VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.
ING. ZBYNĚK KERŠNER, CSc.
ING. ROSTISLAV ZÍDEK
ING. ZBYNĚK VLK

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

MODUL BD01-MO1

SILOVÉ SOUSTAVY

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Vážení uživatelé tohoto učebního textu,

dovolujeme si Vás požádat o malé strpení pro využívání této učební pomůcky pro Vaše studium. Při závěrečné kontrole byly navrženy další vylepšující úpravy a drobné formální opravy, které přispějí ke zlepšení kvality učebního textu.

Z časových důvodů však nebylo možné je dosud realizovat. Předpokládáme, že opravy provedeme do konce roku 2005. Posečkejte proto prosím se stahováním a používáním, **dokud nezmizí tento upozorňující text**.

Děkují autoři

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

V tomto prvním modulu Základů stavební mechaniky shrneme poznatky z fyziky týkající se vektorů, sil a jejich působení, momentu síly, rovnováhy apod. Pro potřeby stavební mechaniky je rozšíříme na úroveň potřebnou ke zvládnutí navazujících témat v předmětech Statika a Pružnost a pevnost.

Naším cílem ve finále budou výpočty nosných stavebních konstrukcí z hlediska poskytnutí údajů pro jejich dimenzování podle jednotlivých materiálů. Ve druhém modulu se zaměříme na výpočet polohy těžiště a kvadratických momentů rovinných obrazců. Ve třetím a čtvrtém modulu Základů stavební mechaniky se budeme zabývat řešením staticky určitých konstrukcí, v předmětu Statika pak řešením staticky neurčitých konstrukcí.

1.2 Požadované znalosti

Základy stavební mechaniky navazují na znalosti obecné fyziky. Studenti by měli být obeznámeni s pojmy skaláry, vektory a operace s nimi, síla, Newtonovy zákony a jejich užití, moment síly, rovnováha sil a momentů sil.

Z matematického aparátu využijeme goniometrické funkce, vektorový počet, diferenciální a integrální počet včetně názorného významu derivace jako směrnice funkce a integrálu jako plošného obsahu pod grafem funkce.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul obsahuje látku probíranou ve dvou týdnech semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se liší od několika minut do několika desítek minut. Záleží to jednak na předchozí průpravě studenta v příslušné oblasti, jednak na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu činí 10 až 15 hodin.

1.4 Klíčová slova

mechanika, statika, pružnost, síla, statický moment síly, dvojice sil, silová soustava, ekvivalence, rovnováha

2 Úvod do stavební mechaniky

Vědní obor Mechanika jako součást fyziky se zabývá zkoumáním mechanických jevů. Mechanika zahrnuje kinematiku a dynamiku, jejíž součástí je statika. Stavební mechanika se v obvyklém pojetí člení na statiku a dynamiku stavebních konstrukcí, teorii pružnosti a plasticity, hydromechaniku apod.

Statika stavebních konstrukcí zkoumá podmínky rovnováhy konstrukcí a všech působících vnějších sil, dynamika stavebních konstrukcí řeší dynamické účinky vnějších sil měnících se v čase, teorie pružnosti a plasticity se zabývá určováním deformací a napětí v částech konstrukce za pružného či plastického stavu.

Cílem Stavební mechaniky je optimální návrh stavební konstrukce tak, aby bezpečně přenesla statické i dynamické zatížení, vykazovala přípustné deformace a splňovala kritéria hospodárnosti.

2.1 Základní pojmy a principy

Mechanika studuje mechanický pohyb hmotných těles. Zvláštním případem mechanického pohybu je relativní klid tělesa. Pohyb tělesa se děje v **prostoru** a **času** působením sil. Vychází se z klasické Newtonovy mechaniky, jejímž základen jsou tři základní *Newtonovy zákony* – princip setrvačnosti, princip změny hybnosti (síly) a princip akce a reakce. Posledně uvedený princip je základním zákonem statiky.

Z dalších principů se v lineární mechanice aplikuje *princip superpozice účinků* (jednotlivé účinky lze algebraicky či vektorově sčítat) a *princip úměrnosti* (k–násobně větší síla vyvolá k–násobně větší účinek).

Prostor je geometrické neomezené spojité prostředí, v němž existují hmotné objekty. Předpokládá se trojrozměrný euklidovský prostor. Nejčastější je *ortogonální* (pravoúhlá) *pravotočivá souřadnicová soustava* se třemi osami x, y, z navzájem kolmými.

Užitečnou fyzikální abstrakcí je **hmotný bod**. Pomocí něho je formulována většina základních vět klasické mechaniky. Přisuzuje se mu nulový moment hybnosti k ose procházející jeho středem, tedy nulový moment setrvačnosti.

Hmotné těleso se představuje jako množina velkého počtu vzájemně vázaných hmotných bodů. Nemění-li se vzájemné vzdálenosti hmotných bodů, hovoří se o *dokonale tuhém tělese*, které se účinkem vnějších sil nedeformuje. Je podstatné rozlišit, kdy je možno reálná tělesa pro účely výpočtu považovat za dokonale tuhá a kdy nikoliv. Ve statice lze těleso považovat za dokonale tuhé, jestliže se jeho deformace projeví zanedbatelným vlivem na velikost reakcí ve vazbách tělesa s okolím. V řadě případů statických a pružnostních řešení je však nezbytné uplatnit poddajnost těles. V dynamice je otázka aplikace tuhého tělesa podstatně složitější.

Hmotný bod, dokonale tuhé těleso, dokonale tuhá deska v rovině a osamělá síla jsou nejdůležitější abstraktní pojmy ve statice pevných dokonale tuhých těles.

2.2 Mechanika pevných těles

Mechanika aplikovaná na stavební konstrukce se nazývá *stavební mechanika*. Pojednává o výpočtech nosných stavebních konstrukcí. Ty se zpravidla nacházejí v klidu a splňují podmínky rovnováhy a jejich řešením se zabývá *statika stavebních konstrukcí*. Naopak dynamické účinky vnějších sil vyšetřuje *stavební dynamika*.

Při vyšetřování konstrukcí je nutné přihlížet i k jejich přetvoření (deformaci). Výpočet deformací a napětí za pružného i plastického stavu patří do *teorie pružnosti a plasticity*. Uvedené vědní disciplíny se navzájem prolínají a není možné mezi nimi určit přesné hranice.

2.3 Výpočty nosných stavebních konstrukcí

Komplikovanost skutečných dějů v reálných mechanických soustavách vede k nutnosti vytvořit přiměřeně zjednodušený *fyzikální model*. Čím má být model výstižnější, tím je komplikovanější a tím též obtížněji matematicky zpracovatelný. Fyzikální model je vždy kompromisem. Struktura fyzikálního modelu rozhoduje o přesnosti získaných výsledků a o výpočtové postižitelnosti sledovaných jevů.

Z fyzikálního modelu se odvozuje model výpočtový (matematický). Ten představuje příslušnou soustavu rovnic, jejichž řešení je řešením daného problému. V závěrečné analýze výsledků řešení se opět uplatní mechanická interpretace pro dimenzování nosné stavební konstrukce.

2.4 Statika dokonale tuhých těles

Pod dokonale tuhým tělesem rozumíme takové těleso, které nemění svůj tvar, působí-li na ně zcela libovolná soustava sil. Je-li jeden rozměr (např. tloušťka d) dokonale tuhého tělesa mnohem menší než zbývající délkové rozměry, hovoříme o *dokonale tuhé desce*.

Desku se souměrně rozloženou hmotností podle roviny souměrnosti desky včetně souměrně působícího zatížení nazýváme dokonale *tuhou deskou v rovině*. Přitom pohyb desky probíhá tak, že body roviny souměrnosti zůstávají stále v této rovině. Pojem „dokonale tuhá deska“ je abstraktní a musíme ho odlišovat od pojmu „deska“ ve smyslu teorie pružnosti, kde se jedná o plošný útvar příčně zatěžovaný. Dokonale tuhá deska spíše připomíná to, co se v teorii pružnosti označuje jako „stěna“.

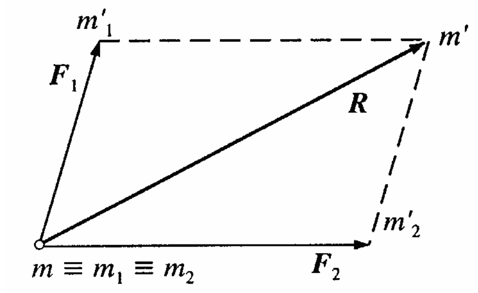
Dokonale tuhou desku, jejíž jeden rozměr l značně převládá nad příčnými rozměry d a h, vyšetřujeme jako *prut*. Prut uložený pomocí vazeb se nejčastěji označuje jako *nosník*.

2.5 Axiomy statiky

Pro soustavu sil působící na dokonale tuhé těleso platí následující axiomy.

- *Axiom o rovnoběžníku sil*: Vektor výslednice **R** dvou sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, působících na tuhé těleso v jednom bodu *m* (obr. 2.1) je tvořen úhlopříčkou rovnoběžníku o stranách rovných délkám vektorů sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$. Platí

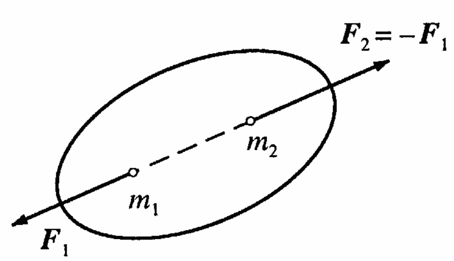
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \,. \tag{2.1}$$



Obr. 2.1: Rovnoběžník sil

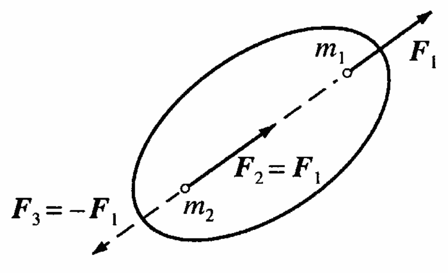
- *Axiom o rovnováze dvou sil*: Dvě síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ působící na tuhé těleso (obr. 2.2), jsou v rovnováze jen tehdy, jsou-li stejně velké, opačného smyslu a působí-li v jednom paprsku, tedy

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \,. \tag{2.2}$$



Obr. 2.2: Rovnováha dvou sil

- *Axiom o přidání rovnovážné soustavy*: K tělesu lze přidat rovnovážnou soustavu sil, aniž by se tím změnil pohybový stav tuhého tělesa (obr. 2.3).



Obr. 2.3: Změna působiště síly

- *Poučka o působišti síly*: Vyplývá z druhého a třetího axiomu – viz obr. 2.3. Působiště m_1 síly $\mathbf{F}_1$ lze posunout do libovolného bodu m_2 jejího paprsku, aniž by se tím změnil účinek síly na těleso. Dokážeme to tak, že necháme v bodu m_2 paprsku působit rovnovážnou soustavu sil $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ tak, aby $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$. Pak podle třetího axiomu lze odejmout od tělesa rovnovážnou soustavu sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ a zbude síla $\mathbf{F}_2$ v novém působišti m_2.

2.6 Silové soustavy

Pojem osamělá síla je jeden z nejdůležitějších abstraktních pojmů ve statice pevných dokonale tuhých těles.

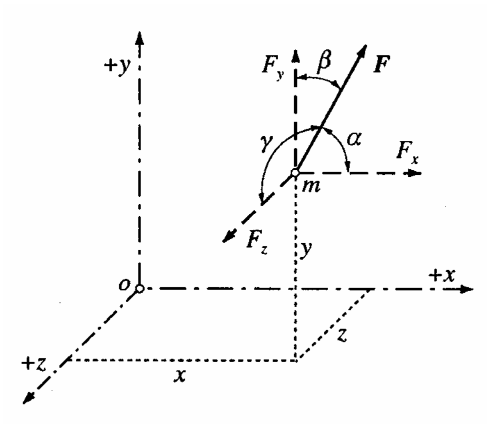
2.6.1 Síla

Pojem síly vznikl abstrakcí subjektivního pocitu tlaku či tahu při vyvozování silového účinku člověkem na těleso. Fyzikálně se síla chápe jako vektor, k jehož určení je potřebné zadat velikost, působiště, směr a smysl. Přímka, v níž vektor síly leží, je *paprskem* (nositelkou) *síly*. Jednotkou pro měření velikosti síly je newton (1 N = 1 kg·m·s^{-2}).

Ve vazbách mezi tělesy soustavy rozlišujeme *síly akční* a *reakční*, *síly pracovní* konají práci při elementárním pohybu soustavy a *síly vazbové* nekonají práci a jsou složkami vazbových reakcí.

