours) using as few colours as possible.***
- ***Two adyacent counties must have different colours.***
- ***A’s object is to force B to use as many colours as possible.***

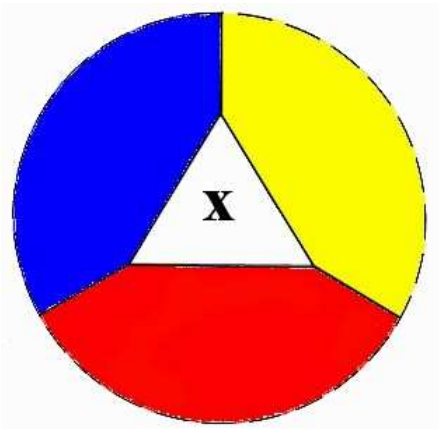
How many can he force B to use?

La “demostración” de Kempe

Si X es una región del mapa cúbico ***M***, denotamos por v(X) el número de sus regiones vecinas. La prueba se hace por inducción sobre el número de regiones. Como ***M*** es un mapa cúbico, sabemos que existe una región X con v(X) ≤ 5.

Hipótesis de inducción: ***M*** - {X} es 4-coloreable.

Veamos que ***M*** también lo es. Hay tres casos.



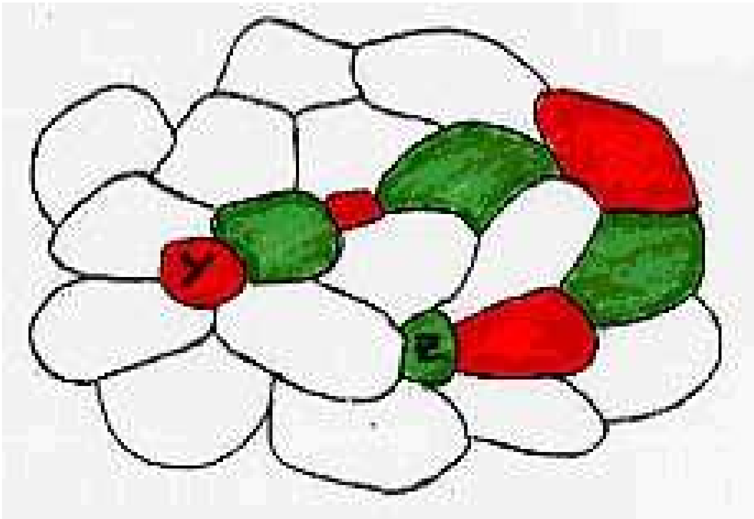
CASO 1: v(X) = 3

Basta con colorear X con el cuarto color

La “demostración” de Kempe

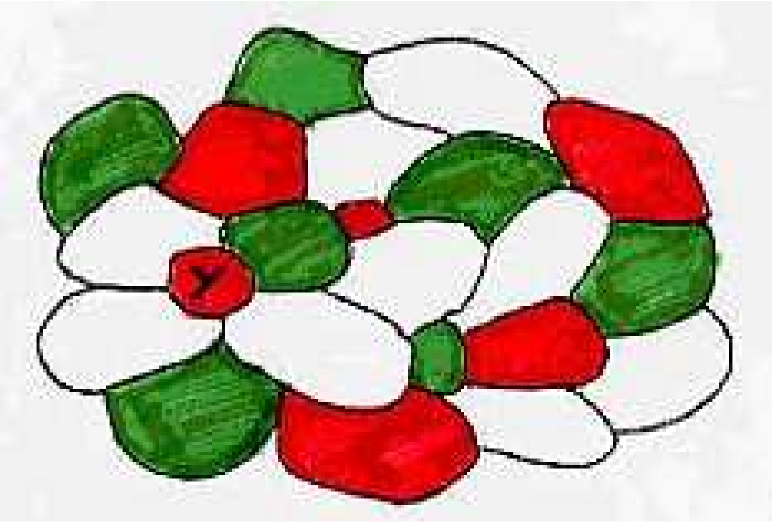
<u>CASO 2</u>: v(X) = 4

Si Z e Y son dos regiones, Y de color **rojo** y Z de color **verde** en un mapa 4-coloreado, se llama **cadena de Kempe rojo-verde** de Y a Z un camino que va de Y a Z, alternando los colores **rojo** y **verde**.



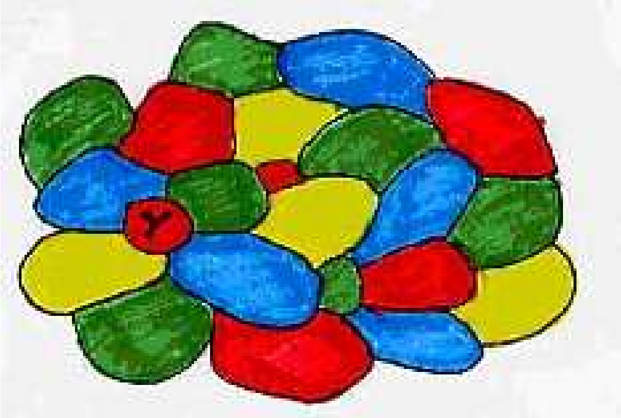
La “demostración” de Kempe

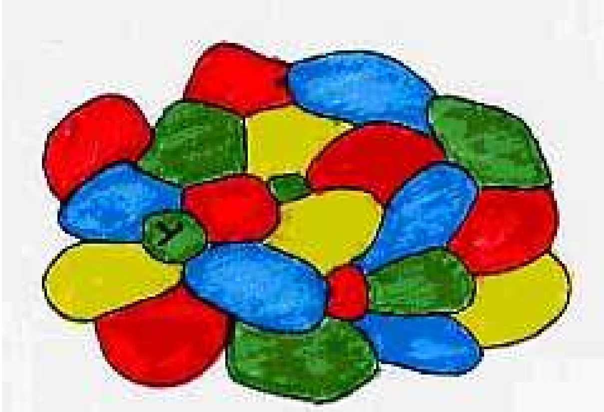
Una componente **rojo-verde** de Y es el conjunto de todas las regiones Z del mapa, tales que existe una cadena de Kempe **rojo-verde** de Y a Z.



La "demostración" de Kempe

El interés de estas dos definiciones es que se pueden invertir los colores **rojo** y **verde** en una componente **rojo-verde** cualquiera de un mapa 4-coloreado para obtener un nuevo 4-coloreado respetando la regla de los 4 colores.

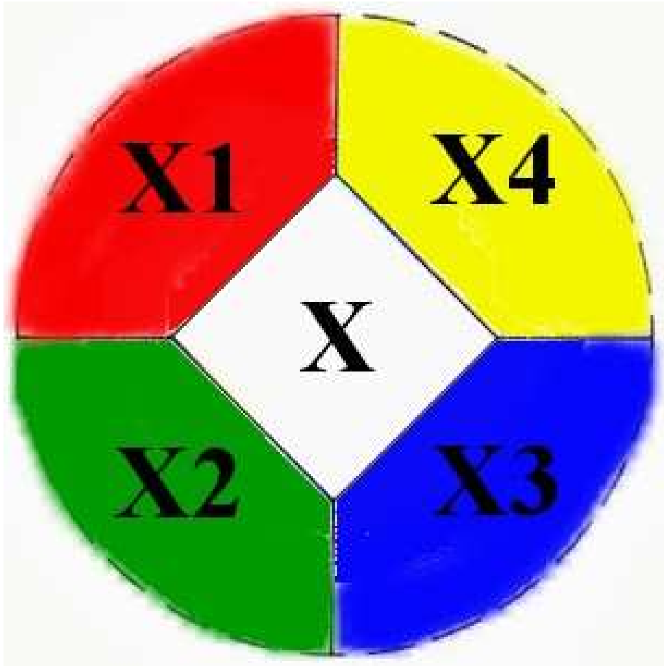




Carta original y carta obtenida por inversión de la componente **rojo-verde**.

La “demostración” de Kempe

En este caso en que **v(X) = 4,** un entorno de X es de la forma:

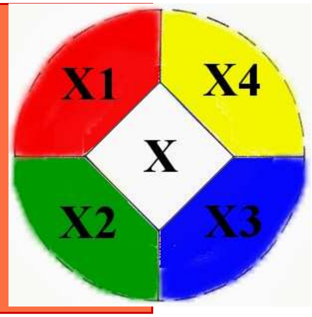


Y se distinguen dos posibilidades:

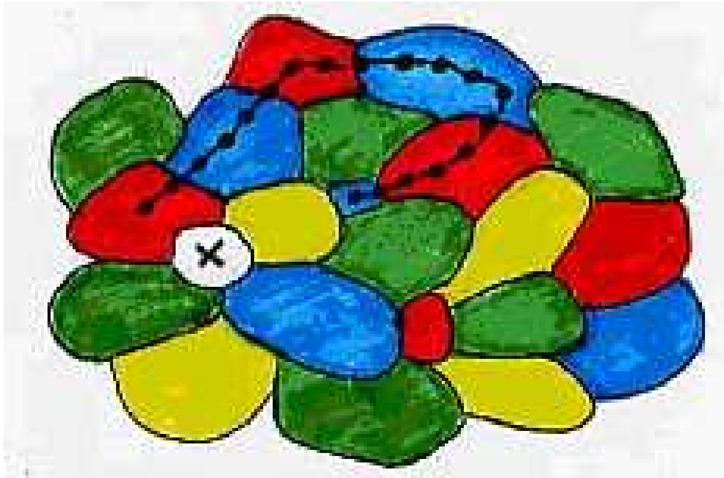
a) X_3 no está en la componente **rojo-azul** de X_1

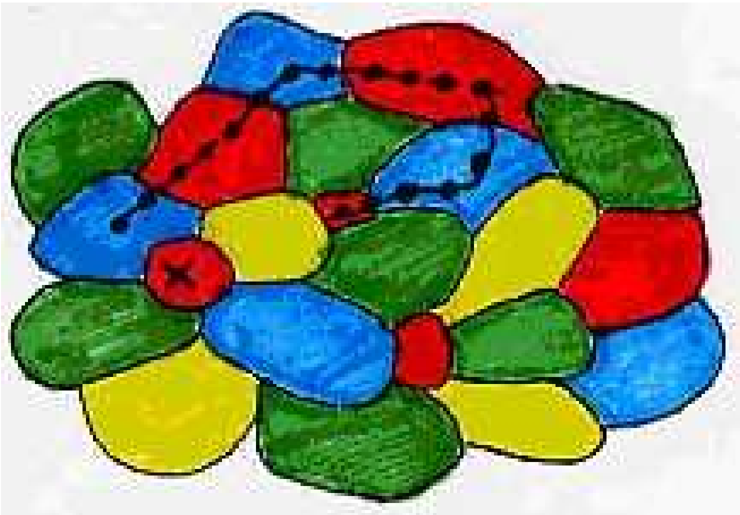
b) X_3 está en la componente **rojo-azul** de X_1

La “demostración” de Kempe



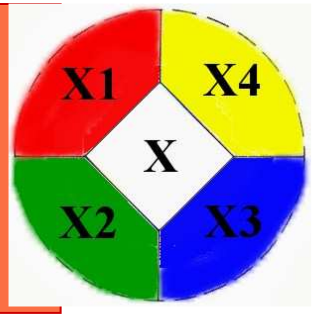
a) Si X_3 no está en la componente **rojo**-**azul** de X_1…



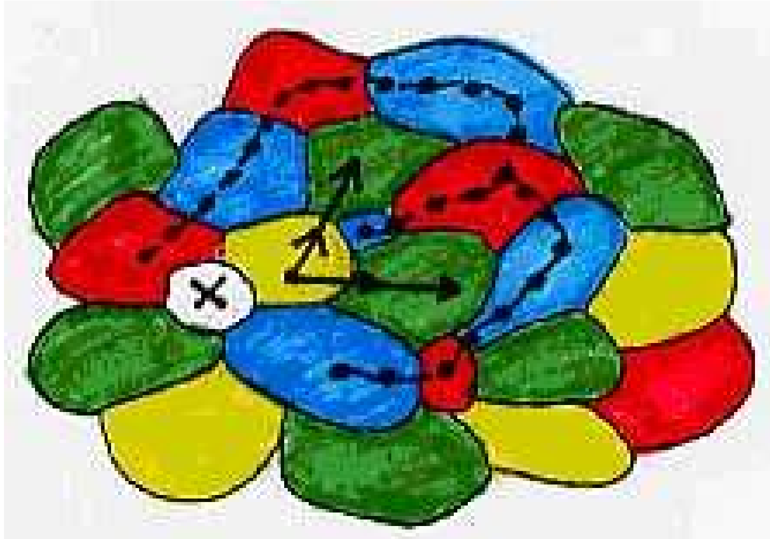


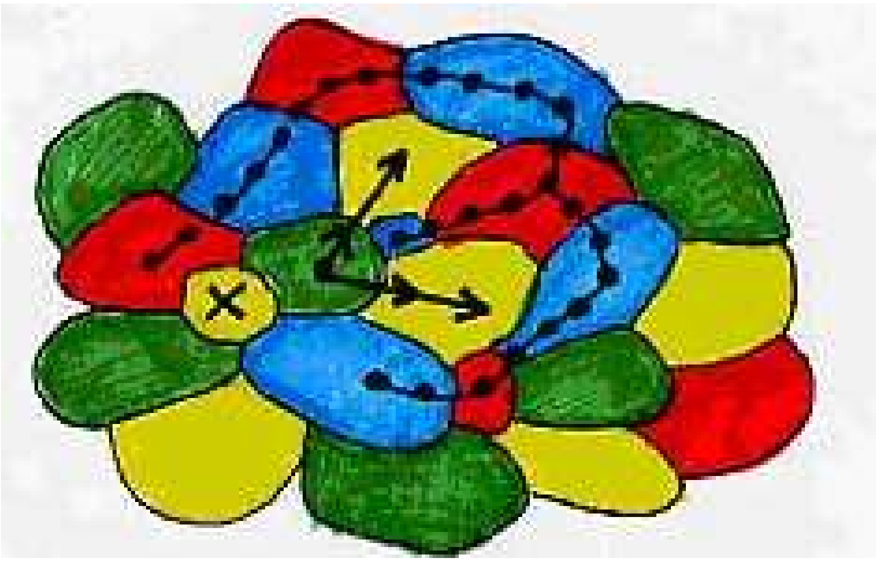
… se invierten el **rojo** y el **azul** en esta componente y se libera un color (**rojo**) para X.

La “demostración” de Kempe



b) Si X_3 está en la componente **rojo-azul** de X_1…

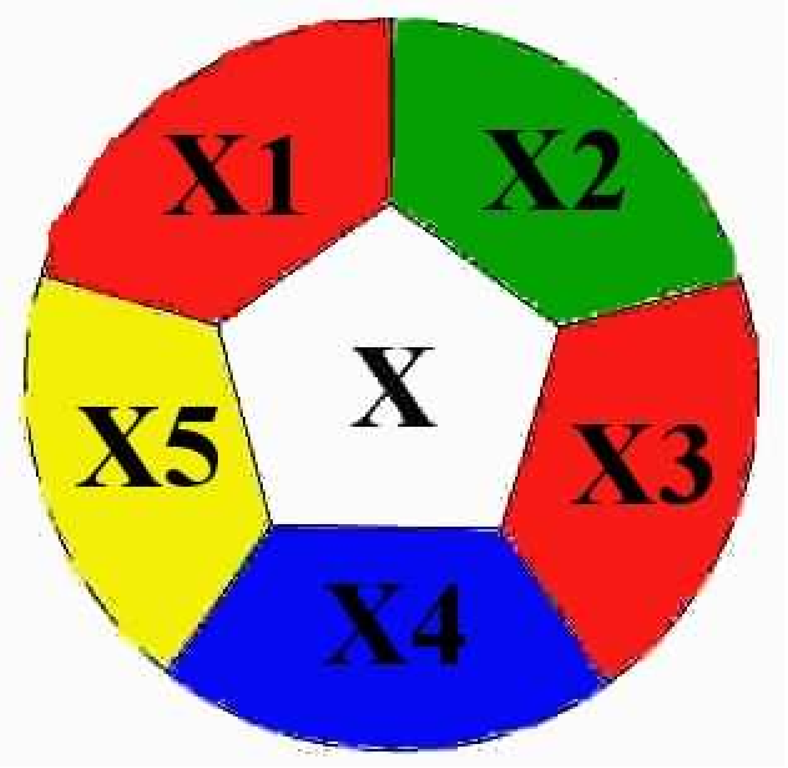




… X_2 no está en la componente **amarillo-verde** de X_4, y se invierten los colores en esta componente, liberando un color (amarillo) para X.

