UNC Universidad Nacional de Córdoba
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

EXP - UNC 40875/2019 RES CD 217/2019

PROGRAMA DE ASIGNATURA	
ASIGNATURA: Introducción a la Geometría Hermitiana.	**AÑO:** 2019
CARACTER: Especialidad	**UBICACIÓN EN LA CARRERA:** 5° año 2° cuatrimestre
CARRERA: Licenciatura en Matemática	
REGIMEN: Cuatrimestral	**CARGA HORARIA:** 120 horas

FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

Las variedades complejas, como las variedades diferenciables reales, son generalizaciones de curvas y superficies a dimensiones arbitrarias, pero con cartas coordenadas que toman valores en Cn y con cambios de coordenadas holomorfos. A pesar de la similitud formal entre las definiciones, la teoría de variedades complejas es mucho más profunda que la teoría de variedades diferenciables, reemplazando la palabra "diferencial" o "suave" por "compleja" u "holomorfa". Para tener una idea de cómo se diferencian estas dos teorías, podemos considerar los siguientes hechos: (1) Todas las variedades complejas son orientables y poseen una orientación canónica; (2) Las únicas funciones holomorfas globales en una variedad compleja compacta son las funciones constantes; (3) No existen subvariedades complejas compactas de Cn de dimensión positiva; (4) No existen las particiones de la unidad; (5) El espacio de campos vectoriales holomorfos en una variedad compleja compacta tiene dimensión finita, y en muchos casos contiene sólo el campo vectorial nulo.
Las variedades complejas aparecen en un muchas áreas de la matemática. Por ejemplo, juegan un papel esencial en:

- Geometría riemanniana (métricas hermitianas y Kähler)
- Análisis complejo clásico (superficies de Riemann)
- Varias variables complejas (variedades de Stein)
- Geometría algebraica (variedades algebraicas complejas no singulares)
- Topología de dimensión baja (clasificación de variedades de dimensión 4)
- Teoría de Lie (grupos de Lie complejos)
- Teoría de cuerdas (variedades de Calabi-Yau)

En este curso profundizaremos en la geometría diferencial de las variedades complejas. En muchos casos, variedades complejas interesantes pueden ser equipadas con métricas riemannianas especiales, y se pueden utilizar técnicas de la geometría riemanniana para distinguirlas. Esto se aplica particularmente a las variedades de Kähler, que se encuentran en la intersección de las geometrías riemanniana, algebraica y simpléctica. Buena parte del curso estará dedicada a estudiar estas variedades, pero también estudiaremos propiedades de métricas riemannianas compatibles más generales, en particular, la clasificación de métricas casi hermitianas de Gray-Hervella.

CONTENIDO

Teoría local

Funciones holomorfas de varias variables – Álgebra lineal hermitiana: estructuras complejas y hermitianas en espacios vectoriales – Formas diferenciales en Cn.

Variedades complejas

Definición y ejemplos – Fibrados vectoriales holomorfos – "Blow up" en puntos – Estructuras casi complejas e integrabilidad: el teorema de Newlander-Nirenberg – Cálculo diferencial en variedades complejas – Los operadores \partial y \overline{\partial} - Cohomología de Dolbeault – El fibrado canónico del espacio proyectivo complejo.

Variedades de Kähler

Repaso de métricas riemannianas – Métricas hermitianas – Métricas de Kähler – Caracterizaciones equivalentes – Ejemplos – La métrica de Fubini-Study – Conexión de Levi-Civita: curvatura seccional y curvatura seccional holomorfa – Tensor de Ricci – Campos de Killing.

Cohomología de variedades de Kähler compactas

Las identidades de Kähler – Operadores de Lefschetz – Teoría de Hodge en variedades de Kähler – El lema \partial \overline{\partial} - Cohomología de de Rham de variedades de Kähler compactas

Variedades (casi) hermitianas

Clasificación de variedades casi hermitianas según Gray-Hervella – Variedades "almost Kähler", "nearly Kähler" y localmente conformes Kähler – Conexiones canónicas de Gauduchon: conexión de Chern y de Bismut.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

D. Huybrechts, Complex Geometry, Universitext, Springer.
W. Ballmann, Lectures on Kähler manifolds, European Mathematical Society.
A. Moroianu, Lectures on Kähler geometry, Cambridge University Press.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

J. Morrow y K. Kodaira, Complex manifolds, American Mathematical Society.
A. L. Besse, Einstein Manifolds, Classics in Mathematics, Springer.
R. Wells, Differential Analysis On Complex Manifolds, Springer.
A. Gray y L. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 35–58.
P. Gauduchon, Hermitian connections and Dirac operators, Boll. Unione Mat. Ital. Ser. VII 2 (1997) 257–288.

EVALUACIÓN

FORMAS DE EVALUACIÓN

Habrá dos evaluaciones parciales durante el cursado.

El examen final contará de una evaluación escrita sobre contenidos prácticos, y una exposición oral sobre los contenidos completos de la materia.

REGULARIDAD

1. cumplir un mínimo de 70% de asistencia a clases teóricas, prácticas, o de laboratorio.
2. aprobar al menos dos evaluaciones parciales o sus correspondientes recuperatorios.

CORRELATIVIDADES

Para Cursar:

Tener regularizadas Funciones Analíticas y Geometría Superior, y aprobadas Funciones Reales, Topología General, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, y Física General.

Para Rendir:

Tener Aprobadas Funciones Reales, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, Geometría Superior y Física General .