Sílu **F** (obr. 2.4) jako vektor lze rozložit do složek F_x, F_y, F_z v souřadnicových osách x, y, z ortogonálního souřadnicového systému promítnutím vektoru síly **F** do těchto os. Složky F_x, F_y, F_z jsou skaláry. Značí-li **i**, **j**, **k** jednotkové vektory ve směru souřadnicových os, platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\,F_x + \mathbf{j}\,F_y + \mathbf{k}\,F_z \,. \qquad (2.3)$$



Obr. 2.4: Síla v pravoúhlém pravotočivém souřadnicovém systému

Velikost síly F pak (s představou tělesové úhlopříčky kvádru) je

$$\boxed{F = \left|\mathbf{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ .} \qquad (2.4)$$

Pro směrové úhly α, β, γ, odměřované ve třech různých rovinách určených paprskem síly a rovnoběžkami s jednotlivými souřadnicovými osami (kladnými poloosami), platí

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\,,} \qquad (2.5)$$

a vždy musí být podle (2.4) splněna podmínka

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 . \qquad (2.6)$$

Složky F_x, F_y, F_z lze vyjádřit jako skalární součin vektoru **F** a příslušných jednotkových vektorů

$$F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{i}\,, \qquad F_y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{j}, \qquad F_z = \mathbf{F}\cdot\mathbf{k} \qquad (2.7)$$

nebo častěji z výrazů (2.5)

$$\boxed{F_x = F\cos\alpha\,, \qquad F_y = F\cos\beta\,, \qquad F_z = F\cos\gamma\,.} \qquad (2.8)$$

Ve smyslu maticového počtu lze sílu **F** o složkách F_x, F_y, F_z považovat za sloupcovou matici (vektor)

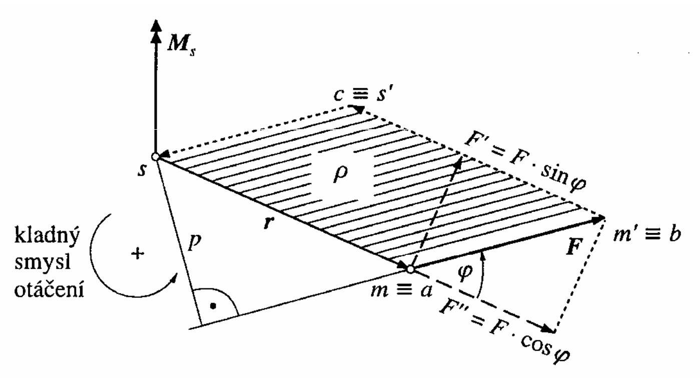
$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \{F_x, \quad F_y, \quad F_z\}^{\mathrm{T}}\,, \qquad (2.9)$$

zapisovaný často pro úsporu místa formou řádkového vektoru s transpozičním znaménkem $^{\mathrm{T}}$. Graficky se síla vyjadřuje orientovanou úsečkou, jejíž délka je v příslušném měřítku dána velikostí síly F.

2.6.2 Moment síly

Značí-li (obr. 2.5) **r** polohový vektor (průvodič) působiště m síly **F**, pak veličina $\mathbf{M}_s$ vyjadřuje (statický) **moment síly F k bodu** s (momentovému středu) a je dána vektorovým součinem

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,. \qquad (2.10)$$



Obr. 2.5: Statický moment síly k momentovému středu

Moment síly je **vektor vázaný** na bod s, kolmý na rovinu danou vektory **r** a **F**. Je orientovaný tak, že při pohledu proti (zdvojené) šipce vektoru $\mathbf{M}_s$ se jeví pootočení ze směru **r** do směru **F** v kladném smyslu, tj. proti smyslu pohybu hodinových ručiček. Fyzikálně vyjadřuje moment míru točivého účinku síly k bodu s. Moment síly **F** k bodu s se nemění, posuneme-li sílu **F** v jejím paprsku. *Velikost* momentu je

$$M_s = |\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{F}|\sin\varphi = r\cdot F\sin\varphi = F\cdot r\sin\varphi = F\cdot p \quad [\mathrm{N{\cdot}m}]. \qquad (2.11)$$

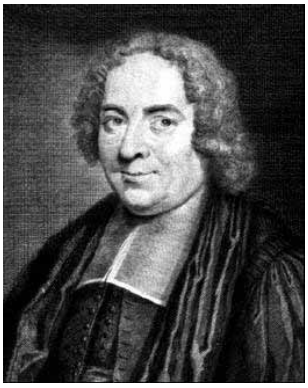
Podle (2.11) lze tedy velikost momentu určit skalárním součinem velikosti síly F a ramene p (délky kolmice spuštěné z bodu s na paprsek síly **F**), což představuje plošný obsah rovnoběžníku sestrojeného z vektorů **r** a **F**.

Moment $\mathbf{M}_O$ **síly F k ose (přímce)** O vyjadřuje její točivý účinek vzhledem k této ose. K určení momentu zvolíme na ose vhodný libovolný bod, k němuž určíme moment podle vztahu (2.10). Vektor tohoto momentu pak promítneme do směru osy O a získáme tak hledaný moment k ose.

Síla **F** rozložená do složek podle výrazu (2.3) má k libovolnému bodu moment

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} \times \mathbf{i})\, F_x + (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\, F_y + (\mathbf{r} \times \mathbf{k})\, F_z \,. \qquad (2.12)$$

Pak **Varignonova** (momentová) **věta**, vyjadřující vztah mezi momentem síly a momenty jejích složek, zní: Moment síly k libovolnému bodu je **vektorovým součtem** momentů složek této síly k témuž bodu.



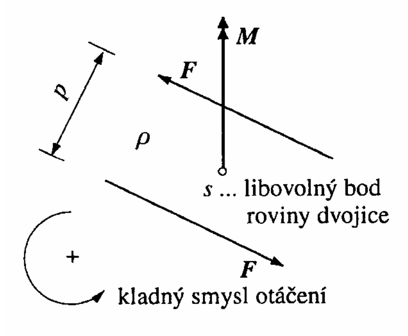
Pierre Varignon *(1654 – 1722) působil jako profesor na Collége Mazarin a byl členem Akademie. Zabýval se matematikou, fyzikou, hydraulikou, astronomií a filosofií. V r. 1725 vyšla jeho kniha Nová mechanika neboli statika, obsahující statiku tuhých těles, založená na rovnoběžníku sil.*

Za zmínku možná stojí, že momentovou větu, v podstatě zákon páky, zformuloval Archimédes (287 př. Kr. – 212 př. Kr.), největší matematik a mechanik starověku, a to takto: Nestejná závaží jsou na páce v rovnováze jen tehdy, jsou-li nepřímo úměrná ramenům, na nichž jsou zavěšená.

2.6.3 Dvojice sil

Dvojice sil (silová dvojice) je speciální soustavou dvou sil **F** stejné velikosti a směru, ale opačného smyslu, neležících na stejném paprsku (obr. 2.6). Při vzdálenosti p paprsků obou sil je mohutnost točivého účinku dvojice sil vyjádřena ***momentem*** dvojice sil o velikosti

$$\boxed{M = F \cdot p \,.} \qquad (2.13)$$



Obr. 2.6: Dvojice sil

Vektor **M** je vztyčený kolmo na rovinu dvojice sil tak, že při pohledu proti šipce vektoru otáčí dvojice v kladném smyslu. Ke všem bodům roviny dvojice i prostoru je moment dvojice sil stejný a nezávisí na paprscích sil. Lze jej libovolně přemísťovat v prostoru při zachování jeho směru a smyslu, proto se nazývá **volným vektorem**.

2.6.4 Druhy silových soustav

Silové soustavy rozdělujeme podle různých hledisek:

Podle polohy jednotlivých sil rozeznáváme soustavy

- *přímkové*, 1D – všechny síly soustavy působí v jedné přímce,
- *rovinné*, 2D – paprsky všech sil soustavy leží v jedné rovině,
- *prostorové*, 3D – paprsky sil soustavy leží obecně v prostoru.

Podle působišť sil rozlišujeme

- *obecnou soustavu sil* – paprsky sil mají zcela libovolné polohy,
- *svazek sil* – všechny síly soustavy mají společné působiště, paprsky všech sil se protínají v jednom bodu,
- *soustavu rovnoběžných sil* – paprsky sil jsou rovnoběžné, průsečík paprsků leží v nekonečnu.

2.6.5 Základní úlohy

U každé silové soustavy můžeme řešit tyto základní úlohy:

- **ekvivalenci** – danou soustavu sil nahradit výslednicí (silou, momentem) nebo jinou soustavou sil, tedy:
  - nahrazení dané soustavy sil výslednicí,
  - nahrazení dané síly soustavou sil zadaných paprsky (rozklad síly),
  - nahrazení dané soustavy sil jinou soustavou sil se zadanými paprsky.
- **rovnováhu** – uvést soustavu do rovnováhy tak, aby výsledný účinek byl nulový. Jedná se o úlohy:
  - zrušení dané soustavy sil rovnovážnou silou,
  - zrušení dané síly soustavou sil zadaných paprsky,
  - *zrušení* dané *soustavy* sil jinou *soustavou* sil se zadanými paprsky.

Rovnováhu využijeme při ***řešení složek reakcí***, obecně zapsanou rovnicí

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k = \mathbf{0}\,.} \tag{2.14}$$

Odpovídající podmínky, jimž musí soustava sil vyhovovat, se nazývají *podmínky ekvivalence* resp. *podmínky rovnováhy*.

Shrnutí

Σ

Seznámili jsme se s úvodem do úloh stavební mechaniky a se základními pojmy, axiomy a principy, kterých k řešení těchto úloh používáme. Osvětleno bylo zacházení s pojmy osamělá síla a moment síly, resp. dvojice sil, na kterých budou také s užitím Varignonovy věty postavena vyšetřování silových soustav v rovině i v prostoru.

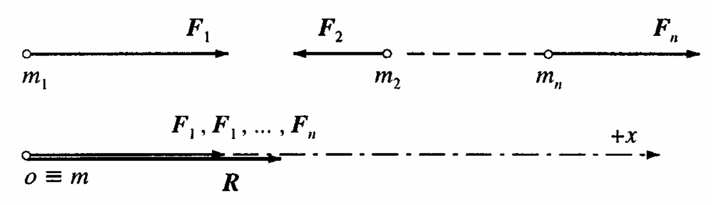
3 Rovinné soustavy sil

Mezi rovinné silové soustavy řadíme:

- soustavu sil ve společném paprsku (přímková soustava),
- svazek sil (soustava sil se společným působištěm),
- obecnou soustavu sil (síly působící porůznu v rovině),
- soustavu rovnoběžných sil.

3.1 Síly ve společném paprsku

Jako speciální případ rovinné (ale i prostorové) soustavy sil lze uvažovat síly, jejichž působiště leží na jedné přímce a paprsky těchto sil jsou totožné s přímkou (obr. 3.1). Protože působiště m_i každé síly $\mathbf{F}_i$ lze posunout do libovolného bodu m přímky (viz odst. 2.5), získáme soustavu sil působících v jednom bodu. Tuto soustavu výhodně využijeme u svazku sil po rozkladu do pravoúhlých složek.



Obr. 3.1: Síly působící ve společném paprsku

Výslednice **R** soustavy sil $\mathbf{F}_i$ (i =1, …, n) působících ve společném bodu paprsku je dána jejich algebraickým součtem

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \ . \tag{3.1}$$

Pro velikost výslednice (obr. 3.1) platí

$$R = F_1 - F_2 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \ . \tag{3.2}$$

Rovnováha soustavy sil ve společném paprsku nastane, platí-li

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \ , \tag{3.3}$$

neboli algebraický součet velikostí všech sil roven nule (obr. 3.1)

$$R = F_1 - F_2 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \ . \tag{3.4}$$

Soustavu s výslednicí $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ lze uvést do rovnováhy silou opačné velikosti.

Otázky

1. V jakém případě jsou dvě síly v rovnováze?

3.2 Rovinný svazek sil

Nejprve vyřešíme výsledný účinek dvou různoběžných sil působících v jednom bodu a následně budeme vyšetřovat obecný případ soustavy více sil se společným působištěm.

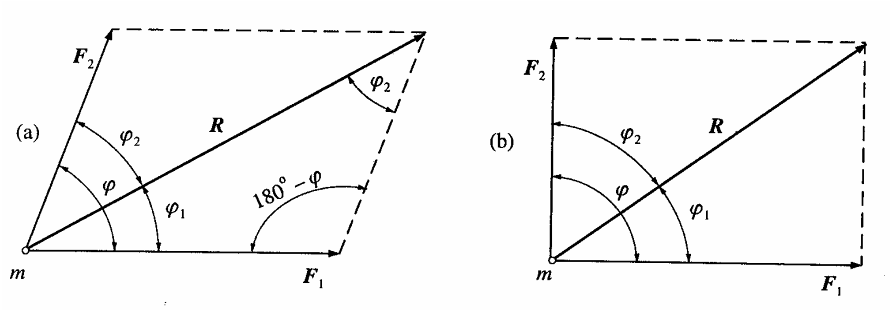
3.2.1 Dvě síly působící v jednom bodu

Podle prvního axiomu v odst. 2.5 platí, že výslednice **R** dvou sil je určena úhlopříčkou v rovnoběžníku sil. Velikost výslednice lze určit pomocí kosinové věty (*nemá žádnou souvislost s větou Jana Sladkého Koziny – Kozinova věta!*)

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \varphi)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}\,, \qquad (3.5)$$

úhly mezi výslednicí a silami získáme ze sinové věty

$$\sin\varphi_1 = \frac{F_2}{R}\sin\varphi\,, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{F_1}{R}\sin\varphi\,. \qquad (3.6)$$



Obr. 3.2: Dvě síly se společným působištěm

Nejvýhodnější je však řešení ***pomocí průmětů sil*** do souřadnicových os, jak budeme postupovat u svazku více sil.

