Estructuras para el conjunto de las matrices inversibles

María José Deiana

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Universidad Nacional de Tucumán

Mayo de 2016

Directora: Mg. María Marcela Lazarte

Codirectora: Mg. Silvina Ruth Gómez

Índice general

Introducción

Una estructura para un conjunto no vacío, consiste de objetos matemáticos que de cierta manera se adjuntan o relacionan con el conjunto, facilitando su visualización o estudio, proporcionando significado a la colección.

En este trabajo vamos a estudiar ciertas estructuras sobre el conjunto de matrices inversibles de orden n con coeficientes reales, al que denominaremos en un principio $\widetilde{\mathbf{G}}$. A saber:

- Estrutura de Grupo.
- Estrutura de Espacio Vectorial y Vectorial Normado.
- Estrutura de Espacio Métrico y Topológico.
- Estrutura de Grupo Topológico.
- Estrutura de Variedad Diferenciable.

Respecto a las definiciones, teoremas, lemas, proposiciones, etc., hemos establecido que se numeren de forma independiente unos de otros, al mismo tiempo que respetarán el capítulo y sección en el que se encuentren, es decir que denotaremos, por ejemplo, a la tercera definición correspondiente a la sección 2 del capítulo 1 como **Definición 1.2.3** mientras que en una misma sección podemos encontrarnos con lo siguiente:
Definición 2.1.1
Teorema 2.1.1
Definición 2.1.2
La mayoría de las demostraciones estarán en forma explícita en el cuerpo del trabajo, salvo pocas excepciones en las cuales indicamos la bibliografía donde encontrarla, y algunas demostraciones pertenecientes a los libros, ampliadas y detalladas en este trabajo, las encontraremos en el Apéndice; las mismas fueron colocadas allí para facilitar el seguimiento de la lógica utilizada y su comprensión.

El presente trabajo consta básicamente de tres partes: un primer capítulo, en el que establecemos la notación a usar y presentamos los conjuntos que analizaremos; un cuerpo central (constituído por varios capítulos: uno por cada estructura que se estudió) en el que analizamos teoría de las estructuras mencionadas antes y el modo de aplicarlas a nuestros conjuntos de interés; y finalmente, un apéndice, en el cual ampliamos y ejemplificamos muchos resultados de la teoría, que consideramos entorpecían la secuencia del razonamiento en la lectura. A continuación, presentamos un resumen de lo que veremos:

Resumen

En el Capítulo 1 establecemos la notación a usar, presentamos el objeto de estudio (el conjunto $\widetilde{\mathbf{G}}$) y mostramos un esquema de los principales conjuntos que nos interesa estudiar, a saber: las matrices de determinante positivo, las de determinante 1 (uno), las matrices ortogonales y las matrices ortogonales de determinante 1 (uno).

En el Capítulo 2 comenzamos a analizar la primera de las estructuras que mencionábamos al principio. Aquí repasamos teoría de estructura de grupo y aplicamos la misma a nuestros conjuntos. Una vez que probamos que $\widetilde{\mathbf{G}}$ es grupo, reemplazamos su notación por $GL(n,\mathbb{R})$. Con sus subgrupos procedemos de la siguiente manera: primero los definimos con la notación clásica heredada de $GL(n,\mathbb{R})$ y a continuación, los estudiamos como subgrupos de éste.

El Capítulo 3 presenta un breve repaso por la estructura de espacios vectoriales y por los conceptos de producto interno, norma y transformaciones lineales, para luego aplicar los mismos al análisis, en primer lugar, del conjunto $M_n(\mathbb{R})$ (los resultados obtenidos en este capítulo serán de importancia cuando probemos que $M_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$). Por otro lado, se muestra que $GL(n,\mathbb{R})$ no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

En el Capítulo 4 repasamos los conceptos de espacios métricos y topológicos. Luego probamos que los espacios $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son homeomorfos como espacios normados y que, mediante la continuidad de la función determinante, $GL(n,\mathbb{R})$ es un conjunto abierto no conexo en el espacio de las matrices. Por último, analizamos las propiedades topológicas de los subconjuntos de interés de $GL(n,\mathbb{R})$ (si son cerrados, abiertos o ninguna de las dos).

El Capítulo 5 se estructura de forma distinta a los anteriores, en lugar de presentar primero la teoría y luego ver sus aplicaciones a los conjuntos que nos interesan, aquí los analizamos en forma conjunta; no obstante, al final del capítulo sí seguimos la lógica de los anteriores y también hacemos una sección dedicada a las conclusiones. Este capítulo se ordena de acuerdo a la siguiente estructura: primeramente, definimos, enunciamos y demostramos resultados básicos de grupo topológico. En segundo término, probamos la continuidad de las funciones α y β mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
GL \times GL \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & GL \\
\lambda[GL] \times \lambda[GL] \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \lambda[GL] \arrow[u, "\gamma^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GL \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & GL \\
\lambda[GL] \arrow[r, "\overline{\beta}"'] & \lambda[GL] \arrow[u, "\gamma^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

para probar que $GL(n,\mathbb{R})$ es Grupo Topológico. En tercer lugar se define grupo topológico de Hausdorff y se muestra que $GL(n,\mathbb{R})$ cumple esta definición. En cuanto a la teoría de grupo topológico se sigue con un estudio sobre los entornos y, en cuarto lugar, se comienza con el análisis de los subgrupos y espacios cocientes de los grupos topológicos. A continuación mostramos que los subgrupos de $GL(n,\mathbb{R})$ son subgrupos topológicos y vamos aplicando la teoría de subgrupos topológicos para extraer otro tipo de propiedades de los mismos. En quinto lugar, nos interesa ver las propiedades de los espacios y grupos cocientes de nuestro objeto de estudio, en esta parte mostramos que los espacios GL/GL^+ y GL/SL son grupos topológicos de Hausdorff, mientras que $GL/O(n)$ y

$GL/SO(n)$ son espacios topológicos de Hausdorff. En sexto lugar, desarrollamos: teoría de isomorfismos entre grupos topológicos y conceptos de componente conexa necesarios para demostrar que la componente conexa de $GL(n, \mathbb{R})$ que contiene al elemento identidad es $GL^+(n, \mathbb{R})$. Luego presentamos y desarrollamos conceptos de espacios homogéneos de grupos topológicos y grupos localmente compactos hasta probar que los conjuntos $O(n)$ y $SO(n)$ son compactos, mostramos también que $O(n-1)$ puede identificarse con el subgrupo de isotropías de $O(n)$ en e_1, donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ y, del mismo modo, $SO(n-1)$ puede identificarse con el subgrupo de isotropías de $SO(n)$ en e_1, donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$. Finalmente concluímos el capítulo probando que la esfera S^{n-1} es homeomorfa a $O(n)/O(n-1)$ y a $SO(n)/SO(n-1)$.

En el Capítulo 6 se definen y demuestran los conceptos y resultados necesarios para llegar a probar que $GL(n, \mathbb{R})$ es Grupo de Lie. Para ello estudiamos la estructura de Variedad Diferenciable y las funciones diferenciables entre espacios topológicos. Este capítulo se ordena de acuerdo a la siguiente estructura: en primer lugar se detalla la notación a utilizar en el capítulo, y a continuación, las definiciones y resultados elementales referidos a la estructura mencionada; en segundo lugar, se prueba que el espacio de las matrices reales de orden n es una variedad diferenciable de dimensión n y de clase C^∞, este resultado es el que se utiliza luego para demostrar que $GL(n, \mathbb{R})$ también es una variedad diferenciable (hereda la que proviene de $M_n(\mathbb{R})$); en tercer lugar definimos las funciones diferenciables entre espacios topológicos, a su vez enunciamos y demostramos los resultados necesarios para probar que las funciones de $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ en $GL(n, \mathbb{R})$, y de $GL(n, \mathbb{R})$ en $GL(n, \mathbb{R})$, dadas por $(A, B) \mapsto AB$ y $A \mapsto A^{-1}$, respectivamente, son diferenciables; y finalmente definimos Grupo de Lie y demostramos que el conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ es un Grupo de Lie.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos tanto la notación con la que trabajaremos, como algunos conceptos y resultados considerados conocidos que utilizaremos en la elaboración del trabajo.

1.1. Notación

- Dado un conjunto A denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ a partes de A, por cA a su complemento y por $\#A$ a su cardinal.

- Designaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente; por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de reales positivos y $\mathbb{R}^-$ al de reales negativos. Y, en las secciones donde se mencionen conceptos de espacio vectorial, denotaremos $\mathbb{K}$ al campo, el cual puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

- Dados los conjuntos no vacíos A y B definimos:

  $$A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

  Si $A = \mathbb{K}^n$ entonces $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)/\forall i = 1, \ldots, n, x_i \in \mathbb{K}\}$.

- Llamaremos $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices de orden $m \times n$ con entradas reales. Y $M_n(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n con entradas reales.

- Denotaremos los intervalos de la siguiente manera

  $$\begin{aligned}
  (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
  (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
  [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
  (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
  (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}
  \end{aligned}$$

- Si tenemos $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \in M_n(\mathbb{R})$ entonces A_i con $1 \leq i \leq n$ denotará la columna de lugar i de la matriz A. Si, en cambio, vemos $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ entonces A_i con $1 \leq i \leq n$ denotará la fila de lugar i de la matriz A.

- Si $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ consideraremos el producto usual de matrices y lo denotaremos $AB \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Denotaremos por I_n a la matriz identidad de orden n, $I_n = (\delta_{ij})$ donde δ_{ij} es la función dada por:
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$
- Denotaremos por θ a la matriz $\theta = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.
- Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, denotaremos $tr(A)$ a la traza de A y A^T a su matriz traspuesta.
- Dado un conjunto X denotaremos por $\imath$ a la función identidad, dada por $\imath(x) = x$.
- Denotaremos por det a la función determinante que va de $M_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$. En el Apéndice (Capítulo 7) hacemos un repaso de conceptos y propiedades de esta función.

1.2. Matrices inversibles de entradas reales

Si bien ya nos hemos referido a las matrices inversibles, en esta sección las definiremos formalmente. Por otra parte, mencionaremos los subconjuntos de interés y establecemos un esquema de relaciones entre estos conjuntos.

Definición 1.2.1 *$A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice inversible (o regular o no singular) si y sólo si existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$. Notación: $B = A^{-1}$.*
Por el momento denotaremos $\widetilde{\mathbf{G}}$ al conjunto de matrices inversibles de orden n:

$$\widetilde{\mathbf{G}} = \{A \in M_n(\mathbb{R})/A \textit{ es inversible}\} \tag{1.1}$$

Usando las propiedades de la función determinante, podemos definirlo así:

$$\widetilde{\mathbf{G}} = \{A \in M_n(\mathbb{R})/\det(A) \neq 0\} \tag{1.2}$$

Entre los subconjuntos de $\widetilde{\mathbf{G}}$, particularmente estudiaremos:

- Las matrices de determinante positivo:
$$\{A \in M_n(\mathbb{R})/\det(A) > 0\}$$
- Las matrices de determinante 1 (uno):
$$\{A \in M_n(\mathbb{R})/\det(A) = 1\}$$
- Las matrices ortogonales:
$$\{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$$
- Las matrices ortogonales de determinante 1 (uno):
$$\{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \in O(n) \wedge \det(A) = 1\}$$

Capítulo 2

Estructura de grupo para las matrices inversibles

Este capítulo está organizado principalmente en dos secciones: la primera, en la que hacemos un breve repaso por conceptos de la teoría de grupo, y la segunda, donde aplicaremos esos conceptos a nuestros objetos de estudio.

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1 *Dado $G \neq \emptyset$. Decimos que G tiene estructura de grupo respecto de una operación binaria llamada producto, si la misma cumple que:*

1. $a, b \in G \Rightarrow ab \in G$ *(Ley de cierre).*
2. $a, b, c \in G \Rightarrow (ab)c = a(bc)$ *(Ley asociativa).*
3. $\exists e \in G : \forall a \in G, ea = ae = a$ *(Existencia de elemento neutro en G).*
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$ *(Existencia de inversos para los elementos de G).*

Si, además, para todo $a, b \in G$, $ab = ba$ decimos que G es abeliano.

Definición 2.1.2 *Llamaremos orden de G y denotaremos por $|G|$ a $\#G$.*

2.1.1. Subgrupos

Definición 2.1.3 *Dado G grupo y H un subconjunto no vacío de G. Decimos que H es subgrupo de G si es grupo respecto de la operación definida en G.*

Lema 2.1.1 *Sean G grupo y $H \neq \emptyset$, $H \subset G$. H es subgrupo de G si y sólo si:*

1. *Si $a, b \in H$ entonces $ab \in H$.*
2. *Si $a \in H$ entonces $a^{-1} \in H$.*

Demostración: Ver página 46 − [He]

2.1.2. Clases laterales

Definición 2.1.4 *Sean H un subgrupo de un grupo G y $x, y \in G$. Entonces:*

- *x es congruente a y a derecha módulo H si $xy^{-1} \in H$.*
  Lo denotaremos $x \equiv_d y \mod (H)$.
- *x es congruente a y a izquierda módulo H si $x^{-1}y \in H$.*
  Lo denotaremos $x \equiv_i y \mod (H)$.

Teorema 2.1.1 *Sea H un subgrupo de un grupo G. Entonces:*

1. *La congruencia a derecha (resp. a izquierda) módulo H es una relación de equivalencia sobre G.*
2. *La clase de equivalencia de $a \in G$ respecto a la congruencia a derecha (resp. a izquierda) módulo H es el conjunto $Ha = \{ha/h \in H\}$ (resp. $aH = \{ah/h \in H\}$).*
3. *$\#Ha = |H| = \#aH$ para todo $a \in G$.*

Ha (resp. aH) se denomina clase lateral derecha (resp. izquierda) de H en G.

Demostración: Ver página 38 $-$ [Hu]

Observación 2.1.1 *No toda clase lateral derecha es una clase lateral izquierda.*

Ver contraejemplo en página 64 - Apéndice.

Teorema 2.1.2 *Sea H un subgrupo de un grupo G. Entonces:*

1. *G es unión de las clases laterales derechas (resp. izquierdas) de H en G.*
$$G = \bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{a \in G} Ha$$
2. *Las clases laterales derechas (resp. izquierdas) de H en G son disjuntas de a pares.*
3. *$\forall a, b \in G$, $(aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H) \wedge (Ha = Hb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H)$.*
4. *Si $\mathcal{R}$ es la familia de las clases laterales derechas de H en G y $\mathcal{L}$ es la familia de las clases laterales izquierdas de H en G, entonces $\#\mathcal{R} = \#\mathcal{L}$.*

Demostración: Ver página 38 $-$ [Hu]

2.1.3. Subgrupos normales y grupos cocientes

Teorema 2.1.3 *Si N es un subgrupo de un grupo G, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las congruencias a izquierda y derecha módulo N coinciden (esto es, definen la misma relación de equivalencia sobre G).*
2. *Toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G.*
3. *$aN = Na$ para todo $a \in G$.*
4. *Para todo $a \in G$, $aNa^{-1} \subset N$, donde $aNa^{-1} = \{ana^{-1}/n \in N\}$.*
5. *Para todo $a \in G$, $aNa^{-1} = N$.*

Demostración: Ver página 41 $-$ [Hu]

Definición 2.1.5 *Si un subgrupo N de un grupo G satisface las condiciones del Teorema 2.1.3 decimos que N es subgrupo normal de G. Denotamos: $N \lhd G$.*

Definición 2.1.6 *Para un grupo G y un subgrupo H de G denotamos al conjunto de clases laterales a izquierda de G con respecto a H por $G\,/H$.*

A partir del Capítulo 5 utilizaremos la función $\pi : G \to G\,/H$ que aplica $x \mapsto xH$. Llamaremos a π la función natural de G en $G\,/H$. Gráficamente, supongamos que

$$G\,/H = \{\underbrace{H}_{\pi(e)}, \underbrace{xH}_{\pi(x)}, \underbrace{yH}_{\pi(y)}, \underbrace{zH}_{\pi(z)}\} \quad \text{(Ver Figura 2.1)}$$

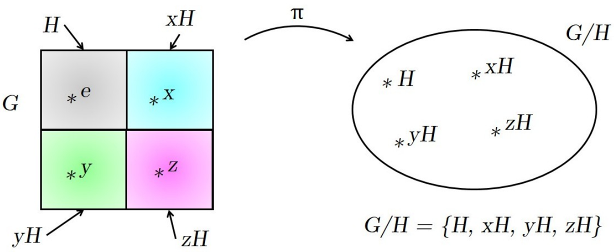

Figura 2.1: π es una función que asigna a cada elemento de G su clase lateral izquierda.

Proposición 2.1.1 *Si N es subgrupo normal de un grupo G y G/N el conjunto de todas las clases laterales (a izquierda) de N en G, entonces G/N es un grupo de orden $[G : N]$ respecto de la operación binaria dada por $(aN) * (bN) = abN$. Donde $[G : N]$ denota la cantidad de clases laterales a izquierda (resp. a derecha) de N en G. Por otro lado, como N es normal, entonces para todo $a \in G$ las clases laterales coinciden, luego es indiferente trabajar con clases laterales derechas o izquierdas*

Definición 2.1.7 *Si N es un subgrupo normal de un grupo G, entonces el grupo G/N de la Proposición 2.1.1 se denomina grupo cociente de G por N.*

2.2. Estructura de grupo para $\widetilde{\mathbf{G}}$

Afirmación 2.2.1 $\widetilde{\mathbf{G}}$ *tiene estructura de grupo no abeliano respecto del producto usual de matrices.*

Demostración:

1. El producto usual de matrices es operación binaria en $\widetilde{\mathbf{G}}$. En efecto, sean $A, B \in \widetilde{\mathbf{G}}$, entonces $\det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$. Por Teorema 7.1.1 tenemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Luego $AB \in \widetilde{\mathbf{G}}$.
2. El producto de matrices es asociativo en $M_n(\mathbb{R})$, luego, lo es en $\widetilde{\mathbf{G}}$.
3. Existe elemento neutro en $\widetilde{\mathbf{G}}$. En efecto, existe $I_n \in \widetilde{\mathbf{G}}$ (pues $\det(I_n) = 1 \neq 0$) tal que verifica que para toda $A \in \widetilde{\mathbf{G}}$, luego tenemos que $AI_n = I_nA = A$.
4. Cada elemento tiene su inverso. En efecto, dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, existe A^{-1} inversible tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
5. $\widetilde{\mathbf{G}}$ no es grupo abeliano. En efecto, supongamos que $n = 2$. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $AB \neq BA$.

Por lo tanto, $\widetilde{\mathbf{G}}$ es grupo no abeliano respecto del producto usual de matrices.

■

Definición 2.2.1 *Llamaremos Grupo Lineal General de orden n al grupo definido en la Afirmación 2.2.1 y lo denotaremos por $GL(n, \mathbb{R})$. La notación se debe a su nombre en inglés: General Linear Group. A su vez, denotaremos por $GL^+(n, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices de determinante positivo, por $SL(n, \mathbb{R})$ al de matrices de determinante 1 (uno), por $O(n)$ al de matrices ortogonales y por $SO(n)$ al de matrices ortogonales de determinante 1 (uno).*

Con esta notación, los conjuntos quedan relacionados de la siguiente forma:

Proposición 2.2.1 *Los siguientes conjuntos son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$:*

1. $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) > 0\}$.
2. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$.
3. $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$.

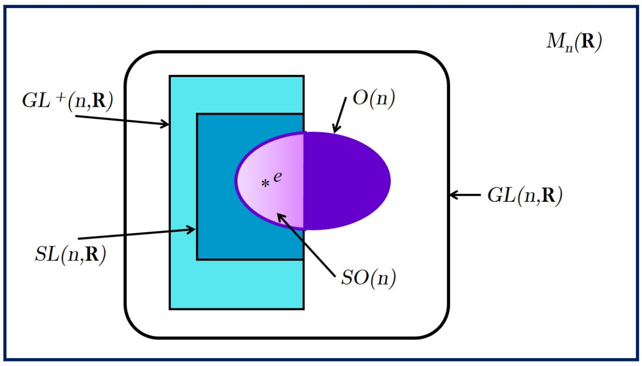

Figura 2.2: Conjuntos a estudiar

4. $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \in O(n) \wedge \det(A) = 1\}$.

Demostración:

1. $GL^+(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. En efecto:
   a) $GL^+(n, \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Existe $I_n \in M_n(\mathbb{R}) : \det(I_n) = 1$, luego $I_n \in GL^+(n, \mathbb{R})$.
   b) $GL^+(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. En efecto si $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ entonces su determinante es positivo y de esa forma, $A \in GL(n, \mathbb{R})$.
   c) Sean $A, B \in GL^+(n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) > 0$ y $\det(B) > 0$, luego por el Teorema 7.1.1 tenemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$ y, por lo tanto, $AB \in GL^+(n, \mathbb{R})$.
   d) Todo elemento tiene su inverso. En efecto, sea $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$

   $$\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det(I_n) \\ \det(A)\det(A^{-1}) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

   como $\det(A) > 0$ tenemos que $\det(A^{-1}) > 0$. Luego $A^{-1} \in GL^+(n, \mathbb{R})$. Por el Lema 2.1.1, $GL^+(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

2. $SL(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. En efecto:
   a) $SL(n, \mathbb{R}) \neq \emptyset$ pues existe $I_n \in M_n(\mathbb{R}) : \det(I_n) = 1$.
   b) $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Si $A \in SL(n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) = 1 \neq 0$ y luego $A \in GL(n, \mathbb{R})$.
   c) Si $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 1$ luego tenemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ y, por ende, $AB \in SL(n, \mathbb{R})$.
   d) Si $A \in SL(n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) = 1$ y por el Teorema 7.1.5 tenemos que: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = 1$. Luego, $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$.

   Por el Lema 2.1.1 tenemos que $SL(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

3. $O(n)$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. En efecto:
   a) $O(n) \neq \emptyset$ pues existe $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $(I_n)^T = I_n = (I_n)^{-1}$. Luego $I_n \in O(n)$.

b) $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, ya que dada $A \in O(n)$ tenemos, por definición de $O(n)$, que existe A^{-1} y es igual a A^T. Luego $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

c) Sean $A, B \in O(n)$, entonces $A^{-1} = A^T$ y $B^{-1} = B^T$. Luego

$$\begin{aligned}(AB)^T &= B^T A^T && \text{(por propiedades de matriz traspuesta)}\\ &= B^{-1}A^{-1} && \text{(por hipótesis)}\\ &= (AB)^{-1} && \text{(por propiedades de matriz inversa)}\end{aligned}$$

luego $(AB)^T = (AB)^{-1}$ y, por lo tanto $AB \in O(n)$.

d) Sea $A \in O(n)$, entonces $A^{-1} = A^T$.

$$\begin{aligned}(A^{-1})^T &= (A^T)^T && \text{(por hipótesis)}\\ &= A && \text{(por propiedades de matriz traspuesta)}\\ &= (A^{-1})^{-1} && \text{(por propiedades de matriz inversa)}\end{aligned}$$

luego $(A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1}$ de lo que se sigue que $A^{-1} \in O(n)$. Por el Lema 2.1.1 tenemos que $O(n)$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

4. $SO(n)$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. En efecto, como $O(n)$ y $SL(n, \mathbb{R})$ son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$, su intersección $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

■

Definición 2.2.2 Los grupos $O(n)$ de matrices ortogonales y $SO(n)$ se denominan el Grupo Ortogonal y el Grupo Especial Ortogonal, respectivamente.

Proposición 2.2.2 *$GL^+(n, \mathbb{R})$ y $SL(n, \mathbb{R})$ son subgrupos normales de $GL(n, \mathbb{R})$.*

Demostración:

1. $GL^+(n, \mathbb{R}) \lhd GL(n, \mathbb{R})$. En efecto, sean $N \in GL^+(n, \mathbb{R})$ y $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\det(ANA^{-1}) &= \det(A)\det(N)\det(A^{-1})\\ &= \det(A)\det(A^{-1})\det(N)\\ &= \det(AA^{-1})\det(N)\\ &= \det(N) > 0 && (\text{pues } N \in GL^+(n, \mathbb{R}))\end{aligned}$$

Por lo tanto $GL^+(n, \mathbb{R})$ es subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{R})$.

2. $SL(n, \mathbb{R}) \lhd GL(n, \mathbb{R})$. En efecto, sean $N \in SL(n, \mathbb{R})$ y $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\det(ANA^{-1}) &= \det(A)\det(N)\det(A^{-1})\\ &= \det(A)\det(A^{-1})\det(N)\\ &= 1\det(N)\\ &= \det(N) = 1 && (\text{pues } N \in SL(n, \mathbb{R}))\end{aligned}$$

Por lo tanto $SL(n, \mathbb{R})$ es subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Observación 2.2.1 *$O(n)$ no es subgrupo normal de $GL(n,\mathbb{R})$.*

En efecto, si suponemos que $O(n)$ es subgrupo normal de $GL(n,\mathbb{R})$ debería ocurrir que para todo $A \in GL(n,\mathbb{R})$, y para todo $N \in O(n)$

$$ANA^{-1} \in O(n)$$

Lo que equivale a que $(ANA^{-1})^{-1} = (ANA^{-1})^T$.
Por una parte, observemos que

$$(ANA^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}N^{-1}A^{-1} = AN^TA^{-1} \tag{2.1}$$

por otra parte

$$(ANA^{-1})^T = (A^{-1})^TN^TA^T \tag{2.2}$$

Los primeros miembros de las ecuaciones 2.1 y 2.2 serán iguales si y sólo si $A^T = A^{-1}$.
Si $A \notin O(n)$ entonces la igualdad no necesariamente es válida. En efecto, sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego, tenemos que

$$(ANA^{-1})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = (ANA^{-1})^T$$

Luego $ANA^{-1} \notin O(n)$. En consecuencia, $O(n)$ no es subgrupo normal de $GL(n,\mathbb{R})$.

