

1. Určete vlastnosti funkcí:

- (i) $f_1 : y = x^3$
- (ii) $f_2 : y = x^4$
- (iii) $f_3 : y = \cot gx$
- (iv) $f_4 : y = \arccos x$
- (v) $f_5 : y = 4^x$
- (vi) $f_6 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- (vii) $f_7 : y = \ln x$
- (viii) $f_8 : y = x^{-2}$

2. Uvedte příklad:

- (i) shora i zdola omezené sudé funkce
- (ii) ryze monotonní funkce, která není ani sudá ani lichá
- (iii) liché periodické funkce
- (iv) prosté liché funkce

3. Jsou dány funkce $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ a $h(x) = x + 3$. Vytvořte složené funkce h_1 až h_4 a určete jejich definiční obory:

- (i) $h_1(x) = g(h(f(x)))$,
- (ii) $h_2(x) = f(h(g(x)))$,
- (iii) $h_3(x) = f(g(h(x)))$,
- (iv) $h_4(x) = h(g(f(x)))$.

4. U daných složených funkcí určete funkci vnější a funkci vnitřní:

- (i) $5\sqrt{x}$
- (ii) $\log x^2$
- (iii) $\sqrt{5^x}$
- (iv) $(x^2 + 1)^3$

5. Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existuje funkce inverzní, obě funkce graficky znázorněte a určete jejich definiční obor a obor hodnot. *Pro dobrovolníky:* určete předpis funkce inverzní.

- (i) $y = 2x - 1$
- (ii) $y = x^2 - 2x$
- (iii) $y = 3^x$
- (iv) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
- (v) $y = \sqrt{x}$
- (vi) $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in \langle 0, \infty \rangle$
- (vii) $y = 2^{x-1} - 4$
- (viii) $y = e^x$

6. Určete definiční obory cyklometrických funkcí

(i) $f_1 : y = \arcsin(x - 2)$

(ii) $f_2 : y = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{3}$

(iii) $f_3 : y = \arccos \frac{2-3x}{4}$

(iv) $f_4 : y = 2\arcsin \frac{x+1}{3}$

(v) $f_5 : y = \arccos(2x - 1) - 1$

7. Jsou dány polynomy

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1,$$

$$P_2(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 1,$$

$$P_3(x) = x^2 + 3x + 4.$$

Vypočítejte:

(i) $P_1(x) + P_2(x)$

(ii) $P_3(x) - P_1(x)$

(iii) $-2P_1(x) - P_2(x)$

(iv) $P_1(x) \cdot P_3(x)$

(v) $(P_1(x) + P_2(x)) \cdot P_3(x)$

(vi) $P_1(x) + P_2(x) \cdot P_3(x)$

8. Rozhodněte, zda je hodnota -1 kořenem daného polynomu:

(i) $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(ii) $P_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