Nejčastějším případem jsou **dvě síly** $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ **navzájem kolmé**. Pak platí

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,,$$

$$\cos\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \frac{F_1}{R}\,, \qquad \sin\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \frac{F_2}{R}\,. \qquad (3.7)$$

Rozklad síly do dvou složek daného směru

V rovině lze **jednoznačně** rozložit sílu **pouze do dvou složek**. Z trigonometrie obecného trojúhelníku pomocí sinové věty platí

$$F_1 = R\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi}\,, \qquad F_2 = R\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\,.$$

Zvláštní případ představuje rozklad síly **R** do dvou složek $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ navzájem kolmých ($\sin\varphi = \sin 90° = 1$):

$$F_1 = R\cos\varphi_1 = R\sin\varphi_2\,,$$

$$F_2 = R \sin \varphi_1 = R \cos \varphi_2 \,. \tag{3.8}$$

Výhodnější je však obecný způsob ***pomocí průmětů sil*** do souřadnicových os pravoúhlé soustavy, přičemž sestavíme dvě podmínky ekvivalence

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = R \cos \alpha \,,$$

$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = R \sin \alpha \tag{3.9}$$

a řešením získáme dvě neznámé velikosti sil F_1 , F_2 . Přitom musí být splněna podmínka řešitelnosti – nenulový determinant D soustavy rovnic:

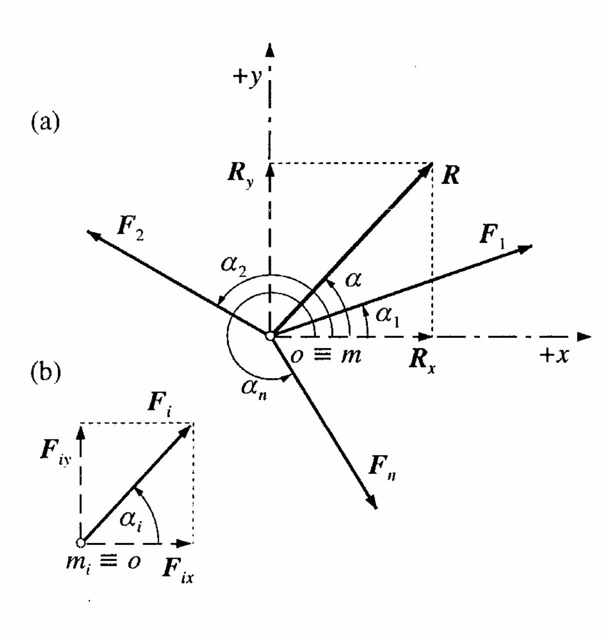
$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix} = \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \neq 0. \tag{3.10}$$

3.2.2 Svazek sil

Jedná se o soustavu sil se společným působištěm. V bodu m působí soustava různosměrných sil $\mathbf{F}_i$ (i =1, …, n). Každá síla $\mathbf{F}_i$ je dána velikostí F_i, směrem a smyslem (úhlem α_i , který může být orientovaný od $+x$, nebo uvažován jako ostrý). Nejvýhodnější je zadávat paprsek síly souřadnicemi koncového bodu.

Postupujeme tak, že každou sílu podle (2.8) rozložíme do složek $\mathbf{F}_{ix}$, $\mathbf{F}_{iy}$ navzájem kolmých o velikostech

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i \,, \qquad F_{iy} = F_i \sin \alpha_i \,. \tag{3.11}$$



Obr. 3.3: Rovinný svazek sil

Tím jsme původní soustavu nahradili **dvěma soustavami v paprscích**, kterými jsou osa x a osa y. Získáme dílčí výslednice $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$ o velikostech

$$R_x = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \,,$$

$$R_y = R\sin\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i \ . \tag{3.12}$$

Velikost výslednice **R** soustavy sil analogicky k (2.4) je

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{3.13}$$

a její směrový úhel α (odchylka od $+x$) analogicky k (2.5) je

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \text{resp. } \sin\alpha = \frac{R_y}{R}\ . \tag{3.14}$$

Podmínky rovnováhy pro průměty sil do obou os jsou

$$\boxed{R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ .} \tag{3.15}$$

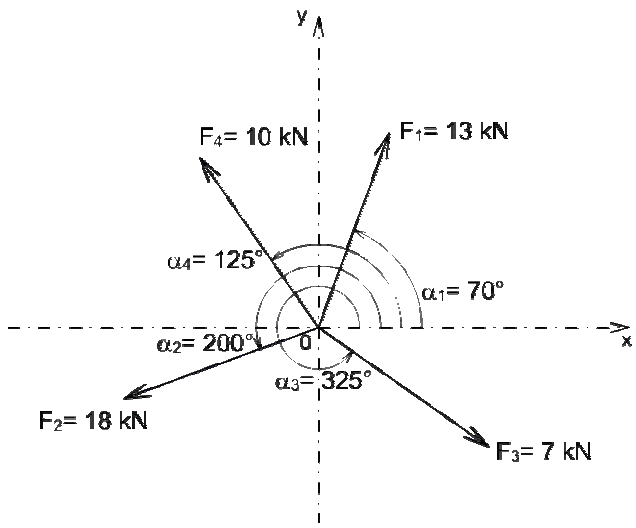
Otázky

1. Jaký je výsledný účinek soustavy sil působících v rovině na společný bod?
2. Kdy je taková soustava v rovnováze?

Příklad 3.1

Zadání

Stanovte velikost, směr a smysl výslednice **R** dané rovinné soustavy čtyř sil se společným působištěm *m* dle obr. 3.4.



Obr. 3.4: Zadaný svazek sil

Řešení

Výpočet uspořádáme pro větší přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 3.1. Nejprve vyčíslíme vodorovné a svislé složky jednotlivých sil podle vztahů (3.11). Sečtením hodnot v posledních dvou sloupcích získáme složky výslednice R_x a R_y, které odpovídají vztahům (3.12).

Tab. 3.1: Řešení příkladu 3.1

i	F_i [kN]	α_i [°]	$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$ [kN]	$F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$ [kN]
1	13	70	4,45	12,22
2	18	200	–16,91	–6,16
3	7	325	5,73	–4,02
4	10	125	–5,74	8,19
			$R_x = -12,47$	$R_y = 10,24$

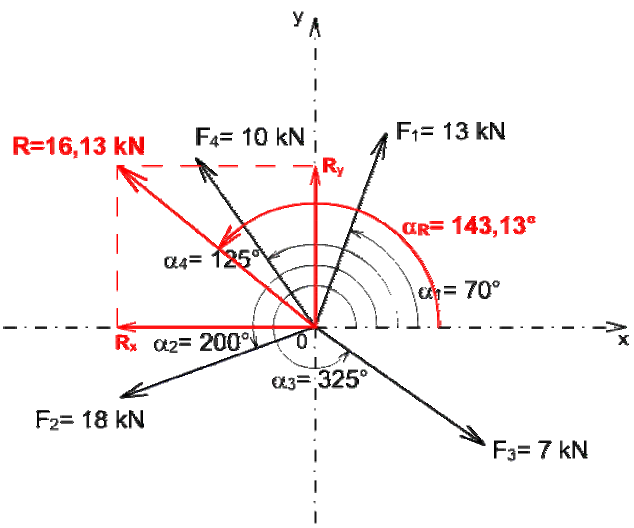
Výslednice **R** má velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-12,47)^2 + (10,24)^2} = 16,13\,\mathrm{kN}$$

a svírá s kladnou souřadnicovou osou $+x$ úhel α, který vyjádříme z trigonometrických funkcí za vztahů (3.14)

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-12,47}{16,13} = -0,773\,, \quad \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{10,24}{16,13} = 0,635\,.$$

Ze znamének pravoúhlých složek R_x a R_y výslednice **R** je zřejmé, že paprsek výslednice musí ležet ve druhém kvadrantu, což potvrzují hodnoty cosα a sinα, jimž odpovídá úhel $\alpha = 140,62°$.



Obr. 3.5: Zadaný svazek sil s výslednicí

3.3 Statický moment síly k bodu v rovině

Základní obecné informace o momentu síly jsme si uvedli v odst. 2.6.2, obr. 2.5. Uveďme přehledně **základní poučky** o statickém momentu síly k bodu v rovině:

- Statický moment má stálou velikost ke kterémukoli bodu přímky rovnoběžné s paprskem síly.
- Statický moment síly lze nahradit statickým momentem složky kolmé na průvodič síly (druhá složka vyvodí nulový statický moment).
- Statický moment je obecně roven *vektorovému* součtu, ale protože vektory leží v paprsku procházejícím bodem *s*, můžeme **Varignonovu větu** formulovat: Statický moment (tj. velikost) výslednice rovinné soustavy sil k libovolnému bodu v rovině sil je roven **algebraickému** součtu statických momentů jednotlivých sil soustavy k témuž momentovému středu

$$M_s = R \cdot r = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot p_i \ . \tag{3.16}$$

3.4 Síla, dvojice sil a moment v rovině

3.4.1 Dvojice sil

V návaznosti na odst. 2.6.3 uveďme **základní poučky** o dvojici sil (obr. 2.6) v rovině:

- *Statický moment* dvojice sil má stálou hodnotu rovnající se momentu dvojice sil.
- Dvojici sil lze v rovině libovolně posunout či pootočit (aniž se změní výsledný účinek).
- Dvojici sil lze v téže rovině **nahradit libovolnou** jinou **dvojicí sil** s momentem stejné velikosti a smyslu

$$M = F_1\, p_1 = F_2\, p_2 \ . \tag{3.17}$$

Při náhradě lze volit kterýkoli z parametrů F_i, p_i a druhý dopočítat.

Skládání silových dvojic

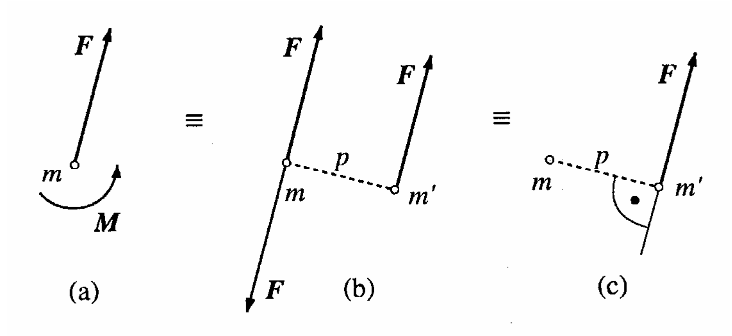
– podmínka ekvivalence

$$M_r = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \ , \tag{3.18}$$

– podmínka rovnováhy

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \ . \tag{3.19}$$

3.4.2 Síla a dvojice sil (moment) v rovině

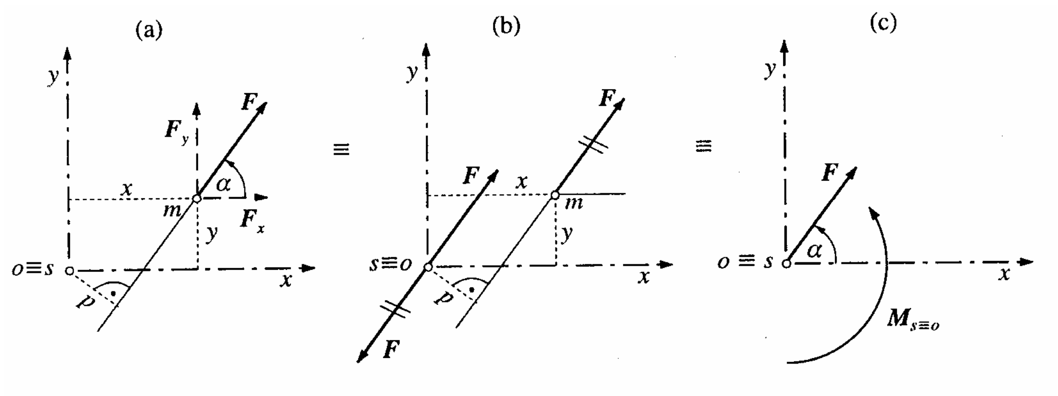


Obr. 3.6: Síla a dvojice sil

Výsledný účinek síly **F** s působištěm *m* a dvojice sil o momentu **M** (obr. 3.6) je jediná síla **F** rovnoběžně posunutá s paprskem síly o kolmou vzdálenost $p = M/F$. Poloha posunuté síly je určena tím, že k původnímu působišti *m* musí síla vyvolávat statický moment stejné velikosti i smyslu jako daná dvojice.