Conclusiones del Capítulo 2

En este capítulo hemos probado que el conjunto de las matrices inversibles de orden n tiene estructura de grupo no abeliano respecto del producto usual de matrices. Al mismo se lo denotó $GL(n,\mathbb{R})$ y se lo denominó Grupo Lineal General de orden n. Entre sus subgrupos son de importancia los siguientes: el conjunto de las matrices de determiante positivo, el de las de determinante 1, el de matrices ortogonales y el de matrices ortogonales de determinante 1, denotados por $GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$, respectivamente. A su vez se probó que tanto $GL^+(n,\mathbb{R})$ como $SL(n,\mathbb{R})$ son subgrupos normales de $GL(n,\mathbb{R})$, mientras que $O(n)$ no lo es.

Capítulo 3

Estructura de espacio vectorial

Al igual que el Capítulo 2, este capítulo se divide principalmente en dos partes: la primera, en la que hacemos un repaso de los conceptos de espacio vectorial, y la segunda, en donde buscamos aplicar los mismos a nuestros objetos de estudio. En este capítulo, por un lado, probaremos que $GL(n, \mathbb{R})$ no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$, y por otro, desarrollaremos los conceptos de la teoría de espacios vectoriales necesarios para demostrar en el próximo capítulo que los espacios $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son espacios normados homeomorfos.

3.1. Preliminares

Definición 3.1.1 *Sean $V \neq \emptyset$, $\mathbb{K}$ campo, $+$ y $.$ dos funciones, denominadas suma y producto, respectivamente. Decimos que V tiene estructura de espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:*

1. *Es grupo abeliano respecto de la operación suma.*
2. *El producto es una función $\mathbb{K} \times V \to V$ que aplica $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ y además,verifica lo siguiente:*
   a) $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge x \in V \Rightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   b) $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge x \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
   c) $\alpha \in \mathbb{K} \wedge x, y \in V \Rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
   d) $x \in V \Rightarrow 1x = x$.

Definición 3.1.2 *Sean V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y W un subconjunto no vacío de V. Decimos que W es subespacio vectorial de V si tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones definidas en V.*

Teorema 3.1.1 *Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio vectorial de V si, y sólo si, para todo par de vectores $u, v \in W$ y para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, el vector $u + \lambda v$ está en W.*

Demostración: Ver páginas 34 y 35 - [Ho].

3.1.1. Producto interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno sobre V es una función que aplica $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle \in \mathbb{K}$ de modo tal que para todo $u,v,w,z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$.
2. $\langle \lambda u,w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle$.
3. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.
4. $\langle u,u\rangle > 0$ si $u \neq 0$.

Ejemplo 3.1.1 *Podemos definir en* $\mathbb{R}^m$ *un producto interno dado por la función* $\langle,\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *que aplica* $((x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_m)) \mapsto x_1y_1 + \cdots + x_my_m$. *Del mismo modo, la función* $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *que aplica* $(A,B) \mapsto tr(AB^T)$ *es un producto interno en* $M_n(\mathbb{R})$.

3.1.2. Espacio vectorial normado - Normas

Definición 3.1.3 *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Decimos que* $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ *es una norma si y sólo si verifica lo siguiente:*

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$
3. $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un espacio normado es un espacio vectorial X *en el que se definió una norma. Notación:* $(X, \|.\|)$.

Proposición 3.1.1 *Si un espacio vectorial* V *tiene definido un producto interior* $\langle,\rangle$ *entonces podemos definir una norma en* V *dada por* $\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle}$.

Afirmación 3.1.1 $M_n(\mathbb{R})$ *y* $\mathbb{R}^{n^2}$ *son espacios normados.*

Demostación:
Es consecuencia de que $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ sean espacios con producto interno (ver Ejemplo 3.1.1) y de la Proposición 3.1.1. Las normas vienen dadas por $\|A\| = \sqrt{tr(AA^T)}$ y $|(x_1,\dots,x_{n^2})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2}(x_i)^2}$, respectivamente.

■

Definición 3.1.4 *Dados* V *y* W *espacios vectoriales de dimensión* n *y* m, *respectivamente. Una transformación lineal es una función* $T : V \to W$ *que verifica* $T(u+\lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$ *para todo* $u,v \in V$ *y para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación 3.1.1 Sea $A \in O(n)$. Supongamos que $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal dada por $x \mapsto Ax$, entonces T_A preserva la norma, es decir que para todo $x \in V$, $\|T(x)\| = \|Ax\| = \|x\|$.

3.2. $GL(n, \mathbb{R})$ en el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$

Afirmación 3.2.1 *$M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ tienen estructura de espacio vectorial real de dimensión n^2 respecto, en el primer caso, de la suma usual de matrices y el producto por escalares usual, y en el segundo caso, de la suma y producto por escalar usuales de vectores.*

Tenemos que $M_n(\mathbb{R})$ es espacio vectorial real y $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, luego podríamos preguntarnos si el conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ tiene estructura de subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. A continuación mostraremos que esto no se cumple.

Afirmación 3.2.2 *$GL(n, \mathbb{R})$ no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.*

Demostración:
Sea I_n la matriz identidad de $M_n(\mathbb{R})$. Por axioma (4) de definición de determinante (ver Definición 7.1.1) se tiene que $\det(I_n) \neq 0$. Luego $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$. Además, $-I_n \in GL(n, \mathbb{R})$. En efecto:

$$\det(-I_n) = (-1)^n \det(I_n) = (-1)^n \neq 0$$

Supongamos que $GL(n, \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. Luego, por Teorema 3.1.1, como $I_n, -I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ deberia ocurrir que $I_n + (-I_n) \in GL(n, \mathbb{R})$.
Por otro lado, $\det(I_n + (-I_n)) = \det(\theta) = 0$ luego, $I_n + (-I_n) \notin GL(n, \mathbb{R})$. ¡Contradicción!
La contradicción provino de haber supuesto que $GL(n, \mathbb{R})$ era subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. Por lo tanto $GL(n, \mathbb{R})$ no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

■

Conclusiones del Capítulo 3

En este breve capítulo hemos probado que $GL(n, \mathbb{R})$ no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. Por otra parte, mostramos que los conjuntos $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son espacios vectoriales normados de dimensión n^2.

Capítulo 4

Estructura Topológica para $GL(n, \mathbb{R})$

Siguiendo la misma lógica que los capítulos anteriores, aquí repasaremos, en primer lugar, conceptos de la teoría de espacio topológico y en segundo lugar, aplicaremos los mismos a los objetos con los que venimos trabajando.

4.1. Preliminares

Esta sección puede obviarse en la lectura, no obstante, era de interés colocarla para refrescar conceptos necesarios a utilizar después.

4.1.1. Estrucutura de Espacio Métrico

Definición 4.1.1 *Si M es cualquier conjunto, entonces la función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es una métrica en M si satisface:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in M$.

2. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in M$.

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in M$.

El par (M, d) recibe el nombre de espacio métrico. Lo denotaremos por M.

Definición 4.1.2 *Sea (M, d) espacio métrico. Para cada $x \in M$ y $r > 0$ definimos la bola abierta de centro x y radio r por $B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$.*

Definición 4.1.3 *Sea (M, d) espacio métrico. Decimos que $A \subset M$ es un abierto de M si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.*

4.1.2. Estructura de Espacio Topológico

Definición 4.1.4 *Un espacio topológico $(X, \mathcal{U})$ consta de un conjunto X y de una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{U}$, que satisface:*

1. X *y* $\emptyset$ *pertenecen a* $\mathcal{U}$.

2. $U_\alpha \in \mathcal{U}, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{U}$. *Donde A es un conjunto de índices.*

3. $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}$.

A los elementos de la familia $\mathcal{U}$ los llamaremos abiertos. Una familia $\mathcal{U}$ que satisface estos axiomas se llama una topología en X.

Observación 4.1.1 *Para cualquier conjunto X, siempre existen las topologías triviales. A saber, $\mathcal{U}_1 = \{X, \emptyset\}$ y $\mathcal{U}_2 = \mathcal{P}(X)$, denominadas la topología discreta y caótica, respectivamente. Además, dado $A \subset X$, $(X,\mathcal{U})$ espacio topológico, existe una topología $\mathcal{V}$ llamada relativa para A: $V \in \mathcal{V}$ sii $\exists U \in \mathcal{U} : V = A \cap U$.*

Definición 4.1.5 *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ es base de la topología $\mathcal{U}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

Proposición 4.1.1 *Una subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ es base de la topología si todo abierto de $\mathcal{U}$ puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración: Ver página $8 -$ [DD] .

Teorema 4.1.1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de alguna topología sobre X si y sólo si $\mathcal{B}$ cumple lo siguiente:*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

2. *Si $A, B \in \mathcal{B}$ entonces para cada $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.*

Demostración: Ver página $9 -$ [DD].

Funciones continuas y homeomorfismos

Definición 4.1.6 *Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua en $x \in X$ si para todo abierto $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $f(x) \in V_x$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subset V_x$.*
Decimos que f es continua si lo es en cada $x \in X$.

Teorema 4.1.2 *Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es continua.*

2. *Para todo $V \in \mathcal{V}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$*

3. *Si $\mathcal{C}$ es base de $\mathcal{V}$, entonces para todo $C \in \mathcal{C}, f^{-1}(C) \in \mathcal{U}$.*

Demostración: Ver página $17 -$ [DD].

Definición 4.1.7 *Una función f que va de un espacio topológico X en otro Y se dice abierta si la imagen directa de un abierto en X es abierto en Y.*

Definición 4.1.8 *Dados X, Y espacios topológicos, decimos que $f : X \to Y$ es homeomorfismo si f es una biyección bicontinua, es decir que f y f^{-1} son continuas.*
Si esto ocurre decimos que los espacios son homeomorfos.

Observación 4.1.2 *Si dos espacios son homeomorfos decimos que los mismos son topológicamente equivalentes. Esto significa que desde el punto de vista abstracto no podrán distinguirse topológicamente, sin importar la naturaleza de los elementos. Por ejemplo, si un conjunto es abierto en un espacio entonces su imagen homeomorfa también lo es en el otro, si un conjunto es conexo en un espacio, su imagen también lo es.*

Topología producto

Definición 4.1.9 *Sean $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espacios topológicos, y sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los productos $U \times V$, donde U es abierto en X y V es abierto en Y.*

$$\mathcal{B} = \{B = U \times V / U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de una topología en $X \times Y$ que se denomina topología producto de $X \times Y$. Un subconjunto $W \subset X \times Y$ es abierto en la topología producto $\mathcal{Z}$ si para cada $(x, y) \in W$, existen abiertos $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $(x, y) \in U \times V \subset W$.

Proposición 4.1.2 *Sean $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espacios topológicos, y sea $\mathcal{Z}$ la topología producto de $X \times Y$. Si $\mathcal{C}$ es base de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{D}$ es base de $\mathcal{V}$ entonces $\{C \times D / C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$ es base de $\mathcal{Z}$.*

Compacidad

Definición 4.1.10 *Un espacio topológico X se dice compacto si todo cubrimiento abierto de X admite subcubrimiento finito.*

Definición 4.1.11 *Un subconjunto Y de un espacio topológico X se dice compacto si lo es con la topología relativa de X.*

Definición 4.1.12 *Un espacio topológico se dice localmente compacto si para cada $x \in X$ existe un entorno compacto de x.*

Proposición 4.1.3 *Todo espacio compacto es localmente compacto.*

Observemos que el recíproco no se cumple: $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto pero no es compacto.

Conexión

Definición 4.1.13 *Un espacio topológico X se dice conexo si no existen abiertos (resp. cerrados) A, B en X tales que: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$.*

Observación 4.1.3 *Si X es un espacio topológico, entonces es conexo si y sólo si los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.*

Definición 4.1.14 *Un subconjunto Y de un espacio topológico X se dice conexo si es conexo con la topología relativa.*

Proposición 4.1.4 *Sean X e Y espacios topológicos, X conexo. Si $f : X \to Y$ es continua entonces $f(Y)$ es conexo.*

Demostración: Ver páginas 24 y 25 $-$ [DD].

Definición 4.1.15 *Sea X espacio topológico y definamos en X la siguiente relación: $x \sim y$ si y sólo si existe $B \subset X$, B conexo, tal que $x \in B$ e $y \in B$. $\sim$ es una relación de equivalencia. A la clase de equivalencia de x, que denotamos C_x, la denominamos componente conexa de x*

Observación 4.1.4 *De la definición 4.1.15 se sigue que:*

- *Las componentes conexas de x son conexos.*
- *Si $x \in B$, con B conexo, entonces $B \subset C_x$. Esto dice que la componente conexa de x es el conjunto conexo más grande que contiene a x.*

Definición 4.1.16 *Un espacio topológico X se dice localmente conexo si para cada $x \in X$ existe una base de entornos conexos de X.*

Teorema 4.1.3 *Sea X espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es localmente conexo.*
2. *Si $A \subset X$ es abierto, las componentes conexas de A son abiertas.*
3. *Los abiertos conexos constituyen una base para la topología de X.*

Demostración: Ver página 28 $-$ [DD].

Definición 4.1.17 *Un espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ se dice metrizable si en X está definida una métrica d tal que la topología inducida por la métrica coincide con $\mathcal{U}$.*

Resultados

Lema 4.1.1 *Sea $f : X \to Y$ continua. Si $F \subset Y$ es cerrado entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado.*

Demostración: Apéndice.

Proposición 4.1.5 *Todo espacio métrico es topológico.*

Demostración: Ver pág. 65 - Apéndice.

Observación 4.1.5 *No todo espacio topológico es métrico.*

Ver contraejemplo en página 65 - Apéndice.

Proposición 4.1.6 *Todo espacio normado es métrico.*

Demostración: Ver pág. 65 - Apéndice.

Observación 4.1.6 *No todo espacio métrico es normado.*

Ver contraejemplo en página 65 - Apéndice.

4.1.3. Equivalencia de normas

Definición 4.1.18 *Sea X un espacio vectorial y sean $\|.\|^{(1)}$ y $\|.\|^{(2)}$ dos normas en X. Decimos que $\|.\|^{(1)}$ y $\|.\|^{(2)}$ son equivalentes si generan la misma topología.*

Teorema 4.1.4 *Dos normas $\|.\|$ y $\|.\|^*$ de un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si existen constantes $a > 0, b > 0$ tales que para todo $x \in X$, $a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|$.*

Demostración: Ver pág 66 - Apéndice.

Teorema 4.1.5 *Todos los espacios vectoriales de dimensión finita son normados.*

Demostración: Ver pág 67 - Apéndice.

Teorema 4.1.6 *Si X es de dimensión finita entonces todas las normas son equivalentes.*

Demostración: Ver pág 67 - Apéndice.

4.2. Homeomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$

En esta sección vamos a probar la existencia de un homeomorfismo λ (función a la cual debemos prestarle especial atención porque será de interés en los capítulos siguientes) entre los espacios topológicos $(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{U})$ y $(\mathbb{R}^{n^2},\mathcal{V})$, donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son las topologías generadas a partir de considerarlos como espacios normados y, por ende, métricos. La existencia y unicidad de dichas topologías se basa en que $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son espacios vectoriales de dimensión finita, por lo cual podemos aplicar los Teoremas 4.1.5 (todos los espacios vectoriales de dimensión finita son normados) y 4.1.6 (en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes).

Para probar la existencia del homeomorfismo λ entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ vamos a necesitar del siguiente Lema.

Lema 4.2.1 *Sean $(E,\|.\|)$, $(F,\|.\|)$ espacios vectoriales normados.*
Sea $\lambda : E \to F$ un operador lineal.
Entonces las siguientes dos condiciones sobre λ son equivalentes:

1. *λ es continua*

2. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $v \in E$ se cumple que:*

$$\|\lambda(v)\| \leq C\|v\|$$

Demostración: Ver pág. 69 - Apéndice.

Observación 4.2.1 *Para demostrar la Proposición 4.2.1 necesitamos realizar una previa observación sobre las normas a utilizar:*

- *Como vimos que en $M_n(\mathbb{R})$ todas las normas son equivalentes, elegimos para los cálculos la siguiente:*

$$\|A\| = \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|$$

- *Del mismo modo, en $\mathbb{R}^{n^2}$ elegimos la norma:*

$$|(x_1, \ldots, x_{n^2})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} (x_i)^2}$$

Proposición 4.2.1 *$M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son homeomorfos*

Demostración:
Sea la transformación lineal

$$\lambda : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

Para simplificar la notación podemos escribir

$$\lambda \left[\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \right] = (A_1, \ldots, A_n)$$

λ es homeomorfismo. En efecto:

1. λ es biyección.

   a) λ es inyectiva.
   Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $\lambda(A) = \lambda(B)$.
   Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ entonces $(A_1, \ldots, A_n) = (B_1, \ldots, B_n)$ luego, por definición de igualdad de vectores se tiene que $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, de este modo $A = B$. Así. λ es inyectiva.

   b) λ es sobreyectiva. En efecto, sea $X(x_1, \ldots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, entonces existe

   $$A = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_{n+1} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n^2-n+1} & \ldots & x_{n^2} \end{pmatrix}$$

   tal que $\lambda(A) = X$. Luego, λ es sobreyectiva.

   Por $(1a)$ y $(1b)$ tenemos que λ es biyección.

2. λ es continua. En efecto, tenemos que $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son espacios vectoriales normados y la función λ es una transformación lineal entre ellos, luego podemos aplicar el

Lema 4.2.1 para probar la continuidad de λ.
Sean $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
|\lambda(A)-\lambda(B)| &= |\lambda(A-B)| \\
&= \left|\lambda\begin{pmatrix} A_1-B_1 \\ \vdots \\ A_n-B_n \end{pmatrix}\right| \\
&= |(A_1-B_1,\ldots,A_n-B_n)| \\
&= |(a_{11}-b_{11},\ldots,a_{nn}-b_{nn})| \\
&= \left[\sum_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sum_{i,j}\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2\right]^{1/2} \\
&= \left[n^2\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2\right]^{1/2} \\
&= n\left[\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2$ es uno de los $(a_{ij}-b_{ij})^2$, supongamos $(a_{rk}-b_{rk})^2$, luego podemos aplicar raíz a ambos miembros de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2 &= (a_{rk}-b_{rk})^2 \\
\sqrt{\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2} &= \sqrt{(a_{rk}-b_{rk})^2} \\
&= |a_{rk}-b_{rk}|
\end{aligned}$$

la función raíz cuadrada es creciente, por consiguiente:

$$|a_{rk}-b_{rk}| = \max_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|$$

y así

$$\sqrt{\max_{i,j}(a_{ij}-b_{ij})^2} = \max_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|$$

En conclusión:

$$|\lambda(A)-\lambda(B)| = n\underbrace{\max_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|}_{\|A-B\|} = n\|A-B\|$$

Así, existe $C=n$ tal que $|\lambda(A)-\lambda(B)| \leq n\|A-B\|$, para todo $A,B \in M_n(\mathbb{R})$. Concluímos que $\lambda : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ es continua.

3. λ^{-1} es continua. En efecto, como λ es transformación lineal biyectiva, existe λ^{-1} transformación lineal que va de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $M_n(\mathbb{R})$, y podemos aplicar el Lema 4.2.1 para probar la continuidad de esta función.
Sea $X = (x_1, \ldots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, entonces $\lambda^{-1}(X) \in M_n(\mathbb{R})$, luego
$$\|\lambda^{-1}(X)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_{n+1} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n^2-n+1} & \ldots & x_{n^2} \end{pmatrix} \right\|$$
Por definición de $\|.\|$ tenemos que $\|\lambda^{-1}(X)\| = \max\limits_{i,j}|x_{ij}|$.
Observemos que $\max\limits_{i,j}|x_{ij}|$ es el valor absoluto de uno de los elementos de X, luego es menor o igual que si le sumamos cantidades no negativas.
$$\max_{i,j} |x_{ij}| \leq \left[\sum_{i,j} (x_{ij})^2 \right]^{1/2} = |X|$$
Así, existe $C = 1$: $\|\lambda^{-1}(X)\| \leq 1|X|$, para todo $X \in \mathbb{R}^{n^2}$. Luego λ^{-1} es continua.

Por lo tanto, λ es homeomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$.

■

Observación 4.2.2 *Ya que $M_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, hereda del mismo todas sus propiedades topológicas. En particular, nos interesa que $M_n(\mathbb{R})$ sea conexo, de Hausdorff y separable. Por otra parte, se facilita el ver la continuidad de funciones en $M_n(\mathbb{R})$.*

En efecto, consideremos como ejemplo la función $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ que aplica $A \mapsto AA^T$ es continua pues $\lambda \circ f \circ \lambda^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ lo es al tener sus componentes polinomiales.

4.3. La continuidad de la función determinante

Proposición 4.3.1 *La función* $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Demostración:
Realizaremos la demostración por inducción sobre n. En primer lugar, para $n = 2$ la función
$$\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - cb$$
es composición de las funciones
$$\lambda : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2^2} \qquad \overline{\det} : \mathbb{R}^{2^2} \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \qquad (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$$

donde λ es continua (por la Proposición 4.2.1) y $\overline{\det}$ es continua por ser función real polinomial. Luego, $\det = \overline{\det} \circ \lambda$ es continua para $n = 2$.
En segundo lugar, supongamos que $\det : M_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua y probemos que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ también lo es.

Si desarrollamos el determinante por la primera fila, tenemos:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det(\underbrace{A(1/j)}_{\in M_{n-1}(\mathbb{R})})$$

aplicando la hipótesis inductiva, encontramos que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es combinación lineal de funciones continuas.
Por lo tanto, $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua para todo $n \geq 2$.

■

Afirmación 4.3.1 *La función* $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es sobreyectiva.*

Demostración:
Sea $a \in \mathbb{R}$, existe

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

tal que $\det(A) = a$. Por lo tanto det es sobreyectiva.

■

4.4. El Espacio Topológico $GL(n,\mathbb{R})$

En esta sección, le asignaremos al conjunto $GL(n,\mathbb{R})$ la estructura de subespacio topológico de $(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es la topología que ya consideramos al tomar $M_n(\mathbb{R})$ como espacio normado.

Afirmación 4.4.1 $GL(n,\mathbb{R})$ *es un abierto en* $M_n(\mathbb{R})$.

Demostración:

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\} \\ &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)\} \\ &= \det^{-1}[(-\infty,0) \cup (0,+\infty)] \end{aligned}$$

Luego, como $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y det es continua se sigue que $GL(n,\mathbb{R})$ es abierto en $M_n(\mathbb{R})$. En otras palabras $GL(n,\mathbb{R}) \in \mathcal{U}$.

■

Afirmación 4.4.2 *Si $\mathcal{W}$ es la topología relativa de $\mathcal{U}$ en $GL(n,\mathbb{R})$ entonces*

$$\mathcal{W} = \{W \subset GL(n,\mathbb{R})/W \in \mathcal{U}\}$$

Demostración:
Por la Afirmación 4.4.1, $GL(n,\mathbb{R}) \in \mathcal{U}$. Luego, para cualquier $U \in \mathcal{U}$ se cumple que:

$$U \cap GL(n,\mathbb{R}) \in \mathcal{U} \tag{4.1}$$

además

$$U \cap GL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

Por otra parte, la topología relativa de $\mathcal{U}$ en $GL(n,\mathbb{R})$ tiene la forma

$$\mathcal{W} = \{U \cap GL(n,\mathbb{R})/U \in \mathcal{U}\}$$

Si llamamos $W = U \cap GL(n,\mathbb{R})$ entonces, por (4.1) y (4.2) tenemos que:

$$\mathcal{W} = \{W \subset GL(n,\mathbb{R})/W \in \mathcal{U}\}$$

■

Afirmación 4.4.3 *El espacio topológico $(GL(n,\mathbb{R}),\mathcal{W})$ es de Hausdorff. Donde $\mathcal{W}$ es la topología definida en la Afirmación 4.4.2.*

Demostración:
Es consecuencia directa de que el espacio $M_n(\mathbb{R})$ es de Hausforff.

■

Afirmación 4.4.4 *$GL(n,\mathbb{R})$ no es conexo.*

Demostración:
Supongamos, razonando por el absurdo, que $GL(n,\mathbb{R})$ es conexo.
Si $GL(n,\mathbb{R})$ es conexo entonces, por la continuidad de la función determinante, se tiene que $\det[GL(n,\mathbb{R})]$ es conexo en $\mathbb{R}$. Sin embargo

$$\det[GL(n,\mathbb{R})] = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

y no es conexo en $\mathbb{R}$. Concluímos que $GL(n,\mathbb{R})$ no es conexo.