La “demostración” de Kempe

<u>CASO 3</u>: v(X) = 5, un entorno de X es de la forma:

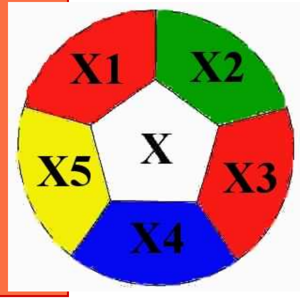


Se distinguen dos posibilidades:

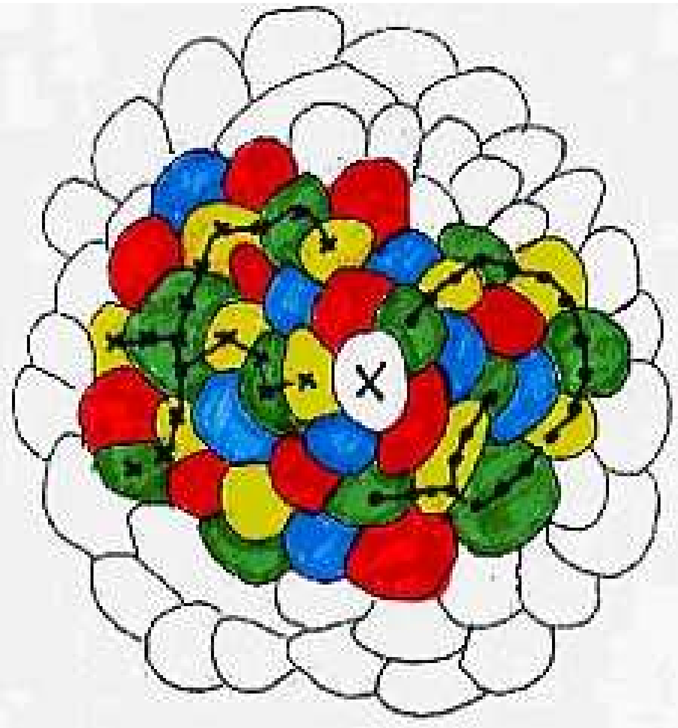
a) X_2 no pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 **<u>o</u>** X_2 no pertenece a la componente **azul-verde** de X_4,

b) X_2 pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 **<u>y</u>** X_2 pertenece a la componente **azul-verde** de X_4

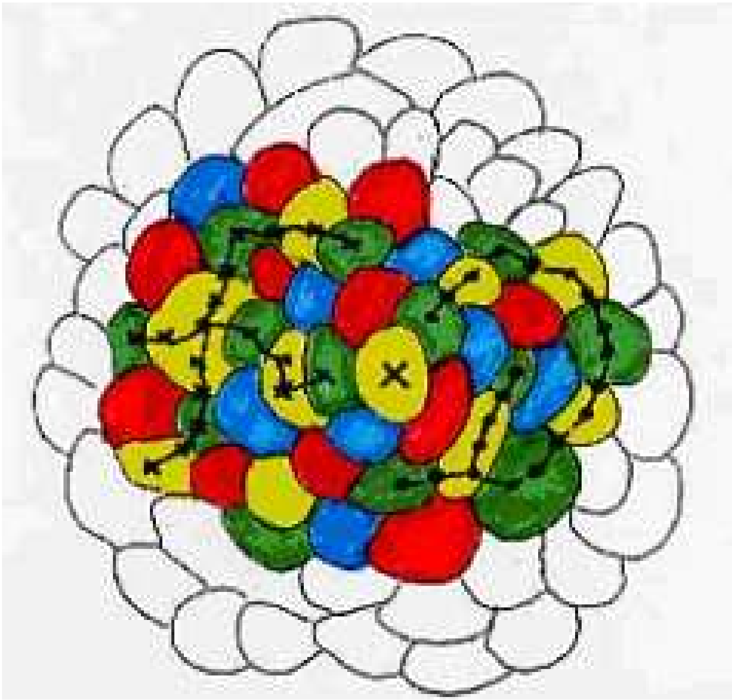
La “demostración” de Kempe



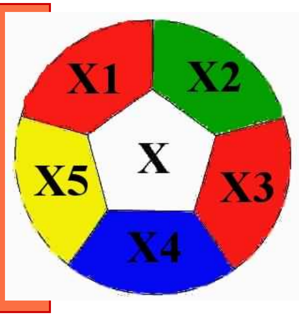
a) Supongamos que X_2 no pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 (el otro caso se hace análogamente)…



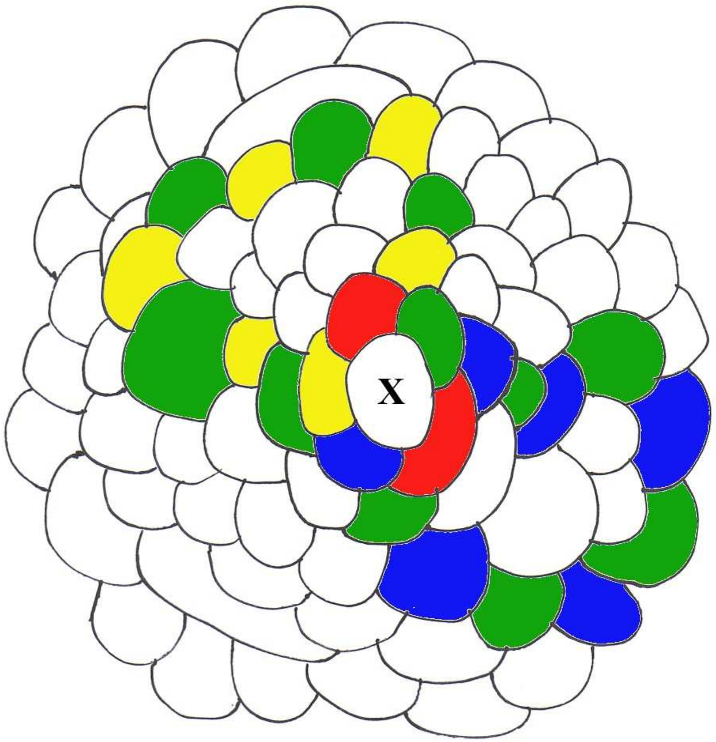
… se invierten el **amarillo** y el **verde** en esta componente y se libera un color (**amarillo**) para X.



La “demostración” de Kempe



b) X_2 pertenece a la componente **amarilla**-**verde** de X_5 **y** X_2 pertenece a la componente **azul**-**verde** de X_4…

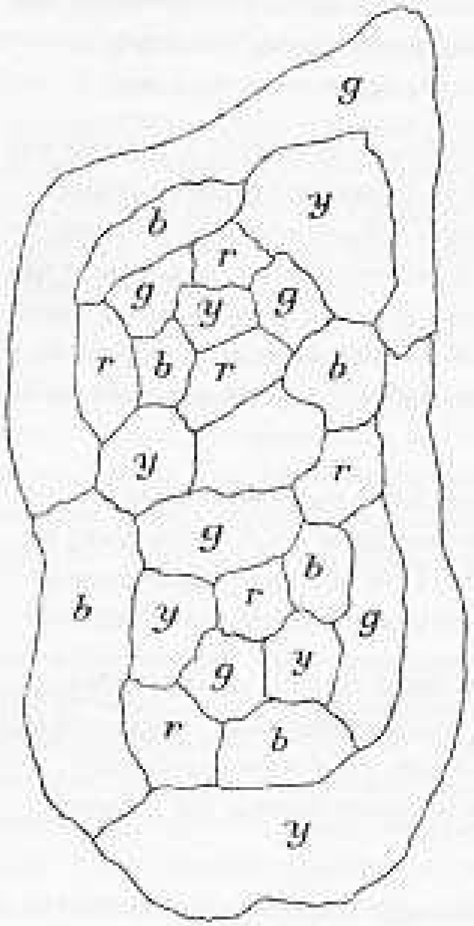


… se invierten las componentes **roja**-**azul** de X_1 y **roja**-**amarilla** de X_3, para liberar un color (**rojo**) para X.

Percy Heawood

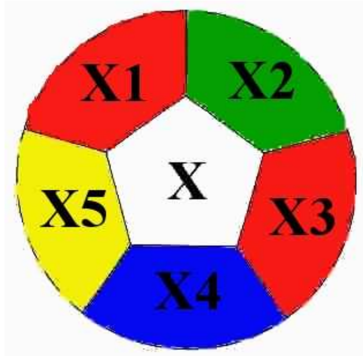
Percy John Heawood (1861-1955) publica *“Map Colour Theorem”* en el J. Pure Appl. Maths en 1890.

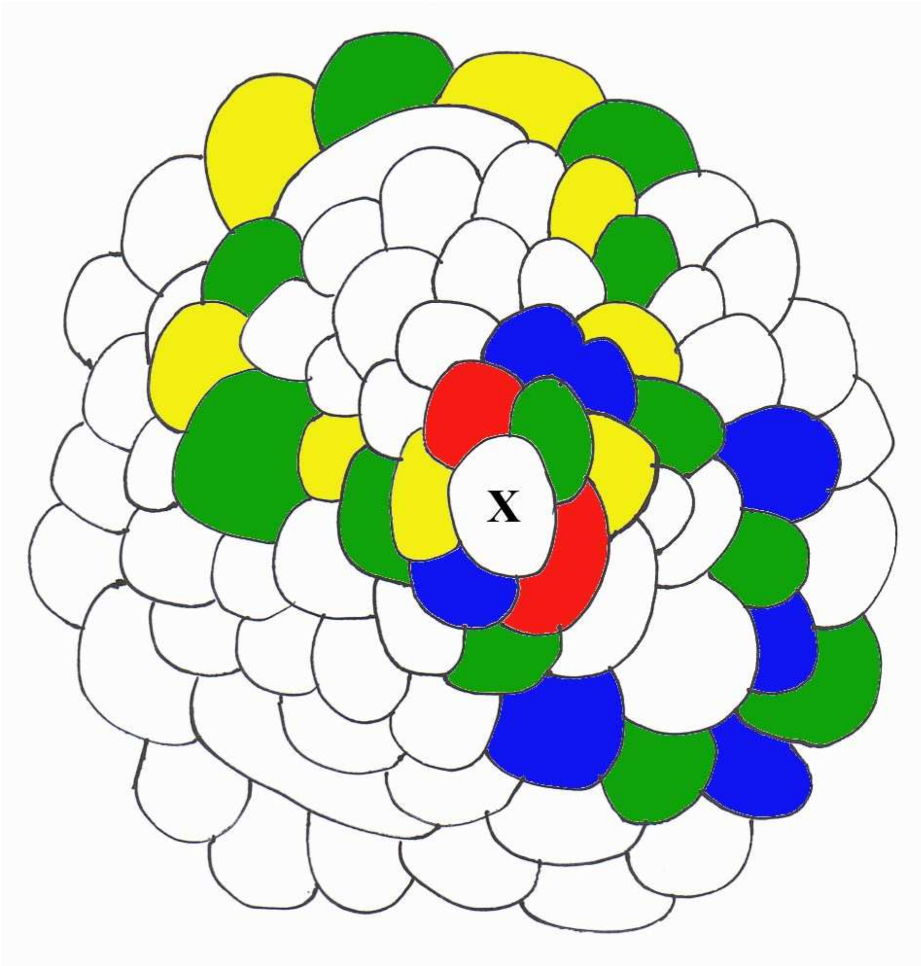
Encuentra, ***muy a su pesar***, un caso para el que la prueba de Kempe no funciona...



Heawood's counter-example to Kempe's proof.

El error fatal…





Aquí se encuentra el error: en efecto, las componentes amarilla-verde de X_5 y **azul**-**verde** de X_4 pueden cruzarse…

… y entonces, las componentes **rojo-azul** de X_1 y **rojo-amarillo** de X_3 no se pueden invertir simultáneamente...

El error fatal…

Kempe admite su error en las páginas de los Procedings of the London Math. Soc. y el 9 de abril de 1891 dice lo siguiente en un encuentro de la London Mathematical Society:

“*My proof consisted of a method by which any map can be coloured with four colours. Mr. Heawood gives a case in which the method fails, and thus shows the proof to be erroneous. I have not succeded in remedying the defect, though it can be shown that the map which Mr. Heawood gives can be coloured with four colours, and thus his criticism applied to my proof only and not to the theorem itself*”.

Percy John Heawood

Heawood (1961-1955) era conocido por su excentricidad. En su obituario en la London Math. Soc. se destacaba:

"*In his appearence, manners and habits of thought, Heawood was a extravagantly unusual man. He had an inmense moustache and a meagre, slightly stooping figure. He usual wore an inverness cape of strange pattern and manifest antiquity, and carried an ancient handbag. His walk was delicate and hasty, and he was often accompanied by a dog, which was admitted to his lectures*".

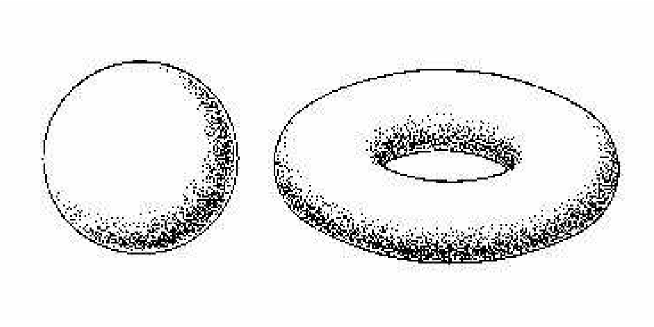
Percy John Heawood

Heawood prueba el teorema de los 5 colores usando el argumento de las cadenas de Kempe.