3.4.3 Redukce síly k bodu

Redukce síly k bodu představuje opačnou úlohu než v odst. 3.4.2. Každou sílu **F** v působišti *m* lze v rovině nahradit silou stejné velikosti, směru a smyslu působící v jiném bodu *s*, doplněnou dvojicí sil (momentem) podle rovnice (2.13) $M_s = F\,p$.



Obr. 3.7: Rovnoběžné posunutí síly do libovolného bodu

Můžeme najít vhodnější variantu. Nejprve rozložíme sílu **F** do pravoúhlých složek $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$ a přeložíme do počátku $o \equiv s$ každou složku zvlášť. V tom případě je nutno přidat dvě dvojice sil o celkové velikosti

$$M_s = F_y x - F_x y = F(x \sin \alpha - y \cos \alpha)\,. \qquad (3.20)$$

Jako vhodná aplikace se redukce síly k bodu vyskytuje při rozkladu výslednice vnitřních sil do složek.

3.5 Obecná rovinná soustava sil

Označuje se také jako soustava sil působících v rovině porůznu. Každá síla $\mathbf{F}_i$ soustavy je dána svou velikostí F_i, směrovým úhlem α_i (orientovaným od $+x$), a souřadnicemi x_i, y_i působiště m_i. Rozložíme ji ve smyslu (2.8) do pravoúhlých složek $\mathbf{F}_{ix}$, $\mathbf{F}_{iy}$ o velikostech

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i \,, \qquad F_{iy} = F_i \sin \alpha_i \,. \tag{3.21}$$

Složky $\mathbf{F}_{ix}$, $\mathbf{F}_{iy}$ přeložíme (podle odst. 3.4.3) do souřadnicových os x, y a do počátku o, tj. přidáme dvě dvojice sil (3.20) o velikosti výsledného momentu

$$M_{io} = F_{iy}\, x_i - F_{ix}\, y_i = F_i\,(x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) \,. \tag{3.22}$$

Pro všechny síly soustavy se původní soustava ekvivalentně nahradí třemi silovými soustavami, a to

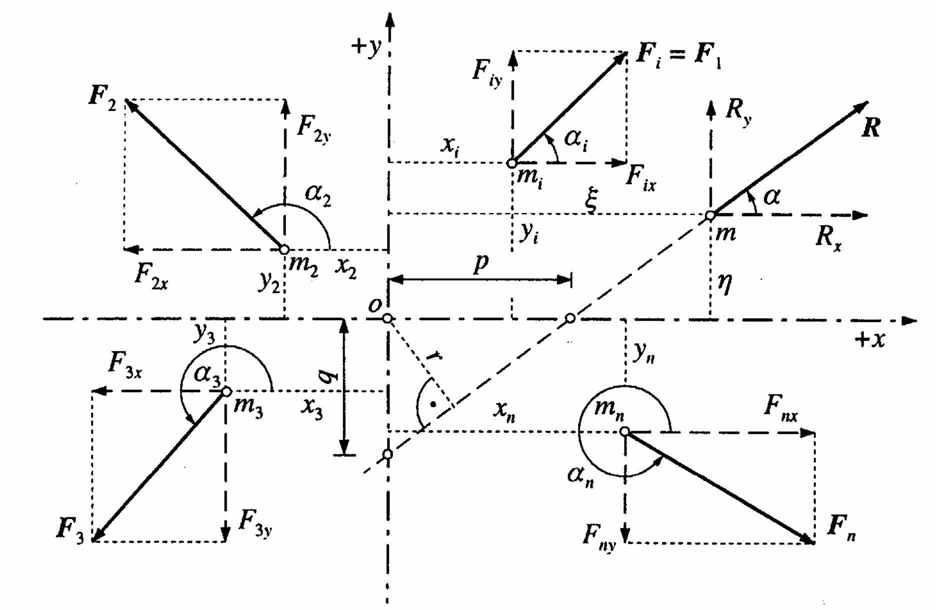
- soustavou sil $\mathbf{F}_{ix}$ v ose x (výslednice $\mathbf{R}_x$),
- soustavou sil $\mathbf{F}_{iy}$ v ose y (výslednice $\mathbf{R}_y$),
- soustavou silových dvojic $\mathbf{M}_{io}$ (výsledný moment $\mathbf{M}_o$)

a platí **tři podmínky ekvivalence**

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = R \cos \alpha \,,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i = R \sin \alpha \,,$$

$$M_o = \sum_{i=1}^{n} M_{io} = \sum_{i=1}^{n} F_i (x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i) \,. \tag{3.23}$$



Obr. 3.8: Obecná rovinná soustava sil

Pro velikost **výslednice R** obecné rovinné soustavy sil (působící v počátku) a směrový úhel α platí

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{R_x}{R}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{R_y}{R}\,. \tag{3.24}$$

Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil určují tři parametry:

– síla **R** procházející počátkem (R, α) a

– dvojice sil o momentu $\mathbf{M}_o$ rovném statickému momentu soustavy sil k počátku o.

Vektory **R**, $\mathbf{M}_o$ lze nahradit (obr. 3.4) silou posunutou o vzdálenost $r = M_o / R$.

Obecná rovinná soustava sil je v rovnováze, platí-li tři podmínky, u nichž tři složky podle (3.23) jsou rovny nule. Uveďme přehledně všechny varianty využití **podmínek rovnováhy**:

- **dvě silové a jedna momentová** podmínka podle (3.23), využitelné pro výpočet složek reakcí *konzoly*, jsou

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, \quad M_o = \sum_{i=1}^{n} M_{io} = 0\,; \tag{3.25}$$

- **dvě momentové a jedna silová** podmínka (předepsaná pro směr nekolmý na spojnici momentových středů a–b), využitelné pro výpočet složek reakcí *prostého nosníku*, jsou

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \quad M_a = \sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0\,, \quad M_b = \sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0\,; \tag{3.26}$$

- **tři momentové** podmínky (momentové středy a, b, c neleží na jedné přímce), využitelné pro výpočet složek reakcí *nosníku podepřeného ve třech bodech*, mají tvar

$$M_a = \sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0\,, \quad M_b = \sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0\,, \quad M_c = \sum_{i=1}^{n} M_{ic} = 0\,. \tag{3.27}$$

Speciální případy podmínek rovnováhy nastanou, když:

– je splněna jen podmínka $\sum F_{iy} = 0$, pak **R** je kolmá k ose y nebo jde o dvojici sil,

– jsou splněny jen podmínky $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$, pak výslednicí je dvojice sil,

– je splněna jen podmínka $\sum M_{io} = 0$ pro o_1, pak paprsek výslednice prochází o_1 , výslednicí nemůže být dvojice sil,

– jsou splněny jen podmínky $\sum M_{io} = 0$ pro o_1, o_2, pak paprsek výslednice je určen body o_1, o_2 .

Rozklad síly do tří složek v zadaných paprscích provedeme aplikací podmínek ekvivalence (3.23). Soustavu sil vhodně umístíme do souřadnicového systému x, y (obr. 3.9). Libovolně zvolíme smysly neznámých sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$. Všechny síly (včetně neznámých) rozložíme do pravoúhlých složek podle (3.21). Velikosti neznámých sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ pak určíme z podmínek ekvivalence

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F \cos \alpha \,,$$

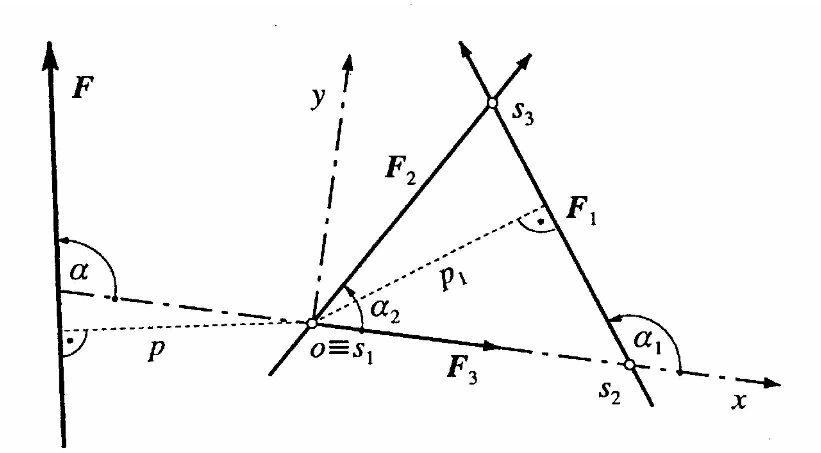
$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 = F \sin \alpha \,,$$

$$F_1 (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) + F_2 (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2)$$
$$+ F_3 (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) = F (x \sin \alpha - y \cos \alpha), \qquad (3.28)$$

přičemž podmínkou řešitelnosti je, aby determinant soustavy $D \neq 0$.

Výhodnější je řešení pomocí **tří momentových podmínek** k momentovým středům tvořeným průsečíky paprsků hledaných složek (obr. 3.9), takže **z jediné rovnice** určíme vždy jednu neznámou složku, např.

$$M_{s1} = F_1 p_1 = -F p \quad \Rightarrow \quad F_1 = -\frac{F\,p}{p_1}. \qquad (3.29)$$



Obr. 3.9: Rozklad síly do tří neznámých složek

Zrušení síly třemi silami v zadaných paprscích provedeme aplikací podmínek rovnováhy (3.25) ve tvaru

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + F \cos \alpha = 0,$$

$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + F \sin \alpha = 0,$$

$$F_1 (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) + F_2 (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2)$$
$$+ F_3 (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) + F (x \sin \alpha - y \cos \alpha) = 0, \qquad (3.30)$$

které se využijí při *výpočtu reakcí vnějších vazeb* jednoduchých rovinných nosníků. *Výhodnější* je opět řešení aplikací **tří momentových podmínek** rovnováhy k momentovým středům s_1, s_2, s_3 (obr. 3.7), takže např.:

$$\sum M_{s1} = F_1 p_1 - F p = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{F\,p}{p_1}. \qquad (3.31)$$

Otázky

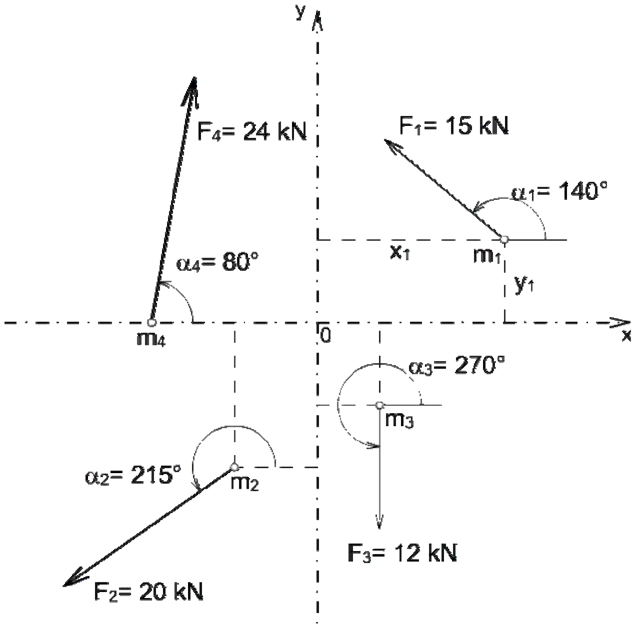
1. Jaký je výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil a jak se určí?
2. Kolik je podmínek rovnováhy pro obecnou rovinnou soustavu sil a jaké to mohou být (silové, momentové)?

3. Čím se liší úlohy rozklad síly do 3 složek a zrušení síly třemi silami v zadaných paprscích?

Příklad 3.2

Zadání

Stanovte velikost a polohu výslednice ***R*** obecné rovinné soustavy čtyř sil podle níže uvedeného obrázku pro F_i , α_i , $m_i[x_i , y_i]$, i = 1, 2, 3, 4 zadané v tabulce 3.



Obr. 3.10: Zadaná obecná rovinná soustava sil

Řešení

Výpočet uspořádáme pro větší přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 3.2. Nejprve vyčíslíme vodorovné a svislé složky jednotlivých sil podle vztahů (3.21) ve sloupcích *5* a *6*. Dále určíme momenty od jednotlivých složek sil k počátku *o* podle vztahu (3.22) ve sloupcích *7* a *8*. Sečtením hodnot ve sloupcích *5*, *6* získáme složky výslednice R_x a R_y, které odpovídají vztahům (3.23). Sečtením hodnot v posledních sloupcích *7* a *8* získáme velikost momentu $\mathbf{M}_o$ od výslednice **R** k počátku *o*.