■

Afirmación 4.4.5 *Si $\mathcal{W}$ es la topología relativa de $\mathcal{U}$ en $GL(n,\mathbb{R})$, entonces*

1. $GL^+(n,\mathbb{R}) \in \mathcal{W}$.
2. $c[SL(n,\mathbb{R})] \in \mathcal{W}$.
3. $c[O(n)] \in \mathcal{W}$.
4. $c[SO(n)] \in \mathcal{W}$.

Demostración:

1. $GL^+(n,\mathbb{R})$ es abierto en $GL(n,\mathbb{R})$. En efecto:

$$\begin{aligned} GL^+(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) > 0\} \\ &= \det^{-1}[(0,+\infty)] \end{aligned}$$

   Por una parte, $(0,+\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y la función det es continua, luego $GL^+(n,\mathbb{R})$ es abierto en $M_n(\mathbb{R})$. Por otra parte, $GL^+(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$.
   Luego, por la Afirmación 4.4.2, tenemos que $GL^+(n,\mathbb{R})$ es abierto en $GL(n,\mathbb{R})$.

2. $SL(n,\mathbb{R})$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$. En efecto:

$$\begin{aligned} SL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\} \\ &= \det^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

   Por un lado, el conjunto $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, luego, por la continuidad de la función det y por propiedades de imagen inversa y de complemento de conjuntos, tenemos que $c\left[\det^{-1}(\{1\})\right] = c\left[SL(n,\mathbb{R})\right]$ es abierto en $M_n(\mathbb{R})$, de este modo, $SL(n,\mathbb{R})$ es cerrado en $M_n(\mathbb{R})$. Y por otro lado, sabemos que $SL(n,\mathbb{R}) \in GL(n,\mathbb{R})$. Luego, por la Afirmación 4.4.2, se sigue que $SL(n,\mathbb{R})$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$.

3. $O(n)$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$. En efecto, consideremos la función continua:

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto AA^T \end{aligned}$$

   Por una parte, como $M_n(\mathbb{R})$ es de Hausdorff, el conjunto $\{I_n\}$ es cerrado. Luego $f^{-1}(\{I_n\})$ es cerrado en $M_n(\mathbb{R})$, y se cumple que:

$$f^{-1}\left(\{I_n\}\right) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n\} = O(n)$$

   Por otra parte, sabemos que $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$. Luego, $O(n)$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$.

4. $SO(n)$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$. En efecto, los conjuntos $SL(n,\mathbb{R})$ y $O(n)$ son cerrados en $GL(n,\mathbb{R})$, y como además se cumple que:

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$$

   concluímos que $SO(n)$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$.

■

Conclusiones del Capítulo 4

En este capítulo hemos obtenido los siguientes resultados:

Resultado 4.4.1 *La función λ de $M_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n^2}$ dada por*

$$\lambda\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\right] = (a_{11},\dots,a_{1n},\dots,a_{n1},\dots,a_{nn})$$

es un homeomorfismo.

En la demostración, consideramos las topologías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ que se obtienen de considerar a $M_n(\mathbb{R})$ y a $\mathbb{R}^{n^2}$, respectivamente, como espacios normados.

Resultado 4.4.2 *La función* $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Resultado 4.4.3 $GL(n, \mathbb{R})$ *es un abierto en la topología* $\mathcal{U}$*, y como consecuencia de ello, se tiene que los abiertos en* $GL(n, \mathbb{R})$ *son los abiertos de* $M_n(\mathbb{R})$ *que están contenidos en* $GL(n, \mathbb{R})$*.*

Resultado 4.4.4 $(GL(n, \mathbb{R}), \mathcal{W})$ *es de Hausdorff.*

Resultado 4.4.5 $GL(n, \mathbb{R})$ *no es conexo.*

Resultado 4.4.6 *Una vez definida la topología para* $GL(n, \mathbb{R})$ *hemos probado lo siguiente:*

- $GL^+(n, \mathbb{R})$ *es abierto en* $GL(n, \mathbb{R})$*.*
- $SL(n, \mathbb{R})$ *es cerrado en* $GL(n, \mathbb{R})$*.*
- $O(n)$ *es cerrado en* $GL(n, \mathbb{R})$*.*
- $SO(n)$ *es cerrado en* $GL(n, \mathbb{R})$*.*

Capítulo 5

Estructura de Grupo Topológico para $GL(n, \mathbb{R})$

En este capítulo investigaremos la estructura de Grupo Topológico. Además estudiaremos cuales de sus propiedades pueden aplicarse a $GL(n, \mathbb{R})$ y a los siguientes subgrupos: $GL^+(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ y $SO(n)$.

5.1. Lemas preliminares

Lema 5.1.1 *Si G es espacio topológico entonces la función $\imath : G \to G$ que aplica $x \mapsto x$ es continua.*

Demostración: Ver pág. 70 - Apéndice.

Lema 5.1.2 *Sean $f : X \to Y$ y $B \subset Y$. Entonces $c[f^{-1}(B)] = f^{-1}(cB)$*

Demostración: Ver pág. 70 - Apéndice.

Lema 5.1.3 *Sean $(G,\mathcal{U})$ y $(G \times G, \mathcal{W})$ espacios topológicos donde $\mathcal{W}$ es la topología producto generada por productos de abiertos de G. Para $a \in G$ sean los conjuntos:*

- *$\{a\} \times G$ con la topología relativa inducida por $\mathcal{W}$.*
- *$G \times \{a\}$ con la topología relativa inducida por $\mathcal{W}$.*

Entonces todo abierto U_a de $\{a\} \times G$ es de la forma $\{a\} \times U$, con $U \in \mathcal{U}$. De la misma manera, todo abierto en $G \times \{a\}$ está dado por $U \times \{a\}$, con $U \in \mathcal{U}$.

Demostración: Ver pág. 70 - Apéndice.

Lema 5.1.4 *Sean $(G,\mathcal{U})$ espacio topológico y $a \in G$. Entonces las funciones*

$$\begin{aligned} \beta_a &\to \{a\} \times G \\ x &\mapsto (a, x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \overline{\beta_a} &\to G \times \{a\} \\ x &\mapsto (x, a) \end{aligned}$$

son continuas.

Demostración: Ver pág. 71 - Apéndice.

5.2. $GL(n,\mathbb{R})$ como grupo topológico

En esta sección desarrollaremos conceptos de grupo topológico en general, junto con algunos resultados necesarios para establecer que $GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo topológico de Hausdorff.

Definición 5.2.1 *Si un conjunto G cumple las siguientes propiedades, entonces G recibe el nombre de Grupo Topológico*

1. *El conjunto G tiene estructura de grupo y de espacio topológico, simultáneamente.*
2. *La función $\alpha : G \times G \to G$ que aplica $(x,y) \mapsto xy$ es continua.*
   Donde xy denota la operación entre dos elementos x e y del grupo G.
3. *La función $\beta : G \to G$ que aplica $x \mapsto x^{-1}$ es continua.*
   Donde x^{-1} es el inverso de x en el grupo G.

Lema 5.2.1 *Sean $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$, $(A,\mathcal{W})$ y $(B,\mathcal{Z})$ espacios topológicos. Si las funciones $\lambda : X \to A$ y $\rho : Y \to B$ son continuas, entonces la siguiente función es continua*

$$\begin{aligned} \nu : (X \times Y, \mathcal{X}) &\to (A \times B, \mathcal{A}) \\ (x,y) &\mapsto (\lambda(x), \rho(y)) \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{X}$ y $\mathcal{A}$ son las topologías producto de $X \times Y$ y de $A \times B$, respectivamente.

Demostración:
Sean $\mathcal{B} = \{U \times V / U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ base de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C} = \{W \times Z / W \in \mathcal{W}, Z \in \mathcal{Z}\}$ base de $\mathcal{A}$. Sea $C \in \mathcal{C}$, existen $W \in \mathcal{W}$ y $Z \in \mathcal{Z}$ tales que $C = W \times Z$. Luego:

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(C) &= \nu^{-1}(W \times Z) \\ &= \{(x,y) \in X \times Y / \nu(x,y) \in W \times Z\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y / (\lambda(x), \rho(y)) \in W \times Z\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y / \lambda(x) \in W \wedge \rho(y) \in Z\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y / \lambda(x) \in W\} \cap \{(x,y) \in X \times Y : \rho(y) \in Z\} \\ &= \left[\underbrace{\{x \in X / \lambda(x) \in W\}}_{\lambda^{-1}(W)} \times Y \right] \cap \left[X \times \underbrace{\{y \in Y : \rho(y) \in Z\}}_{\rho^{-1}(Z)} \right] \\ &= \left[\lambda^{-1}(W) \times Y\right] \cap \left[X \times \rho^{-1}(Z)\right] \end{aligned}$$

Como en general $(E \times F) \cap (M \times N) = (E \cap M) \times (F \cap N)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(C) &= [\lambda^{-1}(W) \cap X] \times [Y \cap \rho^{-1}(Z)] \\ &= \underbrace{\lambda^{-1}(W)}_{\in \mathcal{U}} \times \underbrace{\rho^{-1}(Z)}_{\in \mathcal{V}} \in \mathcal{B} \qquad \text{(por la continuidad de } \lambda \text{ y } \rho) \end{aligned}$$

Luego, para todo $C \in \mathcal{C}$, $\nu^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. Concluímos que ν es continua.

$\blacksquare$

Proposición 5.2.1 *Las condiciones (2) y (3) de la Defininción 5.2.1 son equivalentes a la siguiente condición: la función $\delta : G \times G \to G$ que aplica $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua.*

Demostración:
Probemos, en primer lugar, que si las funciones $\alpha : (x,y) \mapsto xy$ y $\beta : x \mapsto x^{-1}$ son continuas, entonces $\delta : (x,y) \mapsto xy^{-1}$ también lo es.
Por Lema 5.1.1, y por hipótesis, respectivamente, sabemos que $\imath : x \mapsto x$ y $\beta : x \mapsto x^{-1}$ son ambas continuas. En conclusión la función $\nu : (x,y) \mapsto (id(x), \beta(y)) = (x, y^{-1})$ es continua (por Lema 5.2.1).
Probemos que $\delta = \alpha \circ \nu$. Sea $(x,y) \in G \times G$

$$\begin{aligned} \alpha \circ \nu(x,y) &= \alpha\left[\nu(x,y)\right] \\ &= \alpha(x, y^{-1}) && \text{(por defininción de } \nu) \\ &= xy^{-1} && \text{(por defininción de } \alpha) \\ &= \delta(x,y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\delta : (x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua.
Ahora veamos que si $\delta : (x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua entonces las funciones $\alpha : (x,y) \mapsto xy$ y $\beta : x \mapsto x^{-1}$ son ambas continuas. En efecto:

1. En primer lugar, veamos que $\beta = \delta \circ \beta_e$, donde β_e es la función del Lema 5.1.4 y e es el elemento neutro del grupo G.
   Sea $x \in G$

   $$\begin{aligned} \delta \circ \beta_e(x) &= \delta\left[\beta_e(x)\right] \\ &= \delta(e, x) && \text{(por definición de } \beta_e) \\ &= ex^{-1} && \text{(por definición de } \delta) \\ &= x^{-1} \\ &= \beta(x) && \text{(por definición de } \beta) \end{aligned}$$

   Luego, la función $\beta : x \mapsto x^{-1}$ es continua.

2. Por un lado, observemos que $\nu : (x,y) \mapsto (id(x), \beta(y)) = (x, y^{-1})$ es continua (por la continuidad de las funciones id y β). Por otro lado, si se cumple que $\alpha = \delta \circ \nu$, entonces habremos demostrado que α es continua. En efecto: sea $(x,y) \in G \times G$

   $$\begin{aligned} \delta \circ \nu(x,y) &= \delta\left[\nu(x,y)\right] \\ &= \delta(x, y^{-1}) && \text{(por definición de } \nu) \\ &= x(y^{-1})^{-1} && \text{(por definición de } \delta) \\ &= xy \\ &= \alpha(x,y) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\alpha = \delta \circ \nu : (x,y) \mapsto xy$ es continua.

$\blacksquare$

Proposición 5.2.2 *Si G es grupo topológico entonces la función de G en G dada por $\beta : x \mapsto x^{-1}$ es homeomorfismo.*

Demostración:
Porque G es grupo topológico, la función $\beta : x \mapsto x^{-1}$ es continua. Por otro lado, para todo $x \in G$: $(\beta \circ \beta)(x) = (x^{-1})^{-1} = x$, es decir que $\beta = \beta^{-1}$. Por lo tanto β es homeomorfismo.

■

Isomorfismo de Grupos Topológicos

Definición 5.2.2 *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos, y $\phi : G_1 \to G_2$ una función continua.*

- *Si ϕ satisface $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ $\forall x, y \in G_1$ entonces ϕ se denomina homomorfismo del grupo topológico G_1 en el grupo topológico G_2.*
- *Si ϕ es homomorfismo y es homeomorfismo a la vez, entonces ϕ se denomina isomorfismo de G_1 en G_2.*
- *Si existe un isomorfismo entre G_1 y G_2, entonces los grupos topológicos G_1 y G_2 se dicen isomorfos. Escribimos $G_1 \simeq G_2$.*
- *Si ϕ es un homomorfismo y además es una función abierta, entonces ϕ se denomina un homomorfismo abierto.*

Proposición 5.2.3 *Dado G grupo. Entonces siempre podemos encontrar una topología $\mathcal{U}$ tal que G es grupo topológico.*

Demostración:
En efecto, si definimos en G la topología discreta $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$, entonces se cumplen las condiciones de la Definición 5.2.1.

■

Lemas para demostrar que $GL(n, \mathbb{R})$ es Grupo Topológico

Lema 5.2.2 *Sean $\lambda : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ homeomorfismo y $A \subset X$: $A \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{W}$ es la toplogía relativa de $\mathcal{U}$ en A y $\mathcal{Z}$ la toplogía relativa de $\mathcal{V}$ en $\lambda(A)$. Entonces la restricción de λ en A es homeomorfismo sobre $\lambda(A)$. Denotamos $\gamma = \lambda|_A$.*

Demostración: Ver pág. 72 - Apéndice.

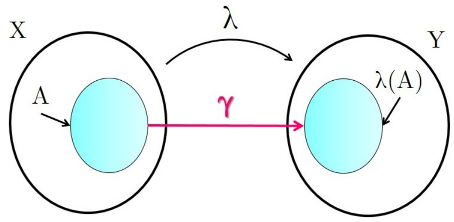

Figura 5.1: γ restricción de λ en A.

En consecuencia, si λ es la función de la Proposición 4.2.1, la restricción de λ a $GL(n, \mathbb{R})$, $\lambda|_{GL(n,\mathbb{R})}$, es homeomorfismo sobre $\lambda(GL(n, \mathbb{R}))$.

En los siguientes resultados, denotaremos por λ al homeomorfismo de la Proposición 4.2.1 y por $\lambda\,[GL]$ a la imagen directa de $GL(n, \mathbb{R})$ por λ.

Observación 5.2.1 *Para no recargar demasiado la notación en las demostraciones siguientes, denotaremos por γ al homeomorfismo $\lambda|_{GL(n,\mathbb{R})}$, y llamaremos $\widetilde{A}$ a la matriz $\gamma^{-1}(A)$. Por el Lema 5.2.2 sabemos que γ^{-1} es continua y tiene la forma:*

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : \lambda\,[GL] &\to GL(n,\mathbb{R}) \\ (a_{11},\ldots,a_{nn}) &\mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lema 5.2.3 *Si γ es la función de la Observación 5.2.1 entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} : \lambda[GL] \times \lambda[GL] &\to \lambda[GL] \\ (X,Y) &\mapsto \gamma[\widetilde{X}\widetilde{Y}] \end{aligned} \tag{5.1}$$

es continua. Donde $\widetilde{X} = \gamma^{-1}(X)$ e $\widetilde{Y} = \gamma^{-1}(Y)$.

Demostración:
Probemos que $\overline{\alpha}$ es una aplicación vectorial de un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ a otro de $\mathbb{R}^{n^2}$ en la que cada función componente es una aplicación real polinomial. En efecto, sean $A, B \in \lambda[GL] \subset \mathbb{R}^{n^2}$: $A = (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn})$ y $B = (b_{11},\ldots,b_{1n},\ldots,b_{n1},\ldots,b_{nn})$

$$\widetilde{A} = \gamma^{-1}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = \gamma^{-1}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\widetilde{A}\widetilde{B} = \gamma^{-1}(A)\gamma^{-1}(B) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i1} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} \end{pmatrix}$$

Aplicando γ tenemos

$$\gamma(\widetilde{A}\widetilde{B}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1},\ldots,\sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}\right)$$

Luego, por definición de $\overline{\alpha}$

$$\overline{\alpha}(A,B) = \gamma(\widetilde{A}\widetilde{B}) = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}b_{k1}),\ldots,\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}b_{kn})\right)$$

Por lo tanto $\overline{\alpha}$ es continua.

■

Lema 5.2.4 *Si γ es la función de la Observación 5.2.1 entonces la función*

$$\begin{aligned} \nu : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) &\to \lambda[GL] \times \lambda[GL] \\ (A,B) &\mapsto (\gamma(A),\gamma(B)) \end{aligned} \tag{5.2}$$

es continua.

Demostración:
Trivial, por Lema 5.2.1 y por la continuidad de γ

■

Lema 5.2.5 *Si γ es la función de la Observación 5.2.1 entonces la función*

$$\begin{aligned} \overline{\beta} : \lambda\,[GL] &\to \lambda\,[GL] \\ (A_1,\ldots,A_n) &\mapsto \gamma(A^{-1}) \end{aligned}$$

es continua. Donde A es la matriz de $GL(n,\mathbb{R})$ que verifica $\gamma(A) = (A_1,\ldots,A_n)$.

Demostración:
Probemos que $\overline{\beta}$ es una función vectorial cuyas funciones componentes son cociente de funciones continuas. En efecto: sea $(A_1,\ldots,A_n) \in \lambda\,[GL]$.
Existe $A \in GL(n,\mathbb{R})$ tal que $\gamma(A) = (A_1,\ldots,A_n)$. Luego

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj(A)}}{\det(A)} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det(A)} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\det(A)} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

donde A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} de la matriz A.
Por otra parte, si aplicamos $\overline{\beta}$ a $(A_1,\ldots,A_n)$ tenemos que:

$$\overline{\beta}(A_1,\ldots,A_n) = \gamma(A^{-1}) = \left(\frac{A_{11}}{\det(A)},\ldots,\frac{A_{nn}}{\det(A)}\right)$$

De este modo, $\overline{\beta}$ es una aplicación vectorial en la que cada función componente tiene la forma

$$\frac{A_{ij}}{\det(A)} = \frac{(-1)^n \det(A(i/j))}{\det(A)}$$

continua por ser cociente de funciones continuas.
Por lo tanto, $\overline{\beta}$ es continua.

■

Afirmación 5.2.1 *$GL(n,\mathbb{R})$ es Grupo Topológico*

Demostración:

1. $GL(n,\mathbb{R})$ es grupo y espacio topológico simultáneamente, por lo probado en los Capítulos 2 y 4.

2. La función
$$\begin{aligned} \alpha : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) &\to GL(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned} \tag{5.3}$$
es continua.
Sean λ la función de la Proposición 4.2.1 y $\lambda[GL]$ la imagen directa de $GL(n,\mathbb{R})$ por λ. Probaremos la continuidad de α mediante el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} GL \times GL \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & GL \\ \lambda[GL] \times \lambda[GL] \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \lambda[GL] \arrow[u, "\gamma^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.4}$$
donde γ^{-1}, $\overline{\alpha}$ y ν son continuas, por la Observación 5.2.1 y por los Lemas 5.2.3 y 5.2.4, respectivamente.
Veamos que $\alpha = \gamma^{-1} \circ \overline{\alpha} \circ \nu$. En efecto, sean $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$, entonces:
$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \circ \overline{\alpha} \circ \nu(A,B) &= \gamma^{-1}\left(\overline{\alpha}\left(\nu(A,B)\right)\right) \\ &= \gamma^{-1}\left(\overline{\alpha}\left(\gamma(A),\gamma(B)\right)\right) && \text{(por definición de } \nu) \\ &= \gamma^{-1}\left(\gamma\left(\widetilde{\gamma(A)}\widetilde{\gamma(B)}\right)\right) && \text{(por definición de } \overline{\alpha}) \\ &= \left(\gamma^{-1} \circ \gamma\right)\left(\widetilde{\gamma(A)}\widetilde{\gamma(B)}\right) \\ &= \widetilde{\gamma(A)}\widetilde{\gamma(B)} && \text{(por definición de función inversa)} \\ &= \underbrace{\gamma^{-1}\left(\gamma(A)\right)}_{A}\underbrace{\gamma^{-1}\left(\gamma(B)\right)}_{B} && \text{(por Observación 5.2.1)} \\ &= AB && \text{(por definición de función inversa)} \\ &= \alpha(A,B) && \text{(por definición de } \alpha) \end{aligned}$$
Así, la función α es composición de funciones continuas y, por lo tanto, continua.

3. La función
$$\begin{aligned} \beta : GL(n,\mathbb{R}) &\to GL(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned} \tag{5.5}$$
es continua.
Sean γ la función de la Observación 5.2.1, $\lambda[GL(n,\mathbb{R})]$ la imagen directa de $GL(n,\mathbb{R})$ por λ y $\overline{\beta}$ la función del Lema 5.2.5. Probaremos la continuidad de β mediante el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} GL(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & GL(n,\mathbb{R}) \\ \lambda[GL] \arrow[r, "\overline{\beta}"'] & \lambda[GL] \arrow[u, "\gamma^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$
Veamos que $\beta = \gamma^{-1} \circ \overline{\beta} \circ \gamma$. En efecto, sea $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Entonces:
$$\gamma^{-1}\left(\overline{\beta}\left(\gamma(A)\right)\right) = \gamma^{-1}\left(\overline{\beta}(A_1,\ldots,A_n)\right) \qquad \text{(por definición de } \gamma)$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma^{-1}\left(\gamma(A^{-1})\right) && \text{(por definición de } \overline{\beta}\text{)}\\
&= (\gamma^{-1}\circ\gamma)(A^{-1})\\
&= A^{-1}\\
&= \beta(A) && \text{(por definición de } \beta\text{)}
\end{aligned}
$$

Así, para todo $A \in GL(n,\mathbb{R})$ se cumple que:

$$(\gamma^{-1}\circ\overline{\beta}\circ\gamma)(A) = \beta(A)$$

Luego, $\beta = \gamma^{-1}\circ\overline{\beta}\circ\gamma$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Finalmente, como $GL(n,\mathbb{R})$ cumple los ítems 1.), 2.) y 3.) de la Definición 5.2.1 tenemos que $GL(n,\mathbb{R})$ es Grupo Topológico.

■

Definición 5.2.3 *Si un grupo topológico G es un espacio de Hausdorff como espacio topológico, entonces G se denomina un Grupo de Hausdorff.*

Lema 5.2.6 *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio topológico de Hausdorff, entonces todo subconjunto $V\subset X$ se transforma en un subespacio topológico de Hausdorff con la topología relativa inducida por $\mathcal{U}$.*

Demostración: Apéndice.

Afirmación 5.2.2 *$GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Hausdorff.*

Demostración:
Por una parte, como $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son homeomorfos, $GL(n,\mathbb{R})$ es homeomorfo a un abierto V_G de $\mathbb{R}^{n^2}$. Por otra parte, ya que $(\mathbb{R}^{n^2},\mathcal{V})$ es de Hausdorff, tenemos que V_G es de Hausdorff con la topología relativa inducida por $\mathcal{V}$ (por el Lema 5.2.6). Así, $GL(n,\mathbb{R})$ es de Hausdorff como espacio topológico, y como además es grupo topológico (por la Afirmación 5.2.1) concluímos que $GL(n,\mathbb{R})$ es grupo de Hausdorff.

■

5.3. Subgrupos de un grupo topológico

En esta breve sección, nos interesa establecer cuándo un subconjunto de un grupo topológico hereda la estructura de grupo topológico y, en particular, aplicaremos esta teoría a los conjuntos $GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$.

Definición 5.3.1 *Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo de G. Si le damos a H la topología relativa como subespacio topológico de G, entonces H también es un grupo topológico. El grupo topológico H recibe el nombre de subgrupo topológico de G. En particular, si H es un subconjunto cerrado de G, entonces H se denomina subgrupo cerrado de G.*

Afirmación 5.3.1 *$GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos topológicos de $GL(n,\mathbb{R})$. Además, los últimos tres son subgrupos cerrados de $GL(n,\mathbb{R})$.*

Demostración:
Por la Proposición 2.2.1 sabemos que $GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos de $GL(n,\mathbb{R})$, el cual, por la Afirmación 5.2.1 es grupo topológico, luego, por la Definición 5.3.1, se sigue que son subgrupos topológicos de $GL(n,\mathbb{R})$. Por otro lado, como $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ conjuntos cerrados en $GL(n,\mathbb{R})$ concluímos que son subgrupos cerrados.