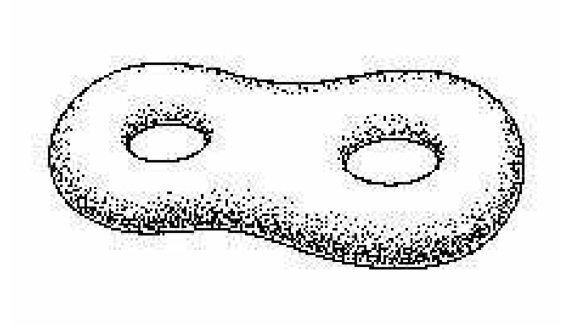
Heawood prueba también que el número máximo ***N*** de colores necesarios para colorear un mapa (su ***número cromático***) sobre una superficie de género ***g > 0*** (todas menos la esfera…) sin borde es la parte entera de:

$$\frac{1}{2}\left(7+(48g+1)^{1/2}\right)$$

Este es el llamado ***"problema de coloreado de mapas de Heawood".***



El género



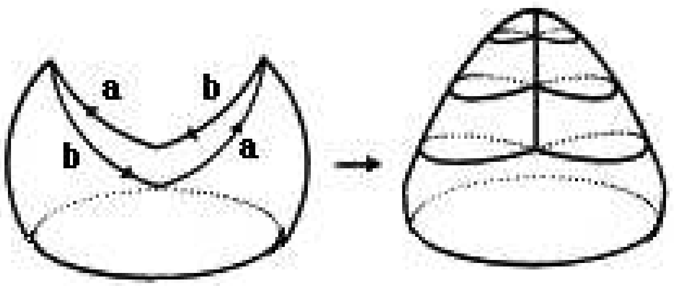
La fórmula de Euler para poliedros de género ***g > 0*** se debe a Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) y dice que:

- **Caso orientable**

Núm(caras) – Núm(aristas) + Núm(vértices) = *2-2g*

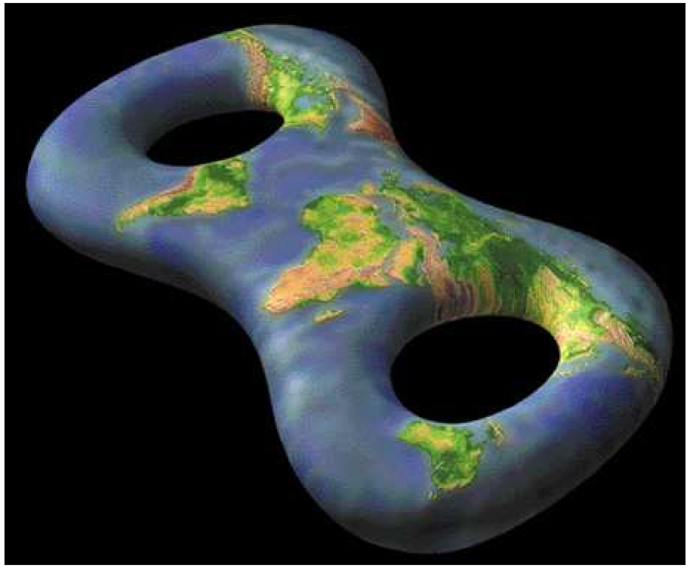
- **Caso no orientable**

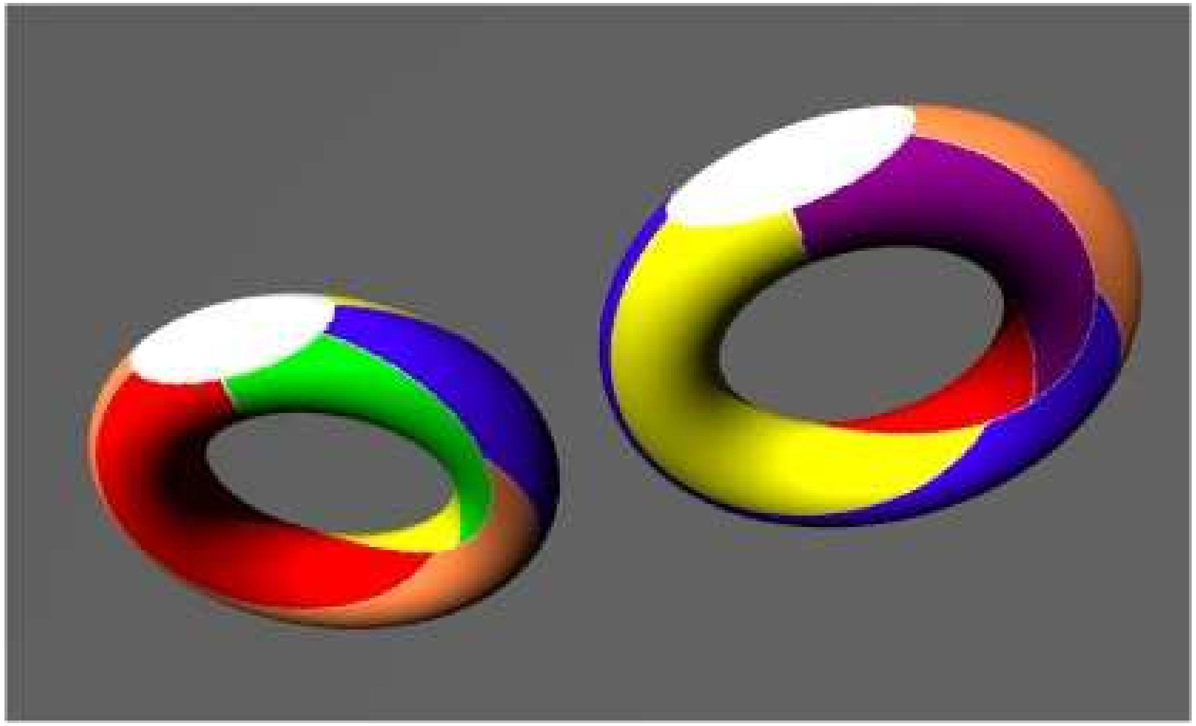
Núm(caras) – Núm(aristas) + Núm(vértices) = *2-g*



Percy Heawood

En 1968, **Gerhard Ringel y Ted Youngs** prueban que para toda superficie sin borde orientable de género ***g > 0*** o toda superficie sin borde no orientable distinta de la botella de Klein, ***N*** no es el máximo sino el número exacto.



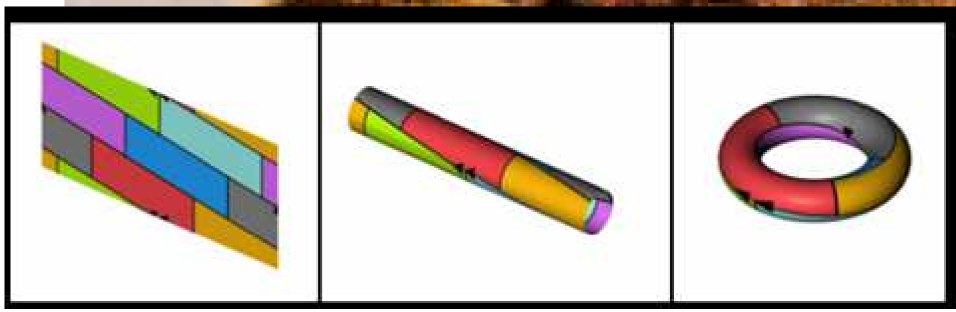


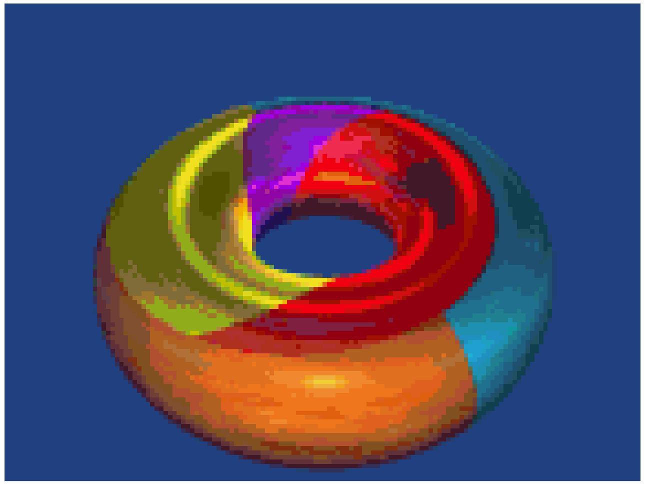
Coloreado de mapas tóricos

Para colorear mapas sobre el toro son necesarios …

¡7 colores!

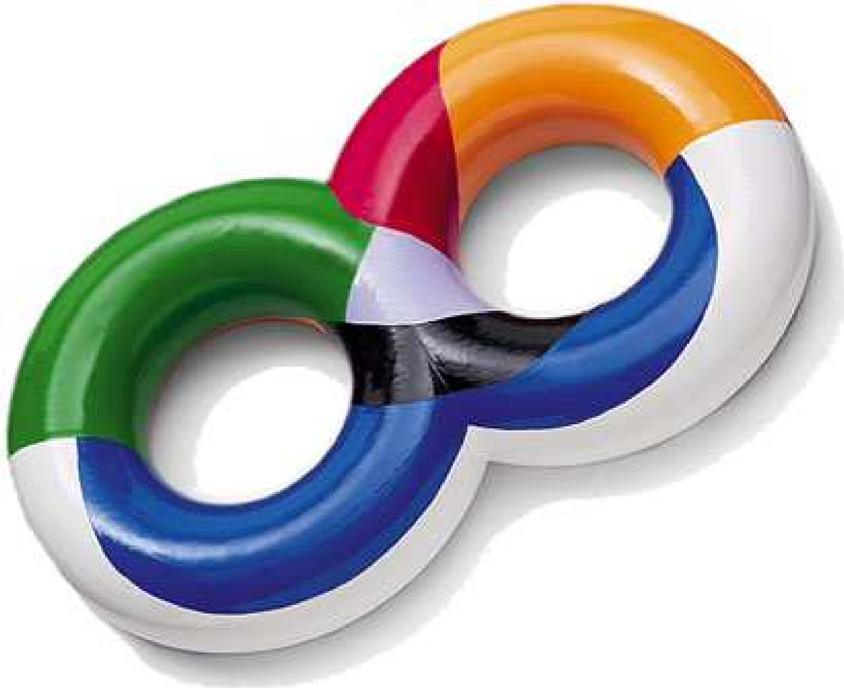
$$[\tfrac{1}{2}(7+(48g+1)^{\frac{1}{2}})]=7$$





http://www.johnstonsarchive.net

Coloreado sobre el doble toro

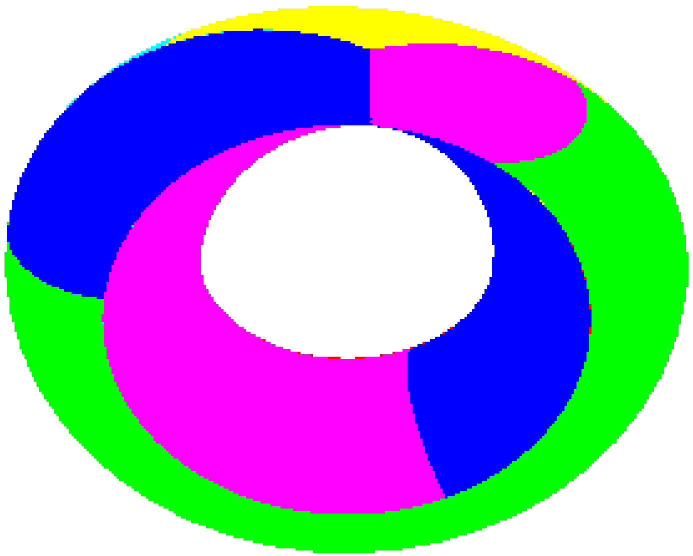


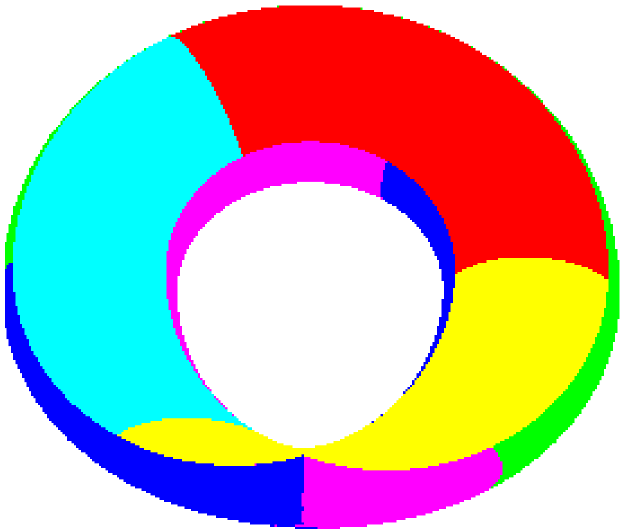
Bernard Frize: *Percy John Heawood Conjecture (Edition for Parkett 74)*, 2005.

$$\left[\tfrac{1}{2}\left(7+(48g+1)^{1/2}\right)\right]=8$$

La botella de Klein

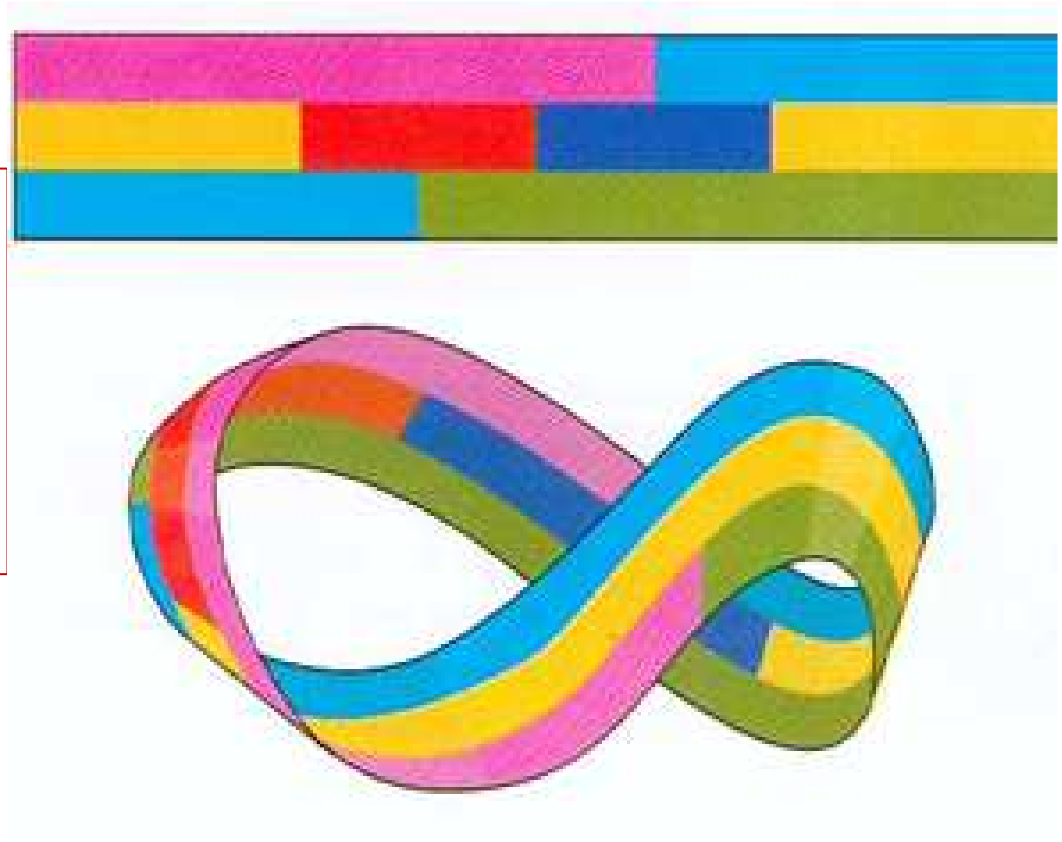
Para la botella de Klein se necesitan ***6 colores*** (uno menos que su número ***N=7***), J.L. Saaty, 1986.





La banda de Möbius

Para la banda de Möbius, que es una superficie con borde, se necesitan también ***6 colores*** (aquí la fórmula de Heawood no se puede aplicar).



¡El único caso no resuelto es el caso de la esfera (el plano)!

Hermann Minkovski

Se comenta que **Hermann Minkovski** (1864-1909) dijo en cierta ocasión a sus alumnos que él no había resuelto el problema de los 4 colores, porque se trataba de un problema que sólo habían atacado matemáticos de tercera fila…

“*Si quiero, puedo probarlo*”… algún tiempo más tarde reconoció de manera sumisa: **“*El cielo se ha enfadado por mi arrogancia: mi prueba es también errónea*”.**

Guión de la charla

Historia sobre la conjetura de los cuatro colores: de 1852-1996

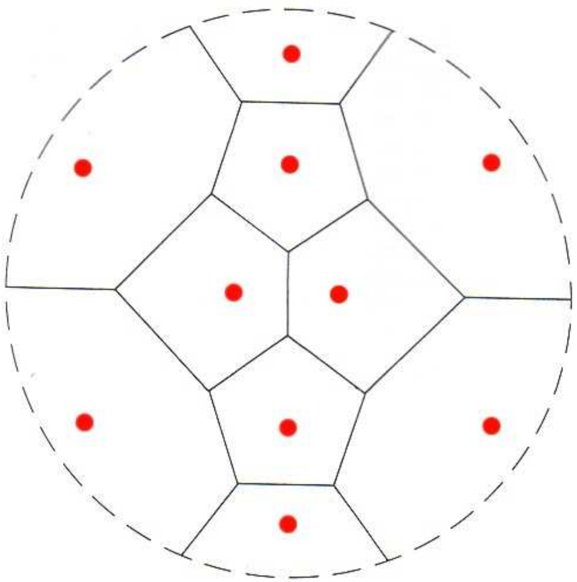
La “prueba” errónea de Kempe… y sus buenas ideas

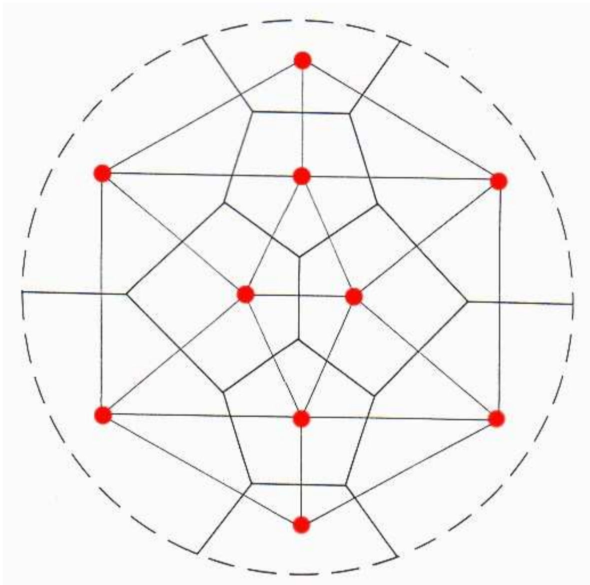
☺ Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

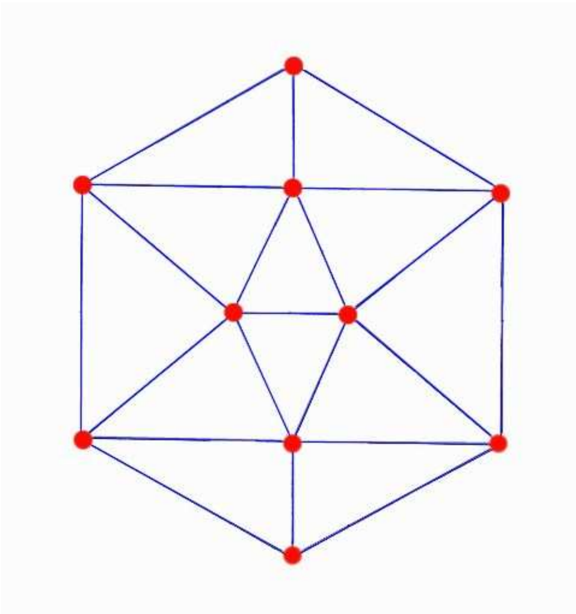
¿Está realmente resuelta la conjetura?