Tab. 3.2: Řešení příkladu 3.2

i	F_i [kN]	α_i [°]	x_i [m]	y_i [m]	F_{ix} [kN]	F_{iy} [kN]	$F_{iy} \cdot x_i$ [kN·m]	$-F_{ix} \cdot y_i$ [kN·m]
sl.	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	15	140	9	4	–11,49	9,64	86,78	45,96
2	20	215	–4	–7	–16,38	–11,47	45,89	–114,68
3	12	270	3	–4	0	–12,00	–36,00	0

4	24	80	–8	0	4,17	23,64	–189,08	0
					–23,71	9,81	–92,42	–68,72
							$M_o = -161{,}14$	

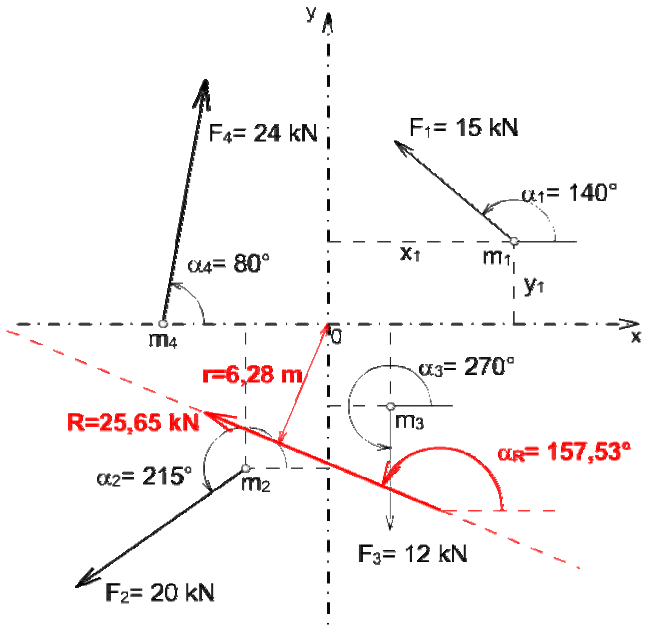
Výslednice **R** má velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-23{,}71)^2 + (9{,}81)^2} = 25{,}65\,\text{kN}$$

a její paprsek svírá s kladnou souřadnicovou osou $+x$ úhel α, který vyjádříme z trigonometrických funkcí za vztahů (3.24)

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-23{,}71}{25{,}65} = -0{,}924\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{9{,}81}{25{,}65} = 0{,}382 \;\Rightarrow\; \alpha = 157{,}53°\,.$$



Obr. 3.11: Výsledné řešení obecné rovinné soustavy sil

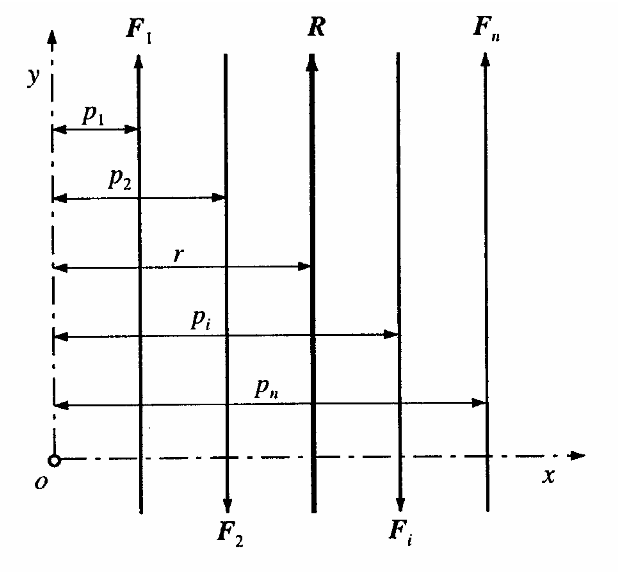
Rameno r výslednice **R** vzhledem k počátku souřadnic o určíme ze vztahu

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{-161{,}14}{25{,}65} = -6{,}28\,\text{m}\,.$$

Znaménko mínus znamená, že výslednice **R** leží vůči počátku tak, aby vyvodila záporný moment. Protože v našem případě směřuje výslednice **R** do druhého kvadrantu, musí ležet výslednice pod počátkem o (viz obr. 3.11).

3.6 Soustava rovnoběžných sil v rovině

Jedná se o zvláštní případ obecné rovinné soustavy sil nebo též rovinného svazku sil, u něhož průsečík paprsků sil leží v nekonečnu. Každá síla $\mathbf{F}_i$ je dána velikostí F_i, polohou paprsku (vzdálenost p_i) a smyslem působení. Rovnoběžně s paprsky sil veďme jednu souřadnicovou osu (obr. 3.12).



Obr. 3.12: Rovinná soustava rovnoběžných sil

Výsledný účinek stanovíme ze dvou statických podmínek ekvivalence. Směr výslednice je shodný se směrem paprsků sil, předpokládáme např. s $+y$. Velikost výslednice je dána algebraickým součtem všech sil

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \,, \tag{3.32}$$

a její polohu určíme podle Varignonovy věty

$$M_o = \sum_{i=1}^{n} F_i p_i = R\, r \,, \tag{3.33}$$

z níž plyne rameno výslednice

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i p_i}{R} \,. \tag{3.34}$$

Podmínky rovnováhy získáme zjednodušením (3.25) ve tvaru

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \qquad M_o = \sum_{i=1}^{n} F_i p_i = 0 \,, \tag{3.35}$$

nebo *výhodněji* z (3.27) jako **dvě momentové podmínky**, přičemž spojnice o_1–o_2 nesmí být rovnoběžná s paprsky sil, tedy

$$\boxed{M_{o_1} = \sum_{i=1}^{n} M_{io_1} = 0, \qquad M_{o_2} = \sum_{i=1}^{n} M_{io_2} = 0\,.} \tag{3.36}$$

Statický střed soustavy rovnoběžných sil

Uvažujme soustavu rovnoběžných sil $\mathbf{F}_i$ (i = 1, …, n), přičemž každá síla je zadána velikostí F_i a působištěm m_i (x_i, y_i).

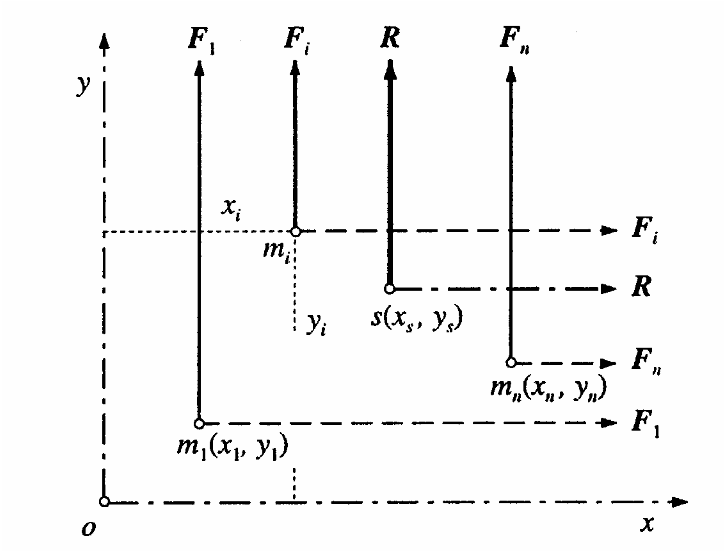
Otáčejme současně všemi silami kolem jejich působišť, aby byly stále rovnoběžné. Pak se otáčí i výslednice $\mathbf{R}$ okolo pevného bodu s, který se nazývá *statickým středem soustavy* bodů m_i se silami $\mathbf{F}_i$. Nejlépe se vyšetřuje pro dvě soustavy na sebe kolmé. Podle Varignonovy věty (obr. 3.13) platí

$$R\,x_s = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i\,, \qquad -R\,y_s = -\sum_{i=1}^{n} F_i y_i\,,$$

takže **souřadnice statického středu** se určí jako podíl statického momentu soustavy a výslednice

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\,, \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\,. \tag{3.37}$$

Určení polohy statického středu má praktické *využití*: Představují-li velikosti sil plochy obrazců (délky čar) a působiště jejich těžiště, pak představuje statický střed **těžiště** plochy složeného obrazce (složené čáry).



Obr. 3.13: Statický střed soustavy rovnoběžných sil

Shrnutí

Vyšetřovali jsme úlohy ekvivalence a rovnováhy rovinných soustav sil. Nejprve se jednalo o síly působící na společném paprsku a síly s působištěm v jednom bodu (rovinný svazek sil). Po zavedení pojmů statického momentu síly a dvojice sil bylo možno přikročit k řešení obecné soustavy sil – sil s působišti v různých bodech roviny. Zabývali jsme se možnostmi formulace tří podmínek ekvivalence, resp. rovnováhy uvažovaných silových soustav v rovině. Speciální pozornost byla věnovány soustavě rovnoběžných sil v rovině a jejímu statickému středu.

4 Prostorové soustavy sil

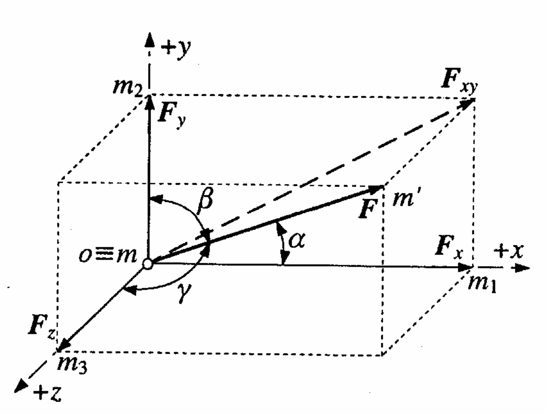
V této kapitole rozšíříme naše znalosti ze silových soustav na 3D (prostorové) úlohy. Setkáme se s již známými pojmy (statický moment síly k bodu, dvojice sil), ale i s novými pojmy (statický moment síly k ose, bivektor apod.).

4.1 Pravoúhlé složky síly v prostoru

Podobně jako v rovině, i v prostoru s výhodou pracujeme s pravoúhlými složkami obecných sil. Následující dvě varianty jsou základními případy, které budeme velmi často využívat v dalších úvahách, i když s jiným formálním označením. Budeme se na ně odvolávat pro detailní vyjádření.

4.1.1 Rozklad síly do pravoúhlých složek

Uvažujme v souřadnicové soustavě s osami x, y, z sílu **F** (obr. 4.1). Ve třech různých rovinách určených paprskem síly **F** a jednotlivými souřadnicovými osami (event. rovnoběžkami s nimi) odměříme směrové úhly α, β, γ, pro něž platí výrazy (2.5) s kontrolním vztahem (2.6). Jednotlivé složky síly **F** budeme vyjadřovat pomocí rovnic (2.8).



Obr. 4.1: Tři síly v jednom bodu

4.1.2 Tři síly se společným působištěm

Působí-li ve zvláštním případě (obr. 4.1) tři navzájem na sebe kolmé síly ve společném působišti, představuje výslednice **R** = **F** tělesovou úhlopříčku kvádru, jehož délky hran se rovnají velikostem sil. Výslednici lze získat postupným vektorovým součtem

$$\mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = \mathbf{F}_{xy}, \qquad \mathbf{F}_{xy} + \mathbf{F}_z = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = \mathbf{F}, \tag{4.1}$$

nebo ve skalárním tvaru

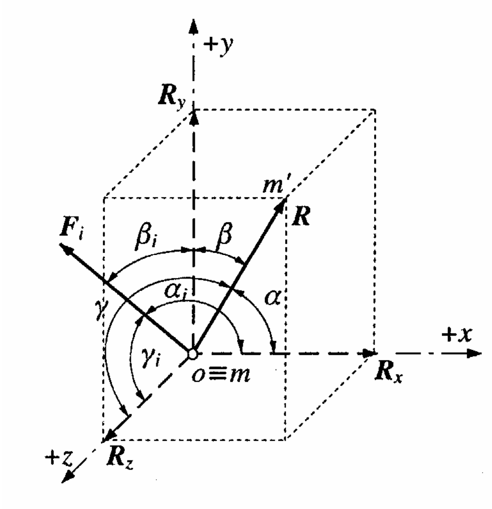
$$F_x^2 + F_y^2 = F_{xy}^2, \qquad F_{xy}^2 + F_z^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2, \tag{4.2}$$

takže platí rovnice (2.4) a směrové úhly jsou vyjádřeny vztahy (2.5).