■

5.4. Espacios cocientes de un grupo topológico

El objetivo en esta sección es analizar los grupos topológicos cocientes de un grupo topológico. Para ello, dado un grupo topológico G y un subconjunto del mismo, debemos estudiar tanto los grupos cocientes, así como los espacios topológicos cocientes. Es importante destacar que a medida que vayamos desarrollando conceptos, vamos a estar aplicando los mismos a $GL(n,\mathbb{R})$ y a sus subgrupos: $GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$. Al término de la sección, probaremos que GL/GL^+ y GL/SL son grupos topológicos de Hausdorff, y que los espacios cocientes $GL/O(n)$ y $GL/SO(n)$ son espacios topológios de Hausdorff.

5.4.1. Las funciones L_g y R_g

Definición 5.4.1 *Sea G un grupo topológico y sea g un elemento de G. Definimos las funciones L_g y R_g de G en G por $L_g(x) = gx$ y $R_g(x) = xg$. Las funciones L_g y R_g se denominan la traslación izquierda y derecha de G, respectivamente, por el elemento $g \in G$.*

Proposición 5.4.1 *Si G es grupo topológico y $g \in G$ entonces las funciones L_g y R_g son homeomorfismos de G.*

Demostración: Apéndice.

Definición 5.4.2 *Dado un grupo G. Sean los conjuntos $A, B \subset G$ y sea $g \in G$. Definimos los siguientes conjuntos:*

$$A^{-1} = \{a^{-1}/a \in A\} \tag{5.7}$$
$$AB = \{ab/a \in A, b \in B\} \tag{5.8}$$
$$gAg^{-1} = \{gag^{-1}/a \in A\} \tag{5.9}$$

Lema 5.4.1 *Si $A, B \neq \emptyset$ entonces $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^{-1} &= \{y^{-1}/y \in A \cap B\} \\ &= \{y^{-1}/y \in A \wedge y \in B\} \qquad \text{(por definición de intersección)}\end{aligned}$$

si llamamos $x = y^{-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cap B)^{-1} &= \{x/x^{-1} \in A \wedge x^{-1} \in B\} \\ &= \{x/x \in A^{-1} \wedge x \in B^{-1}\} \\ &= A^{-1} \cap B^{-1}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposición 5.4.2 *Sea G grupo topológico y sean $A, B \subset G$ y $g \in G$. Si A y B son abiertos entonces los conjuntos AB, A^{-1} y gAg^{-1} son abiertos.*

Demostración:

- AB es abierto. En efecto, probemos que $AB = \bigcup\limits_{b\in B} R_b(A) = \bigcup\limits_{a\in A} L_a(B)$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{b\in B} R_b(A) &= \bigcup_{b\in B}\{R_b(a)/a \in A\} \\
&= \bigcup_{b\in B}\{ab/a \in A\} && \text{(por definición de } R_b) \\
&= \{ab/a \in A \wedge b \in B\} \\
&= AB
\end{aligned}$$

  De igual forma podemos probar que $AB = \bigcup\limits_{a\in A} L_a(B)$.
  Para todo $b \in G$, $R_b(A)$ es abierto (pues A es abierto y R_b es homeomorfismo), luego, AB es abierto (por ser unión arbitraria de abiertos).

- A^{-1} es abierto. En efecto, probemos que $A^{-1} = \beta(A)$:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \{a^{-1}, a \in A\} \\
&= \{\beta(a), a \in A\} && \text{(donde } \beta \text{ es la función de la Proposición 5.2.1)} \\
&= \beta(A) && \text{(por definición de imagen directa)}
\end{aligned}$$

  Por la Proposición 5.2.2, la función $\beta : x \mapsto x^{-1}$ es homeomorfismo, luego, si A es abierto concluímos que $A^{-1} = \beta(A)$ es abierto.

- gAg^{-1} es abierto. En efecto, probemos que $gAg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}(A)$:

$$\begin{aligned}
gAg^{-1} &= \{gag^{-1}/a \in A\} \\
&= \{L_g(ag^{-1})/a \in A\} \\
&= \{L_g\left[R_{g^{-1}}(a)\right]/a \in A\} \\
&= \{(L_g \circ R_{g^{-1}})(a)/a \in A\} \\
&= L_g \circ R_{g^{-1}}(A)
\end{aligned}$$

  La función $L_g \circ R_{g^{-1}}$ es homeomorfismo (al ser composición de homeomorfismos), luego, si A es abierto, tenemos que gAg^{-1} es abierto.

$\blacksquare$

5.4.2. Familias de entornos de un elemento g de G

Definición 5.4.3 *Sea $(G,\mathcal{U})$ grupo topológico. Denotaremos por $\mathfrak{U}$ al conjunto de todos los entornos del elemento identidad e de G.*

Proposición 5.4.3 *Para cada $g \in G$ el conjunto $g\mathfrak{U} = \{gU : U \in \mathfrak{U}\}$ es el conjunto de todos los entornos de g.*

Demostración:
Sea $g \in G$. Consideremos Γ el conjunto de todos los entornos de g. (Queremos ver que $\Gamma = g\mathfrak{U}$).
En primer lugar, probemos que $\Gamma \subset g\mathfrak{U}$. En efecto, sea $N \in \Gamma$, entonces (por definición de entorno) existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $g \in V \subset N$. Luego, si $g \in V$ tenemos que

$$\underbrace{g^{-1}g}_{e} \in g^{-1}V$$

y, por lo tanto $e \in g^{-1}V$. Por otra parte, $g^{-1}V \in \mathcal{U}$ (porque $V \in \mathcal{U}$ y por la Proposición 5.4.2). Luego $g^{-1}V \in \mathcal{U}$ es un entorno abierto de e, por consiguiente es uno de los elementos U de $\mathfrak{U}$. Si $U = g^{-1}V$ entonces $gU = g\,(g^{-1}V) = V$.
Por lo tanto $V \in g\mathfrak{U}$. Y de este modo, $\Gamma \subset g\mathfrak{U}$.
En segundo lugar, veamos que $\Gamma \supset g\mathfrak{U}$. En efecto, sea $gU \in g\mathfrak{U}$ donde U es un entorno de e. Si $e \in U$ entonces $g \in gU$. El conjunto gU es un abierto que contiene a g (porque U es abierto y por la Proposición 5.4.2), por consiguiente gU es entorno de g y vale que $gU \in \Gamma$.
Por lo tanto $g\mathfrak{U}$ es el conjunto de todos los entornos de g.

■

Proposición 5.4.4 $\mathfrak{U}$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\mathfrak{U} \neq \emptyset$. Además, si $U \in \mathfrak{U}$ entonces $e \in U$.*
2. *Para $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, existe $U_3 \in \mathfrak{U}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*
3. *Para todo $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $VV^{-1} \subset U$.*
4. *Para todo $U \in \mathfrak{U}$, y para todo elemento a de U, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $aV \subset U$.*
5. *Para todo $U \in \mathfrak{U}$ y todo elemento $g \in G$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $gVg^{-1} \subset U$.*

Demostración: Apéndice.

Proposición 5.4.5 *Un grupo topológico es de Hausdorff si y sólo si $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\}$.*

Demostración: Ver pág. 75 - Apéndice.

5.4.3. Espacios cocientes de grupos topológicos

Proposición 5.4.6 *Sea G grupo topológico y H es un subgrupo de G. Si H es abierto en G, entonces también es cerrado en G.*

Demostración:
Tomemos la partición por clases laterales izquierda de G, con lo cual podemos escribirlo como unión disjunta:

$$G = H \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha H \right) \quad \text{(donde } A \text{ es un conjunto de índices)}$$

Por hipótesis, H es abierto, luego, para todo $\alpha \in A$, $x_\alpha H$ es abierto y en consecuencia $H' = \bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha H$ es abierto en G. Como H es el complemento de H' en G, concluímos que H es cerrado.

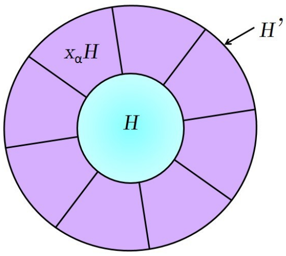

Figura 5.2: G es unión de H y el abierto H' (color violeta)

■

Afirmación 5.4.1 $GL^+(n,\mathbb{R})$ *es abierto y cerrado en* $GL(n,\mathbb{R})$

Demostración:
$GL^+(n,\mathbb{R})$ es abierto en $GL(n,\mathbb{R})$ (por la Afirmación 4.4.5), por otra parte (aplicando la Proposición 5.4.6) como es subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ concluímos que es cerrado.

■

Observemos que este resultado reafirma lo probado en la Afirmación 4.4.4: $GL(n,\mathbb{R})$ no es conexo. Pues tenemos un subconjunto propio, $GL^+(n,\mathbb{R})$, que es cerrado y abierto.

Definición 5.4.4 *Sea* π *es la función natural de* G *en* G/H *que aplica* $x \mapsto xH$ *(ver Definición 2.1.6). Definimos un subconjunto* Z *de* G/H *como abierto si* $\pi^{-1}(Z)$ *es abierto en* G*, donde* $\pi^{-1}(Z) = \{x \in G/\pi(x) \in Z\}$.

Gráficamente, supongamos que $G/H = \{H, xH, yH, wH\}$, entonces (ver figura 5.3)

Esto determina una topología sobre G/H, convirtiéndolo así en un espacio topológico denominado espacio cociente del grupo topológico G por el subgrupo H.

Observación 5.4.1 π *es una función abierta de* G *en* G/H*. Además, es continua.*

Demostración: Ver pág 76 - Apéndice.

Lema 5.4.2 *Dado* G *grupo topológico, sean* $y \in G$ *y* $U \in \mathfrak{U}$*. Entonces existe* $V \in \mathfrak{U}$ *tal que* $VV^{-1}y^{-1} \subset y^{-1}U$.

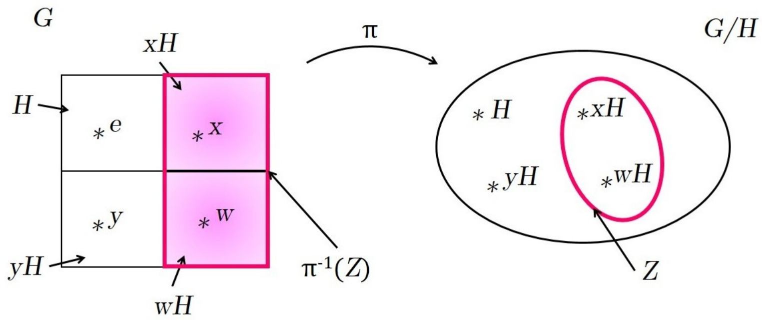

Figura 5.3: Z es abierto en $G/H \Leftrightarrow \pi^{-1}(Z)$ es abierto en G

Demostración:
Si $y \in G$ y $U \in \mathfrak{U}$, entonces, por la propiedad 5 de la Proposición 5.4.4, existe $Z \in \mathfrak{U}$ tal que $yZy^{-1} \subset U$. Por otro lado, como $Z \in \mathfrak{U}$, aplicando la propiedad 3 de la Proposición 5.4.4, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $VV^{-1} \subset Z$.
Relacionando estos resultados tenemos que para $y \in G$ y $U \in \mathfrak{U}$ existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $yVV^{-1}y^{-1} \subset yZy^{-1} \subset U$. Luego $yVV^{-1}y^{-1} \subset U$ y, en conclusión, $VV^{-1}y^{-1} \subset y^{-1}U$.

■

Proposición 5.4.7 *Sea H un subgrupo normal de un grupo topológico G. Entonces G/H se transforma en grupo topológico con la topología de la Definición 5.4.4.*

Demostración: Ver pág. 77 - Apéndice.

Definición 5.4.5 *El grupo topológico G/H se denomina el grupo cociente de G por el subgrupo normal H.*

Para la próxima afirmación reemplazaremos la notación de la siguiente forma:

$$GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL$$
$$GL^+(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL^+$$
$$SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SL$$

Afirmación 5.4.2 *Los grupos cocientes GL/GL^+ y GL/SL son grupos topológicos con la correspondiente topología cociente de cada espacio.*

Demostración:
Como GL^+ es subgrupo normal de GL, aplicando la la Proposición 5.4.7 y la Definición 5.4.5, concluímos que el grupo cociente GL/GL^+ es grupo topológico con la topología cociente del espacio.
De la misma forma probamos que GL/SL es grupo topológico.

■

Lema 5.4.3 *Dado G grupo topológico. Sean A y B subconjuntos de G, consideremos la función $\alpha : G \times G \to G$ que aplica $(a, b) \mapsto a^{-1}b$. Entonces $\alpha(A \times B) = A^{-1}B$.*

Demostración:
Sea $A \times B \subset G \times G$. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(A \times B) &= \{\alpha(x, y)/(x, y) \in A \times B\} \\ &= \{x^{-1}y/x \in A, y \in B\} \\ &= \{x^{-1}B/x \in A\} \\ &= A^{-1}B \end{aligned}$$

∎

Lema 5.4.4 *Sea H un subgrupo de un grupo G, y sean A y B dos subconjuntos de G. Si $A^{-1}B \cap H = \emptyset$ entonces $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. Donde π es la función natural de G en G/H.*

Demostración:
Si $\underbrace{AH}_{\pi(A)} \cap \underbrace{BH}_{\pi(B)} \neq \emptyset$ entonces existe $x \in G$ tal que $x \in AH \cap BH$, y así:

$$\begin{aligned} x \in AH &\Rightarrow \exists a \in A \wedge \exists h_1 \in H : x = ah_1 \\ x \in BH &\Rightarrow \exists b \in B \wedge \exists h_2 \in H : x = bh_2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} ah_1 &= bh_2 \\ \underbrace{h_1 h_2{}^{-1}}_{\in H} &= \underbrace{a^{-1}b}_{\in A^{-1}B} \end{aligned}$$

El primer término pertenece a H (pues H es grupo), y el segundo pertenece a $A^{-1}B$, así, el elemento $y = a^{-1}b$ está en $A^{-1}B \cap H$. Por lo tanto $A^{-1}B \cap H \neq \emptyset$.

∎

Proposición 5.4.8 *Si G es un grupo topológico y H un subgrupo normal de G, entonces el grupo cociente G/H es un espacio de Hausdorff si, y sólo si H es cerrado en G.*

Demostración: Ver pág. 80 - Apéndice.

Como consecuencia de la Proposición 5.4.8 tenemos que:

Afirmación 5.4.3 *GL/GL^+ y GL/SL son grupos de Hausdorff.*

Demostración:
$GL^+(n, \mathbb{R})$ y $SL(n, \mathbb{R})$ son subgrupos normales cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$, si aplicamos la Proposición 5.4.8 y la Afirmación 5.4.2 concluímos que ambos son grupos de Hausdorff.

∎

5.5. Conexión en grupos topológicos

Definición 5.5.1 *Sea G grupo topológico. Si G es conexo como un espacio topológico, entonces decimos que G es un grupo topológico conexo.*

Observación 5.5.1 *Si $V \in \mathfrak{U}$ entonces $U = V \cap V^{-1}$ pertenece a $\mathfrak{U}$ y satisface $U = U^{-1}$.*

En efecto, por el Lema 5.4.1 tenemos que:

$$U^{-1} = (V \cap V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap (V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap V = U$$

Teorema 5.5.1 *Sea G grupo topológico conexo, y sea $U \in \mathfrak{U}$ tal que satisface $U = U^{-1}$. Entonces cualquier elemento arbitrario $g \in G$ puede escribirse de la forma:*

$$g = g_1 \dots g_k, \quad g_i \in U \quad (i = 1, \dots, k) \tag{5.10}$$

En otras palabras, si $U \in \mathfrak{U}$ verifica $U = U^{-1}$ entonces todo elemento de G puede escribirse como producto finito de elementos de U.

Demostración: Ver pág. 81 - Apéndice.

Lema 5.5.1 *Sea G grupo topológico y sea $H \subset G$: $H \neq \emptyset$. Si $\{A, B\}$ es una partición por abiertos de G y H es conexo entonces ocurre sólo una de las siguientes opciones:*

- *Si $H \cap A \neq \emptyset$ entonces $H \subset A$.*
- *Si $H \cap B \neq \emptyset$ entonces $H \subset B$.*

En caso de que G sea conexo, el lema sigue siendo válido pues A o B es vacío.
Demostración: Ver pág. 82 - Apéndice.

Teorema 5.5.2 *Sea G un grupo topológico, y H un subgrupo de G. Si H y G/H son ambos espacios conexos, entonces G es conexo.*

Demostración: Ver pág. 83 - Apéndice.

Lema 5.5.2 *Sea π la función natural de G en G/H. Entonces $\pi(xH) = \{\pi(x)\} \subset G/H$, para todo $x \in G$.*

Demostración:
Sea $x \in G$

$$\begin{aligned}\pi(xH) &= \{\pi(xh)/h \in H\} \\ &= \{xhH/h \in H\} \\ &= \{xH\} \\ &= \{\pi(x)\}\end{aligned}$$

∎

Grupos topológicos localmente conexos

Definición 5.5.2 Un espacio topológico X se dice localmente conexo si para cada $x \in X$ existe una base de entornos conexos.

Teorema 5.5.3 *Sea X localmente conexo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X localmente conexo.*
2. *Si A es abierto entonces para todo $x \in A$ la componente conexa de x es abierta.*
3. *Los abiertos conexos constituyen una base para la topología de X.*

Demostración: Ver página 28 $-$ [DD].

Lema 5.5.3 *G grupo topológico, sea G_0 la componente conexa que contiene al elemento identidad. Si G es localmente conexo entonces G_0 es abierto.*

Demostración:
Sea N entorno de e, es decir $N \in \mathfrak{U}$, como G es localmente conexo existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in V \subset N$ y V conjunto conexo.
Como G_0 es la componente conexa de G que contiene a e, tenemos que $V \subset G_0$.
Luego, por definición de entorno existe U abierto en G tal que $e \in U \subset V$.
Por el Teorema 5.5.3 la componente conexa de e es abierta.
Concluímos que G_0 es abierto.

■

La componente conexa de un grupo G que contiene a e

Para los siguientes lemas, dado un grupo topológico G, denotaremos por G_0 a la componente conexa de G que contiene al elemento identidad del grupo, e. Las demostraciones de los mismos se basan en la pág 182 - [Ma].

Lema 5.5.4 *G_0 es un subgrupo normal cerrado de G.*

Demostración: Ver página 83 - Apéndice.

Lema 5.5.5 *La componente conexa $(G/G_0)_0$ de G/G_0 que contiene al elemento identidad e' de G/G_0 consiste solamente en el elemento identidad, es decir $(G/G_0)_0 = \{e'\}$.*

Demostración: Ver página 84 - Apéndice.

Lema 5.5.6 *Si G es localmente conexo, entonces G/G_0 es un grupo topológico discreto.*

Demostración: Ver página 85 - Apéndice.

Lema 5.5.7 *La componente conexa de G que contiene al elemento $g \in G$ es gG_0.*

Demostración:
Sea H conexo tal que $g \in H$. Sabemos que la función $x \mapsto g^{-1}x$ es homeomorfismo de G, luego $g^{-1}H$ es un conjunto conexo que contiene a e.
Y así, $g^{-1}H \subset G_0$. Concluímos que $H = gg^{-1} \subset gG_0$.

■

Lema 5.5.8 *Consideremos el siguiente subgrupo de $GL^+(n, \mathbb{R})$:*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & c & \\ 0 & & & \end{pmatrix} / c \in GL^+(n-1, \mathbb{R}) \right\}$$

Si $\pi : GL^+(n, \mathbb{R}) \to GL^+(n, \mathbb{R})/H$ es la función que aplica $a \mapsto aH$. Entonces para dos matrices a, b de $GL^+(n, \mathbb{R})$, $\pi(a) = \pi(b)$ sii las primeras columnas de a y b coinciden.

Aceptamos sin demostración.
En este Lema sólo observamos que si $a \in GL^+(n, \mathbb{R})$ y $h \in H$ entonces:

$$\det(ah) = \det(a)\det(h) = \underbrace{\det(a)}_{>0}\underbrace{\det(c)}_{>0} > 0$$

Lema 5.5.9 *Si H es el subgrupo de $GL^+(n, \mathbb{R})$ definido en el Lema 5.5.8, y p la función que proyecta la primera columna de una matriz a de $GL^+(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces la función $f : GL^+(n, \mathbb{R})/H \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por $p = f \circ \pi$ es continua y abierta. Donde π es la función natural que aplica $a \mapsto ah$, con $h \in H$.*

$$\begin{tikzcd} GL^+(n, \mathbb{R}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n - \{0\} \\ GL^+(n, \mathbb{R})/H \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración:
La proyección a la primera columna, p, es una función continua y abierta.

$$p : GL^+(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} \mapsto A_1$$

Queremos probar que f es continua y abierta.

$$\underbrace{p}_{\text{cont. y ab.}} = \underbrace{f}_{?} \circ \underbrace{\pi}_{\text{cont. y ab.}}$$

Veamos, en primer lugar, que f es continua.
Sea B abierto en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces $p^{-1}(B)$ es abierto en $GL^+(n, \mathbb{R})$, luego

$$\begin{aligned} p^{-1}(B) &= (f \circ \pi)^{-1}(B) \\ &= \pi^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) \quad \text{es abierto en } GL^+(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

por ser π función abierta, tenemos que $\underbrace{\pi\left(\pi^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right)}_{f^{-1}(B)}$ es abierto en $GL^+(n,\mathbb{R})/H$. Por lo tanto, f es continua.

En segundo lugar, veamos que f es abierta.
Sea A abierto en $GL^+(n,\mathbb{R})/H$ entonces, por ser π continua, $\pi^{-1}(A)$ es abierto. Luego, como p es función abierta, se tiene que $p\,(\pi^{-1}(A))$ es abierto en $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
Así $p\,(\pi^{-1}(A)) = \underbrace{(f\circ\pi)\left(\pi^{-1}(A)\right)}_{f(A)}$ es abierto en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Y resulta f abierta.

■

Afirmación 5.5.1 $GL^+(n,\mathbb{R})$ *es la componente conexa de* $GL(n,\mathbb{R})$ *que contiene al elemento identidad.*

Demostración:
Sea G_0 la componente conexa de $GL(n,\mathbb{R})$ que contiene al elemento identidad I_n. Queremos probar que $G_0 = GL^+(n,\mathbb{R})$.

Para ello veamos primero que $G_0 \subset GL^+(n,\mathbb{R})$.
Consideremos el grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Observemos que, por un lado, $\mathbb{R}^* = GL(1,\mathbb{R})$, y por otro lado, la componente conexa de $\mathbb{R}^*$ que contiene al elemento identidad, a saber 1, es $(0,+\infty)$.
Sea ϕ la función $\phi = \det|_{GL} : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ que aplica $a \mapsto \det(A)$.
ϕ es un homomorfismo de grupos, pues $\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B)$.
G_0 es conexo, luego por ser ϕ continua, tenemos que $\phi(G_0)$ también es conexo.
Por otro lado, como por hipótesis $I_n \in G_0$, se sigue que $1 = \phi(I_n) \in \phi(G_0)$. Esto dice que el conjunto $\phi(G_0)$ es un conexo de $\mathbb{R}^*$ que contiene al elemento identidad 1, luego, por definición de componente conexa se sigue que $\phi(G_0) \subset (0,+\infty)$. Por lo tanto, las matrices de G_0 tienen determinante positivo (ver figura 5.4). Así, $G_0 \subset GL^+(n,\mathbb{R})$.

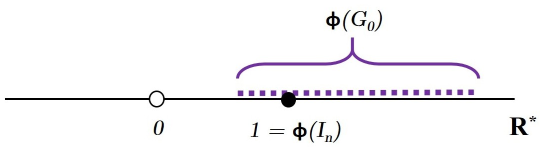

Figura 5.4: $G_0 \subset GL^+(n,\mathbb{R})$

Probemos ahora que $G_0 \supset GL^+(n,\mathbb{R})$.
Sabemos que G_0 es la componente conexa que contiene a I_n y que $I_n \in GL^+(n,\mathbb{R})$. Basta probar que $GL^+(n,\mathbb{R})$ es conexo. Usaremos inducción sobre n.

- Para $n = 1$, $GL^+(1,\mathbb{R}) = (0,+\infty)$ es conexo.
- Sea $n > 1$ y supongamos que $GL^+(n-1,\mathbb{R})$ es conexo.
  Consideremos el subgrupo del Lema 5.5.8:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & c & \\ 0 & & & \end{pmatrix} / c \in GL^+(n-1,\mathbb{R}) \right\}$$

Como espacio topológico, H es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1} \times GL^+(n-1,\mathbb{R})$. Luego, debido a que $\mathbb{R}^{n-1}$ y $GL^+(n-1,\mathbb{R})$ son conexos, resulta H conexo.
Ahora, consideremos el espacio cociente:

$$GL^+(n,\mathbb{R})/H = \{aH/a \in GL^+(n,\mathbb{R})\}$$

y sea π la función natural de $GL^+(n,\mathbb{R})$ en $GL^+(n,\mathbb{R})/H$ dada por $\pi(a) = aH$.
Por los Lemas 5.5.8 y 5.5.9 existe un homeomorfismo entre $GL^+(n,\mathbb{R})/H$ y $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
Para $n > 1$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo, luego se sigue que $GL^+(n,\mathbb{R})/H$ es conexo.
Tenemos H y $GL^+(n,\mathbb{R})/H$ conexos, luego por el Teorema 5.5.2 concluimos que $GL^+(n,\mathbb{R})$ también es conexo.