¿Qué hacer ahora?

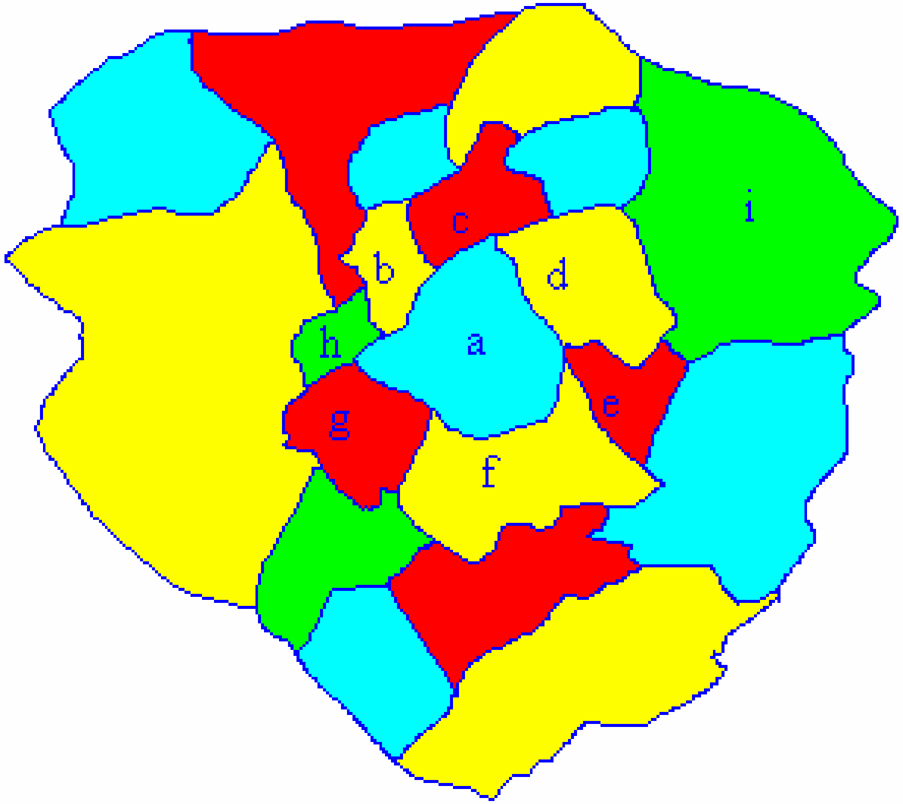
Por comodidad, se trabaja con grafos en vez de con mapas: se marca la capital de cada país, se unen las capitales de países contiguos, y se obtiene el ***grafo de incidencia (o dual)*** del mapa. Colorear el mapa equivale a colorear las capitales (vértices), asignando distintos colores a dos capitales unidas por una ruta (arista).

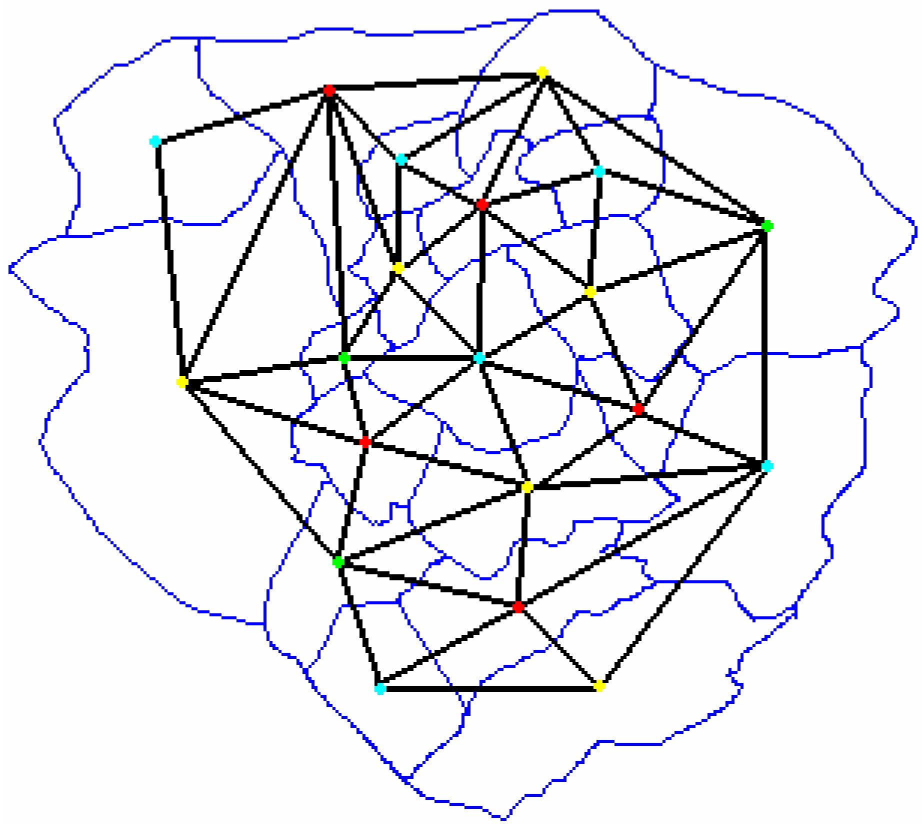






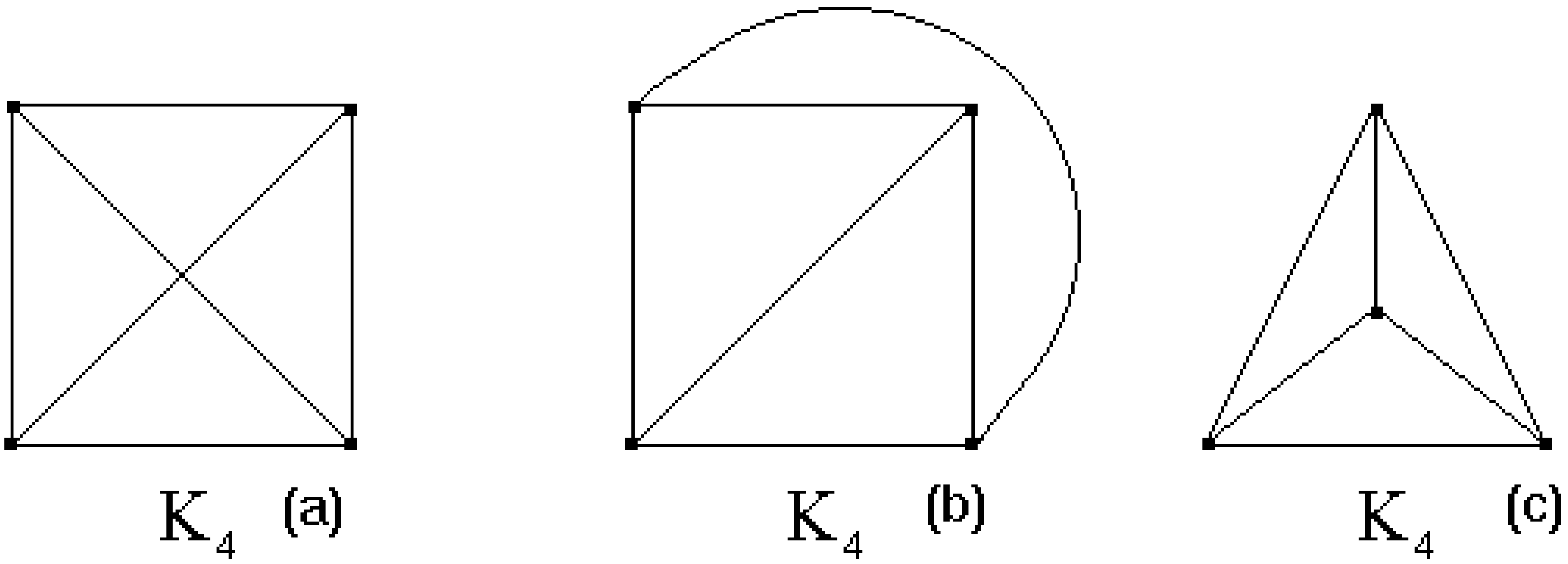
¿Qué hacer ahora?





Grafos de incidencia

Estos grafos son siempre ***planares***, i.e. se puede dibujar en el plano una representación concreta del grafo, en la cual las aristas no se corten excepto en un eventual vértice común.



Grafos de incidencia

- Un mapa es ***cúbico*** si y sólo si su grafo de incidencia es ***triangulado*** (grafo planar en el que cada cara tiene exactamente tres aristas).

- El número de ***regiones vecinas*** se corresponde ahora con el ***grado*** de cada vértice (número de aristas incidentes)**.**

La ***fórmula de Euler*** se hereda para grafos de incidencia

Núm(vértices) – Núm(aristas) + Núm(caras) = 2

Minimales *criminales*

Un acercamiento alternativo para resolver la conjetura de los cuatro colores es: imaginar que es falsa, es decir, existen algunos mapas (grafos) que no pueden 4-colorearse. Entre estos mapas (grafos) que necesitan 5 colores o más, debe de haber alguno con el ***menor número posible de regiones***.

Estos ejemplos se llaman ***minimales criminales***… así un minimal criminal no puede 4-colorearse, pero un mapa (grafo) con ***menos*** regiones (vértices) ***sí***.

Para probar el teorema de los 4 colores hay que demostrar que ***no existen minimales criminales***... y eso se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas (grafos).

Minimales *criminales*

Lo que Kempe demuestra con su argumentación (en este nuevo lenguaje), es que un ***minimal criminal*** no puede contener digones, triángulos o cuadrados (aquí es donde usa su método de cadenas),... y falla al intentar probar que tampoco puede contener pentágonos…

Si hubiese conseguido esto último, habría quedado establecida la conjetura, al no existir minimales criminales (pues cualquiera de ellos debe contener obligatoriamente una de las anteriores cuatro configuraciones).

Los dos conceptos clave

La demostración (bien hecha) del teorema de los 4 colores toma la de Kempe, pero para la inducción, en vez de eliminar un único vértice, se elimina un determinado trozo del grafo (una ***configuración***).

- ***Un conjunto inevitable K*** es un conjunto finito de configuraciones (una configuración es un ciclo con vértices internos triangulados) tal que todo grafo contiene una copia conforme de una ***k*** de ***K***: por ejemplo, Kempe demuestra que para mapas cúbicos, el conjunto K={digones, triángulos, cuadrados, pentágonos} es inevitable.

- ***k*** es ***una configuración reducible,*** si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo que contenga a ***k***, a partir de un grafo menor.

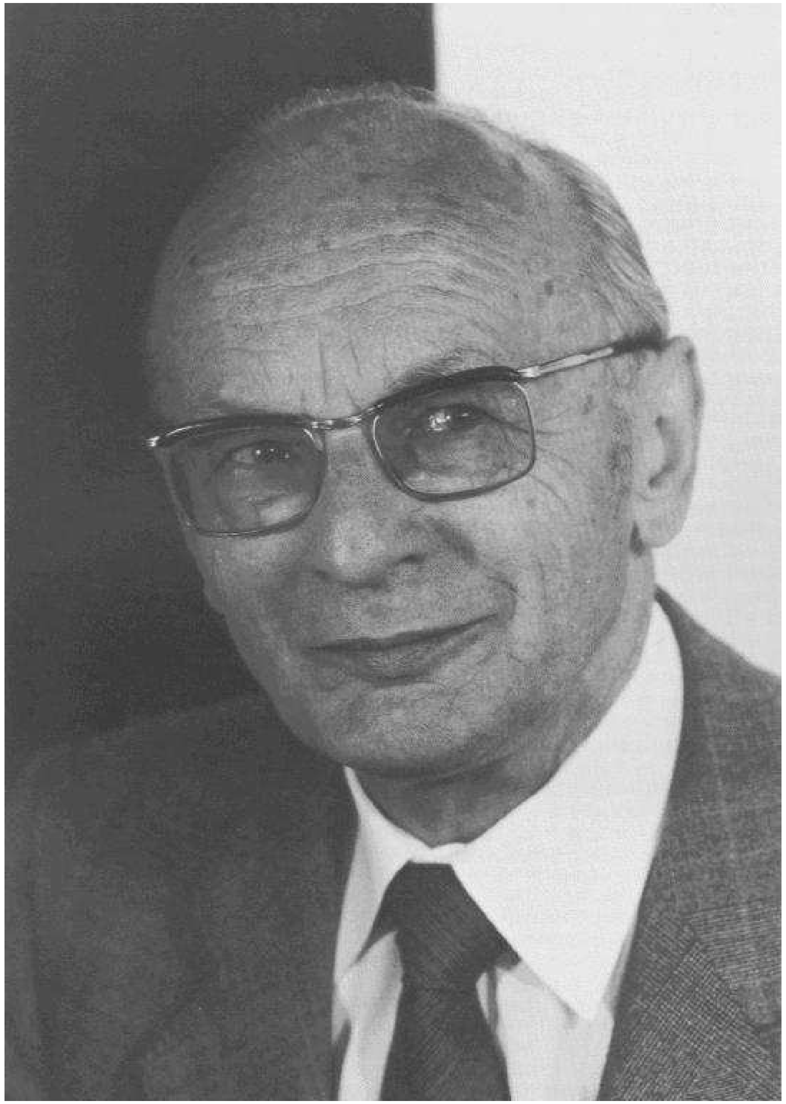
Los dos conceptos clave

Plan de la prueba: encontrar un conjunto inevitable ***K*** (todo grafo no 4-coloreable contiene una copia conforme de alguna ***k*** en ***K***).

Si ***K*** estuviese formado sólo de configuraciones reducibles, la prueba del teorema de los 4 colores estaría terminada: en efecto, en tal caso, no podría existir un minimal criminal.

En 1913, **George David Birkhoff** (1884-1944) publica ***"The reducibility of maps",*** y avanza en el estudio de sus "diamantes de Birkhoff"***.***

Heinrich Heesch



Mucha gente trabajaba en el tema…

Uno de ellos es **Heinrich Heesch** (1906-1995), graduado en matemáticas y música.

Heesch resolvió en 1932 uno de los 23 problemas de Hilbert de 1900, el “***regular parquet problem***” (construcción de un tipo particular de embaldosamiento del plano), que es parte del problema número 18 de Hilbert.