4.2 Prostorový svazek sil

Každá síla F_i (i = 1, ..., n) soustavy sil se společným působištěm o je dána svou velikostí, směrem a smyslem (pomocí směrových úhlů α_i, β_i, γ_i). Každou sílu soustavy sil rozložíme na tři složky navzájem kolmé působící ve směru souřadnicových os x, y, z podle (2.8)

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i , \qquad F_{iy} = F_i \cos\beta_i , \qquad F_{iz} = F_i \cos\gamma_i . \tag{4.3}$$



Obr. 4.2: Prostorový svazek sil

Tím získáme místo původní soustavy sil $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_n$ tři soustavy sil ve společných paprscích (viz odst. 3.1) ztotožněných se souřadnicovými osami. Algebraickým součtem složek sil v osách získáme dílčí výslednice $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$, pro jejichž velikosti platí

$$R_x = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i ,$$

$$R_y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i ,$$

$$R_z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i . \tag{4.4}$$

Rovnice (4.4) představují **tři statické** (silové) **podmínky ekvivalence** pro prostorový svazek sil.Výslednici **R** prostorového svazku sil s příslušnými směrovými úhly α, β, γ vyjádříme podle vztahů (2.4) a (2.5) ve tvaru

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} , \tag{4.5}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} . \tag{4.6}$$

Důležité:

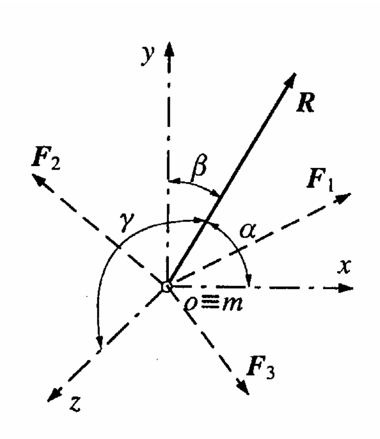
Statické (silové) **podmínky rovnováhy:**

Prostorová soustava sil se společným působištěm je v rovnováze jen tehdy, když algebraické součty průmětů všech sil soustavy do tří os navzájem kolmých (obecně i kosoúhlých) jsou rovny nule:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (4.7)$$

Nahrazení a zrušení síly *R* třemi silami F_i zadanými paprsky se společným působištěm

Sílu v prostoru lze *jednoznačně* rozložit pouze *do tří složek*. U neznámých sil F_i (i = 1, 2, 3) zvolíme zcela libovolně jejich smysly. Při rozkladu síly ***R*** do tří složek řešíme tři statické podmínky ekvivalence (4.4). Úloha zrušení síly ***R*** třemi složkami vede na použití tří statických podmínek rovnováhy (4.7).



Obr. 4.3: Nahrazení síly **R** *třemi silami* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$

Otázky

1. Jaký je výsledný účinek sil působících v prostoru na společný bod?

Příklad 4.1

Zadání

Stanovte výslednici **R** prostorového svazku tří sil pro F_i, α_i, β_i, γ_i, i = 1, 2, 3 zadané v tabulce 4.1.

Řešení

Výpočet uspořádáme pro větší přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 4.1. Nejprve vyčíslíme osové (x, y, z) složky jednotlivých sil podle vztahů (4.3). Sečtením hodnot v posledních třech sloupcích získáme složky výslednice R_x, R_y, a R_z které odpovídají vztahům (4.4).

Tab. 4.1 Zadání a řešení příkladu 4.1

i	F_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$ [kN]	$F_{iy} = F_i \cos\beta_i$ [kN]	$F_{iz} = F_i \cos\gamma_i$ [kN]
1	300	90	90	0	0	0	300,00
2	400	60	30	90	200,00	346,41	0
3	500	45	90	45	353,55	0	353,55
$\sum_{i=1}^{3}$					$R_x = 553,55$	$R_y = 346,41$	$R_z = 653,55$

Výslednice **R** má velikost podle vztahu (4.5)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{553,55^2 + 346,41^2 + 653,55^2} = 923,88\,\text{kN}$$

a směr výslednice určíme pomocí směrových kosinu podle vztahů (4.6)

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{553,55}{923,88} = 0,599 \Rightarrow \alpha = 53°11',$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{346,41}{923,88} = 0,375 \Rightarrow \beta = 67°59',$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{653,55}{923,88} = 0,707 \Rightarrow \gamma = 44°59'.$$

4.3 Statický moment síly k bodu v prostoru

Moment síly k bodu byl pro jednu sílu definován v odst. 2.6.2. V případě většího počtu sil $\mathbf{F}_i$ různě působících v prostoru jsou roviny statických momentů jednotlivých sil (určených paprskem síly a bodem) obecně různé a vektory momentů $\mathbf{M}_{s,i}$ jsou rovněž různé.

Pak **Varignonova věta** pro síly k bodu v prostoru zní: Statický moment $\mathbf{M}_s$ výslednice **R** prostorové soustavy sil $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ k libovolnému bodu s v prostoru je roven **vektorovému součtu** statických momentů $\mathbf{M}_{s,1}, \ldots, \mathbf{M}_{s,n}$ jednotlivých sil soustavy k tomuto bodu

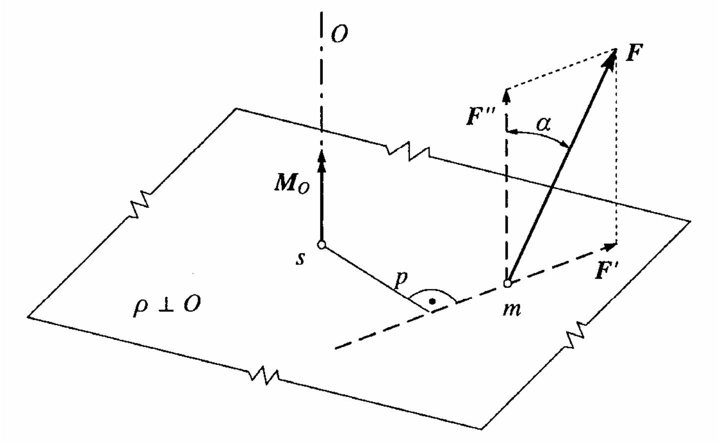
$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_{s,R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{s,i}\,. \tag{4.8}$$

4.4 Statický moment síly k ose v prostoru

Moment síly k ose byl zmíněn v odst. 2.6.2. Libovolným bodem m paprsku síly (působištěm síly) proložme rovinu ρ kolmou k momentové ose O. Sílu **F** rozložme do složek $F' = F \cdot \sin(\alpha)$ a $F'' = F \cdot \cos(\alpha)$.

Statický moment $\mathbf{M}_o$ vyvolá pouze síla působící v rovině ρ (obr. 4.4), takže

$$M_o = F'p = F\ p \sin\alpha\ . \tag{4.9}$$



Obr. 4.4: Statický moment síly k ose

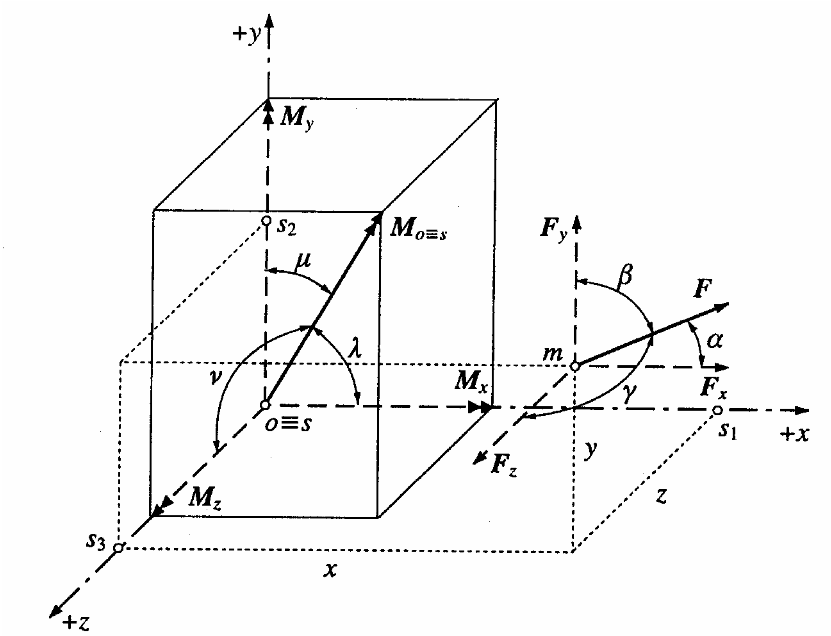
Varignonova věta k ose v prostoru zní: Statický moment síly **F** (výslednice **R** libovolné prostorové soustavy sil) k momentové ose O je roven **algebraického součtu** statických momentů jejích složek (jednotlivých sil soustavy) k téže ose.

V odst. 4.6 budeme využívat speciální případ, a to **statický moment** síly **F k souřadnicovým osám** x, y, z a **k počátku** souřadnic o. Sílu **F** v působišti m (x, y, z) proto ekvivalentně nahradíme třemi pravoúhlými složkami rovnoběžnými se souřadnicovými osami (obr. 4.5) podle vztahů (2.8). Statické momenty $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ síly **F** k osám jsou dány výrazy

$$M_x = M_{s_1} = F_z y - F_y z = F(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,,$$

$$M_y = M_{s_2} = F_x z - F_z x = F(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,,$$

$$M_z = M_{s_3} = F_y x - F_x y = F(x\cos\beta - y\cos\alpha)\,. \tag{4.10}$$



Obr. 4.5: Statický moment síly k souřadnicovým osám a k počátku

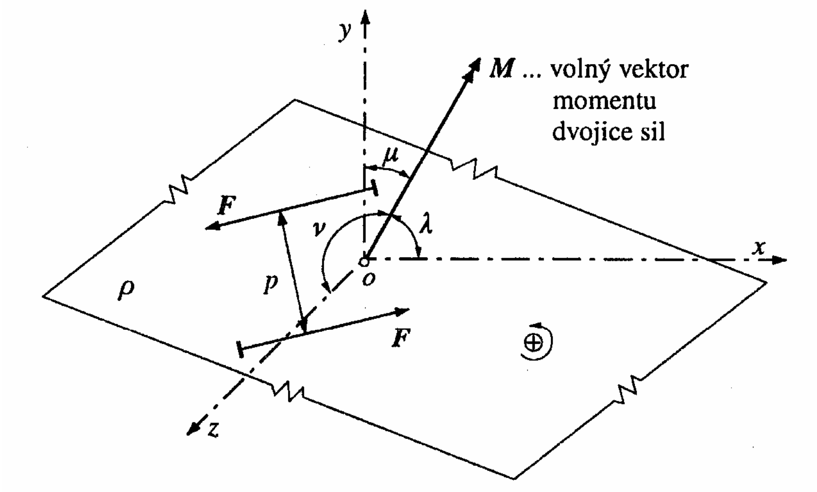
Působiště vektorů $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ statických momentů lze volit v libovolném bodu souřadnicových os x, y, z; výhodně zvolíme počátek o. Výsledný vektor statického momentu $\mathbf{M}_{o\equiv s}$ síly $\mathbf{F}$ k bodu $o\equiv s$ určíme vektorovým součtem statických momentů $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ k souřadnicovým osám. Podle (2.4) a (2.5) získáme velikost $\mathbf{M}_{o\equiv s}$ a směrové úhly λ, μ, ν ve tvaru

$$M_{o\equiv s} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,, \tag{4.11}$$

$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M_o}, \quad \cos\mu = \frac{M_y}{M_o}, \quad \cos\nu = \frac{M_z}{M_o}\,. \tag{4.12}$$

4.5 Dvojice sil v prostoru

V odst. 2.6.3 jsme uvedli, že účinek dvojice sil lze vyjádřit volným vektorem o velikosti dané rovnicí (2.13). Vektor svírá se souřadnicovými osami x, y, z směrové úhly λ, μ, ν (obr. 4.6).



Obr. 4.6: Dvojice sil v prostoru

Pro dvojici sil v prostoru platí (podobně jako pro dvojici sil v rovině), že ji v její rovině ρ můžeme:

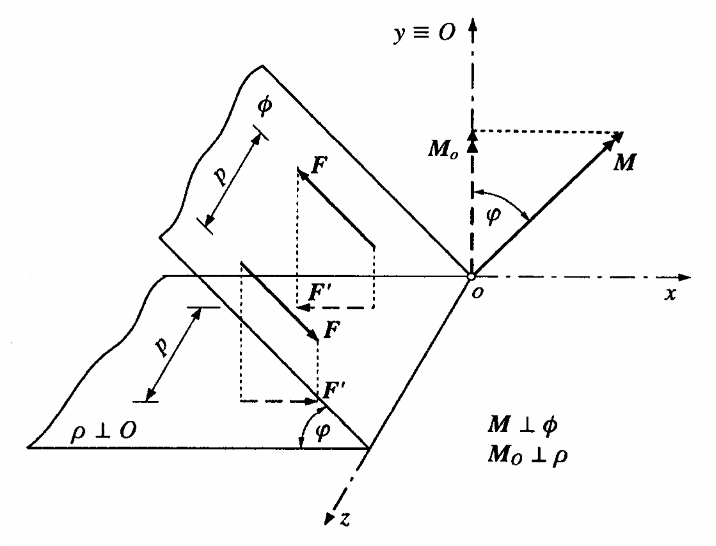
- libovolně posunout nebo pootočit,
- nahradit libovolnou jinou dvojicí sil, která má s původní dvojicí sil moment stejné velikosti a smyslu,
- dvojici sil v prostoru posunout do libovolné roviny ϕ rovnoběžné s rovinou ρ (dojde pouze ke změně polohy působiště, ale výsledný účinek zůstává stejný).