Por lo tanto $GL^+(n,\mathbb{R}) \subset G_0$.

■

5.6. Espacios Homogéneos de Grupos Topológicos y Grupos Localmente Compactos

Definición 5.6.1 *Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Si G y X satisfacen las siguientes condiciones, decimos que G es un grupo topológico de transformaciones sobre X. Existe una función continua ϕ de $G \times X$ en X que se denotará $\phi(g,x) = g.x$, y que cumple las siguientes condiciones:*

1. *$(gh).x = g.(h.x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.*
2. *Para el elemento identidad $e \in G$ y para todo $x \in X$, $e.x = x$.*

Observación 5.6.1 *Dado un grupo topológico de transformaciones. Para cada $g \in G$, la función de X en X dada por $x \mapsto g.x$ es continua. Además, por (1) y (2) se sigue que*

$$g^{-1}.(g.x) = g.(g^{-1}.x) = e.x = x \tag{5.11}$$

Por otro lado, se deduce que $x \mapsto g.x$ es un homeomorfismo en X.

Definición 5.6.2 *Si el único elemento $g \in G$ que satisface $g.x = x$ para todo $x \in X$ es el elemento identidad e, entonces se dice que G actúa efectivamente sobre X.*

Definición 5.6.3 *Si para todo par de puntos x, y de X existe un elemento $g_{xy} \in G$ que satisface $g_{xy}.x = y$, entonces decimos que G actúa transitivamente en X.
Luego X recibe el nombre de Espacio Homogéneo del Grupo Topológico G.*

Proposición 5.6.1 *Dado G un grupo topológico de transformaciones en X. Sea $x \in X$ fijo, y consideremos $H_x = \{g \in G : g.x = x\}$. Entonces H_x es un subgrupo de G.*

Demostración:

- Sea $g \in H_x$. Queremos ver que $g^{-1} \in H_x$:

$$\begin{aligned} g.x &= x && \text{(por hipótesis)} \\ g^{-1}.(g.x) &= g^{-1}.x \\ (g^{-1}g).x &= g^{-1}.x \\ e.x &= g^{-1}.x \\ x &= g^{-1}.x \end{aligned}$$

  Por lo tanto $g^{-1} \in H_x$.

- Sean $g, h \in H_x$. Veamos que $gh \in H_x$.

$$\begin{aligned} (gh).x &= g.(h.x) \\ &= g.x && \text{(porque } h \in H_x\text{)} \\ &= x && \text{(porque } g \in H_x\text{)} \end{aligned}$$

  Luego $gh \in H_x$.

Finalmente H_x es un subgrupo de G.

■

Definición 5.6.4 *Sea G un grupo topológico de transformaciones en X. Dado $x \in X$ fijo, el subgrupo $H_x = \{g \in G : g.x = x\}$ se denomina subgrupo de isotropías de G en x.*

Proposición 5.6.2 *Si X es un espacio de Hausdorff, el subgrupo de isotropías H_x de G en el punto $x \in X$ es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración:
Para cada x fijo, $\psi : g \mapsto g.x$ es una función continua de G en X, y se verifica que:

$$H_x = \psi^{-1}(\{x\})$$

Por hipótesis X es un espacio de Hausdorff, luego el subconjunto $\{x\}$ es cerrado en X. Por la continuidad de ψ concluímos que $H_x = \psi^{-1}(\{x\})$ es cerrado en G.

■

Definición 5.6.5 *Sea G un grupo topológico de Hausdorff*

1. *Si G es localmente compacto como espacio topológico, entonces G se denomina un Grupo Localmente Compacto.*

2. *Si G es compacto como espacio topológico, entonces G se denomina un Grupo Compacto.*

Teorema 5.6.1 *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, el cual es un espacio homogéneo de un grupo topológico G localmente compacto con una base numerable. Sea H_x el subgrupo de isotropías de G en un punto $x \in X$.*
Entonces la función α dada por

$$\begin{aligned} \alpha : G/H_x &\to X \\ gH_x &\mapsto \alpha(gH_x) = g.x \end{aligned}$$

es un homeomorfismo de G/H_x sobre X y se cumple que $\alpha(h\rho) = h.\alpha(\rho)$ para todo $\rho \in G/H_x$, $h \in G$.

Demostración: Ver página 186 − [Ma]

Afirmación 5.6.1 *$O(n)$ y $SO(n)$ son ambos compactos.*

Demostración:
Ya que $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son isométricamente homeomorfos como espacios métricos y que $GL(n,\mathbb{R})$ es homeomorfo a un abierto V de $\mathbb{R}^{n^2}$, para saber si un conjunto es compacto en $GL(n,\mathbb{R})$ alcanza con probar que es cerrado y acotado, del mismo modo que en $\mathbb{R}^{n^2}$.

1. $O(n)$ es compacto, en efecto

   a) $O(n)$ es acotado, pues si $A \in O(n)$ entonces $AA^T = I_n$ luego, si consideramos la norma de matrices dada por:

   $$\|A\| = \sqrt{tr(AA^T)}$$

   tenemos que:

   $$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{tr(I_n)} \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

   esto dice que los puntos de $O(n)$ están sobre una esfera de radio $\sqrt{n}$. Por lo tanto $O(n)$ es acotado.

   b) $O(n)$ es cerrado, por lo probado en la Afirmación 4.4.5.

2. $SO(n)$ es compacto, en efecto

   a) $SO(n)$ es acotado, ya que $SO(n) \subset O(n)$ y por $(1a)$ se tiene que $O(n)$ es acotado.

   b) Por la Afirmación 4.4.5 sabemos que $SO(n)$ es cerrado.

■

Observación 5.6.2 *Para los siguientes resultados consideraremos la norma usual en $\mathbb{R}^n$ y denotaremos S^{n-1} a la esfera unitaria dada por esta norma:*

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$$

Lema 5.6.1 *$O(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre S^{n-1}.*

Demostración:
Para cada $A \in O(n)$ y para cada $x \in S^{n-1}$ se cumple que $\|Ax\| = \|x\|$. Por otro lado, si $x \in S^{n-1}$ entonces $\|Ax\| = \|x\| = 1$, esto dice que $Ax \in S^{n-1}$.
De este modo, podemos definir la función

$$\begin{aligned} \phi : O(n) \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ (A,x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

que verifica lo siguiente:

1. ϕ es continua.
2. $\forall A, B \in O(n) \wedge \forall x \in S^{n-1}$, $(AB)x = A(Bx)$.
3. Para el elemento identidad de $O(n)$, I_n, y para todo $x \in S^{n-1}$, $I_n x = x$.

Concluímos que $O(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

■

Lema 5.6.2 *$SO(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre S^{n-1}.*

Demostración:
Con el mismo razonamiento que en el Lema 5.6.1, usamos la función

$$\begin{aligned} \psi : SO(n) \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

Claramente podemos ver que:

1. ψ es continua.
2. $\forall A, B \in SO(n) \wedge \forall x \in S^{n-1}$, $(AB)x = A(Bx)$.
3. Para el elemento identidad de $SO(n)$, I_n, y para todo $x \in S^{n-1}$, $I_n x = x$.

Por lo tanto, $O(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

■

Proposición 5.6.3 *$O(n)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1}.*

En otras palabras, S^{n-1} es un espacio homogéneo del grupo topológico $O(n)$.
Demostración:
Es evidente, pues se lleva un punto de la esfera en otro mediante una rotación en $\mathbb{R}^n$.

■

Siguiendo el mismo razonamiento, tenemos que:

Proposición 5.6.4 *$SO(n)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1}.*

En otras palabras, S^{n-1} es un espacio homogéneo del grupo topológico $SO(n)$.

Proposición 5.6.5 *Sea $x = e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ y sea H_{e_1} el subgrupo de isotropías de $O(n)$ en e_1*

$$H_{e_1} = \{A \in O(n) : Ae_1 = e_1\} \tag{5.12}$$

entonces H_{e_1} es de la forma

$$H_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\} \tag{5.13}$$

y puede identificarse con $O(n-1)$.

Demostración:
Por el Lema 5.6.1 sabemos que $O(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre S^{n-1}. Llamemos

$$H_1 = \{A \in O(n) : Ae_1 = e_1\} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Veamos, en primer lugar, que $H_2 \subset H_1$.

Sea $A \in H_2$ entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ con $B \in O(n-1)$.

Para que $A \in H_1$ debe ocurrir que $Ae_1 = e_1$. En efecto:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $A \in H_1$.

Probemos, en segundo lugar, que $H_1 \subset H_2$.
Sea $A \in H_1$.
$Ae_1 = A^1$ donde A^1 es la primera columna de A.
Como $A \in H_1$ se tiene que $Ae_1 = e_1$.

Finalmente $A^1 = e_1$, es decir A es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Por hipótesis $A \in O(n)$, se sigue que B es ortogonal,

Para que $A \in H_2$ nos falta probar que $a_2 = \cdots = a_n = 0$. En efecto, como A es ortogonal, sus filas y columnas son ortonormales, en particular $\|(1, a_2, \dots, a_n)\| = 1$ de lo cual se deduce que $a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Por lo tanto, la matriz A toma la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ con $B \in O(n-1)$.

Luego $H_1 \subset H_2$.
De este modo el subgrupo de isotropías de $O(n)$ en e_1 es de la forma

$$H_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\}$$

La identificación de H_{e_1} con $O(n-1)$ es trivial.

$\blacksquare$

Observación 5.6.3 *Como* $SO(n)$ *es un grupo topológico de transformaciones sobre* S^{n-1}*, siguiendo el mismo razonamiento que en la Proposición 5.6.5 se prueba que el subgrupo de isotropías de* $SO(n)$ *en* e_1 *también puede identificarse con* $SO(n-1)$*.*

Proposición 5.6.6 S^{n-1} *es homeomorfo a* $O(n)/O(n-1)$ *y a* $SO(n)/SO(n-1)$*.*

Demostración:

1. S^{n-1} es homeomorfo a $O(n)/O(n-1)$. En efecto, para probarlo usaremos el Teorema 5.6.1. Veamos que se cumplen las hipótesis que necesitamos:

   a) S^{n-1} es un espacio de Hausdorff localmente compacto. En efecto, $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, luego $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ con la topología relativa, también lo es.

   b) $O(n)$ es un grupo topológico localmente compacto con una base numerable. En efecto, por un lado, sabemos que $O(n)$ tiene estructura de grupo topológico; por otro lado, $\mathbb{R}^{n^2}$ es localmente compacto con una base numerable, por ser homeomorfo a $M_n(\mathbb{R})$ tenemos que $M_n(\mathbb{R})$ hereda estas características topológicas y, por consiguiente $O(n)$ las hereda con la topología relativa.

   c) S^{n-1} es un espacio homogéneo del grupo topológico $O(n)$. Ver Proposición 5.6.3.

   d) Podemos identificar a $O(n-1)$ con H_{e_1}, donde H_{e_1} es el subgrupo de isotropías de $O(n)$ en $e_1 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

   Luego, por el Teorema 5.6.1 concluímos que S^{n-1} es homeomorfo a $O(n)/O(n-1)$.

2. S^{n-1} es homeomorfo a $SO(n)/SO(n-1)$. En efecto, utilizamos el mismo razonamiento atendiendo a lo siguiente:

   a) S^{n-1} es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

   b) $SO(n)$ es un grupo topológico localmente compacto con una base numerable.

   c) S^{n-1} es un espacio homogéneo del grupo topológico $O(n)$. Ver Proposición 5.6.4

   d) Podemos identificar a $SO(n-1)$ con el subgrupo de isotropías de $SO(n)$ en $e_1 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

   Luego, por el Teorema 5.6.1 tenemos que S^{n-1} es homeomorfo a $SO(n)/SO(n-1)$.

$\blacksquare$

5.7. Conclusiones del Capítulo 5

Resultado 5.7.1 *La función $\alpha : GL \times GL \to GL$ que aplica $(A, B) \mapsto AB$ es continua.*

Resultado 5.7.2 *La función $\beta : GL \to GL$ que aplica $A \mapsto A^{-1}$ es continua.*

Resultado 5.7.3 *$GL(n, \mathbb{R})$ es Grupo Topológico.*

Resultado 5.7.4 *$GL^+(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$.*

Resultado 5.7.5 *$GL(n, \mathbb{R})$ es un Grupo Topológico de Hausdorff.*

Resultado 5.7.6 *Se prueba de otra forma que $GL(n, \mathbb{R})$ no es conexo.*

Resultado 5.7.7

- *GL/GL^+ es grupo topológico con la topología cociente.*
- *GL/SL es grupo topológico con la topología cociente.*

Resultado 5.7.8

1. *GL/SL es un grupo de Hausdorff.*
2. *GL/GL^+ es un grupo de Hausdorff.*

Resultado 5.7.9 *$GL^+(n, \mathbb{R})$ es la componente conexa de $GL(n, \mathbb{R})$ que contiene al elemento identidad.*

Resultado 5.7.10 *$O(n)$ y $SO(n)$ son ambos compactos.*

Resultado 5.7.11 *$O(n)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.*

Resultado 5.7.12 *$O(n)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1}.*

Resultado 5.7.13 *$SO(n)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1}.*

Resultado 5.7.14 *El subgrupo de isotropías de $O(n)$ en $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ puede identificarse con $O(n-1)$, donde $e_1 \in S^{n-1}$.*

Resultado 5.7.15 *El subgrupo de isotropías de $SO(n)$ en e_1 también puede identificarse con $SO(n-1)$.*

Resultado 5.7.16 *S^{n-1} es homeomorfa a $O(n)/O(n-1)$ y a $SO(n)/SO(n-1)$.*

Capítulo 6

Estructura de Variedad Diferenciable para $GL(n, \mathbb{R})$

6.1. Notación

Desarrollaremos el concepto de Variedad Diferenciable en general y luego veremos su aplicación a $GL(n, \mathbb{R})$.

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla de enteros no negativos entonces consideraremos

$$[a] = \sum a_i$$
$$a! = a_1! a_2! \ldots a_n!$$
$$\frac{\partial^a}{\partial r^a} = \frac{\partial^{[a]}}{\partial r_1^{a_1} \ldots \partial r_n^{a_n}}$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

- Consideremos $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es diferenciable de clase C^k en U (o simplemente f es C^k) para k un entero no negativo si las derivadas parciales $\frac{\partial^a}{\partial r^a} f$ existen y son continuas en U para $[a] \leq k$. En particular f es C^0 si f es continua.
- Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ entonces diremos que f es diferenciable de clase C^k si cada una de las funciones componentes es C^k.
- Diremos que f es C^∞ si es C^k para todo $k \geq 0$.

6.2. La Variedad Diferenciable $GL(n, \mathbb{R})$

Definición 6.2.1 *Un espacio localmente euclídeo M de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff para el cual cada punto $p \in M$ tiene un entorno U_p homeomorfo a un subconjunto abierto V_p del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Definición 6.2.2 *Si ϕ es un homeomorfismo de un conjunto abierto conexo $U \subset M$ sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, ϕ se llama una función coordenada (o un mapeo coordenado). El par (U, ϕ) se denomina un sistema coordenado.*

- *Si $m \in U$ y $\phi(m) = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ entonces se dice que el sistema coordenado es centrado en m.*

Definición 6.2.3 *M localmente euclídeo. Un atlas es una familia de entornos coordenados $\mathcal{F} = \{(U_i,\phi_i)/i \in I\}$.*

Definición 6.2.4 *M localmente euclídeo. Una estructura diferenciable de clase C^k con $1 \leq k \leq \infty$ en M es un atlas $\mathcal{F} = \{(U_i,\phi_i)/i \in I,\ I$ conjunto de índices$\}$ tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$.*
2. *Para todo $i, j \in I$ la función $\phi_i \circ {\phi_j}^{-1}$ es C^k.*
3. *La familia $\mathcal{F}$ es maximal con respecto a (1) y a (2); es decir, si (U,ϕ) es un sistema coordenado tal que para todo $i \in I$ se cumple que $\phi_i \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ {\phi_i}^{-1}$ son C^k, entonces $(U,\phi) \in \mathcal{F}$.*

Definición 6.2.5 *Una variedad diferenciable de dimensión n y de clase C^k es un par $(M,\mathcal{F})$ donde M es un espacio localmente euclídeo de dimensión n con una base numerable, y $\mathcal{F}$ es una estructura diferenciable de clase C^k.*

Entenderemos por variedad diferenciable al par $(M,\mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es una estructura diferenciable de clase C^∞.

Proposición 6.2.1 *Si $\mathcal{F}_0 = \{(U_j,\phi_j)/j \in J\}$ es una familia de sistemas coordenados que satisfacen las propiedades 1 y 2 de la Definición 6.2.4 entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{F}_0$. A saber:*

$$\mathcal{F} = \left\{(U,\phi) : U \text{ abierto en } M, \phi \circ {\phi_j}^{-1} \in C^k \wedge \phi_j \circ \phi^{-1} \in C^k, \forall \phi_j \in \mathcal{F}_0\right\} \tag{6.1}$$

Demostración:

- $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. En efecto:

$$\begin{aligned}(U,\phi) \in \mathcal{F}_0 &\Rightarrow \forall (U_j,\phi_j) \in \mathcal{F}_0, \phi \circ {\phi_j}^{-1} \in C^k \wedge \phi_j \circ \phi^{-1} \in C^k \\ &\Rightarrow (U,\phi) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

- $\mathcal{F}$ satisface 1 de la Definición 6.2.4 porque $\mathcal{F}_0$ lo hace.
- $\mathcal{F}$ satisface 2 de la Definición 6.2.4.
  En efecto, sean $(U_i,\phi_i), (U_j,\phi_j) \in \mathcal{F}$.
  Como $(U_i,\phi_i) \in \mathcal{F}$ se tiene que para todo $(U,\phi) \in \mathcal{F}_0$

$$\phi_i \circ \phi^{-1} \quad \text{y} \quad \phi \circ {\phi_i}^{-1} \quad \text{son} \quad C^k \tag{6.2}$$

  Del mismo modo ya que $(U_j,\phi_j) \in \mathcal{F}$ se tiene que para todo $(U,\phi) \in \mathcal{F}_0$

$$\phi_j \circ \phi^{-1} \quad \text{y} \quad \phi \circ {\phi_j}^{-1} \quad \text{son} \quad C^k \tag{6.3}$$

Luego elegimos un entorno coordenado fijo $(U,\varphi)\in\mathcal{F}_0$ y se cumple que

$$\begin{aligned}\phi_i\circ{\phi_j}^{-1}&=\phi_i\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ{\phi_j}^{-1}\\&=\underbrace{(\phi_i\circ\varphi^{-1})}_{\text{es } C^k \text{ por } 6.2}\circ\underbrace{(\varphi\circ{\phi_j}^{-1})}_{\text{es } C^k \text{ por } 6.3}\end{aligned}$$

Luego $\phi_i\circ{\phi_j}^{-1}$ es C^k. La elección del $(U,\varphi)\in\mathcal{F}_0$ se puede hacer pues $\mathcal{F}_0$ cubre todo M. De forma similar se prueba que $\phi_j\circ{\phi_i}^{-1}$ es C^k.

- Finalmente $\mathcal{F}$ es maximal por construcción, de lo que se sigue que es única.

Así, $\mathcal{F}$, dada por la ecuación (6.1), es la única estructura diferenciable que contiene a $\mathcal{F}_0$.

■

Observación 6.2.1 *Es suficiente tener una familia de sistemas coordenados del tipo $\mathcal{F}_0$ para generar una estructura diferenciable.*

Proposición 6.2.2 *Un subconjunto abierto U de una variedad diferenciable $(M,\mathcal{F}_M)$ es él mismo una variedad diferenciable con la estructura diferencial*

$$\mathcal{F}_U=\{(V\cap U,\phi|_{V\cap U}):(V,\phi)\in\mathcal{F}_M\}$$

Proposición 6.2.3 *Sean $(M_1,\mathcal{F}_1)$ y $(M_2,\mathcal{F}_2)$ variedades diferenciables de dimensiones n_1 y n_2 respectivamente. Entonces $M_1\times M_2$ se transforma en una variedad diferenciable de dimensión n_1+n_2, con la estructura diferenciable $\mathcal{F}$ generada por el atlas*

$$\mathcal{J}=\{(U\times V,\varphi\times\psi)\,/(U,\varphi)\in\mathcal{F}_1,(V,\psi)\in\mathcal{F}_2\}$$

Dados $(U,\varphi)\in\mathcal{F}_1$ y $(V,\psi)\in\mathcal{F}_2$, $\varphi\times\psi:U\times V\to\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ es la función que aplica $(u,v)\mapsto(\varphi(u),\psi(v))$.

Demostración:
Sean $\mathcal{F}_1=\{(U_i,\varphi_i),i\in I\}$ y $\mathcal{F}_2=\{(U_j,\varphi_j),j\in J\}$ las estructuras diferenciables de M_1 y M_2, respectivamente.
$\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos de M_1 y $\{V_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento por abiertos de M_2. Así, $\{U_i\times V_j\}_{i\in I,j\in J}$ es un cubrimiento por abiertos de $M_1\times M_2$.

Consideremos $\left(U_{i_0}\times V_{j_0},\underbrace{\varphi_{i_0}\times\psi_{j_0}}_{\nu_0}\right),\ \left(U_{i_1}\times V_{j_1},\underbrace{\varphi_{i_1}\times\psi_{j_1}}_{\nu_1}\right)\in\mathcal{J}$.

Veamos que ν_0 y ν_1 conmutan bien.

$$\begin{aligned}\nu_0\circ{\nu_1}^{-1}(u,v)&=(\varphi_{i_0}\times\psi_{j_0})\circ(\varphi_{i_1}\times\psi_{j_1})^{-1}(u,v)\\&=(\varphi_{i_0}\times\psi_{j_0})\left(\varphi_{i_1}^{-1}(u),\psi_{j_1}^{-1}(v)\right)\\&=\left(\varphi_{i_0}\left(\varphi_{i_1}^{-1}(u)\right),\psi_{j_0}\left(\psi_{j_1}^{-1}(v)\right)\right)\\&=\left(\varphi_{i_0}\circ\varphi_{i_1}^{-1}(u),\psi_{j_0}\circ\psi_{j_1}^{-1}(v)\right)\end{aligned}$$

Por ser $\mathcal{F}_1$ de clase C^∞ se tiene que $\varphi_{i_0}\circ\varphi_{i_1}^{-1}\in C^\infty$. Del mismo modo, por ser $\mathcal{F}_2$ de clase C^∞ se sigue que $\psi_{j_0}\circ\psi_{j_1}^{-1}\in C^\infty$.
Luego, la función $\nu_0\circ{\nu_1}^{-1}:(u,v)\mapsto\big(\varphi_{i_0}\circ\varphi_{i_1}^{-1}(u),\psi_{j_0}\circ\psi_{j_1}^{-1}(v)\big)$ es C^∞.
De la misma manera se prueba que $\nu_1\circ{\nu_0}^{-1}$ es C^∞.

Si $\mathcal{F}$ es la familia maximal de entornos coordenados que contiene a la familia $\mathcal{J}$, entonces $(M_1\times M_2,\mathcal{F})$ es una variedad diferenciable de dimensión n_1+n_2.

■

Proposición 6.2.4 *El espacio topológico $M_n(\mathbb{R})$ es un espacio localmente euclídeo de dimensión n^2.*

Demostración:
En efecto, como $M_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ se tiene por un lado que $M_n(\mathbb{R})$ es de Hausdorff, y por otro que cada punto A de $M_n(\mathbb{R})$ tiene al mismo conjunto $M_n(\mathbb{R})$ como un entorno homeomorfo al abierto $\mathbb{R}^{n^2}$.

■

Proposición 6.2.5 $\mathcal{F}_0=\{(M_n(\mathbb{R}),\lambda)\}$ *el conjunto que consiste en único sistema coordenado, donde λ es el homeomorfismo de $M_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n^2}$. Entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ para $M_n(\mathbb{R})$ que contiene a $\mathcal{F}_0$.*

Demostración:
El homeomorfismo $\lambda:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n^2}$ asegura dos cosas: por un lado que $M_n(\mathbb{R})$ es un abierto conexo y por otro, que λ es una función coordenada. Luego el par $(M_n(\mathbb{R}),\lambda)$ es un sistema coordenado.
Observemos que $\lambda(\theta)=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{n^2}$ se sigue que el sistema coordenado es centrado en θ.

- $\mathcal{F}_0$ satisface la propiedad 1 de la Definición 6.2.4 pues tiene un sólo entorno coordenado y el abierto U del mismo es $M_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{F}_0$ satisface la propiedad 2 de la Definición 6.2.4 pues

$$\lambda\circ\lambda^{-1}=\imath\in C^\infty\quad\text{donde }\imath\text{ es la función identidad de }\mathbb{R}^{n^2}\text{ en }\mathbb{R}^{n^2}$$

Luego, por la Proposición 6.2.1 existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{F}_0$ y está dada por

$$F=\{(U,\phi):\phi\circ\lambda^{-1}\quad\text{y}\quad\lambda\circ\phi^{-1}\quad\text{son}\quad C^k\}$$

■

Proposición 6.2.6 $(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{F})$ *es variedad diferenciable de dimensión n^2 y clase C^∞.*

Demostración: El conjunto $M_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a R^{n^2}, por lo cual tiene una base numerable; además por la Proposición 6.2.4 se tiene que $M_n(\mathbb{R})$ es localmente euclídeo. Y por la Proposición 6.2.5 $\mathcal{F}$ es una estructura diferenciable para $M_n(\mathbb{R})$.
Luego el par $(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{F})$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2 y de clase C^∞.