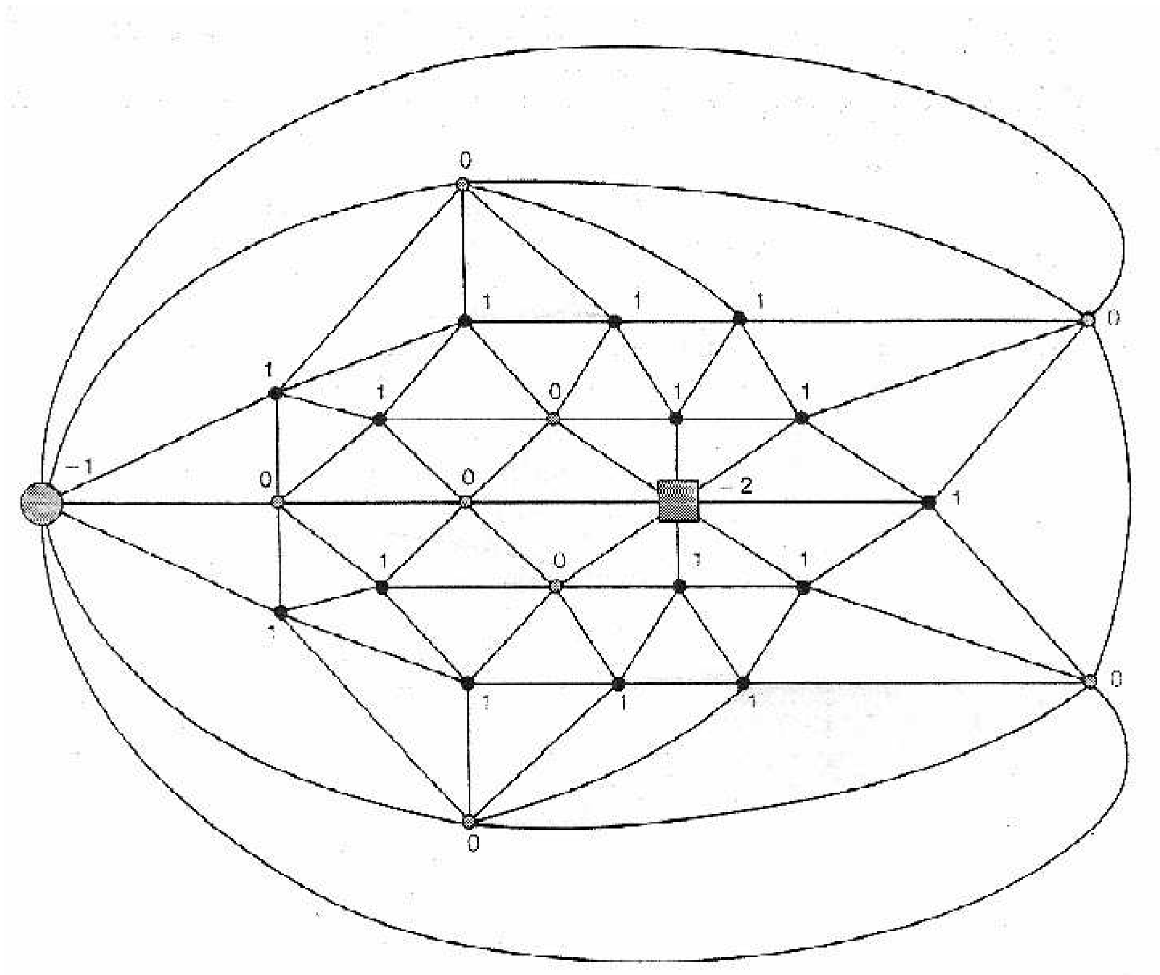
Heinrich Heesch

En 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador:

1. realiza diversos tests con el programa ***Algol 60*** en un ***CDC1604A*** (en contacto ya en América con su alumno Wolfgang Haken);
2. afirma que la conjetura puede resolverse considerando ***tan sólo*** 8.900 configuraciones;
3. da una manera de construir conjuntos inevitables (obstrucciones locales), a través de su ***algoritmo de descarga***.

Construcción de conjuntos inevitables

Para generar un conjunto inevitable de configuraciones, la idea de Heesch es considerar el grafo como una ***red eléctrica***, asociando a cada vértice una "carga" inicial de ***6-d(v)***, donde ***d(v)*** es el grado de ***v*** (número de aristas Incidentes con este vértice).

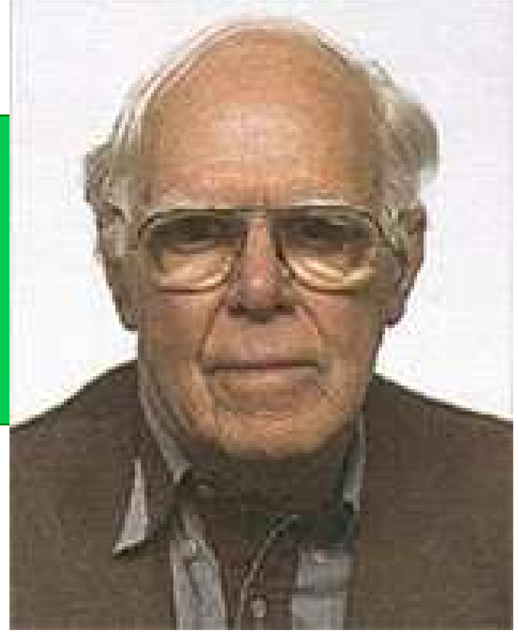


Construcción de conjuntos inevitables

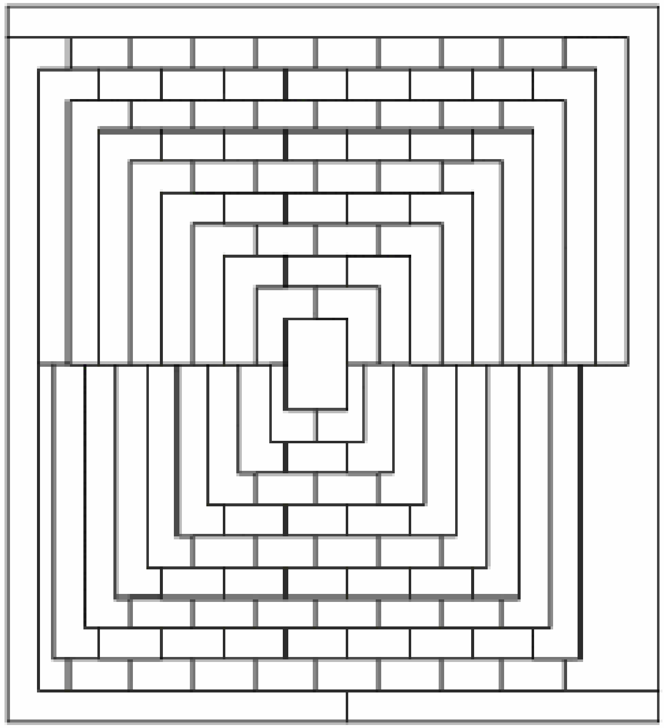
Usando la fórmula de Euler, se demuestra que la suma de las cargas en un grafo triangulado es ***12***. Si ahora se desplazan las cargas eléctricas sobre la red (con su ***algoritmo de descarga***), la suma total seguirá siendo ***12***: los vértices cargados positivamente pueden ceder cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian.

Al final del proceso, se eliminan los vértices de carga negativa y se obtiene un conjunto de configuraciones, de vértices de cargas nulas o positivas: como todo grafo triangulado es de carga total ***12***, debe contener al menos una de las configuraciones (cuya geometría dependerá del proceso de descarga elegido) del conjunto anterior, que forma entonces un ***conjunto inevitable***.

La broma de Gardner



El matemático y divulgador **Martín Gardner** (1914-), editor de los ***Math Games*** de Sci. American, publicó el 1 de abril de 1975 un artículo, pretendiendo que se había encontrado un mapa de ***110 regiones*** (el mapa de William McGregor, especialista en teoría de grafos según Gardner), que requería necesariamente ***5 colores***, dando así un contraejemplo, que invalidaba la aún por entonces conjetura de los 4 colores.



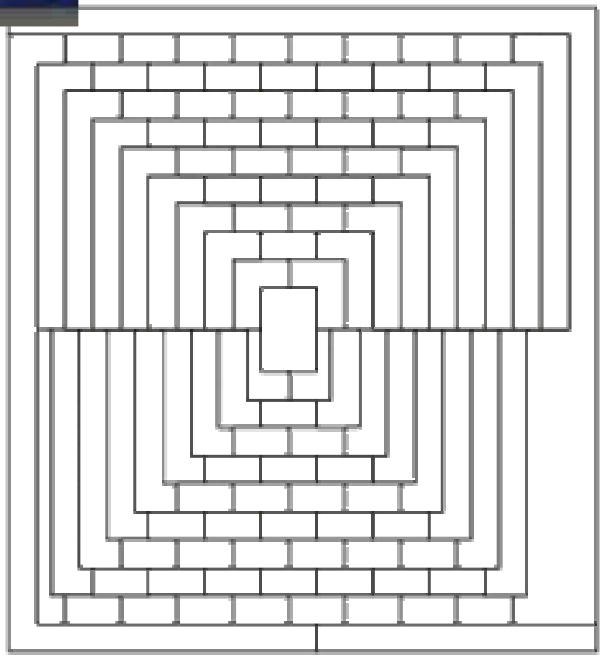
La broma de Gardner

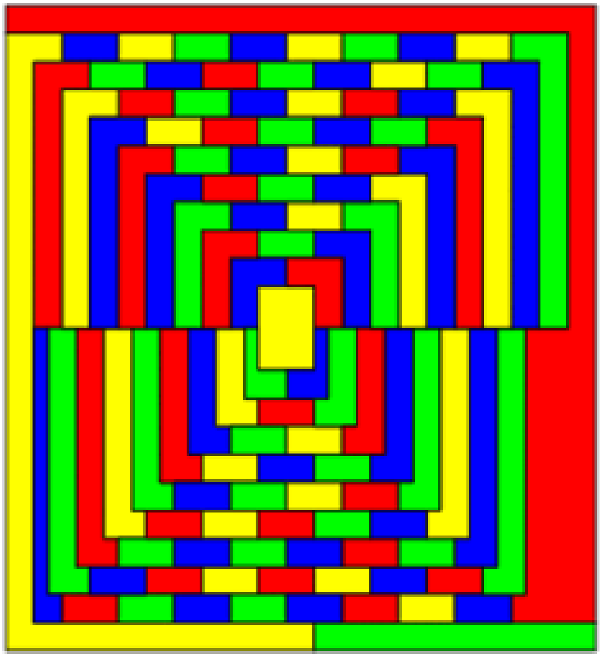
El 1 de abril es el ***Día de los inocentes***… en *Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention (*Sci. Amer. **232**, 127-131, 1975), Gardner hacía tambalearse parte de la Ciencia, hablando de:

1. una refutación de la teoría de la relatividad de Einstein, a través de un experimento del físico británico ***Humbert Pringle***;
2. el descubrimiento en el *Codex Madrid I,* de que Leonardo había inventado el retrete que se limpia con el agua de su cisterna, debido a ***Augusto Macaroni*** de la Universidad Católica de Milán;
3. la demostración de ***Richard Pinkleaf***, con ayuda del ordenador MacHic, de que el movimiento de apertura de peón a cuatro torre de rey en ajedrez gana siempre la partida;
4. el sorprendente resultado de que el número **e** elevado a $\pi(163)^{1/2}$ es el número entero 262.537.412.640.768.744, obtenido por ***John Brillo*** de la University of Arizona;
5. y la construcción por el afamado parapsicólogo ***Robert Ripoff***, de un motor que funciona con energía mental.

La broma de Gardner

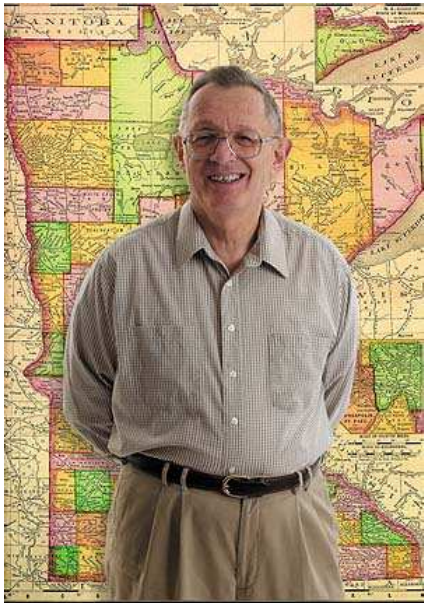
Stan Wagon (entre otras muchas personas que escriben a Gardner) muestra que este mapa puede colorearse con 4 colores...



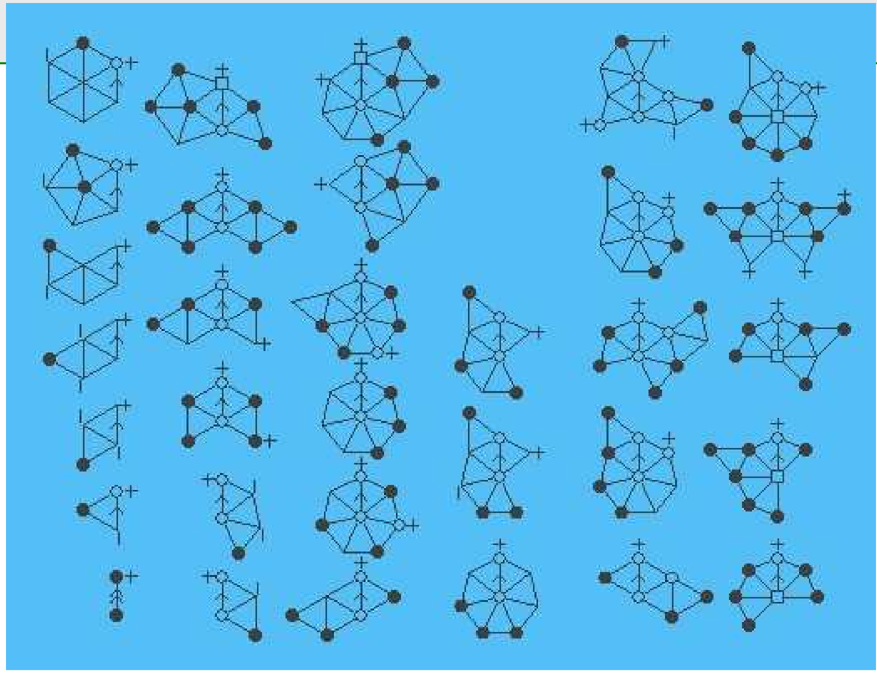


La prueba de Haken y Appel

El progreso era lento, hasta que en 1976 Ken Appel y Wolfgang Haken dieron una prueba cuyos principales ingredientes eran los conceptos de ***descarga*** y ***reducibilidad*** (además de cadenas de Kempe, etc.): una vez obtenida la larga lista de configuraciones inevitables, demostraron que eran reducibles, obteniendo una prueba inductiva del teorema.



Ken Appel



Wolfgang Haken (1928-)

Haken hizo su tesis en topología de dimensión 3, no encontró puesto en la Universidad y se fue a trabajar como físico a *Siemens*. Allí seguía intentando probar la ***conjetura de los 4 colores***, el ***knot problem*** (algoritmo que decide cuando un nudo es trivial), y la ***conjetura de Poincaré***…

En 1961 publica la solución del ***knot problem*** (anunciada en el ***ICM1954*** de Amsterdam) en Acta Math. 205 (1961) 245-375, y entra en la Universidad de Illinois, al impresionar al lógico W.W. Boone: el teorema de incompletitud de Gödel hacía pensar a los lógicos que problemas como el de los 4 colores no se solucionaban porque eran ***irresolubles*** (al contrario de lo que pensaban los topólogos)…

Wolfgang Haken invita a Heesch a la Universidad de Illinois en 1963.