Statický moment $\mathbf{M}_O$ dvojice sil působící v rovině ϕ **k libovolné ose** O v prostoru (obr. 4.7) je roven průmětu vektoru $\mathbf{M}$ momentu dvojice sil do osy O

$$M_O = M\cos\varphi = F\ p\cos\varphi\,, \tag{4.13}$$

kde φ je úhel, který svírá vektor **M** s osou O a rovněž úhel mezi rovinami ρ a ϕ. Statický moment $\mathbf{M}_o$ k ose O dvojice sil v rovině ϕ je roven momentu dvojice sil, kterou obdržíme promítnutím dvojice sil do roviny $\rho \perp O$, takže

$$M_O = F'\ p = F\ p \cos\varphi\,. \tag{4.14}$$

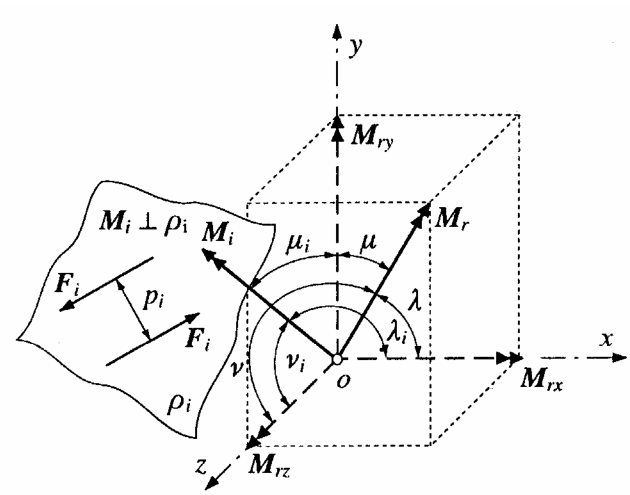


obr. 4.7: Statický moment dvojice sil k ose a bodu v prostoru

Skládání silových dvojic v prostoru

Uvažujme soustavu silových dvojic v prostoru o momentech $\mathbf{M}_i$ ($i = 1,\ldots,n$), působících na tuhé těleso v obecných rovinách ρ_i (obr. 4.8). Jednotlivé silové dvojice zobrazíme volnými vektory přemístěnými do počátku o pravoúhlého souřadnicového systému x, y z. Tím získáme soustavu vektorů momentů $\mathbf{M}_i$ ($i = 1,...,n$) se společným působištěm o. Pro výsledný vektor momentu $\mathbf{M}_r$ uplatníme stejný postup jako pro výslednici **R** v odst. 4.2. Každý vektor $\mathbf{M}_i$ rozložíme pomocí směrových úhlů λ_i, μ_i, ν_i na tři pravoúhlé složky M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} o velikostech

$$M_{ix} = M_i \cos\lambda_i\,, \qquad M_{iy} = M_i \cos\mu_i\,, \qquad M_{iz} = M_i \cos\nu_i\,. \tag{4.15}$$



Obr. 4.8: Prostorový svazek vektorů momentů

Tím jsme prostorový svazek vektorů momentů nahradili třemi soustavami vektorů v souřadnicových osách, takže pro jejich velikosti platí

$$M_{rx} = M_r \cos\lambda = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cos\lambda_i \ ,$$

$$M_{ry} = M_r \cos\mu = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cos\mu_i \ ,$$

$$M_{rz} = M_r \cos\nu = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cos\nu_i \ . \tag{4.16}$$

Rovnice (4.16) představují **tři podmínky ekvivalence** pro soustavu silových dvojic v prostoru. Podle (2.4) a (2.5) platí pro velikost výsledného vektoru momentu $\mathbf{M}_r$ a jeho směrové úhly vztahy

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2} \ , \tag{4.17}$$

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r}, \quad \cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r}, \quad \cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r} \ . \tag{4.18}$$

Závěrem můžeme konstatovat, že soustavu silových dvojic v prostoru o momentech M_i lze nahradit jedinou výslednou dvojicí sil (momentem) o velikosti M_r, který lze zobrazit volným vektorem $\mathbf{M}_r$.

Důležité:

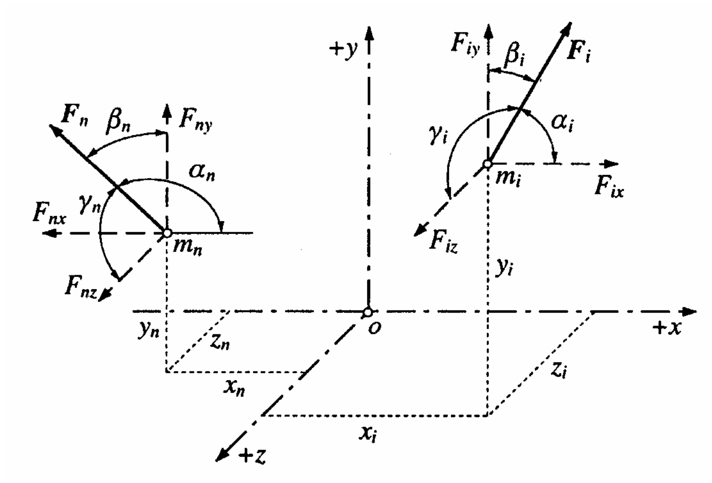
Momentové podmínky rovnováhy:

Soustava silových dvojic v prostoru o momentech $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ je v rovnováze jen tehdy, když algebraické součty průmětů všech vektorů momentů silových dvojic do tří os navzájem kolmých (obecně i kosoúhlých) jsou rovny nule:

$$M_{rx} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \quad M_{ry} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \quad M_{rz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \ . \tag{4.19}$$

4.6 Obecná prostorová soustava sil

Obecnou prostorovou soustavou sil rozumíme soustavu sil, jejíž paprsky neleží v jediné rovině a ani neprocházejí jedním bodem. V souřadnicové soustavě x, y, z s počátkem o je každá síla soustavy $\mathbf{F}_i$ (i =1, ..., n) zadána velikostí, působištěm m_i (x_i, y_i, z_i) a směrovými úhly α_i, β_i, γ_i (obr. 4.9).



Obr. 4.9: Obecná prostorová soustava sil

Redukce síly $\mathbf{F}_i$ k bodu *o*

Posuneme-li sílu $\mathbf{F}_i$ rovnoběžně do počátku *o* souřadnicové soustavy, musíme (pro zachování stejného účinku) přidat dvojici sil o momentu $\mathbf{M}_{io}$ (rovném co do velikosti a smyslu statickému momentu síly $\mathbf{F}_i$ k počátku *o*) s velikostí

$$M_{io} = F_i p_i \,. \tag{4.20}$$

Vektor momentu $\mathbf{M}_{io}$, vztyčený v bodu *o*, je kolmý k rovině ρ (tvořené paprskem síly a bodem *o*). Nejvýhodnější je provést redukci síly $\mathbf{F}_i$ k bodu *o* pomocí již uvedených pravoúhlých složek síly

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i, \qquad F_{iy} = F_i \cos\beta_i, \qquad F_{iz} = F_i \cos\gamma_i \,. \tag{4.21}$$

Pro jejich přeložení do počátku *o* musíme přidat celkem šest silových dvojic (působících po dvou v jednotlivých souřadnicových rovinách), takže

$$M_{ix} = F_{iz} y_i - F_{iy} z_i = F_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i) \,,$$

$$M_{iy} = F_{ix} z_i - F_{iz} x_i = F_i (z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i) \,,$$

$$M_{iz} = F_{iy} x_i - F_{ix} y_i = F_i (x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i) \,. \tag{4.22}$$

Výsledným účinkem tří silových dvojic o momentech $\mathbf{M}_{ix}$, $\mathbf{M}_{iy}$, $\mathbf{M}_{iz}$ v jednotlivých souřadnicových rovinách je jediná dvojice sil o momentu $\mathbf{M}_{io}$, který je roven statickému momentu síly $\mathbf{F}_i$ k počátku *o*. Pro velikost momentu a směrové úhly podle (4.17) a (4.18) platí

$$M_{io} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2} \,, \tag{4.23}$$

$$\cos\lambda_i = \frac{M_{ix}}{M_{io}}, \qquad \cos\mu_i = \frac{M_{iy}}{M_{io}}, \qquad \cos\nu_i = \frac{M_{iz}}{M_{io}} \,. \tag{4.24}$$

Výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil

Po redukci všech sil soustavy do počátku *o* souřadnicové soustavy *x*, *y*, *z* dostáváme prostorový svazek vektorů sil $\mathbf{F}_i$ a prostorový svazek vektorů momentů $\mathbf{M}_{io}$ (i=1,..., n) v bodu *o*.

Velikost výslednice **R** *prostorového svazku sil* podle (4.5), jejích pravoúhlých složek $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ (rovných algebraickému součtu průmětů všech sil soustavy do jednotlivých os) podle (4.4) a směrových úhlů α, β, γ podle (4.6) jsou

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ , \tag{4.25}$$

$$R_x = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i\ ,$$

$$R_y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i\ ,$$

$$R_z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i\ , \tag{4.26}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}. \tag{4.27}$$

Výsledným účinkem *prostorového svazku vektorů momentů* $\mathbf{M}_{io}$ je podle vztahu (4.17) v odst. 4.5 jediná dvojice sil o momentu $\mathbf{M}_r$ s působištěm v počátku *o* souřadnicové soustavy o velikosti

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}\ , \tag{4.28}$$

kde pravoúhlé průměty $\mathbf{M}_{rx}$, $\mathbf{M}_{ry}$, $\mathbf{M}_{rz}$ vektoru $\mathbf{M}_r$ do souřadnicových os x, y, z, rovné algebraickým součtům statických momentů sil soustavy k těmto osám, spolu se směrovými úhly λ, μ, ν mají podle (4.16) a (4.18) velikosti

$$M_{rx} = M_r \cos\lambda = \sum_{i=1}^{n} (F_{iz} y_i - F_{iy} z_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i)\,,$$

$$M_{ry} = M_r \cos\mu = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} z_i - F_{iz} x_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i)\,,$$

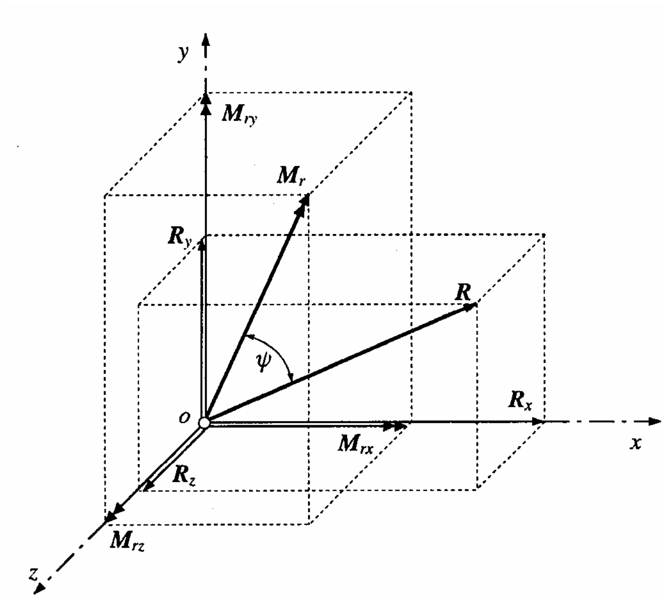
$$M_{rz} = M_r \cos\nu = \sum_{i=1}^{n} (F_{iy} x_i - F_{ix} y_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i)\,, \tag{4.29}$$

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r}, \quad \cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r}, \quad \cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r}. \tag{4.30}$$

Vektory **R** a $\mathbf{M}_r$ v počátku souřadnic *o* (obr. 4.10) svírají navzájem úhel ψ, pro který platí vztah

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu =$$

$$= \frac{R_x M_{rx} + R_y M_{ry} + R_z M_{rz}}{R M_r} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \neq \frac{\pi}{2}. \tag{4.31}$$



Obr. 4.10: Bivektor **R**, **M**$_r$ *obecné prostorové soustavy sil*

Závěr:

Obecnou prostorovou soustavu sil **F**$_i$ (i =1,…,n) lze ekvivalentně nahradit silou **R** procházející zvoleným počátkem o a dvojicí sil o momentu **M**$_r$ rovném statickému momentu všech sil soustavy k bodu o. Tento výsledný účinek se nazývá **bivektorem (dynamou) R**, **M**$_r$ a je vyjádřen šesticí nezávislých veličin

R_x, R_y, R_z, M_{rx}, M_{ry}, M_{rz}.

Rovnice (4.26) pro **R**$_x$, **R**$_y$, **R**$_z$ spolu s rovnicemi (4.29) pro **M**$_{rx}$, **M**$_{ry}$, **M**$_{rz}$ představují **šest statických podmínek ekvivalence** obecné prostorové soustavy sil.