■

Proposición 6.2.7 *$(GL(n,\mathbb{R}), \mathcal{F}_{GL})$ es una variedad diferenciable.*

Demostración:
El par $(M_n(\mathbb{R}), \mathcal{F})$ es una variedad diferenciable (con la estructura $\mathcal{F}$ definida en la Proposición 6.2.5), por la afirmación 4.4.1 sabemos que $GL(n,\mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $M_n(\mathbb{R})$, luego hereda la estructura diferencial

$$\mathcal{F}_{GL} = \left\{ \left(U_i \cap GL, \phi_i \Big|_{U_i \cap GL} \right) : (U_i, \phi_i) \in \mathcal{F} \right\}$$

donde GL denota al conjunto $GL(n,\mathbb{R})$.
Por lo tanto el par $(GL(n,\mathbb{R}), \mathcal{F}_{GL})$ es una variedad diferenciable.

■

El resultado que vimos para $M_n(\mathbb{R})$ es válido también para todo espacio vectorial real de dimensión finita.

Proposición 6.2.8 *Si V es un espacio vectorial real de dimensión n entonces tiene una estructura diferenciable natural $\mathcal{F}$.*

Demostración:
Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Consideremos los elementos de la base dual de $\{v_1, \ldots, v_n\}$, el conjunto de funcionales lineales $\{f_1, \ldots, f_n\}$ donde para todo $i, j = 1, \ldots, n$ se cumple que

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

El espacio dual de V es V^* generado por $\{f_1, \ldots, f_n\}$ y es homeomorfo a V. En efecto, la función m de V en V^* dada por $v_i \mapsto f_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ establece dicho homeomorfismo.
Por otra parte podemos establecer un homeomorfismo de V^* en $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\begin{aligned} h : V^* &\to \mathbb{R}^n \\ f_1 &\mapsto (1, 0, \ldots, 0) \\ f_2 &\mapsto (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ f_n &\mapsto (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Consideremos $\varphi = h \circ m$, como h y m son homeomorfismos, resulta φ homeomorfismo y está dado por

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to \mathbb{R}^n \\ v_1 &\mapsto (1, 0, \ldots, 0) \\ v_2 &\mapsto (0, 1, \ldots, 0) \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$v_n \mapsto (0,0,\ldots,1)$$

Ahora veamos cómo opera φ sobre un vector cualquiera de V: si $v \in V$ entonces se lo puede escribir de manera única como

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

y aplicando φ resulta que $\varphi(v) = (a_1,\ldots,a_n)$. Es decir que esta función da las coordenadas del vector v en la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ como un vector de $\mathbb{R}^n$.

Habiendo probado que V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, como hereda las propiedades topológicas de éste es decir tiene una base numerable, además todo punto v de V tiene al mismo V como entorno homeomorfo al abierto $\mathbb{R}^n$ de lo que se sigue que V es localmente euclídeo.

La familia $\mathcal{F}_0 = \{(V,\varphi)\}$ es una familia de sistemas coordenados que satisfacen las propiedades 1 y 2 de la Definición 6.2.4. Por lo tanto existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ para V que contiene a $\mathcal{F}_0$ (lo importante es que existe la estructura diferencial $\mathcal{F}$ para V).

$\blacksquare$

Observación 6.2.2 *El conjunto $GL^+(n,\mathbb{R})$ también es abierto en $M_n(\mathbb{R})$, por lo tanto éste también hereda la estructura diferenciable de $(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{F})$ y su estructura resulta:*

$$\mathcal{F}_{GL^+} = \left\{ \left(U_i \cap GL^+, \phi_i \Big|_{U_i \cap GL^+} \right) : (U_i,\phi_i) \in \mathcal{F} \right\}$$

donde GL^+ denota al conjunto $GL^+(n,\mathbb{R})$.

Definición 6.2.6 *Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones n y m, respectivamente.*
La función $f : M \to N$ se dice C^∞ en $p \in M$ si y sólo si para todo (U,φ) entorno coordenado de p en M y para todo (V,ψ) entorno coordenado de $f(p)$ en N tales que $f(U) \subset V$ se cumple que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

es C^∞ en $\varphi(p)$.

Definición 6.2.7 *Una función $f : M \to N$ es C^∞ si lo es en todo $p \in M$.*

Proposición 6.2.9 *La función $f : M \to N$ es C^∞ en $p \in M$ si y sólo si existen (U,φ), (V,ψ) entornos coordenados de $p \in M$ y de $f(p) \in N$, resp., tales que $f(U) \subset V$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ en algún entorno de $\varphi(p)$.*

Ver figura 6.1.

Resultado 6.2.1 *Las siguientes funciones son C^∞*

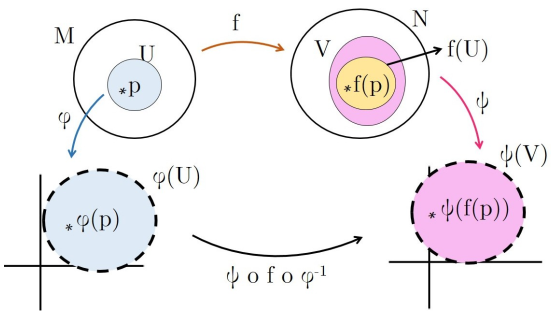

Figura 6.1: La función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^{∞}.

1. $\alpha : GL \times GL \to GL$ *que aplica* $(A, B) \mapsto AB$.

2. $\beta : GL \to GL$ *dada por* $A \mapsto A^{-1}$.

Demostración:

1. La función $\alpha : GL \times GL \to GL$ dada por $\alpha(A, B) = AB$ es diferenciable. En efecto: sea $(A, B) \in GL \times GL$

   a) Existe el entorno coordenado $(GL \times GL, \nu)$ de (A, B) en $GL \times GL$. Dicho de acuerdo a la notación de la Proposición 6.2.9: $U = GL \times GL$ y $\varphi = \nu$ es la función del Lema 5.2.4 dada por $\nu(A, B) = (A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n) \in R^{n^2}$.

   b) Existe el entorno coordenado (GL, γ) de AB en GL. Dicho de acuerdo a la notación de la Proposición 6.2.9: $V = GL$ y $\psi = \gamma$ es la función de la Observación 5.2.1 dada por $\gamma(A) = (A_1, \ldots, A_n)$.
   Ver figura 6.1 y considerar:

$$\begin{array}{ll} M = GL \times GL & N = GL \\ f = \alpha & \\ p = (A, B) & f(p) = \alpha(A, B) = AB \\ \varphi = \lambda \times \lambda & \psi = \lambda \end{array}$$

   c) $\alpha(\underbrace{GL \times GL}_{U}) \subset \underbrace{GL}_{V}$.

   d) La función $\psi \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ es la función $\overline{\alpha}$ del Lema 5.2.3 y está dada por

$$\overline{\alpha}(a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{1k} b_{k1}), \ldots, \sum_{k=1}^{n} (a_{nk} b_{kn}) \right)$$

   función vectorial cuyas funciones componentes son polinomios, por lo tanto son C^{∞} y resulta $\overline{\alpha}$ C^{∞}.

2. La función $\beta : GL \to GL$ dada por $\beta(A) = A^{-1}$ es C^{∞}. En efecto: sea $A \in GL$

   a) Existe el entorno coordenado (GL, γ) de $A \in GL$. Según la notación de la Proposición 6.2.9: $U = GL$ y $\varphi = \gamma$ es la función de la Observación 5.2.1 dada por $\gamma(A) = (A_1, \ldots, A_n)$.

b) De la misma forma existe el entorno (GL,γ) de $A^{-1}\in GL$. Según la notación de la Proposición 6.2.9: $U = GL$ y $\psi = \gamma$ es la función de la Observación 5.2.1 dada por $\gamma(A) = (A_1,\dots,A_n)$.

c) La función $\psi\circ\alpha\circ\varphi^{-1}$ es la función $\overline{\beta}$ del Lema 5.2.5 y está dada por

$$\overline{\beta}(A_1,\dots,A_n) = \left(\frac{A_{11}}{\det(A)},\dots,\frac{A_{nn}}{\det(A)}\right)$$

función vectorial en la que cada función componente es de la forma

$$\frac{A_{ij}}{\det(A)} = \frac{(-1)^n\det(A(i/j))}{\det(A)}$$

donde A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} de la matriz A.
Por lo tanto $\overline{\beta}$ función vectorial cuyas funciones componentes son polinomios, por lo tanto son C^∞ y resulta $\overline{\beta}$ C^∞.

■

Definición 6.2.8 *Sea G una variedad C^∞ con una base numerable. Si G es un grupo, y si la función $(x,y)\mapsto xy$ del producto de variedades $G\times G$ en G y la función $x\mapsto x^{-1}$ de G en G son ambas diferenciables entonces G se denomina un grupo de Lie.*

Teorema 6.2.1 *$GL(n,\mathbb{R})$ es un Grupo de Lie.*

Demostración:
Por el Resultado 6.2.7 se tiene que $GL(n,\mathbb{R})$ es una variedad C^∞, ya teníamos que tiene una base numerable (pues $M_n(\mathbb{R})$ la tiene), además es grupo.
Por el Resultado 6.2.1 las funciones $(A,B)\to AB$ del producto de variedades $GL\times GL$ y $A\mapsto A^{-1}$ de GL en GL en GL son ambas diferenciables.
Luego $GL(n,\mathbb{R})$ es un Grupo de Lie.

■

6.3. Conclusiones del Capítulo 6

En este capítulo hemos obtenido los siguientes resultados:

Resultado 6.3.1 *El espacio topológico $M_n(\mathbb{R})$ es un espacio localmente euclídeo de dimensión n^2.*

Resultado 6.3.2 *$\mathcal{F}_0 = \{(M_n(\mathbb{R}),\lambda)\}$ es el conjunto que consta de un único sistema coordenado, donde λ es el homeomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$. Entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ para $M_n(\mathbb{R})$ que contiene a $\mathcal{F}_0$.*

Resultado 6.3.3 *$(M_n(\mathbb{R}),\mathcal{F})$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2 y de clase C^∞.*

Resultado 6.3.4 *$(GL(n,\mathbb{R}),\mathcal{F}_{GL})$ es una variedad diferenciable.*

Resultado 6.3.5 *$GL^+(n,\mathbb{R})$ es un abierto en $M_n(\mathbb{R})$, por lo tanto hereda la estructura diferenciable dada por*

$$\mathcal{F}_{GL^+} = \left\{ \left(U_i \cap GL^+, \phi_i \Big|_{U_i \cap GL^+} \right) : (U_i, \phi_i) \in \mathcal{F} \right\}$$

donde GL^+ denota al conjunto $GL^+(n,\mathbb{R})$.

Resultado 6.3.6 *$GL(n,\mathbb{R})$ es un Grupo de Lie.*

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Capítulo 1: Preliminares

7.1.1. La función determinante

Definición 7.1.1 *Denominaremos determinante de orden n a una función* det *que va de $M_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$ y verifica los siguientes axiomas:*

1. $\det(A_1 \ldots A_{i_1} + A_{i_2} \ldots A_n) = \det(A_1 \ldots A_{i_1} \ldots A_n) + \det(A_1 \ldots A_{i_2} \ldots A_n)$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$.
2. $\det(A_1 \ldots cA_i \ldots A_n) = c \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_n)$, *para todo* $c \in \mathbb{R}$.
3. $A_i = A_{i+1} \Rightarrow \det(A_1 \ldots A_i A_{i+1} \ldots A_n) = 0$, *para todo* $i = 1, \ldots, n-1$.
4. $\det(I_n) = 1$.

Ejemplo 7.1.1 *Las siguientes funciones son ejemplos de determinante:*

$$\det : M_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad\qquad \det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$A = (a) \mapsto \det(A) = a \qquad\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - cb$$

Para calcular el de matrices de orden $n \geq 3$ necesitamos definir lo siguiente:

Definición 7.1.2 *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Denotaremos con A_{ij} al producto*

$$(-1)^{i+j} \det\left(A(i/j)\right)$$

donde $A(i/j)$ es la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de suprimir la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna de A. El número A_{ij} recibe el nombre de cofactor del elemento a_{ij} de la matriz A.

Proposición 7.1.1 *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces la asignación*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{con } i \text{ fijo } (1 \leq i \leq n) \tag{7.1}$$

es el desarrollo del determinante por la $i-$ésima fila.

Demostración: Ver páginas 161 - 163 $-$ [Ro II].
Observación: Se calcula de forma análoga fijando la $j-$ésima columna.

Definición 7.1.3 *Se denomina adjunta de una matriz cuadrada a la traspuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor. Notación: Adj(A).*

Teorema 7.1.1 *Si A y B pertenecen a $M_n(\mathbb{R})$ entonces* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración: Ver página 169 $-$ [Ro II].

Teorema 7.1.2 *Para todo $A \in M_n(\mathbb{R})$ se verifica que:*

$$A\mathit{Adj(A)} = \mathit{Adj(A)}A = \det(A)I_n$$

Demostración: Ver página 171 $-$ [Ro II].
Como consecuencia de este teorema tenemos que si $\det(A) \neq 0$ entonces podemos calcular su inversa de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj(A)}}{\det(A)}$$

Teorema 7.1.3 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces* $\det(A) = \det(A^T)$.

Demostración: Ver páginas 166 $-$ [Ro II].

Teorema 7.1.4 *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. A es inversible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Demostracion: Ver páginas 172 - 173 $-$ [Ro II].

Teorema 7.1.5 *Los determinantes de matrices inversas son escalares recíprocos.*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demostración: Ver páginas 173 - 174 $-$ [Ro II].

7.1.2. Matrices ortogonales

Definición 7.1.4 *Decimos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si, y sólo si $A^{-1} = A^T$.*

Proposición 7.1.2 *$A \in M_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si, y sólo si $AA^T = A^TA = I_n$.*

Demostración: Ver página 117 $-$ [Ro II].

Proposición 7.1.3 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $B \in M_n(\mathbb{R})$ son ortogonales entonces AB es ortogonal.*

Demostración: Ver página 118 $-$ [Ro II].

Proposición 7.1.4 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es ortogonal entonces* $\det(A) = \pm 1$.

Demostración:
Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal.

$$\begin{aligned}
AA^T &= A^T A = I_n && \text{(por la Proposición 7.1.2)} \\
\det(AA^T) &= \det(A^T A) = 1 && \\
\det(A)\det(A^T) &= \det(A^T)\det(A) = 1 && \\
\det(A)\det(A) &= \det(A)\det(A) = 1 && \text{(por Teorema 7.1.3)} \\
[\det(A)]^2 &= 1 && \\
|\det(A)| &= 1 &&
\end{aligned}$$

Donde $|\det(A)|$ es el valor absoluto de $\det(A)$. Por lo tanto $\det(A) = \pm 1$.

$\blacksquare$

Observación 7.1.1 *No toda matriz de determinante* ± 1 *es ortogonal.*

En otras palabras, el recíproco de la Proposición 7.1.4 no es válido. En efecto, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1$, sin embargo $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq I_n$. Luego A no es ortogonal.

7.2. Capítulo 2: Grupos

Contraejemplo correspondiente a la Observación 2.1.1: *No toda clase lateral derecha es también una clase lateral izquierda.*
En efecto, consideremos el grupo S_3 de todas las aplicaciones biyectivas del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$, cuyos elementos son las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rrr}
x_1 \mapsto x_1 & x_1 \mapsto x_2 & x_1 \mapsto x_2 \\
e : x_2 \mapsto x_2 & \phi : x_2 \mapsto x_1 & \psi : x_2 \mapsto x_3 \\
x_3 \mapsto x_3 & x_3 \mapsto x_3 & x_3 \mapsto x_1 \\
\\
x_1 \mapsto x_3 & x_1 \mapsto x_1 & x_1 \mapsto x_3 \\
\phi\psi : x_2 \mapsto x_2 & \psi\phi : x_2 \mapsto x_3 & \psi^2 : x_2 \mapsto x_1 \\
x_3 \mapsto x_1 & x_3 \mapsto x_2 & x_3 \mapsto x_2
\end{array}$$

Tenemos $S_3 = \{\phi, \psi, e, \psi\phi, \phi\psi, \psi^2\}$ y observemos que $\phi\psi \neq \psi\phi$.
Sea el subgrupo $H = \{e, \phi\}$, consideremos las clases laterales ψH y $H\psi$:

$$H\psi = \{\psi, \phi\psi\}$$
$$\psi H = \{\psi, \psi\phi\}$$

Como $\phi\psi \neq \psi\phi$ concluímos que $\psi H \neq H\psi$.

7.3. Capítulo 4: Espacios topológicos

Demostración de la Proposición 4.1.5: *Todo espacio métrico es topológico.*
Demostración:
Si (M, d) es espacio métrico entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x)/x \in M \wedge r > 0\}$ sirve de base para una topología $\mathcal{U}_d$ en M llamada la topología métrica (o topología inducida por la métrica), definida de la siguiente manera:

$$A \in \mathcal{U}_d \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0 : B_r(x) \subset A.$$

Observemos que los abiertos de $\mathcal{U}_d$ coinciden con los abiertos de la Definición 4.1.3.

■

Contraejemplo correspondiente a la Observación 4.1.5: *No todo espacio topológico es métrico.*
En efecto, sea el espacio topológico $(X,\mathcal{U})$, con X infinito y $\mathcal{U}$ la topología de los complementos finitos. Por un lado, si suponemos que existe una métrica d para X tal que los abiertos dados por la métrica coinciden con los de $\mathcal{U}$, tendremos que $(X,\mathcal{U})$ es de Hausdorff. Por otra parte, X infinito con la topología de los complementos finitos no es de Hausdorff. ¡Absurdo! El absurdo provino de haber supuesto que $(X,\mathcal{U})$ era metrizable.

■

Demostración de la Proposición 4.1.6 *Todo espacio normado es métrico.*
Demostración:
Si $x \mapsto \|x\|$ es una norma en un espacio vectorial X y si se define d por medio de $d(x, y) = \|x - y\|$ para $x, y \in X$, entonces d es una métrica en X.
Ver página 81 $-$ [Ba].

■

Contraejemplo correspondiente a la Observación 4.1.6: *No toda métrica proviene de alguna norma, en otras palabras no todo espacio métrico es normado.*
En efecto, sea X conjunto con al menos dos elementos distintos, entonces la métrica discreta dada por

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{x = y;} \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \end{aligned}$$

no proviene de ninguna norma. Más aún, esta métrica se puede definir en cualquier conjunto X con dos o más elementos, mientras que el concepto de norma sólo se define en espacio vectorial.
Supongamos que X es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y d proviene de una norma $||.||$, sea λ tal que $|\lambda| > 1$ y sean $x, y : x \neq y$, es claro que $\lambda x \neq \lambda y$. Luego:

$$\begin{aligned} 1 &= d(\lambda x, \lambda y) \\ &= ||\lambda x - \lambda y|| \\ &= ||\lambda(x - y)|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |\lambda|||(x-y)|| \\ &= |\lambda| d(x,y) \\ &= |\lambda| 1 \\ &= |\lambda| > 1. \quad \text{¡Absurdo!} \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 4.1.4: *Dos normas $\|.\|$ y $\|.\|^*$ de un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si existen constantes $a > 0, b > 0$ tales que para todo $x \in X$, $a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|$.*
Demostración:
Por definición, dos normas $\|.\|$ y $\|.\|^*$ son equivalentes si, y sólo si las correspondientes distancias inducidas determinan la misma topología.
Supongamos que las normas son equivalentes. Entonces, las bolas relativas a ellas son:

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\} \wedge \mathcal{B}^* = \{B_r^*(x) : x \in X, r > 0\}$$

constituyen dos bases de una misma topología en X. Dado que $B_1(0)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r^*(0) \subset B_1(0)$, luego $\|x\|^* < r$ implica $\|x\| < 1$.
Consideremos $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < r$ y sea $y \in X$.
Si $y = 0$ entonces es trivial que $a\|y\| \leq \|y\|^*$.

Si $y \neq 0$ entonces $u = a\dfrac{y}{\|y\|^*}$ verifica $\|u\|^* = a < r$ y, por lo tanto, $\|u\| < 1$. Desarrollando:

$$1 > \|u\| = \left\| a\frac{y}{\|y\|^*} \right\| = \frac{a}{\|y\|^*}\|y\|$$

Luego

$$\frac{a}{\|y\|^*}\|y\| < 1 \Rightarrow a\|y\| \leq \|y\|^*$$

De modo similar obtenemos la otra desigualdad.

Supongamos ahora que existen constantes reales $a > 0$ y $b > 0$ tales que para todo $x \in X$, $a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|$.
Sean $x \in X$ y $r > 0$.

$$\begin{aligned} y \in B_{ar}^*(x) &\Rightarrow \|y-x\|^* < ar \\ &\Rightarrow a\|y-x\| \leq \|y-x\|^* < ar \\ &\Rightarrow a\|y-x\| < ar \\ &\Rightarrow \|y-x\| < r \\ &\Rightarrow y \in B_r(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{ar}^*(x) \subset B_r(x)$. En otros términos, esto significa que toda bola $B_r(x)$ contiene una bola $B_{ar}^*(x)$, para todo $x \in X$.
Por otra parte

$$\begin{aligned} y \in B_{\frac{r}{b}}(x) &\Rightarrow \|y-x\| < \frac{r}{b} \\ &\Rightarrow \|y-x\|^* \leq b\|y-x\| < b\left(\frac{r}{b}\right) = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|y-x\|^* < r \\ &\Rightarrow y \in B_r^*(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{\frac{r}{b}}(x) \subset B_r^*(x)$. Esto significa que toda bola $B_r^*(x)$ contiene una bola $B_{\frac{r}{b}}(x)$, para todo $x \in X$.
En otros términos, todo abierto con una distancia es abierto con la otra, concluímos que las normas generan la misma topología en X, luego son equivalentes.

■

Demostración del Teorema 4.1.5: *Todos los espacios vectoriales de dimensión finita son normados.*
Demostración:
Sea X espacio vectorial tal que $dim(X) = n$, y sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de X.
Sea la función $\phi : X \to \mathbb{K}^n$ tal que $v_i \mapsto e_i$, donde $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, y sea $\|.\|$ una norma en $\mathbb{K}^n$.
Es claro que ϕ es transformación lineal biyectiva.
En X definimos la función $N : X \to \mathbb{R}$ que aplica $x \mapsto N(x) = \|\phi(x)\|$. N es una norma para X. En efecto:

1. $N(x) = \|\phi(x)\| \geq 0$. (Por definición de N y porque $\|.\|$ es norma).
2. $N(x) = 0 \Rightarrow \|\phi(x)\| = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. (Por definición de N, porque $\|.\|$ es norma y porque ϕ es inyectiva).
3. $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow N(\lambda x) = \|\phi(\lambda x)\| = \|\lambda\phi(x)\| = |\lambda|\|\phi(x)\| = |\lambda|N(x)$. (Por def. de N, porque ϕ es lineal y porque $\|.\|$ es norma en $\mathbb{K}^n$).
4. $N(x+y) = \|\phi(x+y)\| = \|\phi(x)+\phi(y)\| \leq \|\phi(x)\| + \|\phi(y)\| = N(x) + N(y)$. (Por def. de N, porque ϕ es lineal y porque $\|.\|$ es norma en $\mathbb{K}^n$).

■

Demostración del Lema 4.1.1: *Sea $f : X \to Y$ continua. Si $F \subset Y$ es cerrado entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*
Demostración:

$$\begin{aligned} F \text{ cerrado en } Y &\Rightarrow cF \text{ abierto en } Y \\ &\Rightarrow f^{-1}(cF) \text{ abierto en } X \quad \text{pues } f \text{ es continua} \\ &\Rightarrow c\left[f^{-1}(F)\right] \text{ abierto en } X \quad \text{por el Lema 5.1.2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(F) \text{ cerrado en } X \end{aligned}$$

Esto dice que la imagen inversa de un cerrado por una función continua es cerrada.

■

Demostración del Teorema 4.1.6: *Si X es de dimensión finita entonces todas las normas son equivalentes.*
Demostración:
En base al Teorema 4.1.5 si probamos que todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$ resultará que lo son en X. Para ello probaremos que son equivalentes a la norma euclídea $\|.\|_2$ en $\mathbb{R}^n$.
Sea $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$

1. Veamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \|x\| \leq b\|x\|_2$.
   Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i v_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|v_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{i,j} \|v_i\| \\
&= \left(\max_{i,j} \|v_i\| \right) \sum_{i=1}^{n} |x_i|
\end{aligned}$$

   aplicando la desigualdad de Hölder a $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \left(\max_{i,j} \|v_i\| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\max_{i,j} \|v_i\| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \underbrace{\left(\max_{i,j} \|v_i\| \right) n^{\frac{1}{2}}}_{b} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto existe $b = \left(\max_{i,j} \|v_i\| \right) n^{\frac{1}{2}}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\|x\| \leq b\|x\|_2$.

2. Veamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a\|x\|_2 \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$.
   Supongamos, razonando por el absurdo, que para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $x_a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a\|x_a\|_2 > \|x_a\|$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, si tomamos $a = \dfrac{1}{n}$ existe x_n tal que $\dfrac{1}{n}\|x_n\|_2 > \|x_n\|$.
   Sea $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_2}$, luego $\|y_n\|_2 = 1$. Por lo tanto

$$y_n \in S = \{z / \|z\|_2 = 1\}$$

   Como estamos en $\mathbb{R}^n$ con la norma euclídea, S es cerrado y acotado y, por ende, compacto.
   Luego existe una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ que converge a un vector

$y_0 \in S$, es decir que $\|y_0\|_2 = 1$. (En símbolos $y_{n_k} \to y_0$.)
Por (1.) $\exists b : \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq b\|x\|_2$, luego

$$\begin{aligned} \|\|y_{n_k}\| - \|y_0\|\| &\leq \|y_{n_k} - y_0\| \\ &\leq b\|y_{n_k} - y_0\|_2 \to 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|y_{n_k}\| \to \|y_0\|$.
Por otra parte

$$\|y_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_2} \right\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|_2} < \frac{1}{n}$$

Por unicidad del límite para sucesiones de números reales tenemos que $\|y_0\| = 0$ y por definición de norma $y_0 = 0$. Luego $\|y_0\|_2 = 0$, pero teníamos que $\|y_0\|_2 = 1$. ¡Contradicción! Por lo tanto existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $a\|x\|_2 \leq \|x\|$.

■

Demostración del Lema 4.2.1: *Sean* $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ *espacios vectoriales normados. y sea* $\lambda : E \to F$ *un operador lineal. Entonces las siguientes dos condiciones sobre* λ *son equivalentes:*

1. λ *es continua.*
2. *Existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo* $v \in E$ *se cumple que:*

$$\|\lambda(v)\| \leq C\|v\|$$

La demostración está realizada en base a la página $358 -$ [La]
Demostración:
Veamos que (2) implica (1):
Sea $\epsilon > 0$. Por (2) existe $C > 0$ tal que para todo $v \in E$, $\|\lambda(v)\| \leq C\|v\|$.
Sea $\delta = \dfrac{\epsilon}{C}$ y sean $x, y \in E$ tales que

$$\|x - y\| < \delta = \frac{\epsilon}{C} \tag{7.2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda(x) - \lambda(y)\| &= \|\lambda(x - y)\| && \text{(porque } \lambda \text{ es lineal)} \\ &\leq C\|x - y\| && \text{(por 2)} \\ &< C\delta && \text{(por 7.2)} \\ &= C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon \end{aligned}$$

Luego λ es uniformemente continua, y por lo tanto, continua.

Ahora, veamos que (1) implica (2):
Llamemos θ al elemento neutro de E y 0 al neutro de F. Como λ es continua, en particular es continua en θ. Observemos también que $\lambda(\theta) = 0$.

Porque λ es continua en θ, dado $\epsilon = 1$, existe δ tal que si $x \in E$ y $\|x\| < \delta$, entonces $\|\lambda(x)\| < 1$.
Sea v un elemento de E, $v \neq \theta$. Luego $\left\|\frac{\delta}{2\|v\|}v\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ y por lo tanto

$$\left\|\lambda\left(\frac{\delta}{2\|v\|}v\right)\right\| < 1.$$

Luego por propiedades de norma y porque λ es lineal tenemos que

$$\left\|\lambda\left(\frac{\delta}{2\|v\|}v\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|v\|}\|\lambda(v)\| < 1 \Rightarrow \|\lambda(v)\| < \frac{2}{\delta}\|v\|$$

Si tomamos $C = \frac{2}{\delta}$ concluímos que para todo $v \in E$, $\|\lambda(v)\| < C\|v\|$.
Si $v = \theta$ también vale $\lambda(v) < C\|v\|$.

■

7.4. Capítulo 5: Grupos topológicos

Demostración del Lema 5.1.1: *Si G es espacio topológico entonces la función $\imath : G \to G$ que aplica $\imath : x \mapsto x$ es continua.*
Demostración:
Sea $V \in \mathcal{U}$ y sea $\imath : x \mapsto x$ entonces $\imath^{-1}(V) = V \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\imath$ es continua.

■

Demostración del Lema 5.1.2: *Sean $f : X \to Y$ y $B \subset Y$. Entonces*

$$c[f^{-1}(B)] = f^{-1}(cB)$$

Demostración:

1. $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(cB) = X$. En efecto, como $X = f^{-1}(Y)$ e $Y = B \cup cB$ tenemos que $X = f^{-1}(B \cup cB)$, luego $X = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(cB)$.

2. $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(cB) = \emptyset$. En efecto, supongamos, razonando por el absurdo que existe $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(cB)$, luego $x \in f^{-1}(B) \wedge x \in f^{-1}(cB)$. Por propiedades de imagen directa e inversa, tenemos que $f(x) \in B \wedge f(x) \in cB$ y, por lo tanto

   $$f(x) \in B \cap cB = \emptyset$$

   Con lo cual llegamos a una contradicción Luego $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(cB) = \emptyset$.

Por lo tanto, $c[f^{-1}(B)] = f^{-1}(cB)$.

■

Demostración del Lema 5.1.3: *Sean $(G,\mathcal{U})$ y $(G\times G, \mathcal{W})$ espacios topológicos donde $\mathcal{W}$ es la topología producto generada por productos de abiertos de G. Para $a \in G$ sean los conjuntos:*

- $\{a\} \times G$ *con la topología relativa inducida por* $\mathcal{W}$.
- $G \times \{a\}$ *con la topología relativa inducida por* $\mathcal{W}$.

Entonces todo abierto U_a *de* $\{a\} \times G$ *es de la forma* $\{a\} \times U$*, con* $U \in \mathcal{U}$*, y todo abierto en* $G \times \{a\}$ *está dado por* $U \times \{a\}$*, con* $U \in \mathcal{U}$.
Demostración:
Sea U_a abierto en $\{a\} \times G \subset G \times G$ con la topología inducida por $\mathcal{W}$, entonces:

$$\begin{aligned} U_a &= (\{a\} \times G) \cap W \quad \text{con } W \in \mathcal{W} \\ &= (\{a\} \times G) \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \right) \quad \text{donde } A_i, B_i \in \mathcal{U}, \forall i \in I \\ &= \bigcup_{i \in I} [(\{a\} \times G) \cap (A_i \times B_i)] \\ &= \bigcup_{i \in I} [(\{a\} \cap A_i) \times (G \cap B_i)] \\ &= \bigcup_{i \in I} [\{a\} \times B_i] \\ &= \{a\} \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \end{aligned}$$

Si llamamos $U = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{U}$ tenemos que $U_a = \{a\} \times U$, con $U \in \mathcal{U}$.
Del mismo modo se prueba que todo abierto en $G \times \{a\}$ es de la forma $U \times \{a\}$, con $U \in \mathcal{U}$.

■

Demostración del Lema 5.1.4: *Sean* $(G,\mathcal{U})$ *espacio topológico y* $a \in G$*. Entonces las siguientes funciones son continuas:*

$$\begin{aligned} \beta_a : G &\to \{a\} \times G \\ x &\mapsto (a, x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \overline{\beta_a} : G &\to G \times \{a\} \\ x &\mapsto (x, a) \end{aligned}$$

Demostración:
Sea V abierto en $\{a\} \times G$.
Por el Lema 5.1.3 existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V = \{a\} \times U$, luego

$$\begin{aligned} {\beta_a}^{-1}(V) &= {\beta_a}^{-1}(\{a\} \times U) \\ &= U \end{aligned}$$

Luego, para todo V abierto en $\{a\} \times G$, se cumple que: ${\beta_a}^{-1}(V) = U \in \mathcal{U}$.
Por lo tanto $\beta_a : x \mapsto (a, x)$ es continua.
De la misma manera se prueba que $\overline{\beta_a}$ es continua.

■

Demostración del Lema 5.2.2: *Sean* $\lambda : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ *homeomorfismo, y* $A \subset X$: $A \neq \emptyset$*. Entonces la restricción de* λ *en* A *es homeomorfismo sobre* $\lambda(A)$*. Denotamos* $\gamma = \lambda|_A$.
Demostración:
Sea $\mathcal{U}$ la topología de X y $\mathcal{V}$ la de Y. Como $A \neq \emptyset$ tenemos que $\lambda(A) \neq \emptyset$, luego tiene sentido definir en $\lambda(A)$ una topología inducida por $\mathcal{V}$. Supongamos que $\mathcal{W}$ es la toplogía relativa de $\mathcal{U}$ en A y $\mathcal{Z}$ la toplogía relativa de $\mathcal{V}$ en $\lambda(A)$. Veamos que γ es homeomorfismo:

- γ es inyectiva, pues λ lo es.
- γ es sobreyectiva sobre $\lambda(A)$.
- La función $\gamma : (A,\mathcal{W}) \to (\lambda(A),\mathcal{Z})$ es continua. En efecto, sea $Z \in \mathcal{Z}$. Entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $Z = V \cap \lambda(A)$. Luego:

  $$\begin{aligned} \gamma^{-1}(Z) &= \gamma^{-1}(V \cap \lambda(A)) \\ &= \{x \in A : \gamma(x) \in V \cap \lambda(A)\} \end{aligned}$$

  como $\gamma = \lambda|_A$ se sigue que

  $$\gamma^{-1}(Z) = \{x \in A : \lambda(x) \in V \cap \lambda(A)\}$$

  por definición de imagen inversa

  $$\gamma^{-1}(Z) = \lambda^{-1}(V \cap \lambda(A))$$

  por propiedades de imagen inversa

  $$\begin{aligned} \gamma^{-1}(Z) &= \lambda^{-1}(V) \cap \lambda^{-1}(\lambda(A)) \\ &= \lambda^{-1}(V) \cap A \end{aligned}$$

  Tenemos que $V \in \mathcal{V}$ y λ continua, por lo tanto $\lambda^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Luego, por definición de $\mathcal{W}$, $\lambda^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{W}$. Concluímos que para todo $Z \in \mathcal{Z}$, $\gamma^{-1}(Z) \in \mathcal{W}$.
- γ es biyección, luego existe γ^{-1} y es continua. La demostración es similar a la forma en que demostramos que γ continua. Luego $\gamma^{-1} : (\lambda(A),\mathcal{Z}) \to (A,\mathcal{W})$ es continua.

Por lo tanto $\gamma = \lambda|_A$ es homeomorfismo.

$\blacksquare$

Demostración del Lema 5.2.6: *Si* $(X,\mathcal{U})$ *es un espacio topológico de Hausdorff, entonces todo subconjunto* $V \subset X$ *se transforma en un subespacio topológico de Hausdorff con la topología relativa inducida por* $\mathcal{U}$*.*
Demostración:
Sea $V \subset X, V \neq \emptyset$ y sean $x, y \in V : x \neq y$.
X es de Hausdorff, luego existen $U_x, U_y \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y además $U_x \cap U_y = \emptyset$.
Si consideramos los conjuntos

$$V_x = V \cap U_x \quad \text{abierto en } V$$

$$V_y = V \cap U_y \quad \text{abierto en } V$$

tenemos que

$$x \in V \wedge x \in U_x \Rightarrow x \in V_x$$
$$y \in V \wedge x \in U_y \Rightarrow y \in V_y$$

luego, como $V_x \cap V_y \subset U_x \cap U_y = \emptyset$ tenemos que

$$V_x \cap V_y = \emptyset$$

Por lo tanto V es de Hausdorff.

■

Demostración de la Proposición 5.4.1: *Si G es grupo topológico y $g \in G$ entonces las funciones L_g y R_g son homeomorfismos de G.*
Demostración:

1. Veamos que existe la función inversa de L_g.

   a) L_g es inyectiva. En efecto, sean x, y tales que $L_g(x) = L_g(y)$, luego

   $$\begin{aligned} L_g(x) &= L_g(y) \\ gx &= gy \qquad \text{(por definicion de } L_g) \end{aligned}$$

   multiplicando a izquierda por g^{-1} en ambos miembros tenemos que

   $$g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy)$$

   luego, por asociatividad del producto en el grupo

   $$\begin{aligned} (g^{-1}g)x &= (g^{-1}g)y \\ ex &= ey \qquad \text{(donde } e \text{ es el neutro del grupo } G) \\ x &= y \end{aligned}$$

   De esta forma queda probado que L_g es inyectiva.

   b) L_g es sobreyectiva. En efecto, sea $y \in G$, luego existe $x = g^{-1}y \in G$ tal que $L_g(x) = L_g(g^{-1}y) = g(g^{-1}y) = y$. Así, queda probado que L_g es sobreyectiva.

2. L_g es continua. En efecto, por el Lema 5.1.4 sabemos que $\beta_g : x \to (g, x)$ es continua, y por (2) de la definición de grupo topológico tenemos que $\alpha : (x, y) \mapsto xy$ es continua. Observemos además que para todo $x \in G$, $\alpha \circ \beta_g(x) = \alpha(g, x) = gx = L_g(x)$. Por lo tanto $L_g = \alpha \circ \beta_g$ es continua.

3. La función inversa de L_g es $L_{g^{-1}}$. En efecto, para todo $x \in G$ se cumple que:

   $$L_g \circ L_{g^{-1}}(x) = L_g(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = x$$
   $$L_{g^{-1}} \circ L_g(x) = L_{g^{-1}}(gx) = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x$$

   Por otro lado, de (2.) se deduce que $L_{g^{-1}}$ es continua.

Así, queda demostrado que la función L_g es homeomorfismo.
Análogamente, R_g es homeomorfismo.

■

Demostración de la Proposición 5.4.4: *La familia de los entornos del elemento identidad de un grupo G, $\mathfrak{U}$, tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathfrak{U} \neq \emptyset$*. Además, si* $U \in \mathfrak{U}$ *entonces* $e \in U$.
2. *Para* $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$*, existe* $U_3 \in \mathfrak{U}$ *tal que* $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.
3. *Para todo* $U \in \mathfrak{U}$*, existe* $V \in \mathfrak{U}$ *tal que* $VV^{-1} \subset U$.
4. *Para todo* $U \in \mathfrak{U}$ *y para todo elemento* $a \in U$*, existe* $V \in \mathfrak{U}$ *tal que* $aV \subset U$.
5. *Para todo* $U \in \mathfrak{U}$ *y todo elemento* $g \in G$*, existe* $V \in \mathfrak{U}$ *tal que* $gVg^{-1} \subset U$.

Demostración: Basada en pág 178 - [Ma]

1. *a*) $\mathfrak{U} \neq \emptyset$. En efecto, existe G entorno de e, luego $G \in \mathfrak{U}$.
   b) Si $U \in \mathfrak{U}$ entonces $e \in U$. En efecto, si U es entorno de e, y por definición de entorno se deduce que $e \in U$.

2. Sean $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$. Como U_1 y U_2 son entornos de e existen V_1 y V_2 abiertos tales que $e \in V_1 \subset U_1 \wedge e \in V_2 \subset U_2$. Si llamamos $U_3 = V_1 \cap V_2$, entonces U_3 es entorno abierto de e. Por lo tanto existe $U_3 \in \mathfrak{U}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

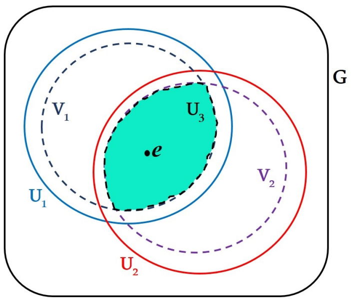

Figura 7.1: Dados $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, existe $U_3 \in \mathfrak{U}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

3. Por hipótesis G es grupo topológico, luego la función

$$\begin{aligned} \delta : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua y cumple que $\delta(e, e) = e$. Como δ es continua, entonces para todo entorno U de $e = \delta(e, e)$ existe un entorno $V \times V$ de (e, e) tal que

$$\delta(V \times V) \subset U$$

observemos que $\delta(V \times V) = VV^{-1}$, luego

$$VV^{-1} \subset U$$

Por lo tanto, para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $VV^{-1} \subset U$.

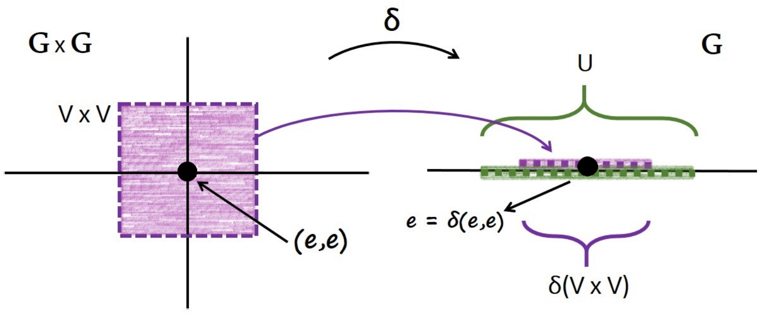

Figura 7.2: Dado $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $\delta(V \times V) = VV^{-1} \subset U$.

4. Sea $U \in \mathfrak{U}$ y sea $a \in U$. La función L_a de G en G dada por $L_a(x) = ax$ es continua y verifica que $L_a(e) = a$. Por la continuidad de L_a, para todo entorno U de $a = L_a(e)$, existe un entorno V de e tal que $L_a(V) \subset U$. Por otra parte, como $L_a(V) = aV$, se cumple que $aV \subset U$.

5. Sea $U \in \mathfrak{U}$ y sea $g \in G$. La función

$$\begin{aligned} L_g R_{g^{-1}} : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

es continua, y verifica que $L_g R_{g^{-1}}(e) = e$. Luego, para un entorno U de $e = L_g R_{g^{-1}}(e)$ existe un entorno V de e tal que $L_g R_{g^{-1}}(V) \subset U$. Como $L_g R_{g^{-1}}(V) = gVg^{-1}$ concluímos que $gVg^{-1} \subset U$.

■

Demostración de la Proposición 5.4.5: *Un grupo topológico es de Hausdorff si y sólo si*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\} \tag{7.3}$$

Donde $\mathfrak{U}$ *denota la familia de todos los entornos del elemento identidad* e *de* G.
Demostración: Basada en pág 178 - [Ma]
Sea G grupo topológico y $\mathfrak{U}$ la familia de todos los entornos del elemento identidad e de G.

En primer lugar, probemos que si G es de Hausdorff entonces $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\}$.
Supongamos, razonando por el absurdo, que $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U \neq \{e\}$. Entonces tenemos dos posibilidades:

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \emptyset \qquad \text{ó} \qquad \exists a \in G : a \neq e, a \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$$

1. $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ es no vacío pues lo contiene a e.

2. Ahora supongamos que existe $a \in G, a \neq e$ tal que $a \in \bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U$.

   Si $a \neq e$ entonces, por ser G de Hausdorff, existe $U_a = G - \{a\}$ entorno de e tal que $a \notin U_a$. Por otra parte, como $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U \subset U_a$ concluímos que $a \notin \bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U$. ¡Contradicción!

Por lo tanto $\underset{U\in\mathfrak{U}}{U} = \{e\}$.

En segundo lugar, probemos que si $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U = \{e\}$ entonces G es de Hausdorff.
Sean $h, g \in G : h \neq g$. Luego, $h^{-1}g \neq e$ (si no ocurriera así: $h = he = h(h^{-1}g) = g$).
Como $h^{-1}g \neq e$ existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $h^{-1}g \notin U$.
Sea V un entorno de e tal que $VV^{-1} \subset U$. Entonces $h^{-1}g \notin VV^{-1}$.
V es entorno de e, luego los conjuntos gV y hV son entornos de g y h, respectivamente.
Afirmamos que $gV \cap hV = \emptyset$.
En efecto, si ocurriera lo contrario tendríamos que existe $a \in G$ tal que:

$$\begin{aligned}
a \in gV \cap hV &\Rightarrow a \in gV \wedge a \in hV \\
&\Rightarrow \exists x, y \in V : a = gx \wedge a = hy \\
&\Rightarrow \exists x, y \in V : gx = hy \\
&\Rightarrow \exists x, y \in V : h^{-1}(gx) = h^{-1}(hy) = y \\
&\Rightarrow \exists x, y \in V : (h^{-1}gx)x^{-1} = yx^{-1} \\
&\Rightarrow \exists x, y \in V : h^{-1}g = yx^{-1}
\end{aligned}$$

¡Absurdo! Pues $h^{-1}g \notin VV^{-1}$

Por lo tanto $gV \cap hV = \emptyset$.
Conscluímos que todo grupo topológico G que verifique (7.3) es de Hausdorff.

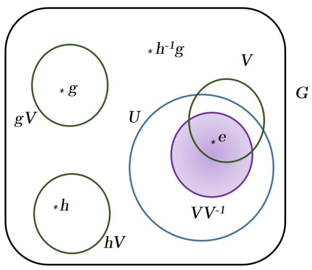

Figura 7.3: Si $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U = \{e\}$ entonces G es de Hausdorff.

■

Demostración de la Observación 5.4.1: *π es una función abierta de G en G/H.*
Demostración:
π es continua por definición de topología cociente. Veamos que es una función abierta.
Sea U un abierto de G, entonces $\pi(U) = \{xH/x \in U\}$ (ver figura 7.4).

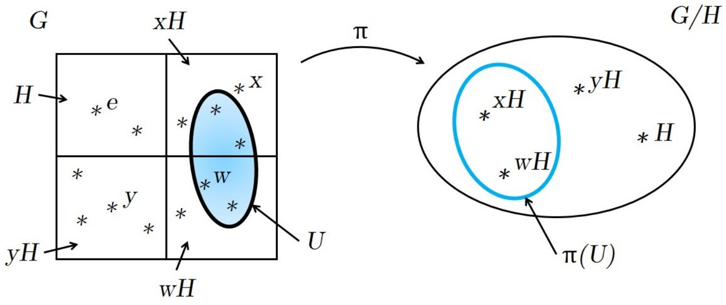

Figura 7.4: $\pi(U) = \{\pi(x)/x \in U\} = \{xH/x \in U\}$

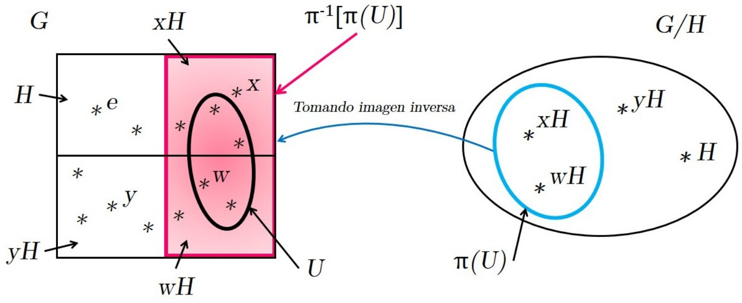

Figura 7.5: $\pi^{-1}\left[\pi(U)\right] = \bigcup\limits_{x\in U} xH = UH$

Luego, si tomamos imagen inversa de $\pi(U)$ tenemos que $\pi^{-1}\left[\pi(U)\right] = UH$ (ver figura 7.5). U es abierto en G, veamos que UH también es abierto. En efecto, para cada $h \in H$ la función R_h es homeomorfismo, luego, como U es abierto, tenemos que cada $R_h(U)$ es abierto, luego $\underbrace{\bigcup\limits_{h\in H} R_h(U)}_{UH}$ es abierto.

Así, $\pi(U)$ es abierto en G/H (por la definición de conjuntos abiertos en G/H). Concluímos que π es una función abierta.

■

Demostración de la Proposición 5.4.7: *Sea H un subgrupo normal de un grupo topológico G. Entonces G/H se transforma en grupo topológico con la topología de la Definición 5.4.4.*

Demostración:

1. G/H es grupo, porque H es subgrupo normal de G; y G es espacio topológico con la topología cociente.

2. Probemos que la función $\delta : G/H \times G/H \to G/H$ que aplica $(xH, yH) \mapsto xy^{-1}H$ es continua. Lo haremos probando que para todo $(xH, yH) \in G/H \times G/H$, y para todo Z entorno abierto de $\delta(xH, yH)$, existe X entorno abierto de (xH, yH) tal que $\delta(X) \subset Z$.