La prueba de Haken y Appel

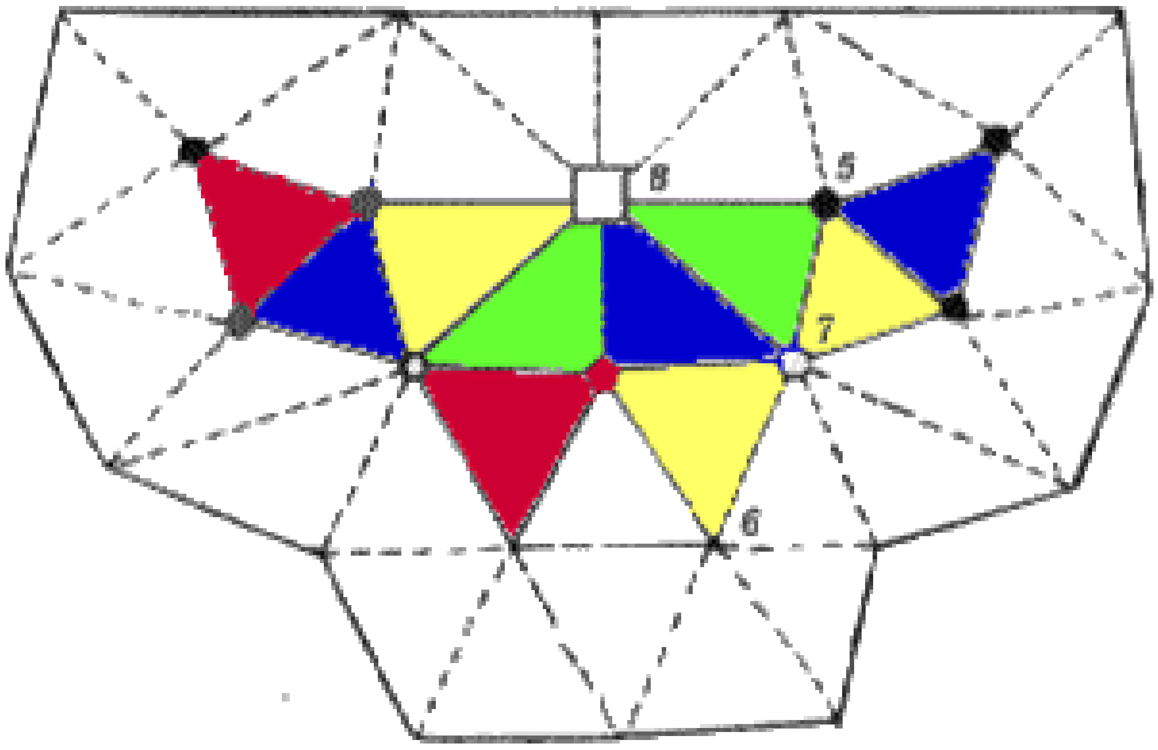
La primera prueba de Appel, Haken y Koch usó un algoritmo de descarga complicado, que produjo una lista de **1.936 *configuraciones inevitables***, cada una de las cuales se demostró reducible, con la ayuda de un ordenador.

Modificando el algoritmo de descarga (para producir un conjunto inevitable cada vez mejor), encontraron otro mejorado (con **300 reglas de descarga**) que produjo un conjunto de ***1.482 configuraciones Inevitables***. Se demostró que eran reducibles con la ayuda de un ordenador programado por Koch, para buscar las extensiones requeridas del coloreado, llevó **1.200** horas (**= *50 días***) de cálculo en un **IBM 360**.

Appel y Haken completaron la demostración en 1976.

… Uno de los 1.468

Por ejemplo, en la prueba de reducibilidad de esta configuración, se necesitan unos ***199.000*** coloreados…



La prueba de Haken y Appel

Appel tiene soltura en el manejo de ordenadores, Haken no... Y aunque encuentran dificultades en su Universidad por la cantidad de horas de ordenador precisadas para sus cálculos, envían finalmente su prueba al Illinois Jour. of Maths., en unas 140 páginas y dos partes:

- en la primera, explican la estrategia de la prueba y el proceso de descarga usado para construir el conjunto inevitable de configuraciones y
- en la segunda, Appel, Haken y Koch dan el listado de los conjuntos inevitables y describen los programas de ordenador usados para comprobar que cada miembro es reducible.

También están disponibles en una microficha, unas ***400*** páginas de diagramas y la comprobación detallada de los lemas usados en el texto central.

La prueba de Haken y Appel

Jean Mayer, profesor de literatura en la Universidad de Montpellier y matemático aficionado (demuestra el teorema de los 4 colores para mapas con 96 regiones) es uno de los referees de la *inevitabilidad* y **Frank Allaire** es el de la *reducibilidad* (más tarde daría otra prueba del teorema de los 4 colores).

Incluso la familia de Haken (su hija en particular) les ayudó a repasar las tareas a mano,… y tras corregir erratas, eludir falsos anuncios de virus, etc., la Universidad de Illinois adquirió como ***triunfante matasellos***:

Appel y Haken comentan: ***“Aunque el proceso de transferencia de cargas (excepto las reducciones) se puede comprobar a mano en uno o dos meses, es virtualmente imposible verificar de este modo los cálculos de reducibilidad. De hecho, el referee del artículo verificó el proceso de transferencia de cargas de acuerdo con nuestras notas, pero verificando el cálculo de la reducibilidad con un programa independiente”.***

En 1989, Appel y Haken reconocen: ***“Kempe’s argument was extremely clever, and although his “proof” turned out not to be complete, it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later”.***

El apoyo de W.T. Tutte (especialista en teoría de grafos y editor jefe del Jour. of Combinatorial Theory) fue fundamental… frente a las críticas por el carácter "amateur" de muchos de los involucrados en la prueba (familia, no profesionales, etc.).

Wolfgang Haken
Smote the Kraken
One! Two! Three! Four!
Quoth he: "the monster is no more".

W.T. Tutte

Hubo mucha publicidad en los periódicos: ***Eureka!*** en Time (20/9/76), donde dicen: "***Appel and Haken may well have ushered in a new era of computer computation on the frontiers of higher mathematics***".
http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,946631,00.html

¿Eso es una prueba?

Muchos matemáticos aceptaron ésta como una prueba irrefutable, pero otros muchos argumentaron que ***eso*** no era una demostración matemática, … la máquina había comprobado que una gran cantidad de mapas podían colorearse usando a lo más 4 colores, ¿pero, y sí existía un mapa, que el ordenador no hubiese contemplado y que no podía colorearse de esa forma? Los principales reproches eran que:

1. una parte de la prueba no podía verificarse a mano, y
2. la parte hecha a mano era complicada y no había sido verificada de forma independiente.

En esa época uno de los comentarios que se hacían era: ***“Una buena demostración matemática es como un poema - ¡esto es un listín telefónico!”.***

Otra nueva prueba

En 1996, N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Georgia Institute of Technology), publican ***A new proof of the four-colour theorem*.**

¿Qué hace la nueva prueba diferente de la de Appel y Haken?

1. elimina complicaciones, confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse, sin estudiar tantos casos como en la prueba de Appel y Haken;
2. el conjunto inevitable es de tamaño ***633***;
3. dan un conjunto de ***32*** reglas de descarga;
4. la comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse por ordenador;
5. esta comprobación lleva sólo 3 horas en cualquier ordenador.

Y más aún…

En 2000, ***Ashay Dharwadker*** da otra prueba del teorema de los 4 colores, no basada en ideas previas, utilizando ***teoría de grupos***, ***teoría de sistemas de Steiner*** y ***correspondencias de Hall***. Aún hoy en día, parece que se ignora esta prueba: se trata de una demostración larga y complicada, pero que ***no*** precisa de un ordenador…

A. Dharwadker, ***A New Proof of the Four Colour Theorem***, 2000, ***http://www.geocities.com/dharwadker/***

R. Stewart, *A Review of Dharwadker's Proof*, 2005, ***http://fourcolourtheorem.tripod.com/***

Y más aún…

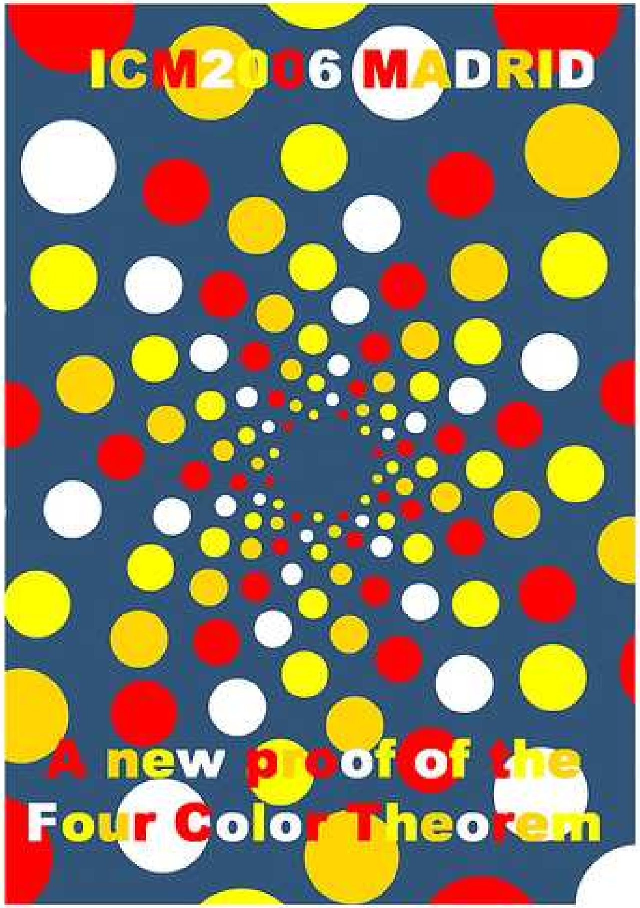
En 2004, **Benjamin Werner** (INRIA) y **Georges Gonthier** (Microsoft Res., Cambridge) verifican la prueba de Robertson et al. de 1996 (con alguna aportación original), formulando el problema en términos del programa ***Coq 7.3.1*** (que utiliza ecuaciones de tipo lógico). Este acercamiento elimina la necesidad de ***fiarse*** de los variados programas de ordenador usados para verificar los casos particulares: basta con ***dar crédito*** al asistente Coq.

Confirman la validez de cada una de las etapas de la prueba.

http://research.microsoft.com/research/downloads/Details/5464E7B1-BD58-4F7C-BFE1-5D3B32D42E6D/Details.aspx

Y más aún…

En 2004, **Ibrahim Cahit** dice haber demostrado la conjetura, usando el nuevo concepto de ***cadenas espirales***, sin ordenador, en 12 páginas (preprint, agosto 2004), aún no publicado… Y lo explica en el ICM2006…



http://www.emu.edu.tr/~cahit/

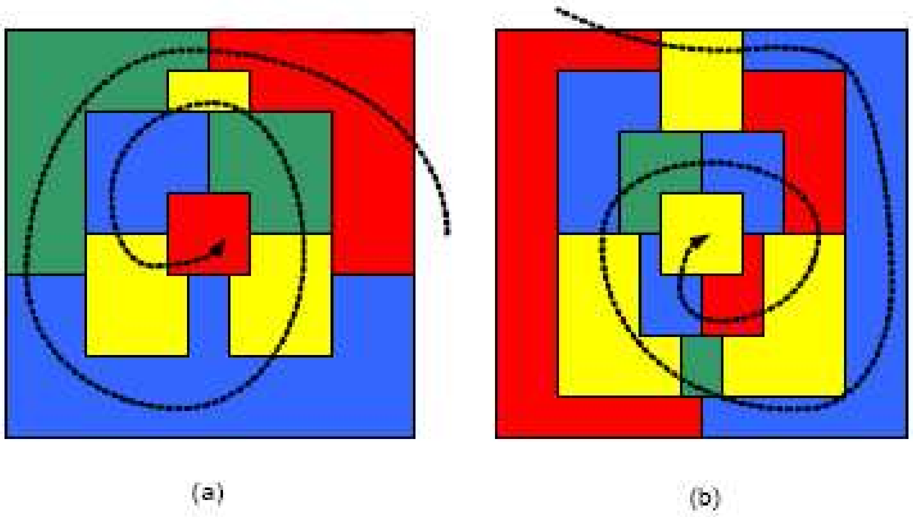


Figure 1: Maps, spirals and four coloring.

On the Algorithmic Proofs of the Four Color Theorem

Artículo enviado a la revista ***Graph Theory, Computational Intelligence and Thought…***
y aún no publicado…

Guión de la charla

Historia sobre la conjetura de los cuatro colores: de 1852-1996

La “prueba” errónea de Kempe… y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

☺ ¿Está realmente resuelta la conjetura?

Conclusiones

La demostración de la conjetura de los 4 colores:

1. ha servido de **estímulo** en el desarrollo de teorías matemáticas como la **teoría de grafos** y de **redes;**
2. es el **primer mayor teorema** probado (¿verificado?) con ayuda de un **ordenador**…

Este asunto levantó mucha polémica en el momento de la aparición de la demostración… atenuada por la aparición de otras pruebas realizadas con ayuda de ordenador como la *clasificación de los grupos simples finitos* (que depende de cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano), o la solución de Hales del *problema de Kepler* sobre el empaquetamiento óptimo de esferas…

¿Qué es una demostración?

Esta prueba ha suscitado muchos interrogantes “meta-matemáticos” sobre el papel asignado a la mente humana y a los ordenadores en las matemáticas: ¿se puede aceptar como válida una afirmación que sólo una máquina, y no una mente humana, puede comprobar?

¿Qué es realmente una ***demostración***? El matemático y filósofo de la Ciencia Imre Lakatos (1922-1974) define:

Una demostración es una sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente .

¿Qué es una demostración?

El filósofo Thomas Tymoczko (1943-1996), en ***“The four-color problem and its philosophical significance”*** (1979) caracteriza una demostración como algo:

- ***convincente*** (suficiente como para convencer incluso a los escépticos que duden de la veracidad del resultado),
- ***formalizable*** (la conclusión debería alcanzarse partiendo de sistemas axiomáticos), y
- ***comprobable.***

Este último es el aspecto más controvertido en el caso del teorema de los 4 colores… el problema de la ***comprobabilidad*** se ilustra perfectamente por el acertijo del ***árbol cayendo:***
¿Puede el árbol caer si no se le oye? ¿Puede estar un teorema demostrado si no se puede leer su demostración?

¿Qué es una demostración?

¿Qué prueban las demostraciones? Teoremas.

Según E.R. Swart en ***"The philosophical implications of the four-colour theorem"*** (1980), no hay un tipo de teorema, sino cuatro:

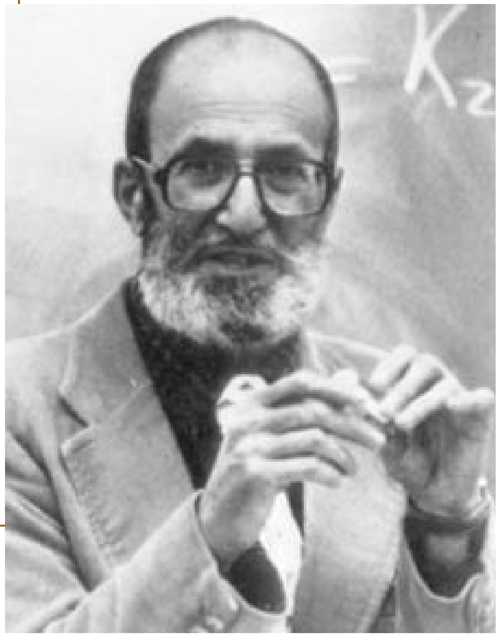
1. teoremas cuya prueba puede realizarse en la **cabeza** de uno,
2. aquellos que precisan **lápiz y papel** para demostrarse,
3. teoremas que no sólo requieren **lápiz y papel**, sino también una gran cantidad de ***esfuerzo* y *tiempo***,
4. aquellos que sólo pueden probarse con ayuda de un **ordenador.**

La división no está clara... pero, el **teorema de los cuatro colores** se encontraría en la categoría 4.

Opinan los escépticos

El aspecto de la ***comprobabilidad*** es el que pone en duda la credibilidad de la prueba. Si las pruebas deben ser verificadas, parece que entonces automáticamente una persona (lo opuesto a una máquina) debe completar esta tarea: esto no puede hacerse con la demostración del ***teorema de los 4 colores***.

Paul Halmos (1916-2006) opina que la demostración realizada con un ordenador tiene la misma credibilidad que si está hecha por un ***adivino,*** las máquinas tienen algunas propiedades físicas que aún tenemos que entender…
"No puedo aprender nada de la demostración. La prueba no indica la razón por la que sólo se necesitan 4 colores ¿por qué no 13? ¿Qué tiene de especial el número 4?"