(iii) $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$

(iv) $P_4(x) = x^2 + 2x + 1$

(v) $P_5(x) = 2x^2 - 6x + 4$

9. Určete všechny kořeny následujících polynomů:

(i) $P_1(x) = (x - 2)(x + 1)$

(ii) $P_2(x) = x(x - \frac{3}{2})(x + e)$

(iii) $P_3(x) = x(x - 3)^3(x + 1)$

(iv) $P_4(x) = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 5)$

(v) $P_5(x) = x^2(x - 2)^3$

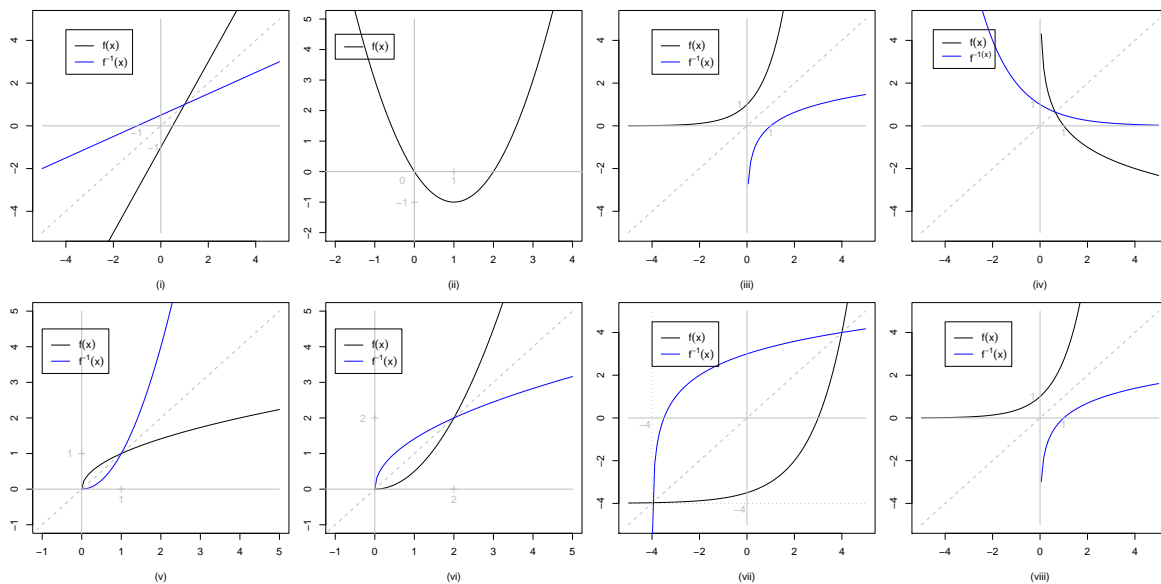
ŘEŠENÍ

1. (i) lichá, není periodická, rostoucí, ryze monotonní, prostá, není ohraničená
- (ii) sudá, není periodická, klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $\langle 0, \infty \rangle$, není monotonní ani prostá, zdola ohraničená
- (iii) lichá, periodická, klesající na $\{(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, není monotonní, prostá ani ohraničená
- (iv) ani sudá ani lichá, klesající, ryze monotonní, prostá, ohraničená shora i zdola

- (v) ani sudá ani lichá, rostoucí, ryze monotonní, prostá, zdola ohraničená
- (vi) ani sudá ani lichá, klesající, ryze monotonní, prostá, zdola ohraničená
- (vii) ani sudá ani lichá, rostoucí, ryze monotonní, prostá, není ohraničená
- (viii) sudá, rostoucí na $(-\infty, 0)$, klesající na $(0, \infty)$, není monotonní ani prostá, zdola ohraničená

2. např.

- (i) $\cos x$
 - (ii) $a^x, \log_a x$ pro $a > 0, a \neq 1$
 - (iii) $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$
 - (iv) $x, x^3, x^5, \dots, x^{-1}, x^{-3}, x^{-5}, \dots$
3. (i) $h_1(x) = \sqrt{x+2}, D(h_1) = \langle -2, \infty \rangle$
(ii) $h_2(x) = \sqrt{x+2}, D(h_2) = \langle 0, \infty \rangle$
(iii) $h_3(x) = \sqrt{x+3} - 1, D(h_3) = \langle -3, \infty \rangle$
(iv) $h_4(x) = \sqrt{x-1} + 3, D(h_4) = \langle 1, \infty \rangle$
4. (i) vnější: $f(x) = 5^x$
vnitřní: $g(x) = \sqrt{x}$
(ii) vnější: $f(x) = \log x$
vnitřní: $g(x) = x^2$
(iii) vnější: $f(x) = \sqrt{x}$
vnitřní: $g(x) = 5^x$
(iv) vnější: $f(x) = x^3$
vnitřní: $g(x) = x^2 + 1$
5. (i) $f^{-1} : y = \frac{1}{2}(x+1), D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$
(ii) nelze, funkce není prostá v $\mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1, \infty \rangle$
(iii) $f^{-1} : y = \log_3 x, D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}^+, H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$
(iv) $f^{-1} : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}^+, H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$
(v) $f^{-1} : y = x^2, x \geq 0, D(f) = H(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle, H(f) = D(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle$
(vi) $f^{-1} : y = \sqrt{2x}, D(f) = H(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle, H(f) = D(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle$
(vii) $f^{-1} : y = \log_2(x+4) + 1, D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f) = D(f^{-1}) = \langle -4, \infty \rangle$
(viii) $f^{-1} : y = \ln x, D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}^+, H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$



6. (i) $D(f_1) = \langle 1, 3 \rangle$
(ii) $D(f_2) = \mathbb{R}$
(iii) $D(f_3) = \langle -\frac{2}{3}, 2 \rangle$
(iv) $D(f_4) = \langle -4, 2 \rangle$
(v) $D(f_5) = \langle 0, 1 \rangle$
7. (i) $3x^3 - 11x^2 + 3x$
(ii) $-2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$
(iii) $-5x^3 + 14x^2 - 4x - 1$
(iv) $2x^5 + 3x^4 - 8x^2 + 7x + 4$
(v) $3x^5 - 2x^4 - 18x^3 - 35x^2 + 12x$
(vi) $x^5 - 5x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 6x - 3$
8. (i) není, $P_1(-1) = -8$
(ii) je, $P_2(-1) = 0$
(iii) je, $P_3(-1) = 0$
(iv) je, $P_4(-1) = 0$
(v) není, $P_5(-1) = 12$
9. (i) $\{2, -1\}$
(ii) $\{-e, 0, \frac{3}{2}\}$
(iii) $\{-1, 0, 3, 3, 3\}$
(iv) $\{-5, -2 - 2, 1\}$
(v) $\{0, 0, 2, 2, 2\}$

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3