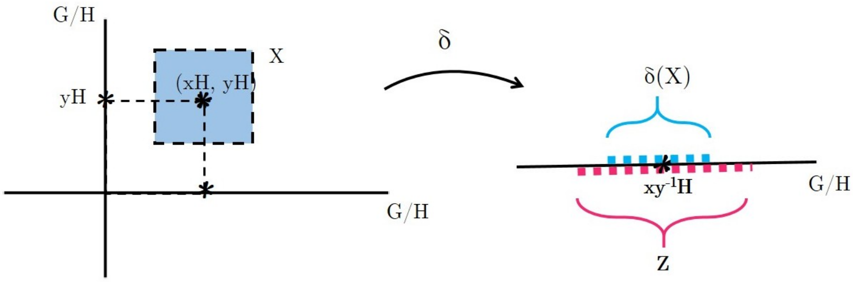

Figura 7.6: Z entorno abierto de $\delta(xH, yH) = xy^{-1}H$

Sean $(xH, yH) \in G/H \times G/H$ y Z un entorno abierto de $\delta(xH, yH) = xy^{-1}H$ (ver figura 7.6). Consideremos π la función natural de G en G/H.

a) Z es abierto en G/H y π es continua, de este modo $\pi^{-1}(Z)$ es un abierto de G que contiene a xy^{-1}. Por lo tanto, $\pi^{-1}(Z)$ es un entorno de xy^{-1}, luego existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $\pi^{-1}(Z) = xy^{-1}U$ y así:

$$\underbrace{\pi\left[\pi^{-1}(Z)\right]}_{Z} = \pi(xy^{-1}U) = Z \qquad \text{(porque } \pi \text{ es sobreyectiva)}$$

Es decir que existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $\pi(xy^{-1}U) = Z$.

b) Por el Lema 5.4.2, para $U \in \mathfrak{U}$ existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $VV^{-1}y^{-1} \subset y^{-1}U$, luego $xVV^{-1}y^{-1} \subset xy^{-1}U$.
Por definición de entorno, existe $V_0 \in \mathfrak{U}$ abierto tal que $V_0 \subset V$ y se cumple que $xV_0{V_0}^{-1}y^{-1} \subset xy^{-1}U$. Por este motivo, vamos a suponer sin pérdida de generalidad, que V es abierto.
Es decir que existe $V \in \mathfrak{U}$ abierto tal que $xVV^{-1}y^{-1} \subset xy^{-1}U$.

c) Probemos que $xVV^{-1}y^{-1} = (xV)(yV)^{-1}$. En efecto:

$$\begin{aligned} xVV^{-1}y^{-1} &= \{x(uv^{-1})y^{-1}/u, v \in V\} \\ &= \{(xu)(v^{-1}y^{-1})/u, v \in V\} \\ &= \{(xu)(yv)^{-1}/u, v \in V\} \\ &= (xV)(yV)^{-1} \end{aligned}$$

d) Ya que $V \in \mathfrak{U}$ tenemos que xV e yV son entornos abiertos de x e y, respectivamente. Como π es una función abierta (por la Observación 5.4.1) sabemos que $\pi(xV)$ y $\pi(yV)$ son abiertos en G/H; además, contienen a $\pi(x) = xH$ y a $\pi(y) = yH$, respectivamente. Luego, son entornos abiertos de los mismos.

e) Veamos que $\delta\left[\pi(xV) \times \pi(yV)\right] = \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right]$.

Para ello probemos primero que $\delta\left[\pi(xV) \times \pi(yV)\right] \subset \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right]$.

Sea $w \in \delta\left[\pi(xV) \times \pi(yV)\right]$. Entonces existe $(x_1, y_1) \in \pi(xV) \times \pi(yV)$ tal que

$$w = \delta(x_1, y_1) \tag{7.4}$$

si desarrollamos x_1 y y_1 tenemos que

$$x_1 \in \pi(xV) \Rightarrow \exists x_2 \in xV : x_1 = \pi(x_2) \tag{7.5}$$
$$y_1 \in \pi(yV) \Rightarrow \exists x_2 \in yV : y_1 = \pi(y_2) \tag{7.6}$$

Reemplazando 7.5 y 7.6 en 7.4 nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
w &= \delta(\pi(x_2), \pi(y_2)) \\
w &= \delta(x_2H, y_2H) && \text{(por definición de } \pi) \\
w &= x_2{y_2}^{-1}H && \text{(por definición de } \delta) \\
w &= \pi\left(x_2{y_2}^{-1}\right) && \text{(por definición de } \pi)
\end{aligned}$$

Como $x_2 \in xV$ e $y_2 \in yV$ concluímos que $w = \pi\left(x_2{y_2}^{-1}\right) \in \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right]$.

Por otro lado, nos resta probar que $\delta\left[\pi(xV) \times \pi(yV)\right] \supset \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right]$.
Sea $w \in \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right]$, entonces existe $r \in (xV)(yV)^{-1}$ tal que

$$w = \pi(r) = rH \tag{7.7}$$

Como $r \in (xV)(yV)^{-1}$, r es de la forma

$$r = x_1y_1 \quad \text{con } x_1 \in xV \text{ y } y_1 \in (yV)^{-1} \tag{7.8}$$

si desarrollamos x_1 y y_1 tenemos que

$$x_1 \in xV \Rightarrow \exists v \in V : x_1 = xv \tag{7.9}$$
$$y_1 \in (yV)^{-1} \Rightarrow {y_1}^{-1} \in yV \Rightarrow \exists u \in V : {y_1}^{-1} = yu \Rightarrow y_1 = u^{-1}y^{-1} \tag{7.10}$$

Reemplazando (7.9) y (7.10) en (7.7) vemos que

$$r = xvu^{-1}y^{-1}$$

y luego

$$\begin{aligned}
w = rH &= xvu^{-1}y^{-1}H \\
&= xv(yu)^{-1}H \\
&= \delta\left(\underbrace{xvH}_{\pi(xv)}, \underbrace{yuH}_{\pi(yu)}\right) && \text{(por definición de } \delta) \\
&= \underbrace{\delta\left(\pi(xv), \pi(yu)\right)}_{\in\delta[\pi(xV)\times\pi(yV)]} && \text{(por definición de } \pi)
\end{aligned}$$

Así consluímos el apartado $(2e)$.

De este modo, por el ítem $(2d)$, podemos asegurar que $X = \pi(xV) \times \pi(yV)$ es entorno de (xH, yH) y además se cumple que:

$$\begin{aligned} X = \delta\left[\pi(xV) \times \pi(yV)\right] &= \pi\left[(xV)(yV)^{-1}\right] && \text{(por } 2e\text{)} \\ &= \pi\left[xVV^{-1}y^{-1}\right] && \text{(por el ítem } 2c\text{)} \\ &\subset \pi\left[xy^{-1}U\right] && \text{(por el ítem } 2b\text{)} \\ &= Z && \text{(por el ítem } 2a\text{)} \end{aligned}$$

Y resulta δ continua.

Concluímos que G/H es grupo topológico.

■

Demostración de la Proposición 5.4.8: *Si G es un grupo topológico y H un subgrupo normal de G, entonces el grupo cociente G/H es un espacio de Hausdorff si, y sólo si H es cerrado en G.*
Demostración:
En primer lugar, probemos que si G/H es de Hausdorff entonces H es un subgrupo cerrado de G.
Ya que G/H es de Hausdorff, el conjunto de un sólo punto $\{\pi(e)\}$ es un conjunto cerrado en G/H, luego su complemento $G - \{\pi(e)\}$ es abierto, y como π es continua tenemos que $\pi^{-1}\left[G - \{\pi(e)\}\right]$ es abierto en G.

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\left[G - \{\pi(e)\}\right] &= G - \left[\pi^{-1}\{\pi(e)\}\right] && \text{(por propiedades de imagen inversa y complemento)} \\ &= G - H && \text{(ver figura 7.7)} \end{aligned}$$

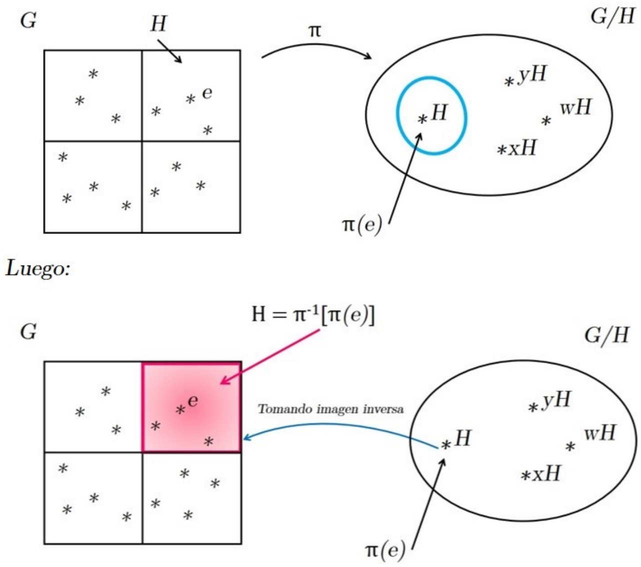

Figura 7.7: Supongamos que $G/H = \{H, xH, yH, wH\}$

De este modo, como $\pi^{-1}\left[G - \{\pi(e)\}\right] = G - H$ es abierto en G se sigue que H es cerrado.

Ahora veamos que si H es cerrado entonces G/H es de Hausdorff.
Sean aH y bH dos puntos distintos de G/H.
Si $aH \neq bH$ entonces $\underbrace{(aH)^{-1}(bH)}_{a^{-1}bH} \neq eH = H$, así, $ab^{-1}H \neq H$. De este modo $a^{-1}b \notin H$.

$$a^{-1}b \notin H \Rightarrow a^{-1}b \in G - H$$

como H es cerrado, $G-H$ es abierto, luego existe Z entorno de $a^{-1}bH$ tal que $Z \subset G-H$. Por consiguiente, existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $Z = a^{-1}bU \subset G - H$.

Por otro lado, la función $\alpha : G \times G \to G$ que aplica $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ es continua. Por la continuidad de α, para el entorno Z de $\alpha(a, b)$ existe un entorno W de (a, b) que cumple que $\alpha(W) \subset Z$.
Es más, existe $V \in \mathfrak{U}$: $W = aV \times bV$. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(W) \subset Z \subset G - H &\Rightarrow \alpha(W) \cap H = \emptyset \\
&\Rightarrow \alpha(aV \times bV) \cap H = \emptyset \\
&\Rightarrow (aV)^{-1}bV \cap H = \emptyset \quad \text{(por Lema 5.4.3)} \\
&\Rightarrow \pi(aV) \cap \pi(bV) = \emptyset \quad \text{(por Lema 5.4.4)}
\end{aligned}$$

Como $\pi(aV)$ y $\pi(bV)$ son entornos de aH y bH, respectivamente, se sigue que G/H es un espacio de Hausdorff.

■

Demostración de la Proposición 5.5.1: *Sea G grupo topológico conexo, y sea $U \in \mathfrak{U}$ tal que satisface $U = U^{-1}$. Entonces cualquier elemento arbitrario $g \in G$ puede escribirse de la forma:*

$$g = g_1 \dots g_k, \quad g_i \in U \quad (i = 1, \dots, k) \tag{7.11}$$

Esta proposición afirma que si $U \in \mathfrak{U}$ verifica $U = U^{-1}$ entonces todo elemento de G puede escribirse como producto finito de elementos de U. *Demostración:*
Sea U un entorno abierto de e.

1. Si definimos $U^k = \{g_1 g_2 \dots g_k / g_i \in U \wedge i = 1, \dots, k\}$ entonces U^k es un conjunto abierto de G. En efecto, demostraremos por inducción.

    a) Para $k = 1$ $U^1 = \{g_1/g_1 \in U\} = U$ es abierto.

    b) Supongamos que $k > 1$ y que U^{k-1} es abierto. Luego $U^k = UU^{k-1}$, como U y U^{k-1} son abiertos, se sigue que U^k también lo es (por la Proposición 5.4.2).

    Luego, el conjunto $G' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U^k$ es abierto, por ser unión arbitraria de abiertos.

2. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $U^k = (U^k)^{-1}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(U^k)^{-1} &= \{y^{-1}/y \in U^k\} \\
&= \{y^{-1}/\exists g_1, \dots, g_k \in U : y = g_1 \dots g_k\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(g_1 \dots g_k)^{-1} / g_i \in U \wedge i = 1, \dots, k\} \\
&= \{(g_k)^{-1} \dots (g_1)^{-1} / g_i \in U \wedge i = 1, \dots, k\} \\
&= \{(j_1) \dots (j_k) / j_i \in U \wedge i = 1, \dots, k\} \qquad \text{(pues } U = U^{-1}\text{)} \\
&= U^k
\end{aligned}$$

3. G' es un subgrupo de G. En efecto, sean $a, b \in G'$, entonces existen $k, j \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a \in U^k$ y $b \in U^j$. Por el apartado anterior $(U^j)^{-1} = U^j$, luego $b^{-1} \in U^j$. En consecuencia $ab^{-1} \in U^k U^j = U^{k+j} \subset G'$. Esto dice que $ab^{-1} \in G'$. Luego G' es un subgrupo de G.

4. Como G' es abierto y es subgrupo topológico tenemos que G' también es un conjunto cerrado (por la Proposición 5.4.6).

5. G' es no vacío por definición (existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $U = U^{-1}$ y así, $U^{-1} = U \subset G'$).

6. Como G' es abierto y cerrado, y G es conexo por hipótesis, tenemos que $G = G'$ (por la Observación 4.1.3).

Por lo tanto, de los ítems analizados, para todo $g \in G$, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g \in U^k$. Luego g es de la forma $g = g_1 \dots g_k$, con $g_i \in U$ y $(i = 1, \dots, k)$.

■

Demostración del Lema 5.5.1: *Sea G grupo topológico y sea $H \subset G$: $H \neq \emptyset$. Si $\{A, B\}$ es una partición por abiertos de G y H es conexo entonces ocurre sólo una de las siguientes opciones:*

- *Si $H \cap A \neq \emptyset$ entonces $H \subset A$.*
- *Si $H \cap B \neq \emptyset$ entonces $H \subset B$.*

Demostración:
Como $G = A \cup B$ entonces $H \cap A \neq \emptyset$ o $H \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $H \cap A \neq \emptyset$.
Supongamos, razonando por el absurdo, que $H \cap B \neq \emptyset$.
Sean los conjuntos $V_1 = H \cap A$ y $V_2 = H \cap B$. Por ser A, B abiertos no vacíos de G, V_1 y V_2 son abiertos no vacíos de H con la topología relativa.
Por un lado $V_1 \cap V_2 = (H \cap A) \cap (H \cap B) = \emptyset$ pues $A \cap B = \emptyset$; y por otra parte

$$\begin{aligned}
V_1 \cup V_2 &= (H \cap A) \cup (H \cap B) \\
&= H \cap \underbrace{(A \cup B)}_{G} \\
&= \underbrace{H \cap G}_{H} \qquad \text{(pues } A \cup B = G\text{)}
\end{aligned}$$

Luego $\{V_1, V_2\}$ es una partición por abiertos de H, pero por hipótesis H era conexo. ¡Contradicción! Por lo tanto $H \subset A$.
Del mismo modo se prueba que si $H \cap B \neq \emptyset$ entonces $H \subset B$.

■

Demostración del Teorema 5.5.2: *Sea G un grupo topológico, y H un subgrupo de G. Si H y G/H son ambos espacios conexos, entonces G es conexo.*
Demostración:
Sean U_1, U_2 abiertos de G tales que $U_1 \cup U_2 = G$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, y sea π la función natural de G en G/H.
Supongamos, razonando por el absurdo, que $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$.

1. Como $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$ se tiene que $\pi(U_1) \neq \emptyset$ y $\pi(U_2) \neq \emptyset$.

2. Ya que π es una función abierta, los conjuntos $\pi(U_1)$ y $\pi(U_2)$ son abiertos en G/H.

3. Debido a que π es sobreyectiva, tenemos que
$$G/H = \pi(U_1 \cup U_2) = \pi(U_1) \cup \pi(U_2)$$

4. Veamos que $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$.
Supongamos que existe $yH \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$.
$$yH \in \pi(U_1) \Rightarrow \exists x_1 \in U_1 : yH = \pi(x_1) = x_1 H$$
$$yH \in \pi(U_2) \Rightarrow \exists x_2 \in U_1 : yH = \pi(x_2) = x_2 H$$
Por hipótesis H es conexo, luego $x_1 H$ y $x_2 H$ son ambos conexos.
Por otro lado $x_1 \in x_1 H \cap U_1$ (pues $x_1 = x_1 e \in x_1 H$); además como $x_1 H \cap U_1 \neq \emptyset$, $x_1 H$ es conexo y $\{U_1, U_2\}$ es una partición por abiertos de G, por el Lema 5.5.1, tenemos que $x_1 H \subset U_1$.
Del mismo modo $x_2 H \subset U_2$.
Luego como $x_1 H = x_2 H$ tenemos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Pero teníamos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
La contradicción surge de suponer que $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$.

De los ítems analizados llegamos a que $\{\pi(U_1), \pi(U_2)\}$ es una partición por abiertos de G/H. De nuevo tenemos una contradicción, pues por hipótesis G/H es conexo. Por lo tanto $U_1 = \emptyset$ ó $U_2 = \emptyset$.

■

Demostración del Lema 5.5.4: G_0 *es un subgrupo normal cerrado de* G.
Demostración:

1. En primer lugar, probemos que G_0 es subgrupo de G. En efecto, sean $h, g \in G_0$, queremos ver que $hg^{-1} \in G_0$.
Para cada $g \in G_0$ la función $x \mapsto xg^{-1}$ es un homeomorfismo de G.
Ya que $h \in G_0$ se sigue que:
$$hG_0 = G_0. \tag{7.12}$$
Por hipótesis, G_0 es la componente conexa que contiene a e, luego $G_0 g^{-1}$ es la componente conexa que contiene a $eg^{-1} = g^{-1}$.
Por otro lado, como $g \in G_0$, tenemos que
$$\underbrace{\overbrace{g}^{\in G_0} g^{-1}}_{=e} \in G_0 g^{-1}.$$

Por definición de componente conexa, $G_0 g^{-1}$ es el conexo más grande que contiene a g^{-1}, como además este conjunto contiene a e, se sigue que:

$$G_0 = G_0 g^{-1}. \tag{7.13}$$

Así:

$$\begin{aligned} hg^{-1} = h(eg^{-1}) &\in h\underbrace{\left(G_0 g^{-1}\right)}_{G_0} && \text{(pues } e \in G_0\text{)} \\ \Rightarrow hg^{-1} &\in hG_0 && \text{(por la ecuación 7.13)} \\ \Rightarrow hg^{-1} &\in G_0 && \text{(por la ecuación 7.12)} \end{aligned}$$

Concluímos que G_0 es subgrupo de G.

2. En segundo lugar, veamos que G_0 es subgrupo normal de G. Sea $a \in G$, queremos probar que $aG_0a^{-1} = G_0$.
   Para cada $a \in G$ la función $x \mapsto axa^{-1}$ es un homeomorfismo de G, luego aG_0a^{-1} es la componente conexa que contiene a $aea^{-1} = e$. Por lo tanto $aG_0a^{-1} = G_0$.

3. En tercer lugar, probemos que G_0 es cerrado.
   Ya que la clausura de G_0, $\overline{G_0}$, es un conjunto conexo que contiene a e se tiene que $G_0 \supset \overline{G_0}$, pero $G_0 \subset \overline{G_0}$, de donde resulta que $G_0 = \overline{G_0}$ y por lo tanto G_0 es cerrado.

■

Demostración del Lema 5.5.5: *La componente conexa* $(G/G_0)_0$ *de* G/G_0 *que contiene al elemento identidad* e' *de* G/G_0 *consiste solamente en el elemento identidad, es decir* $(G/G_0)_0 = \{e'\}$.
Demostración:
Sea π la función natural de G en G/G_0. Consideremos el conjunto $H = \pi^{-1}\left((G/G_0)_0\right)$.

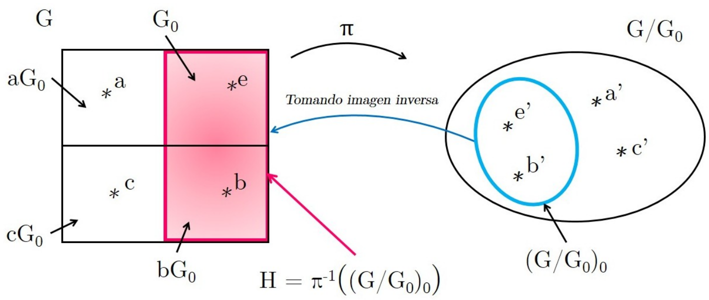

Figura 7.8: Suponemos, a modo ilustrativo, que $G/G_0 = \{e', a', b', c'\}$.

Veamos la figura 7.8: si suponemos que $(G/G_0)_0 = \{e', a', b', c'\}$, donde $x' = \pi(x)$ para todo $x \in G$, entonces $H = (G/G_0) \cup b(G/G_0)$. Queremos probar que $H = G_0$. Para ello usaremos el Teorema 5.5.2 como sigue: probaremos que G_0 y H/G_0 son conexos, de lo que resultará H conexo, finalmente probaremos que $G_0 \subset H$ de lo que concluiremos $H = G_0$.

- π es sobre, luego $\pi\left(\underbrace{\pi^{-1}\left((G/G_0)_0\right)}_{H}\right) = (G/G_0)_0$, y así $\pi(H) = (G/G_0)_0$.

- H es subgrupo de G.
  En efecto, si $a, b \in H = \pi^{-1}\left[(G/G_0)_0\right]$ entonces $\pi(a), \pi(b) \in (G/G_0)_0$.
  Observemos que por el Lema 5.5.4, $G_0 \lhd G$, luego el conjunto cociente G/G_0 es grupo y, nuevamente por Lema 5.5.4, $(G/G_0)_0$ es subgrupo de G/G_0.
  Por otro lado, como $\underbrace{\pi(a)}_{a'}, \underbrace{\pi(b)}_{b'} \in (G/G_0)_0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
a'(b')^{-1} = \pi(a)[\pi(b)]^{-1} &\in (G/G_0)_0 && \text{(porque } (G/G_0)_0 \text{ es grupo)}\\
\pi(a)[\pi(b^{-1})] &\in (G/G_0)_0 && \text{(por propiedades de homomorfismo)}\\
\pi(ab^{-1}) &\in (G/G_0)_0 && \text{(por definición de homomorfismo)}
\end{aligned}
$$

  luego, por definición de imagen inversa, $ab^{-1} \in \pi^{-1}\left((G/G_0)_0\right) = H$.
  Por lo tanto H es subgrupo de G.

- Para que exista H/G_0 debemos ver que $G_0 \subset H$. En efecto, sea $g \in G_0$, entonces $\pi(g) = gG_0 = G_0 = \pi(e)$. Por otra parte, sabemos que $\pi(e)$ es el elemento identidad en G/G_0, luego $\underbrace{\pi(g)}_{\pi(e)} \in (G/G_0)_0$, y así $g \in \underbrace{\pi^{-1}\left[(G/G_0)_0\right]}_{H}$. Concluímos que $G_0 \subset H$.

- Veamos que H/G_0 es conexo. En efecto,

$$
\begin{aligned}
H/G_0 &= \{hG_0/h \in H\}\\
&= \left\{hG_0/h \in \pi^{-1}\left[(G/G_0)_0\right]\right\} \quad \text{(por definición de } H\text{)}\\
&= \{hG_0/\pi(h) \in (G/G_0)_0\}\\
&= \{hG_0/hG_0 \in (G/G_0)_0\}\\
&= (G/G_0)_0
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

  Como $(G/G_0)_0$ es conexo, tenemos que H/G_0 también lo es.

Tenemos que: por hipótesis G_0 es conexo, por (7.14) H/G_0 es conexo, luego por el Teorema 5.5.2, resulta H conexo. Como G_0 es la componente conexa que contiene a e y $G_0 \subset H$, concluímos que $H = G_0$. Así, hemos probado que $G_0 = \underbrace{\pi^{-1}\left((G/G_0)_0\right)}_{H}$, luego:

$$
\begin{aligned}
(G/G_0)_0 &= \pi(H)\\
&= \pi(G_0)\\
&= \{gG_0, g \in G_0\}\\
&= \{\underbrace{G_0}_{\pi(e)}\}\\
&= \{e'\}
\end{aligned}
$$

■

Demostración del Lema 5.5.6: *Si G es localmente conexo, entonces G/G_0 es un grupo topológico discreto.*
Al decir grupo topológico discreto nos referimos a que todo subconjunto de G es abierto.
Demostración:

Sea G es localmente conexo. Queremos ver que $G\,/G_0$ es un grupo topológico discreto.
En efecto, sea $y \in G/G_0$, ya que π es sobre existe $x \in G$ tal que $y = \pi(x)$.
Por otra parte, G_0 es localmente conexo, luego, por el Lema 5.5.3, tenemos que G_0 es un conjunto abierto de G.
Sabemos que la función $a \mapsto xa$ es un homeomorfismo de G, por lo cual xG_0 es abierto en G.
Por la Observación 5.4.1 sabíamos que π es función abierta, luego $\pi(xG_0)$ es un abierto en G/G_0, y por el Lema 5.5.2:

$$\pi(xG_0) = \{\pi(x)\} = \{y\}$$

Luego para todo $y \in G/G_0$ el conjunto $\{y\}$ es abierto en G/G_0.
Por lo tanto la topología de G/G_0 es la topología discreta.

$\blacksquare$

Bibliografía

[Ba] Bartle, Robert G. *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, México (1982).

[DD] Dotti, Isabel G. y Druetta, María J. *Topología*, Trabajos de Matemática, FaMAF. Serie No. 2 (1992).

[He] Herstein, L. N. *Álgebra Moderna*, Editorial Trillas, México (1976).

[Ho] Hoffman, K. y Kunze, R. *Álgebra Lineal*, Editorial Prentice Hall, México (1973).

[Hu] Hungerford, Thomas W. *Algebra*, Springer Verlag, The United States of America.

[La] Lang, Serge *Undergraduate Analysis*, Springer Verlag, New York.

[Ma] Matsushima, Yozo *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York and Basel (1972).

[Ro II] Rojo, Armando O. *Álgebra II*, Librería-editorial El Ateneo, Buenos Aires (1998).

[Wa] Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag (1983).