Opinan los escépticos

Tymockzo dice que usar un ordenador para establecer una verdad matemática es transformar pruebas en experimentos. Afirma que el ***teorema de los cuatro colores*** ha sido "confirmado" a través de un experimento de física teórica, pero no probado de una manera formal. Aunque se tiene una pequeña idea de lo que el ordenador está "testando", no se tiene el 100% de seguridad de lo que se está haciendo.

Esto significa que la naturaleza de los resultados demostrados con ordenador es del tipo ***"Simon dice"***, donde se invita a los matemáticos a ***"tener fe"*** y a creerse lo que una criatura "superior" afirma…

Opinan los escépticos

John L. Casti afirma respecto a la prueba del teorema de los 4 colores: ***“Como el problema se ha obtenido por medios totalmente inapropiados, ningún matemático de primera fila debería trabajar más en ello y por lo tanto una demostración decente puede ser retrasada indefinidamente… Así que hemos hecho una cosa mala, muy mala y pienso que una cosa similar no debería cometerse nunca más*”.**

En respuesta a esta opinión, el especialista en teoría de grafos y combinatoria Dan Archdeacon responde: ***“Hay muchas malas pinturas de jardines, pero eso no impidió a Van Gogh pintar sus girasoles”…***

Los escépticos opinan…

El periodista científico **John Horgan,** dice en ***"The dead of proof"*** (Sci. American, 1993): ***"Hay una diferencia entre probar una conjetura y demostrarla con probabilidad 1: lo último no es, en el sentido correcto de la palabra, una prueba. […] Una prueba que ofrece una probabilidad de verdad y no una certidumbre es un oxímoron".***

Lit. Figura retórica de pensamiento que consiste en complementar una palabra con otra que tiene un significado contradictorio u opuesto

*"Si creemos en la ciencia debemos aceptar la posibilidad de que la era de los **grandes descubrimientos** científicos haya pasado ya. Por ciencia entiendo no la ciencia aplicada, sino la ciencia en su vertiente más pura y más grandiosa, a saber, ese deseo profundo del ser humano de comprender el universo y el lugar que ocupa en él. Podría ser que las investigaciones ulteriores no aportaran más revelaciones ni revoluciones de envergadura, sino tan solo unos rendimientos graduales. […] Otro catalizador de cambio es el **ordenador** que está llevando a la comunidad matemática a reconsiderar la naturaleza de lo que es una prueba, y por lo tanto de la verdad".*

Opinan los no escépticos

La queja de los ordenadores tienen virus o producen ***errores***, se puede aplicar de la misma manera a las personas, que se confunden muy a menudo. Aunque los errores cometidos por los ordenadores son más difíciles detectar, los seres humanos se equivocan con más frecuencia. Los ordenadores siguen un programa rígido predeterminado, y no tienen distracciones motivadas por los cambios de humor, el estrés u otros factores externos.

La ***longitud*** de algunas demostraciones está más allá de la capacidad de computación humana, pero es perfectamente aceptable por los estándares de las máquinas.

Los no escépticos opinan

La idea de que ***no*** pueden usarse ordenadores será cada vez más extraña para las generaciones venideras: es una cuestión de aceptación y familiaridad, serán ***(¿son?)*** herramientas como el ***lápiz y el papel*****…**

La prueba de Appel y Haken es en cierto sentido convencional, consiste en una serie de pasos lógicos, que conducen a una conclusión: la conjetura puede reducirse a una predicción sobre el comportamiento de unos 2.000 mapas diferentes.

Otra opinión…

El prestigioso matemático ruso Vladimir I. Arnold, considera que la matemática es una ***ciencia experimental***. Su artículo ***"Sur l'éducation mathématique",*** Gazette de Maths 78 (1998), 19-29, comienza diciendo: ***"Las matemáticas forman parte de la física. La física es una ciencia experimental, una de las ciencias naturales. Las matemáticas son la parte de la física en la que los experimentos son baratos".***

De hecho, Arnold exige aplicar a la investigación en matemática el esquema clásico en física: ***experimento - modelo - estudio del modelo - conclusiones - verificación por la experiencia***.

Arnold sostiene que ***siempre*** debe ser así, incluso ***sin ordenador***, y es equivocado el esquema, para algunos matemáticos paradigmático, ***definición - teorema - demostración***.

Otra opinión…

El esquema clásico en física es en esencia el usado por cualquier modelista matemático: a partir de la ***experiencia***, plantear el ***modelo*** (con las etapas auxiliares de los modelos matemáticos computacionales: diseño o elección del método numérico a usar, programación, implementación, puesta a punto, validación) y luego ***experimentación numérica*** (estudio del modelo) y ***conclusiones***… que, pueden llegar a la detección de fenómenos físicos antes no identificados.

El filósofo **Ludwig Wittgenstein** distingue entre las matemáticas y las ciencias naturales, diciendo que: ***"Un experimento no garantiza que se obtenga siempre el resultado original si repite varias veces. Las demostraciones, sin embargo, no son relativas temporalmente, son verdades eternas"…***

¿Un contraejemplo?

La Gaceta de la RSME, Vol. 8.2 (2005), Págs. 361–368

No basta con cuatro colores

por

Hud Hudson[1]

Reproducimos a continuación el texto *Four Colors Do Not Suffice*, publicado originalmente en el *American Mathematical Monthly* de mayo de 2003. La Gaceta de la RSME desea manifestar su agradecimiento a la MAA y a Hud Hudson por los permisos editoriales para su traducción y publicación.

1. La historia

Bienvenidos a la tierra plana de Zenopia:

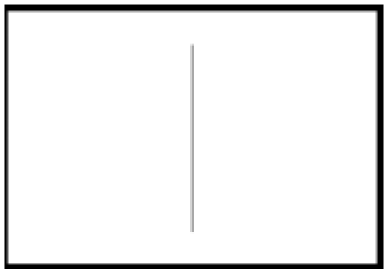


Figura 1.

Zenopia es una isla bidimensional, un país con seis provincias, cada una de las cuales manifiesta un intenso orgullo sobre su perímetro infinito y una encantadora modestia sobre su área finita. Topológicamente, Zenopia es un rectángulo que ni es abierto ni es cerrado (debido a la ausencia de una región rectilínea que va de Norte a Sur justo en el centro de su interior). Sin embargo, los habitantes de Zenopia nunca han puesto en duda la respetabilidad de este tipo de rectángulos, y tampoco deberíamos hacerlo nosotros. Nombremos a la fina tira de espacio que falta en el interior de Zenopia con el sugerente nombre de *Borde*, y representémosla con la línea continua que aparece en la Figura 1.

[1] Hud Hudson es Profesor de Filosofía en la Western Washington University. Es licenciado en Filosofía por la Boise State University y Doctor en Filosofía por la Universidad de Rochester. Sus intereses de investigación incluyen la Metafísica analítica contemporánea, la Historia de la Filosofía Moderna y la Historia de la Religión.

Hud Hudson

Four Colors do not suffice

American Mathematical Montlhy, 2003

(Recuérdese, sin embargo, que mientras que una línea tiene un grosor, la región Borde no lo tiene. Tales son las desventajas de buscar una representación gráfica adecuada).

La primera (y más antigua) provincia de Zenopia es Rojolandia, en verdad una provincia curiosa. Situada un pelín al Sur y otro poco al Este de la esquina noroeste de Zenopia, Rojolandia comienza su largo y tortuoso camino a través de la mitad occidental del país. La imagen de la Figura 2 puede servir de referencia:

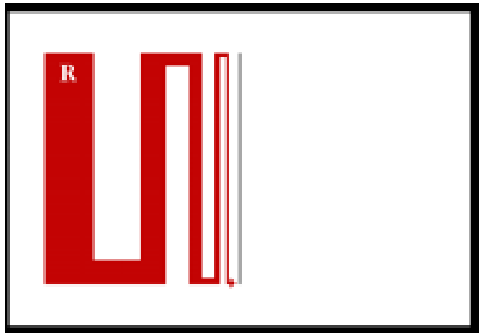


Figura 2.

Como se puede ver, Rojolandia es muy predecible; va hacia el Sur, luego gira al Este, más tarde al Norte, de nuevo al Este, otra vez hacia el Sur ... y continúa describiendo meandros *sin* fin. Veamos algunas cuestiones interesantes sobre esta provincia. Rojolandia es una región conexa, y su segmento más occidental, que está situado justo a una *kata* (la medida oficial de longitud en Zenopia) del Borde, mide un *ana* de ancho (un *ana*, como todo el mundo sabe, es un quinto de *kata*). El segundo segmento más occidental, ubicado a media *kata* del Borde, tiene una anchura de medio *ana*. Los siguientes segmentos, el tercero, el cuarto y el quinto, se sitúan a un cuarto, un octavo y un dieciseisavo de *kata* del Borde, y miden un cuarto, un octavo y un dieciseisavo de *ana* de ancho, respectivamente. Y así sigue, con esta regularidad tan reconfortante.

La segunda provincia de Zenopia es Negrolandia, una provincia también bastante curiosa. Negrolandia es exactamente igual que Rojolandia, sólo que boca abajo y yendo de Este a Oeste, en lugar de Oeste a Este. Un poquito al Norte y otro poco al Oeste de la esquina sudeste de Zenopia, Negrolandia comienza su propio largo y tortuoso camino a través de la mitad oriental del país. Negrolandia es tan predecible como su provincia gemela, Rojolandia: empieza hacia el Norte, luego gira al Oeste, más tarde al Sur, de nuevo al Oeste, para el Norte ... y sigue describiendo meandros *sin* fin con tanta pericia como su región hermana. Más aún, al igual que en la occidental Rojolandia, los segmentos que se encuentran a $1/n$ *katas* del Borde miden $1/n$ *anas* de ancho. Tal es así que sus fundadores aseguraban (pese a que nadie fue nunca capaz de recorrer la provincia de punta a punta) que no llegaba a invadir la mitad occidental de Zenopia. Sin embargo, tanto Negrolandia como Rojolandia se acercan arbitrariamente a cada punto de la región que hemos dado en llamar Borde.

Los mapas antiguos —que describían el país antes de la creación y establecimiento de las fronteras de las provincias posteriores— representaban a la isla de Zenopia de la siguiente manera:

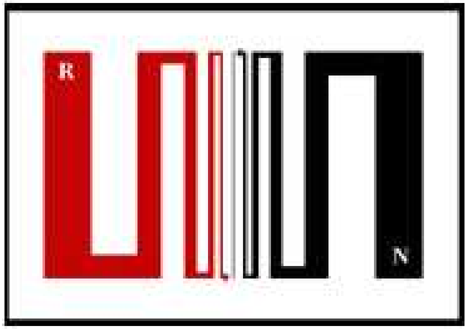


Figura 3.

Entonces empezó el lío. Cuatro tribus nativas de Zenopia comenzaron a discutir sobre quién tenía el dominio de la que una vez fue llamada, y con acierto, la tercera provincia de Zenopia: *i.e.*, la provincia que era el complementario de la unión de Negrolandia y Rojolandia, representada en blanco en la Figura 3.

Los Noroccidentales, los Sudoccidentales, los Nororientales y los Sudorientales, todos ellos reclamaban para sí el gobierno de esta provincia, y una larga y cruenta guerra estalló. La consecuencia fue que esta original tercera provincia de Zenopia fue dividida equitativamente entre las cuatro tribus: los Noroccidentales ocuparon Verdilandia Clara;

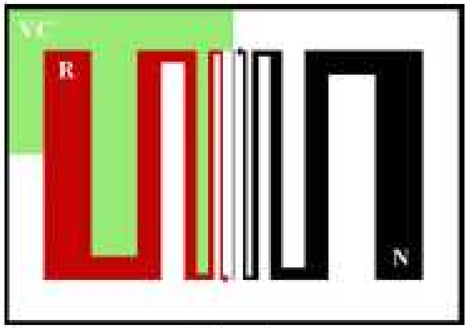


Figura 4.

los Sudoccidentales, Verdilandia Oscura;

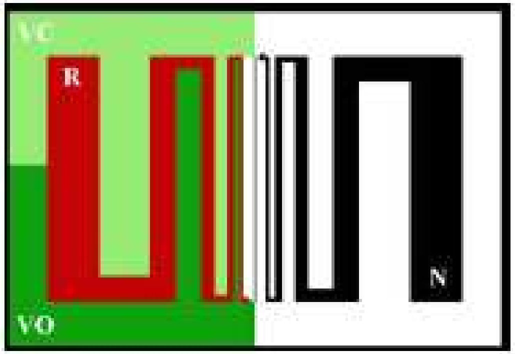


Figura 5.

los Nororientales, Azulandia Oscura;

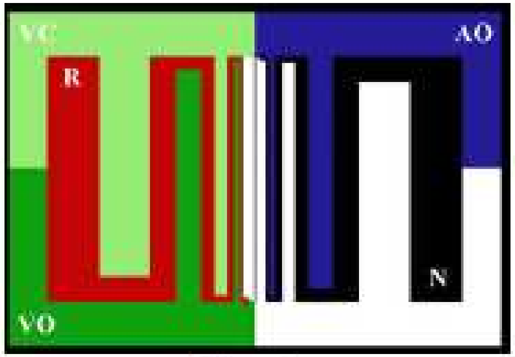


Figura 6.

y los Sudorientales, Azulandia Clara.

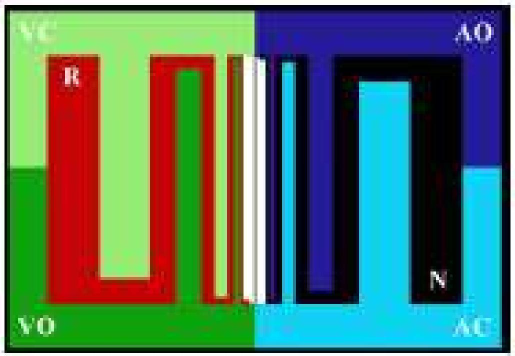


Figura 7.

Cuentan las crónicas que los Noroccidentales y los Nororientales arreglaron sus diferencias bastante pacíficamente y acordaron compartir un segmento justo al norte del Borde y permanecer cada pueblo en su respectiva mitad (Este y Oeste) del país. De la misma manera, los Sudoccidentales y los Sudorientales resolvieron sus desavenencias admirablemente, encontraron un segmento al sur del Borde y pactaron permanecer cada uno en su respectiva mitad (de nuevo, separados al Este y al Oeste). Y ninguno de ellos, al parecer, tuvo nunca reclamación alguna que hacer a Rojolandia o Negrolandia quienes, al permanecer neutrales, ni ganaron ni perdieron un solo pedazo de territorio durante la guerra.

Lamentablemente, los Noroccidentales no se mostraron tan amigables para con sus vecinos los Sudoccidentales, de los que siempre pensaron que habían intentado ocupar mucho más territorio occidental del que les correspondía. Resultó que los Sudoccidentales tenían una opinión semejante de los Noroccidentales, y aunque lucharon por conseguir un equilibrio y una difícil tregua a lo largo de la frontera que los separaba justo a la mitad de la costa occidental, los Noroccidentales ocuparon, con gran placer, tanta región del Sudoeste como les permitió la anchura protectora de la marcha zigzageante de Rojolandia a través de la Zenopia occidental. Esto es, cada vez que Rojolandia giraba hacia el Sur para enseguida volver hacia el Norte, los Noroccidentales reclamaban todo el territorio que quedaba en el hueco resultante. Para no ser menos, los Sudoccidentales reclamaron los huecos dejados por los giros hacia el Norte (seguidos de vuelta hacia el Sur) de Rojolandia. En lo que puede ser calificada de coincidencia de proporciones asombrosas, el sino de los Nororientales y los Sudorientales fue tan semejante que no merece la pena añadir ni un sólo párrafo más a este relato.

Como el lector habrá *sin* duda advertido, he seguido la convención habitual de la cartografía zenopiana de dejar la región central cercana al Borde sin colorear, con las características flechas marcando las trayectorias de Rojolandia y Negrolandia. Así es el convenio, pero no porque algún punto del país quede sin reclamar —nada más lejos de la realidad: hasta el último punto del país pertenece a una de las provincias, y ninguno de ellos está en disputa—; es sólo que Rojolandia, Negrolandia y sus codiciados huecos *se* van haciendo tan finos y tan rápidamente . . . Pero pintar con colores reales no les importa a los patriotas de Zenopia. Colorear, en abstracto . . . ¡ésa es la cuestión!