Důležité:

Podmínky rovnováhy:

Obecná prostorová soustava sil **F**$_i$ (i =1,..., n), působící na tuhé těleso, je v rovnováze jen tehdy, když algebraické součty průmětů všech sil soustavy do každé souřadnicové osy jsou rovny nule a když součty statických momentů všech sil soustavy k těmž osám jsou rovněž nulové

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0\,, \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i = 0\,, \\ R_z &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{silové podmínky rovnováhy}$$

$$M_{rx} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i) = 0 , \quad \text{momentové}$$

$$M_{ry} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i (z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i) = 0 , \quad \text{podmínky}$$

$$M_{rz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i (x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i) = 0 . \quad \text{rovnováhy} \tag{4.32}$$

Místo tří silových a tří momentových podmínek rovnováhy lze s výhodou použít i vyšší počet momentových podmínek (při celkovém počtu šesti podmínek). Nejvýhodnější je použití šesti momentových podmínek k šesti vhodně zvoleným osám. Silové podmínky pak slouží jako kontrolní.

Nahrazení síly nebo soustavy sil šesti silami zadanými paprsky

Nahraďme účinek libovolné síly **F = R** v prostoru, určené velikostí, působištěm $m\,(x, y, z)$ a směrovými úhly α, β, γ, šesti silami $\mathbf{F}_k$ (k =1,..., 6) působícími v zadaných paprscích.

Síla **R** má pravoúhlé průměty do souřadnicových os $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ a statické momenty $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ k souřadnicovým osám x, y, z. Zvolíme zcela libovolně smysly všech sil $\boldsymbol{F}_k$ (k =1, …, 6), kterým odpovídají směrové úhly α_k, β_k, γ_k a působiště m_k. Velikosti a správné smysly těchto sil obdržíme řešením šesti statických podmínek ekvivalence (4.26) a (4.29), které lze napsat mezi soustavou sil $\mathbf{F}_k$ a silou **F** = **R**

$$\sum_{k=1}^{6} F_{kx} = R_x , \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{ky} = R_y , \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{kz} = R_z ,$$

$$\sum_{k=1}^{6} M_{kx} = M_x , \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{ky} = M_y , \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{kz} = M_z . \tag{4.33}$$

Řešení je možné a jednoznačné, pokud determinant soustavy rovnic $D \neq 0$.

Úloha **zrušení síly F = R šesti silami $\mathbf{F}_k$** (k=1,…,6), působícími v zadaných paprscích představuje rovnovážnou soustavu sil, pro niž sestavujeme šest statických podmínek rovnováhy (4.32) ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{6} F_{kx} + R_x = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{ky} + R_y = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{kz} + R_z = 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{6} M_{kx} + M_x = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{ky} + M_y = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{kz} + M_z = 0 . \tag{4.34}$$

Nahrazení a zrušení obecné prostorové soustavy sil $\mathbf{P}_i$ (i=1,…,n) šesti silami $\mathbf{F}_k$ (k=1,…,6) působícími v zadaných paprscích se řeší podobně, jen v rovnicích (4.33) a (4.34) místo **F** = **R** figuruje prostorová soustava n sil $\mathbf{P}_i$. S touto úlohou se setkáváme při *výpočtu reakcí vazeb tuhého tělesa.*

Otázky

1. Jaké jsou výsledné účinky obecné prostorové soustavy sil?
2. Kolik je podmínek rovnováhy pro obecnou prostorovou soustavu sil a jaké to mohou být (silové, momentové)?

Příklad 4.2

Zadání

Stanovte výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil vztažené k pravoúhlým souřadnicovým osám x, y, z s počátkem o. Síly $\mathbf{F}_i$ (i = 1, 2, 3) jsou zadány velikostí, směrovými úhly α_i, β_i, γ_i a polohou působiště m_i (x_i, y_i, z_i) podle tabulky 4.2.

Tab. 4.2 Zadání příkladu 4.2

i	F_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]
1	116	220	70	37	3,5	6,1	4,2
2	220	80	35	240	–5,3	2,9	3,7
3	164	54	310	80	2,8	–4,0	5,2

Řešení

Výpočet uspořádáme pro větší přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 4.3. Nejprve vyčíslíme složky jednotlivých sil ve směrech os x, y, z podle vztahů (4.21). Dále určíme velikosti momentů kolem os x, y, z od jednotlivých sil podle vztahů (4.22). Sečtením hodnot v odpovídajících sloupcích získáme složky výslednice R_x, R_y, a R_z a momenty M_x, M_y *a* M_z. které odpovídají vztahům (4.26) a (4.29).

Tab. 4.3 Řešení příkladu 4.2

i	F_{ix} [kN]	F_{iy} [kN]	F_{iz} [kN]	M_{ix} [kNm]	M_{iy} [kNm]	M_{iz} [kNm]
1	–88,856	39,672	92,684	398,750	–697,589	680,874
2	38,280	180,180	–110,000	–985,666	–441,364	–1065,966
3	96,432	105,452	28,536	–662,494	421,546	680,994
$\sum_{i=1}^{3}$	$R_x = 45,856$	$R_y = 325,304$	$R_z = 11,220$	$M_{rx} = -1249,410$	$M_{ry} = -717,407$	$M_{rz} = 295,902$

Výslednice **R** má velikost podle vztahu (4.25)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{45,856^2 + 325,304^2 + 11,220^2} = 328,712\,\text{kN}$$

a směr výslednice určíme pomocí směrových kosinu podle vztahů (4.27)

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{45,856}{328,712} = 0,1395 \Rightarrow \alpha = 81°59',$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{325,304}{328,712} = 0,9896 \Rightarrow \beta = 8°15',$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{11,220}{328,712} = 0,0341 \Rightarrow \gamma = 88°03'.$$

Velikost vektoru $\mathbf{M}_r$ výsledného statického momentu soustavy sil k počátku *o* určíme ze vztahu (4.28)

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2} =$$
$$= \sqrt{(-1249,410)^2 + (-717,407)^2 + 295,902^2} = 1470,801\,\text{kNm}$$

a jeho směr určíme pomocí směrových kosinu podle vztahů (4.30)

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r} = \frac{-1249,410}{1470,801} = -0,8495 \Rightarrow \lambda = 148°09',$$

$$\cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r} = \frac{-717,407}{1470,801} = -0,4878 \Rightarrow \mu = 119°11',$$

$$\cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r} = \frac{295,902}{1470,801} = 0,2012 \Rightarrow \nu = 78°24'.$$

4.7 Soustava rovnoběžných sil v prostoru

Na soustavu rovnoběžných sil v prostoru (obr. 4.11) můžeme pohlížet jako na zvláštní případ prostorového svazku sil (odst. 4.2), kde společný bod leží v nekonečnu, nebo též na zvláštní případ obecné prostorové soustavy sil (odst. 4.6).

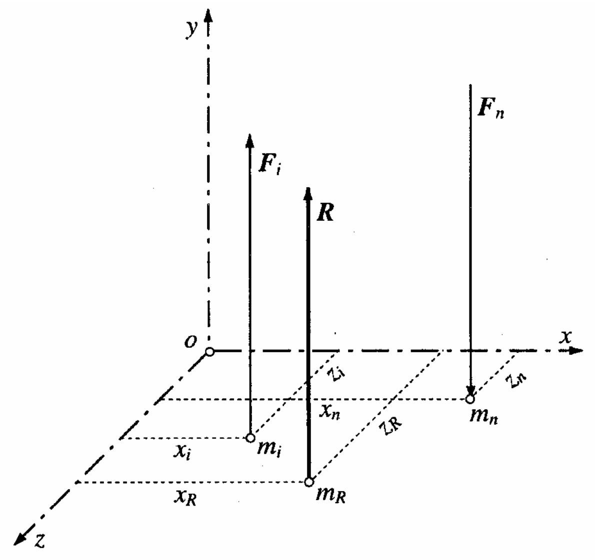
K dané soustavě rovnoběžných sil $\mathbf{F}_i$ (i=1,…,n) v prostoru veďme pravoúhlý souřadnicový systém x, y, z tak, aby jedna souřadnicová osa (např. y) byla rovnoběžná s paprsky sil soustavy. Kolmé vzdálenosti x_i, z_i paprsků sil od souřadnicových os představují souřadnice průsečíků m_i sil $\mathbf{F}_i$ se souřadnicovou rovinou xz. **Výslednice R soustavy rovnoběžných sil** má směr shodný se směrem paprsků sil, velikost a polohu určíme ze vztahů

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i\,, \quad M_x = -Rz_R = -\sum_{i=1}^{n} F_i z_i\,, \quad M_z = Rx_R = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i\,, \qquad (4.35)$$

které představují statické podmínky ekvivalence soustavy rovnoběžných sil v prostoru. Souřadnice x_R; z_R průsečíku m_R paprsku výslednice **R** se souřadnicovou rovinou xz jsou

$$x_R = \frac{M_z}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad z_R = \frac{-M_x}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (4.36)$$

Vynášíme je na tu stranu od příslušné souřadnicové osy, aby znaménko statického momentu výslednice **R** k příslušné ose bylo stejné jako znaménko statického momentu celé soustavy sil k téže ose.



Obr. 4.11: Rovnoběžné síly v prostoru

Důležité

Podmínky rovnováhy:

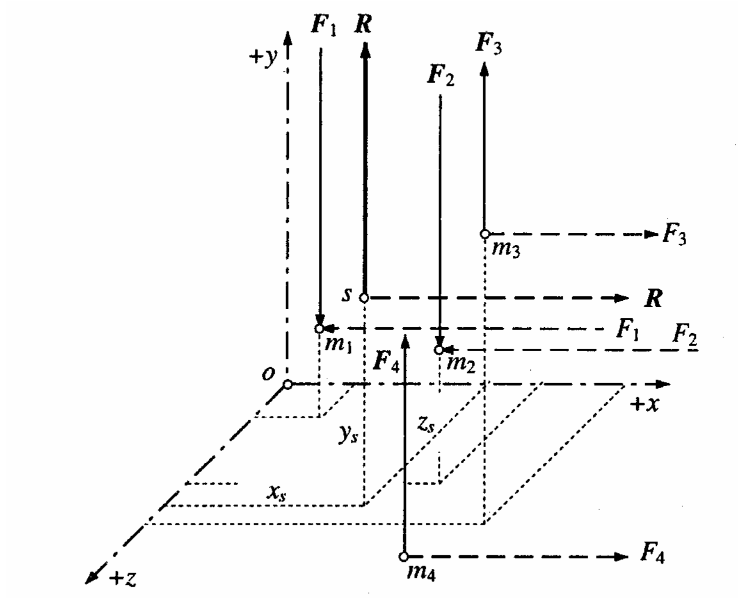
Soustava rovnoběžných sil $\mathbf{F}_i$ (i=1,…,n) v prostoru, které jsou rovnoběžné např. s osou y, je v rovnováze jen tehdy, když algebraický součet všech sil a součet statických momentů všech sil soustavy ke dvěma zbývajícím osám (x, z), ležícím v rovině kolmé na paprsky sil, je roven nule

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i = 0, \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i = 0. \qquad (4.37)$$

Statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru

Otáčíme-li současně všechny síly $\mathbf{F}_i$ (i=1,…,n) soustavy rovnoběžných sil v prostoru kolem svých působišť tak, že zůstávají navzájem rovnoběžné (obr. 4.12), otáčí se i jejich výslednice **R** kolem jistého pevného bodu s , který nazýváme statickým středem soustavy rovnoběžných sil v prostoru. Určíme jej jako průsečík paprsků výslednic dané soustavy rovnoběžných sil pro tři směry, nejlépe na sebe kolmé. Pro souřadnice statického středu lze psát vztahy

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}.$$



Obr. 4.12: Statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru

Shrnutí

Úvahy k řešení silových soustav v rovině jsme rozšířili na prostor. Na základě znalosti pravoúhlých složek síly v prostoru byl vyšetřen prostorový svazek sil. Byl definován pojem statického momentu síly v prostoru k bodu a k ose, jakož i pojem dvojice sil v prostoru. Takto vyzbrojeni jsme řešili obecnou prostorovou soustavu sil, analyzovali jsme její výsledný účinek. Bylo formulováno šest podmínek ekvivalence, resp. rovnováhy vyšetřovaných silových soustav v prostoru. Pozornost byla věnována též prostorové soustavě rovnoběžných sil a jejímu statickému středu.

5 Studijní prameny

5.1 Seznam použité literatury

[1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce*. Druhé vydání. VUTIUM, Brno 2000

[2] Novotná, H., Cais, S., Ptáček, M. *Teoretická mechanika.* SNTL/ALFA, Praha 1983

5.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[3] Halliday, D., Resnick, R. a Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM, Brno 2000

[4] Juliš, K., Brepta, R. *Mechanika I. Statika a kinematika.* Technický průvodce 65. SNTL, Praha 1986

[5] Meriam, J. L. *Engineering Mechanics. Statics and Dynamics.* John Wiley & Sons, New York 1978

[6] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky.* Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991

5.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

[7] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians

Poznámky