Así fue como *se* formaron las seis provincias de Zenopia, cada una de las cuales es una región conexa. Surgen periódicamente discusiones acerca de las fronteras que comparten, sobre todo la cuestión de si dos regiones pueden reclamar simultáneamente un *segmento* común rectilíneo que las divida (lo que haría que las regiones intersecasen de una manera que todo el mundo juzga intolerable); o bien sobre si una de las dos provincias podría reclamar la posesión exclusiva del segmento común, mientras que su oponente sufriría el humillante sino de verse rodeado por puntos de Zenopia pertenecientes a una provincia enemiga.

Pero sea lo que sea lo que surja de estas discusiones fronterizas, nada es comparable con un resultado de la guerra que es absolutamente pasmoso. El insaciable deseo de los Noroccidentales, Sudoccidentales, Nororientales y Sudorientales por rellenar los huecos tallados por Rojolandia y Negrolandia garantiza que las provincias de Verdilandia Clara, Verdilandia Oscura, Azulandia Clara y Azulandia Oscura también se acercan arbitrariamente a cada punto del Borde.

Con más detalle: llamemos disco abierto en torno a un punto p al conjunto de todos los puntos que distan de p menos que una cierta cantidad dada. Entonces, se verifica que, para cada punto p del Borde y para cualquier disco D centrado en p, D tiene intersección no vacía con cada una de las seis provincias, y también con cada uno de los complementarios de las seis provincias. Pero eso es justo lo que significa que un segmento rectilíneo sea una frontera común; con esto basta para considerar tales provincias como adyacentes.

Zenopia, por tanto, no puede ser coloreada con cuatro colores. No bastan cuatro colores para colorear Zenopia de manera que provincias adyacentes lleven colores distintos: se necesitan seis colores. Más aún, se dice que los problemas en Zenopia no han acabado todavía. Se rumorea que un facción minoritaria de los Sudoccidentales planea dividir Verdilandia Oscura declarando la independencia de una nueva pequeña provincia. El plan es simple: se trata de examinar cuidadosamente Rojolandia e ir rodeándola, en cada uno de sus giros, con una nueva región cuya anchura (que se estrecha convenientemente en cada viraje hacia el Este) sea siempre una milésima de la de Rojolandia y tal que, en cada sección horizontal, la distancia a Rojolandia nunca sea mayor que la propia anchura de la nueva franja. Aunque esta hipotética séptima provincia no compartiría necesariamente todo el Borde con sus predecesoras, con seguridad compartirá una cierta subregión (que será a su vez un segmento rectilíneo) del Borde con cada una de las demás. Serían necesarios, entonces, siete colores. Dadas las simetrías que uno puede encontrar en Zenopia, no sería extraño pensar que el número pudiera incrementarse aún más.

2. La moraleja de esta historia

¿Tenemos entonces un contraejemplo para la celebrada "conjetura de los cuatro colores"? Bueno, depende de cómo se formule exactamente la conjetura. Lamentablemente, ciertos enunciados que se consideran equivalentes en realidad no lo son. He aquí una formulación representativa (a la que en lo sucesivo nos referiremos como la "versión cartográfica, o de mapas, de la conjetura de los cuatro colores"), tomada del libro de Saaty y Kainen [2, página 4], una muy popular introducción al problema de los cuatro colores:

(C4CM) Bastan cuatro colores para colorear cualquier mapa en el plano o en la esfera de manera que regiones con frontera común reciban colores distintos.

Poco después de presentar la conjetura, Saaty y Kainen nos recuerdan que obtendríamos un grafo dual $D(M)$ al "situar un punto, o *vértice*, en la mitad de cada país de un cierto mapa M y unir parejas de vértices con líneas, o *aristas*, siempre que los países correspondientes tengan frontera en común" [2, pág. 5]. De esta manera, es habitual afirmar, con Saaty y Kaninen, que la conjetura de los cuatro colores en su versión cartográfica (C4CM) "es equivalente a la afirmación de que podemos colorear con cuatro colores los vértices de cierto tipo de grafos; a saber, los que son duales de mapas" [2, pág. 5]. En otras palabras, (C4CM) es equivalente a lo que podríamos llamar "versión de grafos duales de la conjetura de los cuatro colores":

(C4CGD) Bastan cuatro colores para colorear cualquier grafo dual (de un mapa dibujado en el plano o en la esfera) de manera que no haya vértices conectados por aristas que reciban el mismo color.

La estrategia entonces resulta clara: uno intenta probar (C4CM) basándose en que (C4CGD) es cierta y en que (C4CGD) es equivalente a (C4CM). Pero (C4CGD), a su vez, es muchas veces tomada por equivalente a lo que llamaremos "versión de grafos planos de la conjetura de los cuatro colores":

(C4CGP) Bastan cuatro colores para colorear cualquier grafo plano de manera que no haya vértices conectados por aristas que reciban el mismo color.

Saaty y Kainen proporcionan algunas razones para creer que (C4CGP) es equivalente a (C4CGD) cuando escriben que "es interesante señalar que, al intentar colorear con cuatro colores un mapa, no encontraremos obstrucciones locales; no encontraremos cinco regiones mutuamente adyacentes", y "cualquier grafo conexo que pueda ser dibujado en el plano es dual de un cierto mapa … [más aún] … por su propia construcción, cualquier grafo dual $D(M)$ tiene la propiedad de ser plano; *i.e.*, podemos representar sus vértices y sus aristas en el plano de manera que las aristas sólo se corten en sus extremos" [2, pág. 5].

Sin embargo, y como acabamos de ver, el método de multiplicación de provincias de Zenopia nos revela una serie de cosas realmente sorprendentes. Por resumir: mientras que (C4CGP) es cierta (véase la famosa prueba en [1]), (C4CGD) y (C4CM) parecen ser falsas. Esto es, incluso si todo grafo plano se puede colorear con cuatro colores, el grafo dual de Zenopia no es plano; antes bien, el grafo dual de Zenopia es el comúnmente llamado grafo completo K_6 (un grafo que no es plano) (véase la Figura 8), y ni Zenopia ni su grafo dual K_6 se pueden colorear con cuatro colores.

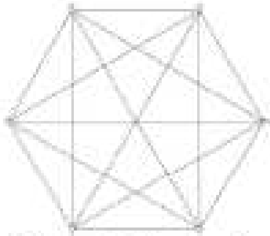


Figura 8. El grafo K_6

Para ver por qué el grafo dual de Zenopia es el K_6, recordemos una vez más que hay exactamente seis provincias en Zenopia. Así que su grafo dual ha de tener seis vértices. Siempre que dos provincias de Zenopia sean adyacentes a lo largo de una frontera, su grafo dual deberá constar de una arista que una los vértices que representen a esas provincias. Pero elija el lector cualquier pareja de nuestras seis provincias: sea cual sea el par elegido, serán dos provincias adyacentes a lo largo del segmento que hemos llamado Borde en la historia antes relatada. De manera que, para cualquier pareja de provincias, nuestro grafo requerirá una arista que enlace los vértices correspondientes. El grafo resultante es, entonces, el grafo completo (y no plano) K_6.

De hecho, reflexionando en torno a Zenopia, obtendríamos una lección que podríamos llamar "la tesis cartográfica de los múltiples colores": para cualquier número natural $n > 4$, es posible construir un grafo completo no-plano m de manera que (i) m tiene n vértices; (ii) no bastan $n-1$ colores para colorear m de forma que vértices vecinos en el grafo reciban colores distintos, y (iii) m es el grafo dual de un (ciertamente peculiar, pero perfectamente respetable) mapa geográfico.

Referencias

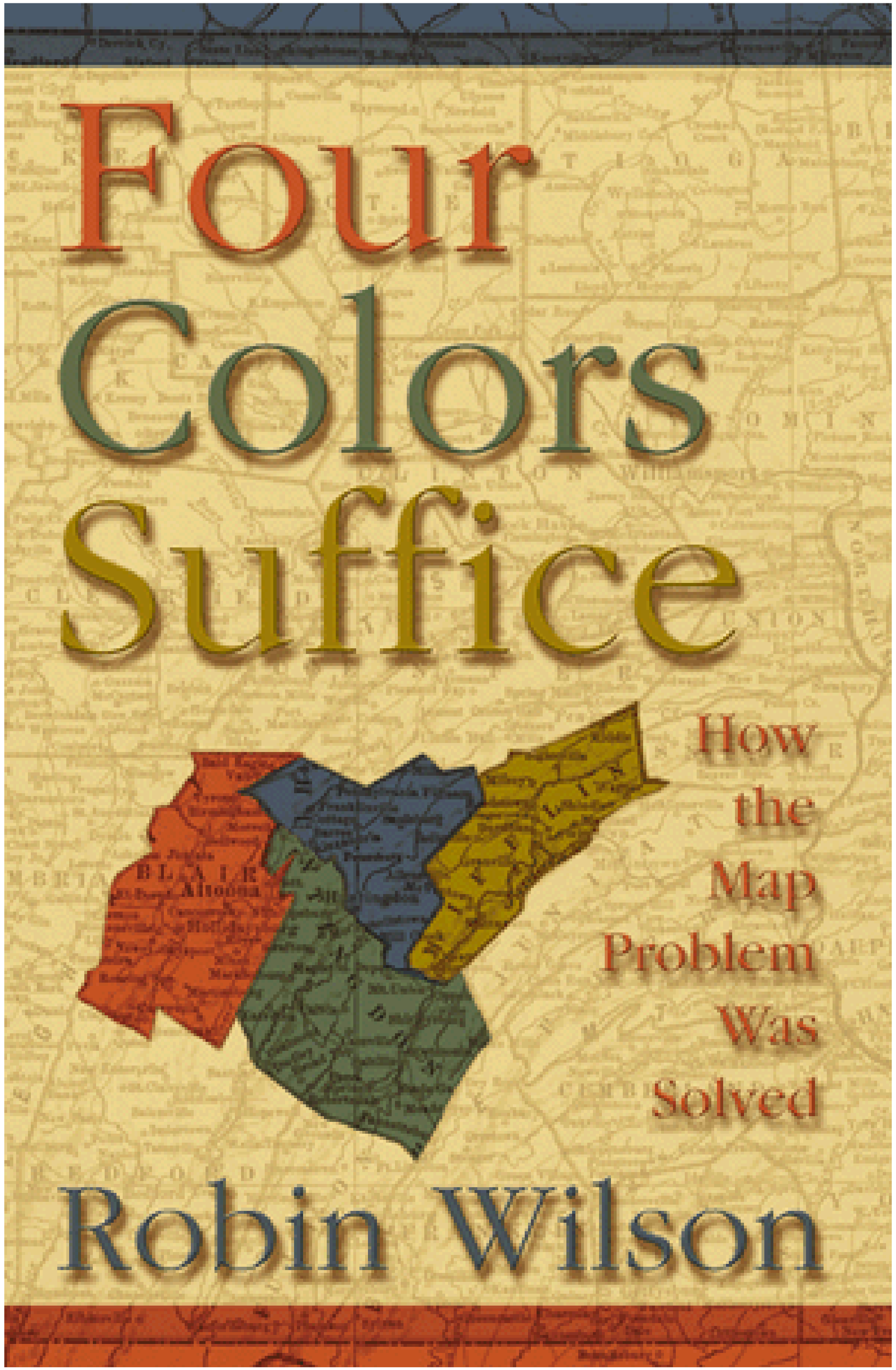
[1] K. Appel and W. Haken: Every planar map is four colorable. *Illinois J. Math.* 21 (1977), 429–567.

[2] T. L. Saaty and P. C. Kainen: *The Four Color Problem: Assaults and Conquests*. McGraw-Hill, New York, 1977.

Hud Hudson
Department of Philosophy
Western Washington University
Bellingham WA 98225
Correo-electrónico: aristos@cc.wwu.edu
http://www.ac.wwu.edu/~aristos/

Traducción de Pablo Fernández Gallardo

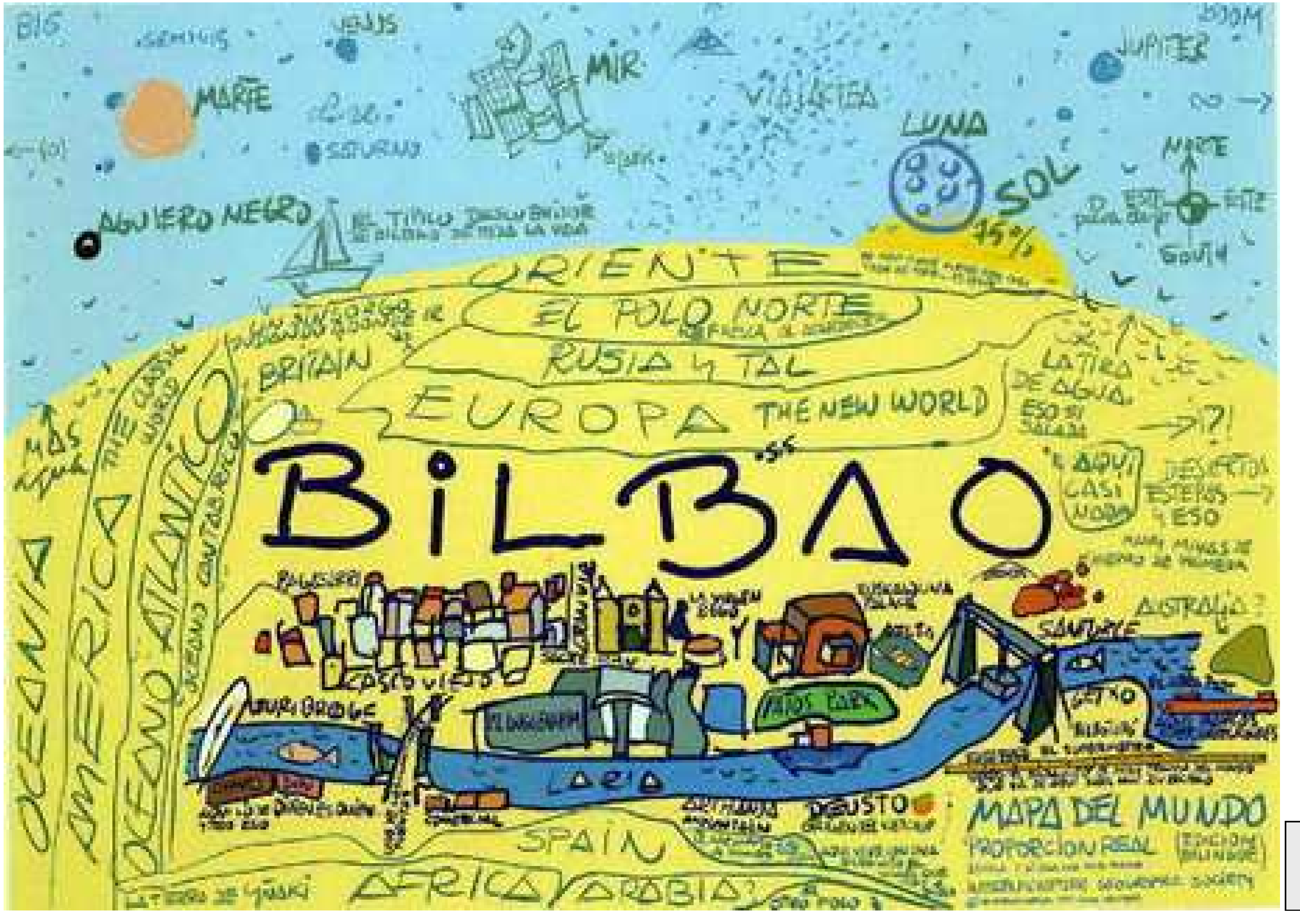
El enunciado estándar define bordes de modo que se excluyen casos patológicos,… aunque el enunciado para el público en general es ***"Todo mapa puede 4-colorearse".***



Four colors suffice*: *how the map problem was solved
Robin WILSON
Princeton Univ. Press, 2002

Donald Mackenzie, *Slaying the Kraken: the sociohistory of a mathematical proof,* Social Studies in Science 29(1), 7-60, 1999.

Contraejemplo auténtico: el mapa-mundi de Bilbao



Gracias